ДОБАВЛЕНИЕ I

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

I. Общая форма уравнений небесной механики. В § 143 гл. VII этой книги были выведены диференциальные уравнения основной задачи небесной механики — задачи о многих телах.

Пусть мы имеем некоторое количество материальных точек, двигающихся под действием сил взаимных притяжений по закону всемирного тяготения Ньютона. Тогда каждая точка рассматриваемой системы действует на каждую другую точку этой же системы с силой, прямо пропорциональной произведению масс этих точек и обратно пропорциональной квадрату их взаимного расстояния.

Отнесем движение системы к некоторой неизменной, прямоугольной системе декартовых координат. Диференциальные уравнения, определяющие движение системы k материальных точек имеют вид:

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, k,) \quad (1)$$

$m_1, m_2, \ldots, m_k$ обозначают массы материальных точек, x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; ...; x_k, y_k, z_k — их координаты, t — время и U — силовую функцию, которая определяется формулой:

$$U = \frac{1}{2} \varkappa^2 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} {}^{1)} \qquad (i \neq j).$$

Уравнения (1) являются основными уравнениями классической небесной механики, и в их решении заключается одна из важнейших проблем этой науки. Но, с другой стороны, уравнения (1) представляют только частный случай уравнений более общего вида:

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i, \quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = Y_i, \quad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = Z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \quad (2)$$

определяющих движение системы k свободных материальных точек, подверженных действиям сил, составляющие которой по координатным осям суть X_i, Y_i, Z_i. Эти составляющие в самом общем случае зависят не только от координат точек, но также и от их скоростей и от времени.

---

1) $\varkappa^2$ здесь обозначает постоянную тяготения.

Чтобы указать явно переменные, от которых зависят X_i, Y_i, Z_i, мы будем иногда обозначать эти величины следующим образом:

$$X_i = X_i(t;\ x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_k, y_k, z_k;\quad x'_1, y'_1, z'_1, \ldots, x'_k\, y'_k\, z'_k)$$

или более кратко:

$$X_i = X_i(t;\ x_i, y_i, z_i;\quad x'_i, y'_i, z'_i).$$

Аналогично можно записать и Y_i и Z_i.

Система (2) состоит из $3k$ диференциальных уравнений второго порядка. Как известно (см. § 50), эта система может быть заменена эквивалентной системой $6k$ диференциальных уравнений первого порядка, и, следовательно, если правые части суть данные функции своих переменных, ее решение определяется системой $6k$ начальных значений искомых функций x_i, y_i, z_i и их первых производных по времени x'_i, y'_i, z'_i.

Мы будем обозначать начальное значение какой-нибудь переменной величины x, т. е. ее значение в некоторый данный момент времени $t = t_0$, буквой x^0.

Таким образом система начальных значений для уравнений (2) запишется следующим образом:

$$\text{при } t = t_0,\quad x_i = x_i^0,\quad y_i = y_i^0,\quad z_i = z_i^0,$$
$$x'_i = x'^0_i,\quad y'_i = y'^0_i,\quad z'_i = z'^0_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Система $6k$ чисел $x_i^0, \ldots, z'^0_i$ определяет с о с т о я н и е системы k материальных точек в начальный момент t_0, т. е. определяет начальное положение и начальную скорость каждой точки системы. Очевидно, что система (1) действительно является частным случаем системы (2) и получается из нее, если мы положим:

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i},\quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i},\quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

причем U определяется выписанной выше формулой.

2. Обобщенные координаты. Предположим для общности, что рассматриваемая система k материальных точек не является вполне свободной системой, но что ее движение стеснено некоторыми дополнительными условиями, которые называются с в я з я м и. Эти условия могут быть весьма разнообразными и могут иметь различные механические значения. Например, может случиться, что во время движения расстояния между некоторыми точками системы остаются неизменными или что некоторые точки принуждены двигаться по некоторым определенным поверхностям или линиям.

Аналитически связи выражаются уравнениями, которым должны удовлетворять координаты точек системы во все время движения. В самом общем случае эти уравнения имеют вид:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(t; x_1, y_1, z_1,\ x_2, y_2, z_2, \ldots, x_k, y_k, z_k) = 0, \\ f_2(t; x_1, y_1, z_1,\ x_2, y_2, z_2, \ldots, x_k, y_k, z_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_l(t; x_1, y_1, z_1,\ x_2, y_2, z_2, \ldots x_k, y_k, z_k) = 0, \end{array}\right\} \qquad (3)$$

причем очевидно, что число l этих уравнений должно быть меньше числа всех переменных координат $3k$. Действительно, если бы $l=3k$, то из уравнений (3) можно было бы определить все неизвестные x_i, y_i, z_i и динамическая задача не имела бы смысла [1]).

Решение задачи со связями может быть проведено различными способами. Мы изложим здесь способ обобщенных координат Лагранжа. Так как $3k$ переменных $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_k, y_k, z_k$ связаны между собой l уравнениями (3), то мы можем выразить их все в функции $3k-l$ независимых параметров, которые можно выбирать произвольно. Эти параметры не обязательно должны быть прямоугольными координатами. Наоборот, часто более удобно выбирать их другим образом, лишь бы они имели простое механическое и геометрическое значение, однозначно определяли положение системы и были между собой независимы.

Положим $3k-l=n$ и определим положение системы n независимыми параметрами:

$$q_1, \ q_2, \ \ldots, \ q_n.$$

Тогда координаты x_i, y_i, z_i могут быть выражены в функции этих параметров и времени, причем уравнения связей (3) должны быть тождественно удовлетворены. Зависимость между координатами x_i, y_i, z_i и параметрами q_i определится формулами вида:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots q_n; t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \ldots, q_n; t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \ldots, q_n; t), \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где $i=1, 2, \ldots, k$. Так как значения параметров $q_1, q_2, \ldots, q_k$, однозначно определяют координаты x_i, y_i, z_i и, следовательно, положение системы, то они называются *обобщенными координатами*. Нашей задачей является теперь вывести диференциальные уравнения, которым должны удовлетворять координаты q_j.

3 Уравнения Лагранжа. Чтобы вывести диференциальные уравнения для новых переменных q_j, помножим уравнения (2) соответственно на $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$, $\frac{\partial y_i}{\partial q_j}$ и $\frac{\partial z_i}{\partial q_j}$, где индекс j принимает все значения от 1 до n, и сложим все уравнения. Мы получим n уравнений вида:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\frac{d^2y_i}{dt^2}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\frac{d^2z_i}{dt^2}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left(X_i\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+Y_i\,\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+Z_i\cdot\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right) \qquad (j=1,\ 2, \ldots, n). \quad (5)$$

---

[1]) О связях см. Н. Розе, Теоретическая механика, ч. I, а также М. Планк Введение в общую механику.

Преобразуем левую часть полученного уравнения, написав выражение, стоящее в скобках под знаком суммы, в следующем виде:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\frac{d^2y_i}{dt^2}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\frac{d^2z_i}{dt^2}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left[\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\frac{dy_i}{dt}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\frac{dz_i}{dt}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right]-$$
$$-\left[\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)+\frac{dy_i}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\right)+\frac{dz_i}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)\right].$$

Нетрудно проверить, что написанное равенство является тождеством. С помощью этого тождества уравнение (5) примет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{k}m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\frac{dy_i}{dt}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\frac{dz_i}{dt}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)-$$
$$-\sum_{i=1}^{k}m_i\left[\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)+\frac{dy_i}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\right)+\frac{dz_i}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)\right]=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\left(X_i\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+Y_i\cdot\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)\qquad (j=1, 2, \ldots, n).$$

Вводя, для сокращения, обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
P_j&=\sum_{i=1}^{k}m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\frac{dy_i}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\frac{dz_i}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right),\\
Q_j&=\sum_{i=1}^{k}m_i\left[\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)+\frac{dy_i}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\right)+\frac{dz_i}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)\right],\\
R_j&=\sum_{i=1}^{k}\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right),
\end{aligned}\right\}\qquad (6)$$

мы перепишем последнее уравнение в следующем простом виде:

$$\frac{dP_j}{dt}-Q_j=R_j\qquad (j=1, 2, \ldots, n).\qquad (7)$$

Рассмотрим теперь так называемую *живую силу* системы, т. е. половину суммы произведений масс точек на квадраты их скоростей. Обозначая, как принято, живую силу буквой T, мы имеем:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}m_iv_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right].\qquad (8)$$

Чтобы выразить T в новых переменных, достаточно подставить в выражение (8) вместо производных x'_i, y'_i, z'_i их значения, которые получим, диференцируя по t формулы (4). Мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} x'_i &= \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\cdot q'_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\cdot q'_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n}\cdot q'_n + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \\ y'_i &= \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial y_i}{\partial q_1}\cdot q'_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2}\cdot q'_2 + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial q_n}\cdot q'_n + \frac{\partial y_i}{\partial t}, \\ z'_i &= \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial z_i}{\partial q_1}\cdot q'_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2}\cdot q'_2 + \ldots + \frac{\partial z_i}{\partial q_n}\cdot q'_n + \frac{\partial z_i}{\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

где

$$q'_j = \frac{dq_j}{dt} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

определяет скорость изменения параметра q_j. Поэтому величины $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ называются *обобщенными скоростями* системы. С помощью формул (9) мы выразим T в функции времени t, обобщенных координат q_i и обобщенных скоростей q'_j. Покажем теперь, что:

$$P_j = \frac{\partial T}{\partial q'_j}, \quad Q_j = \frac{\partial T}{\partial q_j} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Действительно, диференцируя T частным образом по q'_j, мы получим:

$$\frac{\partial T}{\partial q'_j} = \sum_{i=1}^{k} m_i \left(x'_i \frac{\partial x'_i}{\partial q'_j} + y'_i \frac{\partial y'_i}{\partial q'_j} + z'_i \frac{\partial z'_i}{\partial q'_j} \right).$$

С другой стороны, диференцируя формулы (9) по q'_j, мы, очевидно, имеем:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial q'_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial y'_i}{\partial q'_j} = \frac{\partial y_i}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial z'_i}{\partial q'_j} = \frac{\partial z_i}{\partial q_j},$$

ввиду чего последнее выражение для $\frac{\partial T}{\partial q'_j}$ примет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial q'_j} = \sum_{i=1}^{k} m_i \left(x'_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + y'_i \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + z'_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right).$$

Сравнивая это выражение с выражением для P_j, мы убеждаемся без труда, что:

$$\frac{\partial T}{\partial q'_j} = P_j,$$

что и требовалось показать.

Чтобы получить второе искомое соотношение, продиференцируем T частным образом по q_j. Имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{k} m_i\left(x'_i\frac{\partial x'_i}{\partial q_j}+y'_i\frac{\partial y'_i}{\partial q_j}+z'_i\frac{\partial z'_i}{\partial q_j}\right).$$

Чтобы найти производные от x'_i, y'_i, z'_i по q_j, продиференцируем по q_j формулы (9). Получим:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial q_j}=\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1\partial q_j}\cdot q'_1+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_2\,\partial q_j}\cdot q'_2+\ldots+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_n\,\partial q_j}q'_n+\frac{\partial^2 x_i}{\partial t\,\partial q_j}$$

и аналогичные выражения для $\frac{\partial y'_i}{\partial q_j}$ и $\frac{\partial z'_i}{\partial q_j}$, которые мы не выписываем, чтобы не загромождать текст лишними формулами. С другой стороны, диференцируя формулы (4) по q_j и беря от полученных выражений полные производные по t, мы найдем:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j\partial q_1}q'_1+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j\,\partial q_2}\cdot q'_2+\ldots+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j\,\partial q_n}\cdot q'_n+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j\,\partial t}$$

и аналогичные выражения для $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\right)$ и $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)$. Так как результат частного диференцирования не зависит от порядка диференцирования, то

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_n\partial q_j}=\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j\partial q_n},\quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial t\partial q_j}=\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j\partial t},$$

и мы получаем:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right),\quad \frac{\partial y'_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\right),\quad \frac{\partial z'_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right),$$

вследствие чего выражение для $\frac{\partial T}{\partial q_j}$ принимает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{k} m'_i\left[x'_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)+y'_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\right)+z'_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)\right].$$

Сравнивая полученное выражение с выражением для Q_j, мы видим, что:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j,$$

и уравнение (7) напишется в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=R_j\qquad (j=1,2,\ldots,n).\qquad (10)$$

Эти уравнения определяют обобщенные координаты или параметры q_1, q_2, ..., q_n в функции времени и называются *уравнениями Лагранжа*.

Заметим, что уравнения (2) можно привести к виду (10) и в том случае, когда связи отсутствуют. Тогда $l=0$ и $n=3k$, а величины q_j суть какие-нибудь независимые координаты, вообще говоря, уже не прямолинейные и не обязательно прямоугольные.

Для того чтобы можно было фактически написать уравнения Лагранжа для данной системы, необходимо еще выразить живую силу T и правые части, т. е. величины R_j в функции времени, новых переменных q_1, $q_2, \ldots, q_n$ и их производных $q_1', q_2', \ldots, q_n'$.

4. Выражение для живой силы в обобщенных координатах Мы уже говорили, что для того чтобы выразить живую силу T в новых переменных, нужно в выражение (8) вместо x_i', y_i', z_i' подставить их значения, определяемые формулами (9) предыдущего параграфа. Так как эти формулы линейны относительно обобщенных скоростей, а живая сила содержит x_i', y_i', z_i' во второй степени, то в результате подстановки мы получим многочлен второй степени относительно $q_1', q_2', \ldots, q_n'$, коэфициенты которого будут зависеть от времени и от координат q_1, $q_2, \ldots, q_n$.

Для большего удобства разобьем полученный многочлен на три части. В первую часть включим все члены второй степени относительно q', $q_2', \ldots, q_n'$ и совокупность этих членов обозначим через T_2. Во вторую часть включим все члены первой степени относительно $q_1', q_2', \ldots, q_n'$ и совокупность этих членов обозначим через T_1. Наконец, в последнюю часть мы включим все члены, не зависящие от $q_1', q_2', \ldots, q_n'$, и совокупность этих членов обозначим через T_0. Тогда выражение для T напишется в виде:

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{11}$$

причем очевидно, что T_2 и T_1 суть однородные функции от $q_1', q_2', \ldots$, q_n' второго и первого измерений соотвественно. Мы можем написать эти функции в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} 2T_2 = A_{11} q_1'^2 &+ 2A_{12} q_1' q_2' + 2A_{13} q_1' q_3' + \ldots + 2A_{1n} q_1' q_n' + \\ &+ 2A_{22} q_2'^2 \quad + 2A_{23} q_2' q_3' + \ldots + 2A_{2n} q_2' q_n' + \\ &+ \quad \ldots\ldots\ldots + A_{nn} q_n'^2 = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} q_i' q_j', \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$T_1 = B_1 q_1' + B_2 q_2' + \ldots + B_n q_n' = \sum_{j=1}^{n} B_j q_j', \tag{13}$$

где коэфициенты A_{ij} и B_j зависят только от t и $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Теперь нетрудно написать уравнения Лагранжа в раскрытом виде. Мы имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j'} = \frac{\partial T_2}{\partial q_j'} + \frac{\partial T_1}{\partial q_j'} = A_{1j} q_1' + \ldots + A_{jj} q_j' + \ldots + A_{nj} q_n' + B_j,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} q_i' q_j' + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_i}{\partial q_j} q_i' + \frac{\partial T_0}{\partial q_j}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (10), мы приведем их, как нетрудно сообразить, к следующему виду:

$$A_{1j}\,q_1'' + A_{2j}q_2'' + \ldots + A_{nj}\,q_n'' = C_j\,(t, q_1, \ldots, q_n; q_1', \ldots, q_n')$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n), \tag{14}$$

где C_j суть известные функции своих переменных. Таким образом уравнения Лагранжа образуют систему n диференциальных уравнений второго порядка, линейных относительно вторых производных q_1'', q_2'', ..., q_n''. Можно доказать, на чем мы останавливаться не будем, что детерминант, составленный из коэфициентов A_{ij}, не равен тождественно нулю. Следовательно, систему (14) можно разрешить относительно производных q_1'', q_2'', ..., q_n''.

5. Случай, когда силы имеют силовую функцию. Уравнения Лагранжа значительно упрощаются, когда действующие на систему силы имеют силовую функцию, т. е. когда мы имеем:

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

В этом случае выражение для R_j напишется в виде:

$$R_j = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

так что вычисление n величин R_j сводится к вычислению только одной функции U, зависящей от t и q_1, q_2, ..., q_n. Уравнения Лагранжа примут следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j'}\right) = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{15}$$

6. Вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона. Мы получили уравнения Лагранжа путем формального преобразования системы (2). Но те же уравнения можно получить другим, более простым и общим способом при помощи так называемого *принципа Гамильтона*, объединяющего в простой и изящной форме все основные законы динамики.

Пусть мы имеем систему k материальных точек, положение которых определяется n независимыми параметрами q_1, q_2, q_3, ..., q_n. Если $n \neq 3k$, то на движение наложены связи. Если $n = 3k$, то система свободна.

Нетрудно видеть, что, вводя обобщенные координаты q_1, q_2, ... q_n, мы тем самым исключаем связи и, следовательно, можем всякую систему рассматривать как свободную.

Пусть T — живая сила системы, и движение происходит под действием сил, обладающих силовой функцией U. При этом T зависит от t, q_1, $q_2, \ldots, q_n, q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, а U зависит только от t и от $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Рассмотрим два положения системы, соответствующие двум моментам времени $t = t_0$ и $t = t_1$ $(t_1 > t_0)$. Принцип Гамильтона утверждает, что *действительное движение системы отличается от всех других возможных движений тем, что оно удовлетворяет необходимому условию экстремума интеграла Гамильтона*:

$$I = \int_{t}^{t_1} (T + U)\, dt. \tag{16}$$

Необходимым условием экстремума интеграла I является, как известно из вариационного исчисления [1]), равенство нулю первой вариации, т. е. мы должны иметь:

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt = 0.$$

Как известно, функции $q_1, q_2, \ldots, q_n$, имеющие данные значения при $t = t_0$ и $t = t_1$ и дающие экстремум интегралу I, должны удовлетворять уравнениям Эйлера, которые в данном случае напишутся в виде:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T + U)}{\partial q'_j}\right] - \frac{\partial (T + U)}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, 2 \ldots, n).$$

Так как U по условию не зависит от $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, то $\frac{\partial U}{\partial q'_j} = 0$, и предыдущие уравнения примут вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_j}\right) = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_j},$$

а это и есть уравнения Лагранжа.

7. Преобразование уравнений движения к полярным координатам. В качестве примера применения уравнений Лагранжа рассмотрим преобразование системы (2) для случая $k = 1$ к полярным координатам. В этом случае задача состоит в определении движения одной материальной точки под действием силы, составляющие которой по координатным осям суть X, Y, Z. Диференциальные уравнения движения в прямоугольных координатах имеют вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

---

[1]) См., например, Смирнов, Крылов и Канторович, Вариационное исчисление, КУБУЧ, 1933. Подробности о принципе Гамильтона см. Вебстер, Механика материальных точек, также Н. Розе, Теоретическая механика и М. Планк, Введение в общую механику.

Введем полярные координаты r, φ и θ формулами:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi\cos\theta,\\
y &= r\cos\varphi\sin\theta,\\
z &= r\sin\varphi,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ есть радиус-вектор точки, φ — широта и θ — долгота. Живая сила T определяется формулой:

$$2T = m(x'^2+y'^2+z'^2).$$

Производные x', y', z' найдем, диференцируя формулы (17) по t. Легко проверить, что мы получим:

$$
\begin{aligned}
x' &= r'\cos\varphi\cos\theta - r\sin\varphi\cos\theta\cdot\varphi' - r\cos\varphi\sin\theta\cdot\theta',\\
y' &= r'\cos\varphi\sin\theta - r\sin\varphi\sin\theta\cdot\varphi' + r\cos\varphi\cos\theta\cdot\theta',\\
z' &= r'\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\varphi',
\end{aligned}
$$

откуда находим без труда:

$$2T = m(r'^2 + r^2\varphi'^2 + r^2\cos^2\varphi\cdot\theta'^2). \tag{18}$$

Принимая

$$q_1 = r,\quad q_2=\varphi,\quad q_3=\theta,$$

мы найдем:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial q_1}=\frac{\partial T}{\partial r}=mr\varphi'^2+mr\cos^2\varphi\,\theta'^2; &&\frac{\partial T}{\partial q_1'}=\frac{\partial T}{\partial r'}=mr';\\
&\frac{\partial T}{\partial q_2}=\frac{\partial T}{\partial \varphi}=-\,mr\cos\varphi\sin\varphi\,\theta'^2; &&\frac{\partial T}{\partial q_2'}=\frac{\partial T}{\partial \varphi'}=mr^2\varphi';\\
&\frac{\partial T}{\partial q_3}=\frac{\partial T}{\partial \theta}=0; &&\frac{\partial T}{\partial q_3'}=\frac{\partial T}{\partial \theta'}=mr^2\cos^2\varphi\cdot\theta'.
\end{aligned}
$$

Подставляя эти значения частных производных в уравнения Лагранжа (10), мы получим диференциальные уравнения движения точки в следующем виде:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-r\cos^2\varphi\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{1}{m}R_1,\\
&\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)+r^2\cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{1}{m}R_2,\\
&\frac{d}{dt}\left(r^2\cos^2\varphi\frac{d\theta}{dt}\right)=\frac{1}{m}R_3.
\end{aligned}
\right\}
\tag{19}
$$

Если существует силовая функция U, то мы будем иметь:

$$R_1=\frac{\partial U}{\partial r},\quad R_2=\frac{\partial U}{\partial \varphi},\quad R_3=\frac{\partial U}{\partial \theta},$$

и уравнения еще более упростятся.

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

8. Канонические переменные. Уравнения Лагранжа, как мы показали, представляют систему совместных диференциальных уравнений второго порядка. Как известно, увеличивая соответствующим образом число неизвестных функций, мы всегда можем заменить эту систему равносильной системой диференциальных уравнений первого порядка. Эту замену можно произвести различными способами.

Мы рассмотрим теперь один специальный случай такого преобразования, который приведет нас к особенно удобной и симметричной форме диференциальных уравнений, называемой *канонической*.

Пусть мы имеем систему n совместных диференциальных уравнений в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=R_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Введем вместо производных q_i' новые зависимые переменные p_i при помощи формул:

$$p_i=\frac{\partial T}{\partial q_i'}. \tag{20}$$

Нетрудно видеть, что величины p_i будут линейными функциями величин q_i', коэфициенты при которых зависят только от t и от $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Действительно, из формул (11), (12) и (13) мы имеем:

$$p_i=A_{1i}q_1'+A_{2i}q_2'+\ldots+A_{ni}q_n'+B_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Так как было замечено, что детерминант, составленный из коэфициентов A_{ji}, не равен тождественно нулю, то величины p_i образуют систему независимых переменных. Таким образом вместо n переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n$ мы имеем теперь $2n$ переменных q_i и p_i. Эти новые переменные

$$\left.\begin{matrix} q_1, & q_2, & \ldots, & q_n, \\ p_1, & p_2, & \ldots, & p_n \end{matrix}\right\} \tag{21}$$

мы будем называть *каноническими переменными* или каноническими координатами.

Если значения этих величин известны для всякого момента времени, то движение системы полностью определено, так как q_i определяют положения точек системы, а p_i — их скорости.

9. Канонические уравнения. Выведем теперь диференциальные уравнения, определяющие канонические переменные. Прежде всего мы имеем:

$$\frac{dq_i}{dt}=q_i', \quad \frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial T}{\partial q_i}+R_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

Остается выразить правые части этих уравнений через новые переменные q_i и p_i, а также через время. Для этого нужно определить q_i' из уравнений (20), что всегда возможно, так как детерминант, составленный из коэфициентов при q'_i, не равен нулю, и подставить найденные значения в правые части уравнений (22). Эти вычисления можно значительно упростить введением вспомогательной функции K при помощи формулы:

$$K = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \ldots + p_n q'_n - T. \tag{23}$$

Считая $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ функциями t и $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, определяемыми уравнениями (20), мы видим, что K также будет функцией всех этих переменных, и мы можем ее диференцировать и по p_i и по q_i. Выполняя эти диференцирования, мы найдем:

$$\frac{\partial K}{\partial p_i} = q'_i + p_1 \frac{\partial q'_1}{\partial p_i} + p_2 \frac{\partial q'_2}{\partial p_i} + \ldots + p_n \frac{\partial q'_n}{\partial p_i} - \\ - \frac{\partial T}{\partial q'_1} \frac{\partial q'_1}{\partial p_i} - \frac{\partial T}{\partial q'_2} \frac{\partial q'_2}{\partial p_i} - \ldots - \frac{\partial T}{\partial q'_n} \frac{\partial q'_n}{\partial p_i}$$

и

$$\frac{\partial K}{\partial q_i} = p_1 \frac{\partial q'_1}{\partial q_i} + p_2 \frac{\partial q'_2}{\partial q_i} + \ldots + p_n \frac{\partial q'_n}{\partial q'_i} - \\ - \frac{\partial T}{\partial q'_1} \frac{\partial q'_1}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q'_2} \frac{\partial q'_2}{\partial q_i} - \ldots - \frac{\partial T}{\partial q'_n} \frac{\partial q'_n}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}.$$

Нетрудно видеть ввиду формул (20), что в выражении для $\frac{\partial K}{\partial p_i}$ сокращаются все члены, кроме первого, а в выражении для $\frac{\partial K}{\partial q_i}$ — все члены, кроме последнего, так что мы имеем:

$$\frac{\partial K}{\partial p_i} = q'_i,$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_i} = - \frac{\partial T}{\partial q_i},$$

в силу чего уравнения (22) напишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial p_i}, \\ & \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \\ \frac{dp_i}{dt} &= - \frac{\partial K}{\partial q_i} + R_i \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Для функции K можно найти очень простое выражение. Действительно, вставляя в формулу:

$$K = \sum_{i=1}^{n} p_i q'_i - T = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q'_i} q'_i - T$$

вместо живой силы T ее выражение (11), мы получим:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial T_2}{\partial q'_i} + \frac{\partial T_1}{\partial q'_i} \right) q'_i - T_2 - T_1 - T_0.$$

Но мы видели, что T_2 и T_1 суть однородные функции от q'_i второго и первого измерения соответственно. Применяя теорему Эйлера об однородных функциях, известную из курса анализа, мы можем написать:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_2}{\partial q'_i} q'_i = 2T_2, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_1}{\partial q'_i} q'_i = T_1,$$

вследствие чего выражение для K примет вид:

$$K = T_2 - T_0. \tag{25}$$

Если, как это часто бывает, живая сила T есть однородный многочлен второй степени относительно $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, то $T_1 = T_0 \equiv 0$, $T \equiv T_2$, и мы имеем просто:

$$K = T.$$

Для небесной механики очень важен случай, когда существует силовая функция. Тогда уравнения (24) значительно упрощаются. Действительно, в этом случае:

$$R_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

и мы имеем:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как U не зависит от p_i, то $\frac{\partial U}{\partial p_i} \equiv 0$, и мы ничего не изменим в предыдущих уравнениях, написав их в виде:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_i} - \frac{\partial U}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Полагая, наконец:

$$H = K - U = T_2 - T_0 - U, \tag{26}$$

мы дадим каноническим уравнениям следующую окончательную форму:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{27}$$

Функция H, определяющая аналитическую структуру правых частей уравнений (27), называется *характеристической* функцией системы канонических уравнений. Очевидно, что H, вообще говоря, зависит от t и от всех канонических переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$. Заметим, что, написав уравнения движения в канонической форме, мы ничуть не уменьшили трудности задачи, и уравнения (27) так же трудно интегрировать, как и первоначальную систему (2). Однако симметричная форма уравнений (27) делает их более удобными в теоретических исследованиях и позволяет иногда получить некоторые свойства движения более просто, чем при помощи уравнений (2).

10. Выражение для H в функции канонических переменных. Нам остается теперь выразить характеристическую функцию H через q_i и p_i.

Мы имеем:

$$H = T_2 - T_0 - U,$$

где T_0 и U зависят только от t и $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Наоборот, T_2 зависит еще от q'_i и является однородным многочленом второй степени относительно этих переменных. Наша задача, очевидно, будет выполнена, если мы выразим T_2 в функции от p_i. Так как p_i связаны с q'_i линейными соотношениями, то T_2 представится в виде многочлена второй степени относительно p_i.

Найдем теперь этот многочлен. Решая уравнения (20) относительно $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, мы получим:

$$q'_i = \bar{A}_{1i}(p_1 - B_1) + \bar{A}_{2i}(p_2 - B_2) + \ldots + \bar{A}_{ni}(p_n - B_n) =$$

$$= \sum_{=1}^{n} \bar{A}_{ji}(p_j - B_j), \tag{28}$$

где коэфициенты $\bar{A}_{ji}$ зависят только от t и $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Рассмотрим теперь выражение для T_2. Воспользовавшись теоремой Эйлера, мы можем представить его в виде:

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_2}{\partial q'_i} q'_i, \tag{29}$$

но

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i} = \frac{\partial T_2}{\partial q'_i} + \frac{\partial T_1}{\partial q'_i} = \frac{\partial T_2}{\partial q'_i} + B_i,$$

откуда

$$\frac{\partial T_2}{\partial q'_i} = p_i - B_i,$$

и формула (29) напишется следующим образом:

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (p_i - B_i)\, q'_i.$$

Подставляя теперь вместо q'_i его выражение (28), мы получим:

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\ 1}^{n} \bar{A}_{ji}(p_i - B_i)(p_j - B_j). \tag{30}$$

Вообще T_2 уже не будет однородным многочленом относительно p_1, $p_2, \ldots, p_n$, но если $T_1 \equiv 0$, то B_i также равно нулю при любом значении i, и мы имеем:

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{A}_{ji}\,p_i p_j, \tag{31}$$

что является однородной функцией второго измерения.

11. Случай, когда H не содержит явно времени. Если характеристическая функция H не зависит от времени, то система (27) всегда имеет интеграл вида $H = \text{const}$.

Действительно, помножим уравнения (27) соответственно на $\frac{dp_i}{dt}$ и на $\frac{dq_i}{dt}$ и затем сложим все уравнения. Мы получим:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{dp_n}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}.$$

Так как по условию H зависит только от $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$, то правая часть последнего уравнения совпадает с полной производной от функции H по t, и мы можем написать:

$$\frac{dH}{dt} = 0,$$

откуда

$$H = \text{const.},$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что полученный интеграл не всегда совпадает с интегралом живых сил, который имеет вид:

$$T = U + h,$$

где h — произвольная постоянная.

Действительно, вставляя вместо T его выражение (11), мы получим для интеграла живых сил выражение:

$$T_2 + T_1 + T_0 = U + h,$$

а для интеграла $H = \text{const.}$:

$$T_2 - T_0 = U + \text{const.}$$

Мы видим, что эти два равенства действительно различны и совпадают только в том случае, когда T есть однородный многочлен второй степени относительно q_i'. Тогда

$$K = T, \quad H = T - U,$$

и различие между двумя предыдущими формулами исчезает.

12. Преобразование канонических уравнений. Канонические уравнения обладают одним замечательным свойством, которое заключается в том, что они не изменяют своего вида при некоторых преобразованиях зависимых переменных q_i и p_i. Это свойство было открыто Якоби и формулируется в виде теоремы, называемой *теоремой Якоби*.

Мы докажем сначала более общую теорему, принадлежащую Шарлье, из которой теорема Якоби получается как частный случай. Пусть имеем каноническую систему:

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{32}$$

где характеристическая функция H есть произвольная функция от t, q_1, $q_2, \ldots, q_n$, p_1, $p_2, \ldots, p_n$. Пусть далее:

$$\psi(q_1, q_2, \ldots, q_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; t)$$

будет произвольная функция от n величин q_1, q_2, $\ldots$, q_n, n новых величин ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_n и t.

Введем вместо переменных:

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$$

новые переменные:

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

при помощи уравнений:

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_i}=p_i, \quad \frac{\partial\psi}{\partial \xi_i}=-\eta_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{33}$$

Из этих уравнений мы можем определить, например, старые переменные в функции новых и времени:

$$\left.\begin{aligned} q_i&=q_i(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n), \\ & \qquad\qquad\qquad (i=1, 2, \ldots, n). \\ p_i&=p_i(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n), \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Теорема, которую мы хотим доказать, формулируется следующим образом:

Если переменные q_i и p_i преобразованы в новые переменные ξ_i, η_i, причем старые и новые переменные связаны уравнениями (33), то дифеpенциальные уравнения для новых переменных также будут иметь каноническую форму и напишутся в виде:

$$\frac{d\xi_i}{dt}=\frac{\partial R}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial \xi} \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{35}$$

где R — новая характеристическая функция, определяемая формулой:

$$R = H + \frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{36}$$

Доказательство. Характеристическая функция H зависит от t, $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$. Если мы подставим вместо этих переменных их выражения (34), полученные разрешением уравнений (33), то H будет функцией t и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, и мы можем ее диференцировать частным образом по любой из этих переменных. Диференцируем сначала по η_i. Находим:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \eta_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \eta_i}$$

или ввиду уравнений (32):

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{dp_j}{dt} \frac{\partial q_j}{\partial \eta_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{dq_j}{dt} \frac{\partial p_j}{\partial \eta_i}.$$

Далее из уравнений (33) находим:

$$\frac{\partial p_j}{\partial \eta_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \eta_i},$$

откуда

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{dp_j}{dt} \frac{\partial q_j}{\partial \eta_i} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{dq_j}{dt} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \eta_i}.$$

Заменяя теперь в первой сумме индекс j на k и изменяя порядок суммирования во второй сумме, мы напишем предыдущее равенство в виде:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_k}{\partial \eta_i} \left[-\frac{dp_k}{dt} + \sum_{j=1}^{n} \frac{dq_j}{dt} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k \partial q_j} \right].$$

Продиференцируем затем уравнение:

$$p_k = \frac{\partial \psi}{\partial q_k}$$

по t. Мы получим:

$$\frac{dp_k}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k \partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k \partial \xi_j} \frac{d\xi_j}{dt} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k \partial t},$$

с помощью чего выражение для $\frac{\partial H}{\partial \eta_i}$ напишется в виде:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial q_k}{\partial \eta_i}\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k \partial \xi_j}\frac{d\xi_j}{dt} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial q_k}{\partial \eta_i}\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k \partial t}.$$

Коэфициент при $\frac{d\xi_j}{dt}$ в этом выражении равен:

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial q_k}{\partial \eta_i}\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k \partial \xi_j}.$$

Но если мы будем диференцировать уравнение:

$$-\eta_j = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j}$$

по $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, то мы получим:

$$0 = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial \eta_j} \qquad (j \neq i)$$

и для $j = i$:

$$-1 = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial \eta_j}.$$

Следовательно, в выражении для $\frac{\partial H}{\partial \eta_i}$ из двойной суммы остается только один член, и мы имеем:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \frac{d\xi_i}{dt} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k \partial t}\frac{\partial q_k}{\partial \eta_i}.$$

Полагая теперь:

$$R = H + \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

мы напишем последнее уравнение в следующем виде:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \eta_i},$$

и следовательно, половина теоремы доказана.

Диференцируем теперь H по ξ_i. Получим:

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_i} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial \xi_i} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial \xi_i} = -\sum_{j=1}^{n}\frac{dp_j}{dt}\frac{\partial q_j}{\partial \xi_i} + \sum_{j=1}^{n}\frac{dq_j}{dt}\frac{\partial p_j}{\partial \xi_i}.$$

Диференцируя затем уравнение:

$$p_j = \frac{\partial \psi}{\partial q_j}$$

по ξ_i и по t, мы получаем соотношения:

$$\frac{\partial p_j}{\partial \xi_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \xi_i} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_j \partial \xi_i}$$

и

$$\frac{dp_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_j \partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_j \partial \xi_k} \frac{d\xi_k}{dt} + \frac{d^2 \psi}{\partial q_j \partial t},$$

с помощью которых выражение для $\frac{\partial H}{\partial \xi_i}$ напишется в виде:

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_i} = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_j \partial \xi_k} \frac{d\xi_k}{dt} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_j \partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{dq_j}{dt} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_j \partial \xi_i}.$$

Чтобы упростить последнее выражение, продиференцируем по ξ_i формулу:

$$-\eta_k = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_k}.$$

Получим

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_k \partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \xi_i} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_k \partial \xi_i},$$

с помощью чего находим:

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_k \partial \xi_i} \frac{d\xi_k}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k \partial \xi_i} \frac{dq_k}{dt} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k \partial t} \frac{\partial q_k}{\partial \xi_i}.$$

С другой стороны, диференцируя по t уравнение:

$$-\eta_i = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i},$$

получим:

$$-\frac{d\eta_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \frac{d\xi_k}{dt} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial t}.$$

Вычитая это соотношение из предыдущего, имеем:

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_i} = -\frac{d\eta_i}{dt} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial t} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k \partial t} \frac{\partial q_k}{\partial \xi_i}.$$

Так как

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}{\partial\xi_i}=\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial\xi_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial q_k}\,\frac{\partial q_k}{\partial\xi_i},$$

то окончательно мы можем написать:

$$\frac{d\eta_i}{dt}=-\frac{\partial\left(H+\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}{\partial\xi_i}=-\frac{\partial R}{\partial\xi_i}\qquad(i=1, 2, \ldots, n),$$

и теорема доказана в полном объеме.

13. Теорема Якоби. Если функция преобразования ψ не зависит от времени, то $\frac{\partial\psi}{\partial t}=0$, и характеристическая функция преобразованной системы получается простой подстановкой в H вместо q_i и p_i их выражений в функции новых переменных.

Преобразованная система напишется в виде:

$$\frac{d\xi_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\eta_i},\quad\frac{d\eta_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial\xi_i}\qquad(i=1, 2, \ldots, n),\qquad(37)$$

т. е. преобразованная система имеет в точности такой же вид, как и первоначальная, с той же самой характеристической функцией. Это и составляет содержание теоремы Якоби. Более полно теорему Якоби можно сформулировать следующим образом: каноническая система

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad(i=1,\ 2, \ldots, n)\qquad(38)$$

преобразуется в каноническую систему того же вида:

$$\frac{d\xi_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\eta_i},\quad\frac{d\eta_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial\xi_i}\qquad(i=1,\ 2, \ldots, n),\qquad(39)$$

если новые переменные определяются одним из нижеследующих четырех способов:

1) $$\frac{\partial\psi}{\partial q_i}=p_i,\quad\frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}=-\eta_i\qquad(i=1, 2, \ldots, n),$$
$$\psi=\psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

2) $$\frac{\partial\psi}{\partial p_i}=q_i,\quad\frac{\partial\psi}{\partial\eta_i}=-\xi_i\qquad(i=1, 2, \ldots, n),$$
$$\psi=\psi(p_1, p_2, \ldots, p_n; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n).$$

3) $$\frac{\partial\psi}{\partial q_i}=p_i,\quad\frac{\partial\psi}{\partial\eta_i}=\xi_i\qquad(i=1, 2, \ldots, n),$$
$$\psi=\psi(q_1, q_2, \ldots, q_n; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n).$$

4) $$\frac{\partial\psi}{\partial p_i}=q_i,\quad\frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}=\eta_i\qquad(i=1, 2, \ldots, n).$$
$$\psi=\psi(p_1, p_2, \ldots, p_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

При этом функция преобразования ψ во всех четырех случаях остается совершенно произвольной.

14. Формулировка Пуанкаре теоремы Якоби. Рассмотрим функцию преобразования ψ, соответствующую, например, случаю 1, и образуем ее полный диференциал $d\psi$.

Мы имеем:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial\psi}{\partial q_2} dq_2 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial q_n} dq_n + \frac{\partial\psi}{\partial\xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial\psi}{\partial\xi} d\xi_2 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial\xi_n} d\xi_n.$$

С помощью уравнений, связывающих старые и новые переменные, мы напишем последнее соотношение в виде:

$$d\psi = p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 + \ldots + p_n\, dq_n - \eta_1\, d\xi_1 - \eta_2\, d\xi_2 - \ldots - \eta_n\, d\xi_n,$$

откуда следует, что выражение:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i - \sum_{i=1}^{n} \eta_i\, d\xi_i \tag{40}$$

есть полный диференциал, и мы можем дать теореме Якоби следующую формулировку:

Если соотношения, связывающие старые и новые переменные, таковы, что выражение (40) *есть полный диференциал, то замена переменных не изменяет канонической формы уравнений* [1]).

Аналогичный результат получаем также, рассматривая функцию преобразования, соответствующую остальным трем случаям, вследствие чего теорема Якоби получает такую общую формулировку:

Канонические уравнения не изменяют своего вида при таких преобразованиях переменных, при которых одно из следующих выражений

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i - \sum_{i=1}^{n} \eta_i\, d\xi_i, \\ \sum_{i=1}^{n} q_i\, dp_i - \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, d\eta_i, \\ \sum_{i=1}^{n} p_i\, dq_i + \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, d\eta_i, \\ \sum_{i=1}^{n} q_i\, dp_i + \sum_{i=1}^{n} \eta_i\, d\xi_i \end{array}\right\} \tag{41}$$

есть полный диференциал.

---

1) См. H. Poincare, Leçons de Mécanique Céleste, Paris 1905.

УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ

15. Уравнение Гамильтона-Якоби. Задача об интегрировании канонической системы диференциальных уравнений:

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{42}$$

где H есть функция t, q_1, q_2, ..., q_n; p_1, p_2, ..., p_n, находится в замечательной связи с интегрированием одного диференциального уравнения с частными производными первого порядка. Это диференциальное уравнение получается следующим образом.

Заменим в выражении характеристической функции H величины p_i частными производными первого порядка от некоторой функции V и напишем уравнение:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H\left(t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n;\ \frac{\partial V}{\partial q_1},\ \frac{\partial V}{\partial q_2},\ \ldots,\ \frac{\partial V}{\partial q_n}\right)=0. \tag{43}$$

Уравнение (43) есть нелинейное диференциальное уравнение с частными производными первого порядка и с неизвестной функцией V от $n+1$ переменных t, q_1, q_2, ..., q_n. Так как H есть известная функция своих переменных, то построить это уравнение всегда возможно.

Допустим, что мы сумели проинтегрировать уравнение (43) и нашли его полный интеграл, т. е. какую-то функцию V, удовлетворяющую уравнению (43) и содержащую n произвольных постоянных. Пусть этот полный интеграл будет:

$$V=V(t,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n;\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n), \tag{44}$$

где α_1, α_2, ..., α_n — произвольные постоянные [1]). Тогда решение системы (42) дается следующей теоремой, доказанной впервые Гамильтоном и независимо от него Якоби и носящей поэтому название теоремы Гамильтона-Якоби.

16. Теорема Гамильтона-Якоби. *Если* $V(t,\ q_1,\ \ldots,\ q_n,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$ *есть полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби* (43), *то общий интеграл канонической системы* (42) *дается следующими уравнениями:*

$$(45)\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial V}{\partial \alpha_1}=\beta_1,\\ \dfrac{\partial V}{\partial \alpha_2}=\beta_2,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \dfrac{\partial V}{\partial \alpha_n}=\beta_n,\end{array}\right.\qquad \left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial V}{\partial q_1}=p_1,\\ \dfrac{\partial V}{\partial q_2}=p_2,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \dfrac{\partial V}{\partial q_n}=p_n,\end{array}\right\}\ (46)$$

где β_1, β_2, ..., β_n *суть n новых произвольных постоянных.*

---

[1]) Строго говоря, функция (44) не является в точности полным интегралом уравнения (43), так как полный интеграл должен содержать столько же произвольных постоянных, сколько имеется независимых переменных, т. е. $n+1$. Но легко видеть, что функция (44) отличается от полного интеграла только на несущественную аддитивную постоянную. Действительно, уравнению (43) удовлетворяет также функция $V+c$, где c — недостающая для полного интеграла, постоянная.

Для доказательства этой теоремы достаточно показать, что величины q_i и p_i, которые получим, разрешая уравнения (45) и (46) в виде:

$$\left.\begin{aligned} q_i &= q_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n), \\ p_i &= p_i(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n), \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

действительно удовлетворяют уравнениям (42), каковы бы ни были численные значения постоянных α_i и β_i. Для этого продиференцируем уравнения (45) и (46) полным образом по t, считая p_i и q_i функциями t, определяемыми формулами (47). Мы получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\,\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\,\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\,\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial q_n}\frac{dq_n}{dt} &= 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\,\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\,\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\,\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\,\partial q_n}\frac{dq_n}{dt} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_n\,\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_n\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_n\,\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_n\,\partial q_n}\frac{dq_n}{dt} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_n}\frac{dq_n}{dt} &= \frac{dp_1}{dt}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_2\,\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2\,\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2\partial q_n}\frac{dq_n}{dt} &= \frac{dp_2}{dt}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_n\,\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_n\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_n\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_n\,\partial q_n}\frac{dq_n}{dt} &= \frac{dp_n}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Чтобы убедиться теперь в справедливости теоремы, можно поступить двояким образом. Во-первых, мы докажем теорему, если разрешим уравнения (48) и (49) относительно $\frac{dq_i}{dt}$ и $\frac{dp_i}{dt}$ и получим для этих производных уравнения (42). Во-вторых, если мы подставим в уравнения (48) и (49) вместо $\frac{dq_i}{dt}$ и $\frac{dp_i}{dt}$ их значения, определяемые уравнениями (42), и получим тождества, то этим теорема также будет доказана.

Избирая второй путь, как более легкий, подставим сначала в формулы (48) вместо $\frac{dq_i}{dt}$ их выражения $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ из уравнений (42). Мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\,\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\,\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\,\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\,\partial q_n}\frac{\partial H}{\partial p_n} &= 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\,\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\,\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\,\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\,\partial q_n}\frac{\partial H}{\partial p_n} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_n\,\partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_n\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_n\,\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_n\,\partial q_n}\frac{\partial H}{\partial p_n} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Но легко убедиться, что равенства (50) суть тождества. Действительно, подставляя функцию $V(t, q_1, \ldots, q_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ в уравнение (43), мы получим, очевидно, тождество, так как V есть интеграл этого уравнения. Диференцируя это тождество по любой из величин q_i или α_i, мы опять получим тождества. Диференцируя (43) по α_i, находим:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial \alpha_i}+\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial \alpha_i}+\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial q_2\,\partial \alpha_i}+\ldots+\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_n}\right)}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial q_n\,\partial \alpha_i}\equiv 0.$$

Ввиду формул (46) последнее равенство полностью совпадает с равенствами (50), которые, следовательно, также суть тождества, что и требовалось доказать.

Теперь подставим значения $\frac{dq_i}{dt}$ и $\frac{dp_i}{dt}$ из уравнений (42) в равенства (49). Перенося после подстановки все члены в одну сторону, мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial q_1}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial q_2}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_2}+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial q_n}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_n}+\frac{\partial H}{\partial q_1}=0,\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial q_2\,\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_2\,\partial q_1}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_2\,\partial q_2}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_2}+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial q_2\,\partial q_n}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_n}+\frac{\partial H}{\partial q_2}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial q_n\,\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_n\,\partial q_1}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_n\,\partial q_2}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_2}+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial q_n\,\partial q_n}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_n}+\frac{\partial H}{\partial q_n}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(51)$$

Диференцируя затем уравнение (43) по q_i, мы получим следующие тождества:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial q_i}+\frac{\partial H}{\partial q_i}+\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\,\partial q_i}+\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial q_2\,\partial q_i}+\ldots+\frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q_n}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial q_n\,\partial q_i}\equiv 0.$$

Так как $\frac{\partial V}{\partial q_i}=p_i$, то эти равенства полностью совпадают с равенствами (51). Следовательно, равенства (51) также суть тождества, и теорема доказана в полном объеме.

17. Случай, когда H не содержит времени. Если характеристическая функция H не содержит явно t, то уравнение Гамильтона-Якоби можно значительно упростить. Действительно, напишем для этого случая уравнение (43):

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H\left(q_1, q_2, \ldots, q_n;\ \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right)=0$$

и положим

$$V=-ht+W, \tag{52}$$

где h — произвольная постоянная, а W — новая неизвестная функция, зависящая только от $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Мы будем иметь:

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-h,\quad \frac{\partial V}{\partial q_i}=\frac{\partial W}{\partial q_i}\qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

и уравнение Гамильтона-Якоби примет следующий вид:

$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_n;\ \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = h. \qquad (53)$$

Это уравнение проще уравнения (43), так как в него не входит t и, следовательно, независимых переменных на одно меньше. Найдя интеграл этого уравнения, зависящий от $n-1$ произвольных постоянных, мы по формуле (52) получим полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, так как последней недостающей постоянной будет h. Интеграл уравнения (53) напишется в виде:

$$W = W(q_1, q_2, \ldots, q_n;\ h, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n).$$

Следовательно, полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби будет иметь вид:

$$V = -ht + W(q_1, q_2, \ldots, q_n;\ h, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n).$$

Применяя теперь теорему Гамильтона-Якоби, мы получим общий интеграл канонической системы (42) в виде:

$$(54)\ \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial W}{\partial h} = t + \beta, & \dfrac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \\ \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, & \dfrac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \\ \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_3} = \beta_3, & \dfrac{\partial W}{\partial q_3} = p_3, \\ \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_n} = \beta_n, & \dfrac{\partial W}{\partial q_n} = p_n. \end{array}\right\}\ (55)$$

Все уравнения (54), кроме первого, не содержат независимого переменного t. Следовательно, мы можем из них определить какие-нибудь $n-1$ из величин q_i в функции одной из них, например q_1, и произвольных постоянных. Например, мы можем написать:

$$\left.\begin{array}{l} q_2 = Q_2(q_1;\ h, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_2, \ldots, \beta_n), \\ q_3 = Q_3(q_1;\ h, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_2, \ldots, \beta_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_n = Q_n(q_1;\ h, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_2, \ldots, \beta_n). \end{array}\right\} \qquad (56)$$

Уравнения (56) не содержат времени и поэтому дают только геометрическую картину движения. Эти уравнения можно назвать *уравнениями траектории системы*, понимая под траекторией геометрическое место точек одного измерения в пространстве n измерений. Вставляя выражения (56) в первое уравнение (54), мы получим соотношение между t и q_1, с помощью которого можем определить q_1, а затем $q_2, \ldots, q_n$ в функции времени и произвольных постоянных.

18. Обратная теорема. Мы показали выше, что интегрирование канонической системы диференциальных уравнений (42) приводится к интегрированию одного диференциального уравнения с частными производными первого порядка.

Покажем теперь, наоборот, что нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби приводится к интегрированию канонической системы (42)[1]).

Действительно, рассмотрим уравнение (43) и перепишем его, пользуясь обычными обозначениями теории уравнений с частными производными в виде:

$$F = p + H(t, q_1, q_2, \ldots, q_n;\ p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \tag{57}$$

где

$$p = \frac{\partial V}{\partial t} \text{ и } p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Для нахождения полного интеграла уравнения (57) мы воспользуемся методом характеристик Коши. Следуя этому методу, нужно прежде всего составить диференциальные уравнения для характеристик. Эти уравнения в общем виде пишутся следующим образом:

$$\frac{dt}{P} = \frac{dq_i}{P_i} = \frac{-dp_i}{X_i + Z\cdot p_i} = \frac{-dp}{X + Z\cdot p} = \frac{dV}{pP + p_1P_1 + \ldots + p_nP_n}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$P = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad P_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad X = \frac{\partial F}{\partial t}, \quad X_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial V}.$$

Для уравнения (57) эти величины, как легко проверить, имеют следующие значения:

$$P = 1, \quad P_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad X = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad X_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad Z = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

кроме того:

$$pP + p_1P_1 + \ldots + p_nP_n = p + \sum_{i=1}^{n} p_iP_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} p_i - H,$$

и уравнения характеристик примут вид:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dq_i}{\frac{\partial H}{\partial p_i}} = \frac{dp_i}{-\frac{\partial H}{\partial q_i}} = \frac{dp}{-\frac{\partial H}{\partial t}} = \frac{dV}{\sum \frac{\partial H}{\partial p_i} p_i - H}. \tag{58}$$

---

[1]) См. литографированный курс проф. Д. Е. Меньшова, Интегрирование уравнений с частными производными первого порядка. Изд. МГУ, 1932, или Э. Гурса, Курс математического анализа, т. II, ч. 2. ГТТИ, 1933, а также проф. Н. М. Гюнтер, Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, ГТТИ, 1934.

Все отношения, входящие в систему (58), кроме двух последних, не содержат ни p ни V, и мы можем написать их в виде системы обыкновенных диференциальных уравнений:

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

которые в точности совпадают с каноническими уравнениями, и H есть их характеристическая функция.

Допустим, что мы сумели каким-то способом решить эту систему и нашли q_i и p_i в функции t и $2n$ произвольных постоянных, которые можно выразить через начальные значения q_i^0 и p_i^0 переменных q_i и p_i при $t=t_0$, где t_0 — фиксированное число. Это решение напишется в виде:

$$\left.\begin{aligned} q_i&=f_i(t, q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0, p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0), \\ p_i&=\varphi_i(t, q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0, p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0), \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

где $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Чтобы проинтегрировать до конца систему (58), мы должны еще выразить V и p в функции t и начальных значений.

Для этого приравняем предпоследнее и последнее из отношений (58) первому, что дает уравнения:

$$\frac{dV}{di}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}p_i-H, \quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{60}$$

Правые части этих уравнений не содержат ни V ни p, а только t, q_i и p_i. Подставляя вместо q_i и p_i полученные их значения (59), мы сделаем правые части уравнений (60) функциями одного только t, и, следовательно, величины V и p найдутся простыми крадратурами:

$$\left.\begin{aligned} V&=\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}p_i-H\right)dt+V^0, \\ p&=-\int_{t_0}^{t}\frac{\partial H}{\partial t}dt+p^0, \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

где V^0 и p^0 суть значения функций V и p при $t=t_0$. Равенства (59) и (61) определяют решения системы (58), которые принимают значения q_i^0, p_i^0, V^0, p^0 при $t=t_0$ и представляют характеристики уравнения (57).

Чтобы получить полный интеграл, мы должны теперь, следуя методу Коши, составить из характеристик интегральное многообразие или интегральную поверхность $n+1$ измерений. Для этого нужно выразить

q_i^0, p_i^0, V^0 и p^0 в функции от n независимых переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и притом так, чтобы выполнялись равенства:

$$\left.\begin{aligned} &p^0 + H(t_0, q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0, p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0) = 0, \\ &dV^0 = p^0\,dt_0 + p_1^0\,dq_1^0 + p_2^0\,dq_2^0 + \ldots + p_n^0\,dq_n^0, \end{aligned}\right\} \qquad (62)$$

геометрическое значение которых очевидно. Мы достигнем цели, положив:

$$\left.\begin{aligned} q_i^0 &= u_i, \quad p_i^0 = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ V^0 &= a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n + a_{n+1}, \\ p^0 &= -H(t_0, u_1, u_2, \ldots, u_n; a_1, a_2, \ldots, a_n). \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

Действительно, подставляя в последнее равенство (63) вместо u_i и a_i их значения, мы видим, что первое равенство (62) удовлетворяется. Далее, вычисляя dV^0, найдем:

$$dV^0 = a_1\,du_1 + a_2\,du_2 + \ldots + a_n\,du_n,$$

что совпадает со вторым равенством (62), так как $dt_0 = 0$. С помощью формул (63) уравнения характеристик примут вид:

$$q_i = f_i(t, u_1, u_2, \ldots, u_n; a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

$$p_i = \varphi_i(t, u_1, u_2, \ldots, u_n; a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

$$p = -\int_{t_0}^{t} \frac{\partial H}{\partial t}\,dt - H(t_0, u_1, u_2, \ldots, u_n; a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

$$V = \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} p_i - H\right) dt + a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n + a_{n+1}.$$

Чтобы получить, наконец, полный интеграл уравнения (57), достаточно выразить $u_1, u_2 \ldots, u_n$ в функции $t, q_1, q_2, \ldots, q_n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ из уравнений:

$$q_i = f_i(t, u_1, u_2, \ldots, u_n; a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

и подставить найденные значения в выражение для V. Тогда V выразится как функция $n+1$ независимых переменных $t, q_1, q_2, \ldots, q_n$ и $n+1$ произвольных постоянных $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Мы видим, что одна постоянная a_{n+1} действительно входит в интеграл в виде отдельного слагаемого. Отбросив эту постоянную, мы получим интеграл, о котором шла речь в § 15.

Теперь связь между канонической системой и уравнением Гамильтона-Якоби установлена полностью. Интегрирование канонической системы сводится к интегрированию уравнения Гамильтона-Якоби, и, обратно, интегрирование уравнения Гамильтона-Якоби зависит от решения канонической системы. Кажется, что мы попали в заколдованный круг, и тогда естественно возникает вопрос, для чего же было введено в рассмотрение уравнение Гамильтона-Якоби и какой смысл имеет доказанная в § 16 теорема?

Ответ на этот вопрос заключается в том, что для нахождения полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби не всегда необходимо применять метод Коши, и иногда полный интеграл можно найти более элементарными способами, при помощи какого-нибудь искусственного приема, а тогда интегрирование канонической системы, конечно, чрезвычайно облегчается.

19. Интегрирование уравнения Гамильтона-Якоби. Вообще говоря, интегрирование нелинейных уравнений с частными производными первого порядка представляет очень трудную и сложную задачу. Поэтому интегрировать уравнение Гамильтона-Якоби почти никогда не удается. Только в некоторых наиболее простых случаях оказывается возможным получить полный интеграл каким-нибудь искусственным способом. Эти случаи в небесной механике немногочисленны, и характерно то, что эти же случаи могут быть исследованы и непосредственно, не прибегая к помощи теоремы Гамильтона-Якоби. Неизвестно пока ни одного случая, который допускал бы разрешение только этим методом, так что эффективность его весьма невелика. Однако с теоретической стороны он представляет большой интерес, и не исключена возможность, что в будущем метод Гамильтона-Якоби позволит решать такие задачи, которые не поддаются разрешению никакими другими методами.

Уравнением Гамильтона-Якоби занимались многие видные математики, но результаты их многочисленных исследований довольно незначительны. Удалось только найти некоторые случаи, в которых уравнение Гамильтона-Якоби разрешается в квадратурах, но, к сожалению, громадное большинство задач динамики к этим случаям не подходит.

Лиувилль первый указал случай, когда уравнение Гамильтона-Якоби интегрируется в квадратурах. Затем более общий случай указал Штеккель, и позднейшие исследования были посвящены различным обобщениям результатов Штеккеля и Лиувилля. В 1911 г. Бургатти поставил общую задачу — найти все случаи, в которых уравнение Гамильтона-Якоби интегрируется в квадратурах. Его анализ привел к довольно общей форме уравнения, из которой все предыдущие получаются как частные случаи.

Мы рассмотрим последовательно случай интегрируемости Лиувилля, затем проф. Н. Д. Моисеева, случай Штеккеля и в заключение приведем вкратце соображения Бургатти.

20 Случай интегрируемости Лиувилля. Пусть живая сила T есть однородная функция второй степени относительно обобщенных скоростей, вида:

$$T=\frac{1}{2}\,b\,[A_1(q_1)\,q_1'^2+A_2(q_2)\,q_2'^2+\ldots+A_n(q_n)\,q_n'^2], \tag{64}$$

где

$$b=\sum_{i=1}^{n}B_i(q_i)=B_1(q_1)+B_2(q_2)+\ldots+B_n(q_n), \tag{65}$$

и пусть силовая функция U зависит только от обобщенных координат q_i и определяется формулой:

$$U=\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n}U_i(q_i)=\frac{U_1(q_1)+U_2(q_2)+\ldots+U_n(q_n)}{B_1(q_1)+B_2(q_2)+\ldots+B_n(q_n)}.$$

Тогда уравнение Гамильтона-Якоби интегрируется в квадратурах.

Для доказательства этой теоремы составим прежде всего выражение для характеристической функции H. Так как T содержит только члены с квадратами q_i', то $T_2=T$, и мы имеем:

$$H=T-U=\frac{1}{2}b\sum_{i=1}^{n}A_i(q_i)\,q_i'^2-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n}U_i(q_i).$$

Теперь выразим T и H в функции канонических переменных. Так как $p_i=\frac{\partial T}{\partial q_i'}$, то мы находим:

$$p_i=bA_i(q_i)\,q_i' \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

откуда, как нетрудно проверить,

$$T=\frac{1}{2b}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i^2}{A_i(q_i)}$$

и

$$H=\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{p_i^2}{A_i(q_i)}-U_i(q_i)\right].$$

Так как характеристическая функция H не содержит явно t, то уравнение Гамильтона-Якоби напишется в виде:

$$\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2A_i(q_i)}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2-U_i(q_i)\right]=h \tag{66}$$

или ввиду формулы (65):

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2A_i(q_i)}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2-U_i(q_i)\right]=h\sum_{i=1}^{n}B_i(q_i). \tag{67}$$

Остается найти интеграл этого уравнения, зависящий, кроме h, еще от $n-1$ произвольных постоянных. Перенося в уравнении (67) член $h\sum_{i=1}^{n}B_i(q_i)$ в левую часть и написав уравнение в виде:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2A_i(q_i)}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2-U_i(q_i)-hB_i(q_i)\right]=0,$$

мы замечаем, что левая часть является суммой n слагаемых, каждое из которых зависит только от одной переменной q_i. Очевидно, что мы удовлетворим этому уравнению, приравняв каждое слагаемое в отдельности произвольной постоянной, т. е. полагая:

$$\frac{1}{2A_i(q_i)}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2 - U_i(q_i) - hB_i(q_i) = \alpha_i \quad (i=1, \quad 2, \ldots, n) \quad (68)$$

при условии, что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0.$$

Уравнения (68) представляют n независимых обыкновенных диференциальных уравнений первого порядка, интегрирующихся в квадратурах. Действительно, разрешая эти уравнения относительно производных, мы имеем:

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = \sqrt{2A_i(q_i)\left[U_i(q_i) + hB_i(q_i) + \alpha_i\right]} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

откуда

$$W = \int \sqrt{2A_i(q_i)\left[U_i(q_i) + hB_i(q_i) + \alpha_i\right]}\, dq_i \quad (i=1, 2, \ldots, n). \quad (69)$$

Произвольных постоянных к интегралам прибавлять нет надобности, так как мы уже ввели достаточное количество постоянных. Искомый интеграл уравнения (67) мы получим, суммируя выражения (68) для всех значений i от 1 до n.

$$W = \sum_{i=1}^{n} \int \sqrt{2A_i(q_i)\left[U_i(q_i) + hB_i(q_i) + \alpha_i\right]}\, dq_i. \quad (70)$$

Нетрудно проверить путем подстановки, что функция W, определяемая формулой (70), действительно удовлетворяет уравнению (67). Кроме того, в W входит необходимое количество произвольных постоянных. Действительно, в W входит h и n постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, которые связаны соотношением:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0.$$

Следовательно, из n постоянных α_i независимыми являются только $n-1$, и всего W содержит n независимых постоянных. Получив W, мы найдем общий интеграл соответствующей канонической системы по формулам (54) и (55) § 17.

21. Случай интегрируемости Н. Д. Моисеева. В теореме Лиувилля живая сила T является однородной функцией обобщенных скоростей q_i'. Проф. Н. Д. Моисеев обобщил теорему Лиувилля на случай, когда T является неоднородной функцией второй степени специального вида, и доказал более общую теорему, из которой теорема Лиувилля получается как частный случай [1]).

Пусть живая сила определяется формулой:

$$T=\frac{1}{2}\Phi\sum_{i=1}^{n}[A_i q_i'^2+2B_i q_i'+C_i], \tag{71}$$

где каждый из коэфициентов A_i является функцией только одной переменной q_i, а коэфициенты B_i и C_i определяются формулами:

$$B_i=-\frac{b_i(q_i)}{\Phi},\qquad C_i=\frac{c_i(q_i)}{\Phi^2}\qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

причем

$$\Phi=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(q_i),$$

и пусть силовая функция U имеет вид:

$$U=\frac{1}{\Phi}\sum_{i=1}^{n}U_i(q_i).$$

Тогда уравнение Гамильтона-Якоби интегрируется в квадратурах.

Ход доказательства этой теоремы будет такой же, как и в предыдущем параграфе. Характеристическая функция H в данном случае определяется формулой:

$$H=T_2-T_0-U,$$

откуда

$$H=\frac{1}{2}\Phi\sum_{i=1}^{n}[A_i q_i'^2-C_i]-\frac{1}{\Phi}\sum_{i=1}^{n}U_i. \tag{72}$$

Вводим канонические переменные при помощи формул:

$$p_i=\frac{\partial T}{\partial q_i'},$$

откуда ввиду выражения для живой силы (71) получаем:

$$p_i=\Phi(A_i q_i'+B_i)\qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

---

[1]) Этот случай был лично сообщен автору проф. Н. Д. Моисеевым с любезным разрешением изложить его в настоящих дополнениях. Приводимая нами теорема была доказана проф Н. Д. Моисеевым весной 1934 г. и еще нигде не опубликована.

Определяя отсюда q'_i и подставляя в формулу (72), получим:

$$H=\frac{1}{2}\Phi\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{A_i}\left(\frac{p_i}{\Phi}-B_i\right)^2-C_i\right]-\frac{1}{\Phi}\sum_{i=1}^{n}U_i.$$

Вставляя сюда вместо B_i и C_i их выражения и упрощая, найдем окончательно:

$$H=\frac{1}{2\Phi}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{A_i}(p_i-b_i)^2-c_i\right]-\frac{1}{\Phi}\sum_{i=1}^{n}U_i,$$

и уравнение Гамильтона-Якоби напишется в виде:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}-b_i\right)^2-c_i\right]-2\sum_{i=1}^{n}U_i=2h\Phi=2h\sum_{i=1}^{n}\varphi_i$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}-b_i\right)^2-c_i-2U_i-2h\varphi_i\right\}=0. \tag{73}$$

Мы удовлетворим этому уравнению, полагая:

$$\frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}-b_i\right)^2-c_i-2U_i-2h\varphi_i=\alpha_i, \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{74}$$

при условии, что

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0.$$

Нетрудно видеть, что каждое уравнение (74) интегрируется отдельно разделением переменных, и мы найдем искомый интеграл уравнения (73) взяв сумму решений всех уравнений (74). Этот интеграл напишется, следовательно, следующим образом:

$$W=\sum_{i=1}^{n}\int\left\{b_i+\sqrt{A_i\left[c_i+2U_i+2h\varphi_i+\alpha_i\right]}\right\}dq_i, \tag{75}$$

и теорема проф. Н. Д. Моисеева доказана. Полагая здесь $B_i\equiv C_i\equiv 0$, мы опять получаем теорему Лиувилля.

22. Случай интегрируемости Штеккеля. Пусть даны $n(n+1)$ функций, из которых каждая зависит только от одной переменной

$$\varphi_{ij}(q_i) \text{ и } U_i(q_i) \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

таких, что детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(q_1), & \varphi_{21}(q_2), & \ldots, & \varphi_{n1}(q_n) \\ \varphi_{12}(q_1), & \varphi_{22}(q_2), & \ldots, & \varphi_{n2}(q_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{1n}(q_1), & \varphi_{2n}(q_2), & \ldots, & \varphi_{nn}(q_n) \end{vmatrix} \tag{76}$$

не равен тождественно нулю. Во всем остальном эти функции совершенно произвольны. Тогда, если живая сила T и силовая функция U определяются формулами:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} A_i p_i^2 \tag{77}$$

и

$$U = \sum_{i=1}^{n} A_i U_i, \tag{78}$$

где

$$A_i = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{i1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{79}$$

то уравнение Гамильтона-Якоби интегрируется в квадратурах. Действительно, уравнение Гамильтона-Якоби в данном случае напишется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} A_i U_i = 2h. \tag{80}$$

Чтобы привести это уравнение к квадратурам, выведем одно вспомогательное соотношение. Разложим детерминант Δ по элементам первой строки. При помощи известной теоремы из теории детерминантов [1]) мы можем написать:

$$\Delta = \varphi_{11}(q_1) \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{11}} + \varphi_{21}(q_i) \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{21}} + \ldots + \varphi_{n1}(q_n) \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{n1}}.$$

Деля обе части этого равенства на Δ и имея в виду формулы (79), мы получим следующее соотношение:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{i1}(q_i) A_i = 1. \tag{81}$$

Рассматривая теперь правую часть уравнения (80) как $2h \cdot 1$ и заменяя единицу по формуле (81), мы напишем уравнение Гамильтона-Якоби в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2 - 2U_i - 2h\varphi_{i1}\right] = 0. \tag{82}$$

---

[1]) См., например., В. Каган, Основания теории определителей.

Мы удовлетворим этому уравнению, полагая

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2 = 2U_i + 2h\varphi_{i1} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \varphi_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (83)$$

где $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ — произвольные постоянные. Чтобы доказать это, подставим в уравнение (82) вместо $\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2$ из выражения (83) и убедимся, что в результате подстановки получится тождество. Выполняя подстановку, мы, как нетрудно видеть, получим для левой части уравнения (82) выражение:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(A_i \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \varphi_{ij}\right). \quad (84)$$

Собирая в последнем выражении члены, мы представим (84) в виде:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(A_i \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \varphi_{ij}\right) = \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \varphi_{ij}\right) = \sum_{j=2}^{n} \alpha_j D_j.$$

Покажем теперь, что все коэфициенты D_j тождественно равны нулю. Действительно, мы имеем:

$$D_j = \sum_{i=1}^{n} A_i \varphi_{ij} \qquad (j = 2, 3, \ldots, n),$$

что ввиду формул (79) примет вид:

$$D_j = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ij} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{i1}}.$$

Но сумма $\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ij} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{i1}}$ представляет собой сумму произведений элементов j-й строки детерминанта Δ на миноры первой строки этого же детерминанта. Так как $j = 2, 3, \ldots, n$, то для каждого значения j эта сумма есть нуль. Следовательно, $D_j = 0$, и выражение (84) есть тождественный нуль, и уравнение (80) удовлетворяется значениями $\frac{\partial W}{\partial q_i}$, определяемыми формулами (83). Но правая часть каждого уравнения (83) содержит только одну независимую переменную q_i. Следовательно, интегрируя каждое уравнение (83) в отдельности и беря сумму полученных решений, мы найдем искомый интеграл уравнения (80) в следующем виде:

$$W = \sum_{i=1}^{n} \int \sqrt{2U_i + 2h\varphi_{i1} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \varphi_{ij}}\, dq_i, \quad (85)$$

и теорема Штеккеля доказана.

23. Исследования Бургатти. Мы рассмотрели в предыдущих параграфах некоторые специальные формы уравнения Гамильтона-Якоби, которые допускают интегрирование в квадратурах. Естественно возникает вопрос — не существует ли других случаев, также приводящихся к квадратурам, и если они существуют, то нельзя ли найти более общую форму уравнения Гамильтона-Якоби, обладающего этим свойством?

Мы уже указывали, что этой задачей занимались многие видные математики, и эти исследования были до известной степени завершены Бургатти.

Предположим заранее, что уравнение Гамильтона Якоби имеет вид:

$$\sum_{r,s=1}^{n} A_{r,s} \frac{\partial W}{\partial q_r} \frac{\partial W}{\partial q_s} = 2\,[U(q_1, q_2, \ldots, q_n) + h], \tag{86}$$

где левая часть есть однородная функция второй степени относительно производных $\frac{\partial W}{\partial q_i}$ с коэфициентами, зависящими от $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Спрашивается, какой вид должны иметь эти коэфициенты и силовая функция, чтобы уравнение (86) интегрировалось разделением переменных?

Для того чтобы решить эту задачу, Бургатти подходит к ней с обратного конца. Он предполагает, что интеграл уравнения (86) найден указанным способом в виде:

$$W = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(q_i, h, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \tag{87}$$

и путем исключения постоянных $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ получает то уравнение, для которого (87) является полным интегралом. Это уравнение мы получим, исключая постоянные из уравнений:

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = \varphi_i'(q_i, h, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{88}$$

и Бургатти ищет наиболее общий вид функций φ_i', при котором это исключение дает уравнение вида (86). Что этот выбор действительно может привести к цели, показывает следующий пример:

Выберем функции φ_i' так, чтобы уравнение (88) имело следующий вид:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2 = 2U_i(q_i) + 2h\varphi_{i1}(q_i) + \alpha_2\varphi_{i2}(q_i) + \ldots + \alpha_n\varphi_{in}(q_n) \tag{89}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

где φ_{ij} суть n^2 функций, каждая из которых зависит только от одной переменной и таких, что детерминант:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(q_1), & \varphi_{12}(q_1), & \ldots, & \varphi_{1n}(q_1) \\ \varphi_{21}(q_2), & \varphi_{22}(q_2), & \ldots, & \varphi_{2n}(q_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n1}(q_n), & \varphi_{n2}(q_n), & \ldots, & \varphi_{nn}(q_n) \end{vmatrix}$$

не равен тождественно нулю [1]). Исключая из уравнений (89) постоянные $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, мы получим уравнение:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 - 2U_1(q_1) - 2h\varphi_{11}(q_1), & \varphi_{12}(q_1), & \ldots, & \varphi_{1n}(q_1) \\ \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 - 2U_2(q_2) - 2h\varphi_{21}(q_2), & \varphi_{22}(q_2), & \ldots, & \varphi_{2n}(q_2) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \left(\frac{\partial W}{\partial q_n}\right)^2 - 2U_n(q_n) - 2h\varphi_{n1}(q_n), & \varphi_{n2}(q_n), & \ldots, & \varphi_{nn}(q_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Чтобы показать, что это уравнение принадлежит к типу (86), разложим детерминант, стоящий в левой части, по элементам первого столбца. Мы получим:

$$\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 - 2U_1(q_1) - 2h\varphi_{11}(q_1)\right]\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{11}} + \left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 - 2U_2(q_2) - 2h\varphi_{21}(q_2)\right]\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{21}} + \ldots$$
$$\ldots + \left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_n}\right)^2 - 2U_n(q_n) - 2h\varphi_{n1}(q_n)\right]\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{n1}} = 0.$$

Раскрывая в последнем уравнении скобки и деля все уравнение на Δ, мы получим:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2 \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{i1}} = 2\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{i1}}U_i(q_i) + h\right\}, \tag{90}$$

так как

$$\varphi_{11}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{11}} + \varphi_{21}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{21}} + \ldots + \varphi_{n1}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{n1}} \equiv \Delta.$$

Уравнение, очевидно, принадлежит к виду (86), и, кроме того, оно совпадает с уравнением (80), так что мы опять возвращаемся к теореме Штеккеля. Таким же образом получаются уравнения Гамильтона-Якоби и при других выборах функций φ'_i. Бургатти нашел наиболее общий вид для этих функций, но доказать, что этот вид действительно самый общий, ему не удалось. Мы не будем приводить выражений для φ'_i, найденных Бургатти. Они достаточно сложны и для нашей цели непосредственного интереса не представляют.

24. Метод вариации произвольных постоянных. В предыдущих параграфах мы подробно рассмотрели уравнение Гамильтона-Якоби и показали, как с его помощью интегрируется каноническая система диференциальных уравнений. Однако в большинстве случаев этот метод оказывается неприменимым ввиду того, что в задачах небесной механики уравнение Гамильтона-Якоби большей частью не принадлежит ни к одному из рассмотренных интегрируемых типов и даже к более общим типам, указанным Бургатти. Однако на практике метод Гамильтона-Якоби все-таки можно использовать, соединяя его с методом вариации произвольных

[1]) Детерминант Δ, очевидно, тот же самый, как и в теореме Штеккеля.

постоянных, который мы сейчас здесь и рассмотрим. Пусть нам дана каноническая система:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dq_i}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial p_i},\\ \frac{dp_i}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n),\right\}\tag{91}$$

где характеристическая функция H зависит от времени и переменных q_i, p_i. Разложим H произвольным образом на две части, полагая

$$H=H_0+H_1,\tag{92}$$

и рассмотрим каноническую систему с характеристической функцией H_0:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dq_i}{dt}&=\frac{\partial H_0}{\partial p_i},\\ \frac{dp_i}{dt}&=-\frac{\partial H_0}{\partial q_i}\end{aligned}\quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n).\right\}\tag{93}$$

Предположим, что соответствующее уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H_0\left(t,\,q_1,\,q_2,\,\ldots,\,q_n;\,\frac{\partial V}{\partial q_1},\,\frac{\partial V}{\partial q_2},\,\ldots,\,\frac{\partial V}{\partial q_n}\right)=0\tag{94}$$

мы сумели каким-то способом проинтегрировать. Тогда на основании теоремы Гамильтона-Якоби мы можем написать общий интеграл системы (93) в виде:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=p_i,\quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i}=-\beta_i\qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n).\tag{95}$$

Решая уравнения (95) относительно q_i и p_i, мы получим:

$$\left.\begin{aligned}q_i&=q_i(t,\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_n;\,\beta_1,\,\beta_2,\,\ldots,\,\beta_n),\\ p_i&=p_i(t,\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_n;\,\beta_1,\,\beta_2,\,\ldots,\,\beta_n)\end{aligned}\quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n).\right\}\tag{96}$$

Функции (96) удовлетворяют в силу теоремы Гамильтона-Якоби системе (93), но они, конечно, не удовлетворяют первоначальной системе (91). Но мы можем рассматривать величины α_i и β_i не как постоянные, а как новые переменные, связанные со старыми переменными соотношениями (95) или (96). Иными словами, мы можем произвести в уравнениях (91) замену переменных с функцией преобразования V. Тогда по теореме Шарлье (см. § 11) новые переменные α_i и β_i определятся канонической системой:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\alpha_i}{dt}&=\frac{\partial R}{\partial \beta_i},\\ \frac{d\beta_i}{dt}&=-\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}\end{aligned}\quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n)\right\}\tag{97}$$

с новой характеристической функцией

$$R = H + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Но из уравнения (94) мы имеем:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -H_0.$$

Следовательно, мы будем иметь:

$$R = H - H_0 = H_1,$$

и система (97) напишется в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha_i}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial \beta_i}, \\ \frac{d\beta_i}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).\right\} \tag{98}$$

Решая эту систему, мы получим α_i и β_i в функции времени и новых произвольных постоянных α'_i, β'_i в виде:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_i(t, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n;\ \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n), \\ \beta_i &= \beta_i(t, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n;\ \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n) \end{aligned}\right\} \tag{99}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Подставляя затем эти значения α_i и β_i в уравнения (96), мы получим и общий интеграл канонической системы (91).

Этот метод широко применяется в небесной механике, где обычно функцию H_0 выбирают таким образом, чтобы движение, определяемое формулами (96), было невозмущенным кеплеровским движением. Тогда α_i и β_i суть величины, определяющие положение и форму конических сечений, которые рассматриваются как промежуточные орбиты. Так как в истинных орбитах эти величины суть функции времени, определяемые уравнениями (99), то мы приходим таким образом к методу возмущения элементов, который был рассмотрен другим путем в главе X книги Мультона.

Величины α_i и β_i называются в небесной механике *каноническими элементами*, и функция H_1 *пертурбационной функцией*.

25. **Случай, когда H не содержит времени.** В задачах небесной механики переменные α_i и β_i обычно оказываются неудобными, и поэтому, пользуясь теоремами о преобразовании канонических уравнений, их заменяют какими-нибудь другими более подходящими и также каноническими переменными. Ниже мы рассмотрим некоторые системы этих переменных, а сейчас разберем случай, когда характеристическая функция H не содержит явно времени. В этом случае уравнение (94) можно заменить следующим:

$$H_0\left(q_1, q_2, \ldots, q_n;\ \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = h, \tag{100}$$

и функцию H_0 всегда можно выбрать так, чтобы это уравнение принадлежало к одному из рассмотренных выше интегрируемых типов. Тогда мы можем найти полный интеграл этого уравнения:

$$W = W(q_1, q_2, \ldots, q_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Постоянную h можно рассматривать, как мы это делали выше, совпадающей с одной из постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ или можно считать более общим образом h известной функцией от $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$h = C(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Тогда преобразование переменных определится формулами:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial q_i} &= p_i, \\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} &= \frac{\partial C}{\partial \alpha_i} \cdot t - \beta_i \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

и в качестве новых переменных мы можем принять величины:

$$\left.\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n, \\ w_1, & w_2, & \ldots, & w_n, \end{matrix}\right\} \tag{101}$$

где

$$w_i = -\frac{\partial C}{\partial \alpha_i} \cdot t + \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Действительно, на основании теоремы Якоби (см. § 13) переменные (101) также будут каноническими и будут определяться системой:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial w_i}, \\ \frac{dw_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \alpha_i} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\right\} \tag{102}$$

с той же самой характеристической функцией H. На этом мы закончим изложение общей теории канонических уравнений и в следующих параграфах рассмотрим приложение разобранных методов к некоторым задачам небесной механики.

Не имея возможности уделять слишком много места этим вопросам, мы ограничимся рассмотрением задачи о двух телах и некоторых вопросов, относящихся к задаче о трех телах.

ЗАДАЧА О ДВУХ ТЕЛАХ

26. Канонические уравнения задачи о двух телах. В главе V были выведены диференциальные уравнения относительного движения в задаче о двух телах. Пусть m_1 и m_2 две материальные точки. Их массы будем обозначать теми же буквами. Уравнения движения точки m_2 относительно m_1 имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu x}{r^3}=0, \\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mu y}{r^3}=0, \\ \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\mu z}{r^3}=0, \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

где $\mu=k^2(m_1+m_2)$, $r^2=x^2+y^2+z^2$ и k^2 — постоянная тяготения. Вводя силовую функцию U формулой:

$$U=\frac{\mu}{r}=\frac{\mu}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \tag{104}$$

мы напишем систему (103) в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

Интеграл живых сил, как легко проверить, имеет вид:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=U+h.$$

Следовательно, мы можем положить

$$T=\frac{1}{2}\left(x'^2+y'^2+z'^2\right). \tag{106}$$

Так как

$$\frac{\partial T}{\partial x'}=x', \quad \frac{\partial T}{\partial y'}=y', \quad \frac{\partial T}{\partial z'}=z',$$

то за канонические переменные можно взять величины:

$$x, \quad y, \quad z, \quad x', \quad y', \quad z',$$

и диференциальные уравнения относительного движения в канонической форме напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial x'}, \quad \frac{dx'}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y'}, \quad \frac{dy'}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y}, \\ \frac{dz}{dt}=\frac{\partial H}{\partial z'}, \quad \frac{dz'}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{107}$$

где

$$H = T - U = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{108}$$

Перейдем теперь к полярным координатам, полагая:

$$x = r\cos\varphi\cos\theta,$$
$$y = r\cos\varphi\sin\theta,$$
$$z = r\sin\varphi.$$

Выражение для живой силы (см. § 7) будет иметь вид:

$$T = \frac{1}{2}[r'^2 + r^2\varphi'^2 + r^2\cos^2\varphi\cdot\theta'^2].$$

Положим теперь

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \theta.$$

Тогда

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial r'} = r', \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = r^2\varphi', \quad p_3 = \frac{\partial T}{\partial \theta'} = r^2\cos^2\varphi\cdot\theta'. \tag{109}$$

Применяя теорему Якоби в формулировке Пуанкаре (см. § 14), составим выражение:

$$x'dx + y'dy + z'dz - p_1dq_1 - p_2dq_2 - p_3dq_3; \tag{110}$$

ввиду выражений для q_i и p_i находим, что это выражение равно:

$$x'dx + y'dy + z'dz - r'dr - r^2\varphi'd\varphi - r^2\cos^2\varphi\cdot\theta'd\theta,$$

а это ввиду равенств (106) и 109) есть тождественный нуль. Следовательно, выражение (110) является полным диференциалом, и новые переменные:

$$q_1, \quad q_2, \quad q_3,$$
$$p_1, \quad p_2, \quad p_3$$

определяются также канонической системой с той же самой характеристической функцией:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

где $i = 1, 2, 3$.

Выражая H через новые переменные, мы найдем:

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} + \frac{p_3^2}{r^2\cos^2\varphi}\right) - \frac{\mu}{r}, \tag{112}$$

где для простоты оставлены старые обозначения канонических координат q_1, q_2 и q_3.

27. Интегрирование уравнения Гамильтона-Якоби. Так как характеристическая функция системы (111) не содержит явно времени, то уравнение Гамильтона-Якоби для задачи о двух телах может быть написано в виде:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2=\frac{2\mu}{r}+2h_1. \tag{113}$$

Интегрировать это уравнение можно двумя различными способами, которые мы здесь оба рассмотрим. Во-первых, к уравнению (113) можно применить теорему Штеккеля. Действительно, положим

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_{11}=1, && \varphi_{21}=0, && \varphi_{31}=0,\\
&\varphi_{12}=-\frac{1}{r^2}, && \varphi_{22}=1, && \varphi_{32}=0,\\
&\varphi_{13}=0, && \varphi_{23}=-\frac{1}{\cos^2\varphi}, && \varphi_{33}=1
\end{aligned}\right\} \tag{114}$$

и

$$U_1=\frac{\mu}{r},\quad U_2=0,\quad U_3=0; \tag{115}$$

составим теперь детерминант:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\varphi_{11}, & \varphi_{21}, & \varphi_{31}\\ \varphi_{12}, & \varphi_{22}, & \varphi_{32}\\ \varphi_{13}, & \varphi_{23}, & \varphi_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1, & 0, & 0\\ -\frac{1}{r^2}, & 1, & 0\\ 0, & -\frac{1}{\cos^2\varphi}, & 1\end{vmatrix}=1.$$

Далее находим коэфициенты A_1, A_2, A_3 по формулам:

$$A_1=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{11}},\quad A_2=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{21}},\quad A_3=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{31}}.$$

Легко проверить, что мы получаем:

$$A_1=1,\quad A_2=\frac{1}{r^2},\quad A_3=\frac{1}{r^2\cos^2\varphi},$$

и уравнение (113) действительно имеет вид, необходимый для применения теоремы Штеккеля. Искомый интеграл определится по формуле (85) § 22. Вставляя в эту формулу вместо функций φ_{ij} и U_i их значения из формул (114) и (115), мы напишем интеграл уравнения (113) в следующем виде:

$$W=\int\sqrt{\frac{2\mu}{r}+2h-\frac{\alpha_2}{r^2}}\,dr+\int\sqrt{\alpha_2-\frac{\alpha_3}{\cos^2\varphi}}\,d\varphi+\int\sqrt{\alpha_3}\,d\theta. \tag{116}$$

Из этого выражения прежде всего следует, что α_3 должно быть положительным, иначе последний интеграл в формуле (116), а следовательно, и W будут мнимыми. Но если $\alpha_3>0$, то и α_2 должно также быть положительным, иначе второй интеграл в формуле (116) будет мнимым. Поэтому мы положим:

$$\alpha_2 = h_2^2,$$
$$\alpha_3 = h_3^2,$$

и для симметрии в обозначениях положим еще

$$h = h_1.$$

Тогда W напишется в виде:

$$W = \int \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}\, dr + \int \sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}\, d\varphi + h_3 \cdot \theta. \tag{117}$$

Решение задачи получится по формулам (54) § 17 в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial h_1} &= t + H_1, \\ \frac{\partial W}{\partial h_2} &= H_2, \\ \frac{\partial W}{\partial h_3} &= H_3. \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

Постоянные:

$$\left.\begin{aligned} h_1,\ h_2,\ h_3, \\ H_1,\ H_2,\ H_3 \end{aligned}\right\} \tag{119}$$

образуют систему канонических постоянных.

Найдем теперь интеграл уравнения (113) непосредственно, не прибегая к помощи теоремы Штеккеля. Замечая, что уравнение (113) не содержит явно переменной θ, будем искать его решение в виде:

$$W = h_3\theta + W_1, \tag{120}$$

где W_1 зависит только от r и φ. Из (120) мы находим:

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W_1}{\partial r}, \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \frac{\partial W_1}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial W}{\partial \theta} = h_3,$$

и уравнение (113) примет вид:

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{h_3^2}{r^2\cos^2\varphi} = \frac{2\mu}{r} + 2h_1. \tag{121}$$

Мы удовлетворим этому уравнению, полагая:

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi} = h_2^2 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{h_2^2}{r^2} = \frac{2\mu}{r} + 2h_1.$$

Каждое из этих уравнений легко интегрируется отдельно, и мы можем написать:

$$W_1 = \int \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}\, dr + \int \sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}\, d\varphi. \tag{122}$$

Подставляя найденное выражение W_1 в формулу (120) и сравнивая результат с выражением для W (117), мы видим, что интеграл имеет в точности такой же вид, как и полученный из теоремы Штеккеля.

28. Канонические элементы для эллиптической орбиты. Из интеграла живых сил мы имеем, обозначая через V скорость точки m_2 относительно m_1:

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h_1.$$

Обозначая через V_0 и r_0 начальную скорость и начальный радиус-вектор, мы находим:

$$h_1 = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}.$$

Из главы V известно, что орбита точки m_2 есть эллипс, парабола или гипербола в зависимости от того, меньше, равна или больше нуля постоянная интеграла живых сил.

Если $h_1 < 0$, то $V_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}$ — орбита эллипс.

» $h_1 = 0$, » $V_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}$ — » парабола.

» $h_1 > 0$, » $V_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}$ — » гипербола.

Исходя из полученного выражения для полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби, можно исследовать каждый из этих трех случаев и получить формулы, найденные в главе V другим методом. Мы ограничимся рассмотрением только эллиптического движения как имеющего наибольший интерес для практических применений небесной механики.

Составим общий интеграл эллиптического движения по формулам (118). Перепишем предварительно выражение для W в немного измененном виде, приписав входящим в формулу (117) интегралам переменные верхние пределы и произвольные постоянные нижние пределы, что мы вправе сделать, так как изменение нижних пределов изменяет только несущественную для нас аддитивную постоянную в выражении полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби.

Для первого интеграла мы возьмем в качестве нижнего предела величину r_1, которую пока оставим неопределенной, а для второго интеграла возьмем в качестве нижнего предела нуль.

Тогда мы имеем:

$$W = \int_{r_1}^{r} \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}\, dr + \int_0^{\varphi} \sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}\, d\varphi + h_3\theta. \tag{123}$$

Для определения r_1 рассмотрим уравнение:

$$\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2} = 0$$

или

$$2\mu r + 2h_1 r^2 - h_2^2 = 0. \tag{124}$$

Так как по условию $h_1 < 0$, то оба корня этого уравнения действительны и положительны. Примем за r_1 наименьший корень этого уравнения. Другой корень обозначим через r_2. Теперь составим уравнения (118). Мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial h_1} \int_{r}^{r} \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}\, dr = \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}} -$$
$$- \sqrt{\frac{2\mu}{r_1} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}\, \frac{\partial r_1}{\partial h_1}.$$

Так как r_1 есть корень уравнения (124), то второе слагаемое в правой части пропадает. Вычисляя таким же образом остальные частные производные, мы напишем уравнения (118) в следующем виде:

$$H_1 + t = \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}}, \tag{125}$$

$$H_2 = h_2 \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}} - h_3 \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}}, \tag{126}$$

$$H_3 = \theta - h_3 \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi \sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}}. \tag{127}$$

Эти уравнения определяют координаты r, φ и θ в функции времени и шести произвольных постоянных h_1, h_2, h_3, H_1, H_2, H_3. Мы не будем выводить эти формулы и давать подробный анализ эллиптического движения, так как все это подробно рассмотрено в главе V. Мы ограничимся только тем, что дадим геометрическое значение каждой из шести постоянных, выразив их через обычные эллиптические элементы орбиты.

Формула (125) показывает, что движение будет действительным только для тех положительных значений r, для которых выражение

$$\frac{2\mu}{r}+2h_1-\frac{h_2^2}{r^2}$$

остается положительным. Отсюда следует, что r должно заключаться между r_1 и r_2, и эти величины суть наименьшее и наибольшее значения радиуса-вектора. Так как m_2 движется по эллипсу, то, обозначая через a и e большую полуось и эксцентриситет этого эллипса, мы имеем:

$$r_1=a(1-e), \quad r_2=a(1+e).$$

С другой стороны, r_1 и r_2 суть корни уравнения (124). Следовательно:

$$r_1+r_2=-\frac{2\mu}{h_1}, \quad r_1\ r_2=-\frac{h_2^2}{h_1}.$$

Из этих формул находим без труда:

$$h_1=-\frac{2\mu}{a}, \quad h_2=\sqrt{\mu a(1-e^2)}.$$

Положим теперь в формуле (125) $r=r_1$. Обозначая соответствующее значение времени через τ, получим:

$$H_1=-\tau.$$

Но при $r=r_1$ точка m_2 находится в перигелии своей орбиты. Следовательно, $-H_1$ есть время прохождения через перигелий.

Рассмотрим далее формулу (127). Чтобы движение было действительным, необходимо, чтобы:

$$h_2^2-\frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}$$

было положительным. Но φ изменяется между $-i$ и $+i$, где i обозначает наклонность орбиты к плоскости xOy. Следовательно, мы должны иметь:

$$h_2^2-\frac{h_3^2}{\cos^2 i}=0,$$

откуда:

$$h_3=h_2\cos i=\sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i.$$

Далее, при $\varphi = 0$ формула (127) дает:

$$H_3 = \theta_{\varphi=0}.$$

Но при $\varphi = 0$ точка m_2 проходит через восходящий узел своей орбиты. Следовательно, $\theta_{\varphi=0}$ есть долгота восходящего узла, и мы имеем:

$$H_3 = \Omega.$$

Остается получить геометрическое значение постоянной H_2. Для этого введем вместо φ вспомогательную переменную u формулой:

$$\sin\varphi = \sin i \sin u.$$

Из § 10 главы V очевидно, что u есть аргумент широты. Преобразуя первый интеграл формулы (126), мы получим:

$$h_2 \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi}}} = \int_0^\varphi \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2 i}} = \int_0^u \frac{\sin i \cos u\, du}{\sqrt{\sin^2 i \cos^2 u}} = u,$$

и формула (126) напишется в виде:

$$H_2 = u - h_2 \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}};$$

полагая здесь $r = r_1$, мы найдем:

$$H_2 = u_{r=r_1}.$$

Но $u_{r=r_1}$ есть аргумент широты в момент прохождения через перигелий. Следовательно:

$$H_3 = \pi - \Omega,$$

где π обозначает долготу перигелия орбиты. Окончательно система канонических элементов определится следующими формулами:

$$h_1 = -\frac{\mu}{2a}, \quad h_2 = \sqrt{\mu a(1-e^2)}, \quad h_3 = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \cos i,$$

$$H_1 = -\tau, \quad H_2 = \pi - \Omega, \quad H_3 = \Omega. \tag{128}$$

Выражения для координат r, φ, θ или x, y, z в функции эллиптических элементов были получены в главе V. Теперь мы можем выразить координаты в функции канонических элементов $h_1, h_2, h_3, H_1, H_2, H_3$. Например, мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t, h_1, h_2, h_3, H_1, H_2, H_3), \\ y &= y(t, h_1, h_2, h_3, H_1, H_2, H_3), \\ z &= z(t, h_1, h_2, h_3, H_1, H_2, H_3), \end{aligned}\right\} \tag{129}$$

и канонические постоянные h_i и H_i можно определить, зная начальные значения $x^0, y^0, z^0, x'^0, y'^0, z'^0$ координат и составляющих скоростей точки m_2. Заметим, что система постоянных h_i, H_i является не единственной системой канонических постоянных, и в небесной механике обычно употребляются другие, иногда более удобные элементы. Некоторые из них мы укажем в следующих параграфах.

ЗАДАЧА О ТРЕХ ТЕЛАХ

29. Канонические уравнения задачи о трех телах. Пусть A, B, C будут три материальные точки. Их массы будем обозначать буквами m_1, m_2 и m_3. Обозначим абсолютные координаты массы m_i через x_i, y_i, z_i, тогда силовая функция U напишется в виде:

$$U = k^2\left(\frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}}\right) = \frac{1}{2}\sum \frac{k^2 m_i m_j}{r_{ij}}, \tag{130}$$

где k^2 — постоянная тяготения и

$$r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Уравнения движения напишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x_i}, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial y_i}, \ (i = 1, 2, 3) \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z_i} \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

и представляют систему 18-го порядка.

Для удобства изложения мы будем в последующем обозначать все координаты одной буквой, таким образом, что

x_1, x_2, x_3	будут	абсолютные	координаты	A,
x_4, x_5, x_6	»	»	»	B,
x_7, x_8, x_9	»	»	»	C.

Для симметрии мы будем обозначать массу тела A через m_1, m_2 или m_3, а также через m_a; массу тела B — через m_4, m_5 или m_6, а также через m_b; массу тела C — через m_7, m_8 или m_9, а также через m_c.

Тогда система (131) запишется в виде:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 9). \qquad (132)$$

Положим далее:

$$y_i = m_i \frac{dx_i}{dt} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 9). \qquad (133)$$

Тогда живая сила системы представится в виде:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{9} m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{9} \frac{y_i^2}{m_i}. \qquad (134)$$

Нетрудно видеть, что величины x_i и y_i суть канонические переменные. Действительно:

$$y_i = \frac{\partial T}{\partial x_i'} = m_i x_i',$$

и, следовательно, x_i играют роль q_i, а y_i представляют величины p_i. Так как U зависит только от координат и T есть однородный многочлен относительно y_i, то

$$H = T - U, \qquad (135)$$

и система (132) может быть написана в канонической форме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y_i}, \\ \frac{dy_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 9). \end{aligned}\right\} \qquad (136)$$

Как известно, задача о трех телах имеет десять алгебраических интегралов, с помощью которых порядок системы может быть понижен до восьми. Обыкновенно это понижение не доводят до самого конца и приводят систему (136) к системе только двенадцатого порядка при помощи интегралов центра тяжести.

30. Алгебраические интегралы задачи о трех телах. Существование алгебраических интегралов системы (136) является непосредственным следствием свойств характеристической функции H. Эти свойства следующие:

1) *H не зависит явно от времени.* Отсюда получается интеграл живых сил.

2) *H не зависит от положения начала координат.* Отсюда получаются шесть интегралов центра тяжести.

3) *H не зависит от вращения координатной системы.* Отсюда получаются три интеграла площадей.

Выражения для этих интегралов были получены в главе VII. Не повторяя выкладок, мы приведем все же их выражения через координаты x_i и y_i.

Интеграл живых сил

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}\frac{y_i^2}{m_i}=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{k^2m_im_j}{r_{ij}}+h, \tag{137}$$

или

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{k^2m_im_j}{r_{ij}}+h.$$

Интегралы центра тяжести:

$$\left.\begin{aligned} y_1+y_4+y_7&=a_1,\\ y_2+y_5+y_8&=a_2,\\ y_3+y_6+y_9&=a_3,\end{aligned}\right\} \tag{138}$$

и

$$\left.\begin{aligned} m_1x_1+m_4x_4+m_7x_7&=a_1t+b_1=MX_1,\\ m_2x_2+m_5x_5+m_8x_8&=a_2t+b_2=MX_2,\\ m_3x_3+m_6x_6+m_9x_9&=a_3t+b_3=MX_3,\end{aligned}\right\} \tag{139}$$

где $M=m_1+m_2+m_3$ и X_1, X_2, X_3 суть координаты центра тяжести.

Интегралы площадей:

$$\left.\begin{aligned} x_2y_3-x_3y_2+x_5y_6-x_6y_5+x_8y_9-x_9y_8&=c_1,\\ x_3y_1-x_1y_3+x_6y_4-x_4y_6+x_9y_7-x_7y_9&=c_2,\\ x_1y_2-x_2y_1+x_4y_5-x_5y_4+x_7y_8-x_8y_7&=c_3.\end{aligned}\right\} \tag{140}$$

В главе VII было также указано, что кроме этих десяти интегралов в задаче о трех телах не существует больше других алгебраических интегралов или даже трансцендентных однозначных интегралов.

31. Уравнения движения в относительных координатах Якоби. Мы знаем, что при помощи десяти существующих интегралов порядок задачи о трех телах можно понизить с 18 до 8. Мы приведем систему к двенадцатому порядку при помощи 6 интегралов центра тяжести.

Перенесем начало координат в центр тяжести системы трех тел и обозначим новые координаты через ξ_i. Мы, очевидно, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=X_1+\xi_1, & x_4&=X_1+\xi_4, & x_7&=X_1+\xi_7,\\ x_2&=X_2+\xi_2, & x_5&=X_2+\xi_5, & x_8&=X_2+\xi_8,\\ x_3&=X_3+\xi_3, & x_6&=X_3+\xi_6, & x_9&=X_3+\xi_9,\end{aligned}\right\} \tag{141}$$

где X_1, X_2, X_3 суть координаты центра тяжести системы трех тел относительно абсолютных осей. Так как новое начало координат находится в центре тяжести, то новые координаты ξ_i, очевидно, связаны соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} m_1\xi_1 + m_4\xi_4 + m_7\xi_7 &= 0, \\ m_2\xi_2 + m_5\xi_5 + m_8\xi_8 &= 0, \\ m_3\xi_3 + m_6\xi_6 + m_9\xi_9 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{142}$$

откуда, обозначая:

$$\eta_i = m_i \frac{d\xi_i}{dt} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 9), \tag{143}$$

имеем также:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 + \eta_4 + \eta_7 &= 0, \\ \eta_2 + \eta_5 + \eta_8 &= 0, \\ \eta_3 + \eta_6 + \eta_9 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{144}$$

Помножим теперь равенства (141) на m_i и продиференцируем их по t. Так как из (139) $\frac{dX_i}{dt} = \frac{a_i}{M}$, то ввиду формул (133) и (143) мы получим:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{m_1 a_1}{M_1} + \eta_1, & y_4 &= \frac{m_4 a_1}{M} + \eta_4, & y_7 &= \frac{m_7 a_1}{M} + \eta_7, \\ y_2 &= \frac{m_2 a_2}{M} + \eta_2, & y_5 &= \frac{m_5 a_2}{M} + \eta_5, & y_8 &= \frac{m_8 a_2}{M} + \eta_8, \\ y_3 &= \frac{m_3 a_3}{M} + \eta_3, & y_6 &= \frac{m_6 a_3}{M} + \eta_6, & y_9 &= \frac{m_9 a_3}{M} + \eta_9. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения y_i в выражение для живой силы (134) и имея в виду формулы (144), мы получим:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{9} \frac{\eta_i^2}{m_i} + C, \tag{145}$$

где C — постоянная, зависящая от масс и постоянных a_1, a_2, a_3.

Нетрудно видеть, что новые переменные ξ_i и η_i также образуют систему канонических переменных.

Действительно, составим выражение:

$$\sum_{i=1}^{9} y_i\,dx_i - \sum_{i=1}^{9} \eta_i\,d\xi_i. \tag{146}$$

Ввиду (133) и (143) мы найдем:

$$\sum_{i=1}^{9} y_i\,dx_i - \sum_{i=1}^{9} \eta_i\,d\xi_i = dt \sum_{i=1}^{9} \frac{y_i^2}{m_i} - dt \sum_{i=1}^{9} \frac{\eta_i^2}{m_i} = 2C\,dt,$$

т. е. выражение (146) есть полный диференциал, а следовательно (см. § 14), ξ_i и η_i суть канонические переменные.

Система (136) заменится следующей системой:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \eta_i}, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_i} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \ldots, 9), \right\} \tag{147}$$

где мы можем принять:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{9} \frac{\eta_i^2}{m_i} - U, \tag{148}$$

так как постоянную C в формуле (145) можно просто отбросить. Система (147) также восемнадцатого порядка, и чтобы понизить порядок до 12, нужно ввести новые переменные.

Переменные ξ_i и η_i связаны между собой шестью линейными соотношениями (142) и (144), и, следовательно, мы можем выразить ξ_i и η_i в функции 12 независимых параметров, которые и будут играть роль новых координат. Эти новые переменные можно, конечно, ввести различными способами, и их выбор всецело зависит от нашего желания. Мы произведем этот выбор таким образом, чтобы новые уравнения также имели каноническую форму и чтобы живая сила содержала, так же как и выражение (145), только квадраты переменных, соответствующих переменным η_i. Для этого введем сначала вместо 9 переменных ξ_i 6 новых переменных q_i и свяжем старые и новые переменные линейными соотношениями вида:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_4, & \xi_2 &= \alpha_{11}q_2 + \alpha_{12}q_5, & \xi_3 &= \alpha_{11}q_3 + \alpha_{12}q_6, \\ \xi_4 &= \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_4, & \xi_5 &= \alpha_{21}q_2 + \alpha_{22}q_5, & \xi_6 &= \alpha_{21}q_3 + \alpha_{22}q_6, \\ \xi_7 &= \alpha_{31}q_1 + \alpha_{32}q_4, & \xi_8 &= \alpha_{31}q_2 + \alpha_{32}q_5, & \xi_9 &= \alpha_{31}q_3 + \alpha_{32}q_6. \end{aligned}\right\} \tag{149}$$

Так как переменные ξ_i должны удовлетворять трем соотношениям (142), то нетрудно видеть, что постоянные α_{ij} должны быть связаны двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} m_a\alpha_{11} + m_b\alpha_{21} + m_c\alpha_{31} &= 0, \\ m_a\alpha_{12} + m_b\alpha_{22} + m_c\alpha_{32} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{150}$$

Потребуем теперь, чтобы живая сила T имела следующее выражение:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} \mu_i q_i'^2, \tag{151}$$

где μ_i — постоянные множители. Так как в старых переменных T определяется формулой:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{9} m_i \left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2,$$

то для выполнения последнего условия, очевидно, необходимо, чтобы постоянные α_{ij} удовлетворяли еще одному соотношению:

$$m_a\alpha_{11}\alpha_{12}+m_b\alpha_{21}\alpha_{22}+m_c\alpha_{31}\alpha_{32}=0\,, \tag{152}$$

и тогда коэфициенты μ_i определяются фор улами:

$$\left.\begin{aligned}\mu_1=\mu_2=\mu_3=m_a\alpha_{11}^2+m_b\alpha_{21}^2+m_c\alpha_{31}^2,\\ \mu_4=\mu_5=\mu_6=m_a\alpha_{12}^2+m_b\alpha_{22}^2+m_c\alpha_{32}^2.\end{aligned}\right\} \tag{153}$$

Между коэфициентами α_{ij} мы установили два соотношения (150) и одно соотношение (152). Следовательно, мы можем еще установить произвольно три соотношения и этим произволом мы воспользуемся, следуя Якоби, для того, чтобы новые координаты q_i имели простое геометрическое значение.

Пусть g обозначает центр тяжести тел A и B, и пусть q_1, q_2, q_3 обозначают координаты тела B относительно системы координат с началом в теле A, а q_4, q_5, q_6 — координаты тела C относительно системы координат с началом в точке g. При этом оси всех систем координат остаются параллельными абсолютным осям.

Выбирая координаты q_1, q_2, q_3, и q_4, q_5, q_6 только что указанным образом, мы можем теперь без всякого труда однозначно определить коэфициенты α_{ij}.

Действительно, из геометрических соображений следует, что

$$\begin{aligned}\xi_4&=q_1+\xi_1,\\ \xi_5&=q_2+\xi_2,\\ \xi_6&=q_3+\xi_3,\\ \xi_7&=q_4+\frac{m_a\xi_1+m_b\xi_4}{m_a+m_b},\\ \xi_8&=q_5+\frac{m_a\xi_2+m_b\xi_5}{m_a+m_b},\\ \xi_9&=q_6+\frac{m_a\xi_3+m_b\xi_6}{m_a+m_b}.\end{aligned}$$

Подставляя в эти формулы вместо величин ξ_i их выражения (149) и приравнивая коэфициенты при q_i, мы получим, как нетрудно проверить, соотношения:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{21}&=1+\alpha_{11},\\ \alpha_{22}&=\alpha_{12},\\ (m_a+m_b)\,\alpha_{31}&=m_a\alpha_{11}+m_b\alpha_{21},\\ (m_a+m_b)\,\alpha_{32}&=m_a+m_b+m_a\alpha_{12}+m_b\alpha_{22},\end{aligned}\right\} \tag{154}$$

откуда с помощью равенств (150) и (152) находим без труда:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{m_b}{m_a+m_b}, & a_{12} &= -\frac{m_c}{m_a+m_b+m_c}, \\ a_{21} &= \frac{m_a}{m_a+m_b}, & a_{22} &= -\frac{m_c}{m_a+m_b+m_c}, \\ a_{31} &= 0, & a_{32} &= \frac{m_a+m_b}{m_a+m_b+m_c}, \end{aligned}\right\} \tag{155}$$

а затем по формулам (153) получим:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 &= \frac{m_a m_b}{m_a+m_b} = \mu, \\ \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 &= \frac{m_c(m_a+m_b)}{m_a+m_b+m_c} = \mu'. \end{aligned}\right\} \tag{156}$$

Выражение для живой силы примет вид:

$$T = \frac{1}{2}\mu(q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2) + \frac{1}{2}\mu'(q_4'^2 + q_5'^2 + q_6'^2).$$

Полагая:

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

мы получим систему канонических переменных q_i и p_i, диференциальные уравнения которых будут иметь вид:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6), \tag{157}$$

где $H = T - U$, или

$$H = \frac{1}{2\mu}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2\mu'}(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) - \frac{k^2 m_b m_c}{r_{bc}} - \frac{k^2 m_c m_a}{r_{ca}} - \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}} \tag{158}$$

Так как система (157) двенадцатого порядка, то наша цель достигнута.

32. Вариация произвольных постоянных. Хотя система (157) имеет порядок на шесть единиц ниже, чем система (147) или первоначальная система (136), тем не менее мы все же ее интегрировать не умеем и для практических применений должны встать на путь последовательных приближений.

Допустим, что масса m_a тела A очень велика по сравнению с двумя другими массами. В первом приближении мы можем пренебречь действием тел B и C на тело A и друг на друга. Тогда тело B будет описывать коническое сечение с фокусом в A, а тело C будет описывать коническое сечение с фокусом в точке g, и в первом приближении элементы этих орбит будут величинами постоянными. Действительные орбиты тел B и C мы можем рассматривать (см. главу IX) как конические сечения с непрерывно изменяющимися элементами, и непосредственной целью теории возмущений является получение выражений для этих элементов в функции времени.

Эта задача была подробно рассмотрена в главе X. Здесь мы рассмотрим только вкратце, как решается эта же задача с помощью канонических уравнений. Обозначим расстояние от тела C до точки g через r_{cg}. Тогда, мы имеем:

$$r_{ab} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}, \quad r_{cg} = \sqrt{q_4^2 + q_5^2 + q_6^2}.$$

Представим характеристическую функцию системы (157) в виде:

$$H = H_0 + R, \tag{159}$$

$$H_0 = \frac{1}{2\mu}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2\mu'}(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) - \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}} - \frac{k^2 m_a m_c}{r_{cg}} \tag{160}$$

и

$$R = \frac{k^2 m_a m_c}{r_{cg}} - \frac{k^2 m_c m_a}{r_{ca}} - \frac{k^2 m_b m_c}{r_{bc}} \tag{161}$$

и рассмотрим систему, аналогичную системе (157), но с характеристической H_0 вместо H:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \ldots, 6). \right\} \tag{162}$$

Система (162) распадается на две независимые системы, которые получим, давая индексу i сначала значения $1, 2, 3$, а потом $4, 5, 6$. Действительно, полагая:

$$H_b = \frac{1}{2\mu}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{k^2 m_a m_b}{r_{ab}} \tag{163}$$

и

$$H_c = \frac{1}{2\mu'}(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) - \frac{k^2 m_a m_c}{r_{gc}}, \tag{164}$$

мы имеем:

$$H_0 = H_b + H_c, \tag{165}$$

откуда

$$\frac{\partial H_0}{\partial p_i} = \frac{\partial H_b}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial H_0}{\partial q_i} = \frac{\partial H_b}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial p_i} = \frac{\partial H_c}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial H_0}{\partial q_i} = \frac{\partial H_c}{\partial q_i} \qquad (i = 4, 5, 6),$$

и система (162) напишется в виде:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_b}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_b}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{166}$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_c}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} \qquad (i = 4, 5, 6). \tag{167}$$

Так как системы (166) и (167) имеют один и тот же вид, то достаточно рассмотреть какую-нибудь одну из них, например первую. Уравнение Гамильтона-Якоби для системы (166) напишется в следующем виде:

$$\frac{1}{2\mu}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2\right]=\frac{k^2 m_a m_b}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}+h_1,$$

или

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2=\frac{2\beta^2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}+2\mu h_1, \tag{168}$$

где положено для сокращения

$$\beta^2=k^2 m_a m_b\,\mu=\frac{k^2 m_a^2 m_b^2}{m_a+m_b}. \tag{169}$$

Уравнение (168) имеет такой же вид, как и уравнение Гамильтона-Якоби в задаче о двух телах (см. § 26). Только здесь вместо μ стоит β^2 и вместо h — μh_1. Следовательно, мы можем интегрировать уравнение (168) совершенно так же, как в § 27, и применяя теорему Гамильтона-Якоби, мы найдем общий интеграл системы (166) в виде:

$$\left.\begin{aligned}q_i&=q_i(t, h_1, h_2, h_3, H_1, H_2, H_3),\\ p_i&=p_i(t, h_1, h_2, h_3, H_1, H_2, H_3)\end{aligned}\quad (i=1, 2, 3),\right\} \tag{170}$$

где h_i и H_i суть канонические элементы невозмущенного движения тела B относительно тела A. Аналогично интегрируется система (167), и мы получим:

$$\begin{aligned}q_i&=q_i(t, h_4, h_5, h_6, H_4, H_5, H_6),\\ p_i&=p_i(t, h_4, h_5, h_6, H_4, H_5, H_6)\end{aligned}\quad (i=4, 5, 6), \tag{171}$$

где h_i и H_i суть канонические элементы невозмущенного движения тела C относительно центра тяжести g тел A и B. Эти канонические элементы выражаются через обычные эллиптические элементы орбит тел B и C следующим образом (см. § 28):

$$\left.\begin{aligned}h_1&=-\frac{\beta^2}{2\mu a}, & h_2&=\beta\sqrt{a(1-e^2)}, & h_3&=\beta\sqrt{a(1-e^2)}\cos i,\\ H_1&=-\tau, & H_2&=\pi-\Omega, & H_3&=\Omega\end{aligned}\right\} \tag{172}$$

и

$$\left.\begin{aligned}h_4&=-\frac{\beta'^2}{2\mu' a'}, & h_5&=\beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}, & h_6&=\beta'\sqrt{a'(1-e'^2)}\cos i',\\ H_4&=-\tau', & H_5&=\pi'-\Omega', & H_6&=\Omega',\end{aligned}\right\} \tag{173}$$

$$\beta=\frac{k m_a m_b}{\sqrt{m_a+m_b}},\qquad \beta'=\frac{k m_c\sqrt{m_a+m_b}}{\sqrt{m_a+m_b+m_c}} \tag{174}$$

и

$$\mu=\frac{m_a m_b}{m_a+m_b},\qquad \mu'=\frac{m_c(m_a+m_b)}{m_a+m_b+m_c}. \tag{175}$$

Формулы (170) и (171) определяют промежуточные орбиты тел B и C.

Переходя теперь к действительным орбитам, мы должны считать элементы h_i, H_i уже не постоянными величинами, но функциями времени, которые будут определяться канонической системой диференциальных уравнений (см. § 12 и 24):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dh_i}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial H_i}, \\ \frac{dH_i}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial h_i} \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots 6), \right\} \tag{176}$$

где характеристическая функция R должна быть выражена через элементы h_i и H_i при помощи формул (170) и (171). Из этих уравнений можно получить обычные диференциальные уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов (см. главу X). Для этого достаточно преобразовать систему (176) к новым переменным $a, \ldots, \Omega, a', \ldots, \Omega'$ при помощи формул (172) и 173).

33. Канонические элементы Делонэ. Система (176) не может быть точно проинтегрирована, и для решения задачи приходится прибегать к приближенным методам. Идея этих методов была дана с достаточной ясностью в главе X.

Характеристическая функция системы (176) R, называемая обычно пертурбационной функцией, разлагается в кратный ряд Фурье, коэфициенты которого зависят от $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6$, а аргументы — от времени t и $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$. В эти разложения входят множителями при t средние движения n и n' тел B и C, и это обстоятельство является причиной неудобства применения введенных канонических элементов. Действительно, среднее движение в задаче о двух телах определяется формулой:

$$n = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T},$$

где $2T$ есть период обращения. Для вычисления этого периода воспользуемся формулой (125) § 28:

$$t - \tau = \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{r^2}}}.$$

Положим в этой формуле $r = r_2$, тогда t будет соответствовать моменту прохождения через афелий, и $t - \tau$ будет равно половине периода, т. е. T. Итак:

$$T = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h_1 - \frac{h_2^2}{t^2}}}.$$

В нашем случае μ равно β^2 или β'^2 и h_1 нужно заменить на μh_1 и $\mu' h_1$. Вычисляя интегралы, мы получим без труда:

$$n = \frac{\beta}{\mu a^{\frac{3}{2}}}, \quad n' = \frac{\beta'}{\mu' a'^{\frac{3}{2}}}. \tag{177}$$

В разложении пертурбационной функции R имеются члены вида:

$$A \cdot \frac{\sin}{\cos} \{(jn + j'n')\, t + \ldots\}, \tag{178}$$

где A зависит только от h_i. Чтобы написать в явном виде уравнения (176), мы должны вычислить частные производные от R по элементам. Рассмотрим производные от R по h_1 и h_4. Ввиду формулы (178) мы получим в правых частях диференциальных уравнений члены вида:

$$\frac{\partial A}{\partial h_1} \frac{\sin}{\cos} \{(jn + j'n')\, t + \ldots\} + Ajt \frac{\partial n}{\partial h_1} \frac{\cos}{-\sin} \{(jn + j'n')\, t + \ldots\},$$

$$\frac{\partial A}{\partial h_4} \frac{\sin}{\cos} \{(jn + j'n')\, t + \ldots\} + Aj't \frac{\partial n'}{\partial h_4} \frac{\cos}{-\sin} \{(jn + j'n')\, t + \ldots\},$$

так как n и n' зависят от h_1 и h_4 посредством a и a'. Мы получаем таким образом в правых частях уравнений (176) члены, содержащие множителем t, и это обстоятельство крайне затрудняет интегрирование. Этот недостаток легко уничтожить введением новых переменных, что было сделано для неканонических элементов уже Лапласом и Лагранжем. Для канонических элементов такую замену дал впервые Делонэ в исследованиях по теории Луны.

Введем, следуя Делонэ, вместо h_1 и h_4 новые переменные l и l':

$$l = n(t + H_1), \quad l' = n'(t + H_4) \tag{179}$$

и рассмотрим преобразование системы (176) к этим новым переменным. Мы имеем:

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial H_1} \quad \text{и} \quad \frac{dH_1}{dt} = \frac{\partial R}{\partial h_1}$$

и аналогичные уравнения для h_4 и H_4, которые для сокращения выписывать не будет. Преобразуем правые части этих уравнений. Имеем:

$$\frac{\partial R}{\partial H_1} = \frac{\partial R}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial H_1} = n \frac{\partial R}{\partial l},$$

и таким образом

$$\frac{dh_1}{dt} = -n \frac{\partial R}{\partial l}. \tag{180}$$

Далее из (179) получаем:

$$\frac{dl}{dt} = n\left(1 + \frac{dH_1}{dt}\right) + (t + H_1) \frac{\partial n}{\partial h_1} \frac{dh_1}{dt}. \tag{181}$$

Обозначим через $\left(\frac{\partial R}{\partial h_1}\right)$ частную производную от R по h_1, входящему явно. Тогда:

$$\frac{\partial R}{\partial h_1} = \left(\frac{\partial R}{\partial h_1}\right) + \frac{\partial R}{\partial l} (t + H_1) \frac{\partial n}{\partial h_1}. \tag{182}$$

Подставляя теперь в формулу (181) вместо $\frac{dH_1}{dt}$ его значение $\frac{\partial R}{\partial h_1}$ и вместо $\frac{\partial R}{\partial h_1}$ его значение (182), мы получим:

$$\frac{dl}{dt} = n + n\left(\frac{\partial R}{\partial h_1}\right) + n\frac{\partial R}{\partial l}(t + H_1)\frac{\partial n}{\partial h_1} - (t + H_1)\frac{\partial n}{\partial h_1}\frac{dh_1}{dt},$$

откуда ввиду формулы (180) находим:

$$\frac{dl}{dt} = n + n\left(\frac{\partial R}{\partial h_1}\right).$$

Итак, уравнения $\frac{dh_1}{dt} = \frac{\partial R}{\partial H_1}$ и $\frac{dH_1}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial h_1}$ заменяются следующими:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= -n\frac{\partial R}{\partial l}, \\ \frac{dl}{dt} &= n + n\left(\frac{\partial R}{\partial h_1}\right), \end{aligned}\right\} \tag{183}$$

и наша задача разрешена, так как $\left(\frac{\partial R}{\partial h_1}\right)$ обозначает результат диференцирования по h_1, входящему явно. Уравнения (183) можно привести к каноническому виду. Для этого введем вместо h_1 новый элемент L формулой:

$$L = \beta\sqrt{a}. \tag{184}$$

Заменяя a его выражением через h_1, получим:

$$L = \frac{\beta^2}{\sqrt{-2\mu h_1}},$$

откуда

$$h_1 = -\frac{\beta^4}{2\mu L^2}.$$

Тогда (см. 177)

$$n = \frac{\beta^4}{\mu L^3},$$

и мы имеем:

$$-n\frac{\partial R}{\partial l} = \frac{dh_1}{dt} = \frac{\beta^4}{\mu L^3}\frac{dL}{dt} = n\frac{dL}{dt},$$

и поэтому

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial l}.$$

Далее

$$\left(\frac{\partial R}{\partial l}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial h_1}\right)\frac{\partial h_1}{\partial L} = n\left(\frac{\partial R}{\partial h_1}\right),$$

и вместо уравнений (183) мы находим следующее:

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dt} = n + \frac{\partial R}{\partial L},$$

где скобки в обозначении $\frac{\partial R}{\partial L}$ просто опущены.

Введем теперь новую характеристическую функцию:

$$F_1 = \frac{\beta^4}{2\mu L^2} - R.$$

Тогда предыдущие уравнения напишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F_1}{\partial l}, \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F_1}{\partial L}. \end{aligned}\right\} \tag{185}$$

Таким же образом уравнения $\frac{dh_4}{dt} = \frac{\partial R}{\partial H_4}$ и $\frac{dH_4}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial h_4}$ заменяются следующими:

$$\frac{dL'}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial l'}, \quad \frac{dl'}{dt} = -\frac{\partial F_2}{\partial L'}, \tag{186}$$

где

$$F_2 = \frac{\beta'^4}{2\mu' L'} - R.$$

Очевидно, что уравнения (185) и (186) могут быть написаны с одной и той же характеристической функцией F, если мы положим:

$$F = \frac{\beta^4}{2\mu L^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu' L'^2} - R. \tag{187}$$

Обозначим для симметрии элементы орбиты тела B через L, G, H, l, g, h и соответствующие элементы орбиты тела C через L', G', H', l', g', h'. Тогда вместо системы (176) мы будем иметь следующую систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}, \\ \frac{dL'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l'}, & \frac{dl'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L'}, \\ \frac{dG'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g'}, & \frac{dg'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G'}, \\ \frac{dH'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h'}, & \frac{dh'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H'}, \end{aligned}\right\} \tag{188}$$

где

$$\left.\begin{aligned} L &= \beta\sqrt{a}, & l &= n(t-\tau), \\ G &= \beta\sqrt{a(1-e^2)}, & g &= \pi - \Omega, \\ H &= \beta\sqrt{a(1-e^2)}\cos i, & h &= \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{189}$$

$$\left.\begin{aligned} L' &= \beta' \sqrt{a'}, & l' &= n'(t-\tau'), \\ G' &= \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)}, & g' &= \pi' - \Omega', \\ H' &= \beta' \sqrt{a'(1-e'^2)}\cos i', & h' &= \Omega' \end{aligned}\right\} \tag{190}$$

и

$$F = \frac{\beta^4}{2\mu L^2} + \frac{\beta'^4}{2\mu' L'^2} + \frac{k^2 m_c m_a}{r_{ca}} + \frac{k^2 m_b m_c}{r_{bc}} - \frac{k^2 m_a m_c}{r_{cg}}. \tag{191}$$

34. Другие системы канонических элементов. Элементы Делонэ,

$$L,\ G,\ H,$$
$$l,\ g,\ h,$$

которые мы ввели в предыдущем параграфе, можно преобразовать в какие-либо другие канонические элементы и притом бесчисленным множеством способов. Неудобство элементов Делонэ для теории планет заключается в том, что так как в планетных орбитах эксцентриситеты и наклонности малы, то L, G, H остаются конечными и могут принимать большие значения. Но пертурбационную функцию F приходится разлагать в ряды по степеням именно этих величин, а поэтому желательно преобразовать их в другие, которые во все время движения оставались бы достаточно малыми. Мы достигнем этой цели, вводя вместо элементов Делонэ другие элементы следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda &= L, & \lambda &= l + g + h, \\ \Gamma &= L - G, & \gamma &= -g - h, \\ Z &= G - H, & z &= -h. \end{aligned}\right\} \tag{192}$$

Нетрудно проверить, что величины:

$$\Lambda,\ \Gamma,\ Z,$$
$$\lambda,\ \gamma,\ z$$

также образуют систему канонических элементов. Действительно, образуем выражение:

$$l dL + g dG + h dH - \lambda d\Lambda - \gamma d\Gamma - h dZ. \tag{193}$$

Ввиду формул (192) мы находим, что оно равно:

$$dL + g dG + h dH - (l+g+h)\, dL + (g+h)\,(dL - dG) + h\,(dG - dH) = 0,$$

т. е. выражение (193) есть полный диференциал, а следовательно (см. § 14), новые переменные образуют систему канонических переменных с той же самой характеристической функцией F.

Новые диференциальные уравнения напишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Lambda}{dt}&=\frac{\partial F}{\partial\lambda}, & \frac{d\lambda}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial\Lambda},\\
\frac{d\Gamma}{dt}&=\frac{\partial F}{\partial\gamma}, & \frac{d\gamma}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial\Gamma},\\
\frac{dZ}{dt}&=\frac{\partial F}{\partial z}, & \frac{dz}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial Z},\\
\frac{d\Lambda'}{dt}&=\frac{\partial F}{\partial\lambda'}, & \frac{d\lambda'}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial\Lambda'},\\
\frac{d\Gamma'}{dt}&=\frac{\partial F}{\partial\gamma'}, & \frac{d\gamma'}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial\Gamma'},\\
\frac{dZ'}{dt}&=\frac{\partial F}{\partial z'}, & \frac{dz'}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial Z'},
\end{aligned}\right\}\tag{194}$$

где

$$\Lambda',\ \Gamma',\ Z',$$

$$\lambda',\ \gamma',\ z'.$$

обозначают соответствующие элементы второго тела, и характеристическая функция F определяется формулой:

$$F=\frac{\beta^4}{2\mu\Lambda^2}+\frac{\beta'^4}{2\mu'\Lambda'^2}+\frac{k^2m_cm_a}{r_{ca}}+\frac{k^2m_bm_c}{r_{bc}}-\frac{k^2m_am_c}{r_{gc}}.$$

Новые элементы нетрудно выразить через эллиптические элементы. При помощи формул (189) находим:

$$\left.\begin{aligned}
&\Lambda=\beta\sqrt{a}, \quad \Gamma=\beta\sqrt{a}\,(1-\sqrt{1-e^2}), \quad Z=\beta\sqrt{a\,(1-e^2)}\,(1-\cos i),\\
&\lambda=l+\pi, \quad \gamma=-\pi, \quad z=-\Omega
\end{aligned}\right\}\tag{195}$$

и соответствующие формулы для элементов другого тела. Отсюда видно, что если e и i малы, то Γ и z также малы, и мы будем разлагать пертурбационную функцию по степеням малых величин.

В заключение рассмотрим еще одну систему канонических элементов. Не трогая элементов Λ и λ, введем вместо Γ, γ, Z, z новые элементы ξ, η, p, q формулами:

$$\left.\begin{aligned}
\xi&=\sqrt{2\Gamma}\cos\gamma, & \eta&=\sqrt{2\Gamma}\sin\gamma,\\
p&=\sqrt{2Z}\cos z, & q&=\sqrt{2Z}\sin z.
\end{aligned}\right\}\tag{196}$$

Чтобы убедиться, что новые переменные также образуют каноническую систему, образуем выражение:

$$\Gamma\,d\gamma+Z\,dz-\xi\,d\eta-p\,dq.\tag{197}$$

Из (196) находим:

$$\xi\, d\eta = \sin\gamma\cos\gamma\, d\Gamma + 2\Gamma\cos^2\gamma\, d\gamma,$$

откуда

$$\Gamma\, d\gamma - \xi\, d\eta = \Gamma(1 - 2\cos^2\gamma)\, d\gamma - \sin\gamma\cos\gamma\, d\Gamma =$$
$$= -\Gamma\cos 2\gamma\, d\gamma - \frac{\sin 2\gamma}{2}\, d\Gamma = d\left(-\frac{\Gamma}{2}\sin 2\gamma\right),$$

и аналогично:

$$Z\, dz - p\, dq = d\left(-\frac{Z}{2}\sin 2z\right).$$

Следовательно:

$$\Gamma\, d\gamma + Z\, dz - \xi\, d\eta - p\, dq = d\left(-\frac{\Gamma}{2}\sin 2\gamma - \frac{Z}{2}\sin 2z\right)$$

есть полный диференциал, что и доказывает, что новые переменные также образуют каноническую систему. Новые диференциальные уравнения напишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Lambda}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial\lambda}, & \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial\Lambda},\\
\frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial\eta}, & \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial\xi},\\
\frac{dp}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q}, & \frac{dq}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial p},\\
\frac{d\Lambda'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial\lambda'}, & \frac{d\lambda'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial\Lambda'},\\
\frac{d\xi'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial\eta'}, & \frac{d\eta'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial\xi'},\\
\frac{dp'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q'}, & \frac{dq'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial p'},
\end{aligned}\right\} \tag{197}$$

где Λ', λ', ξ', η', p', q' суть соответствующие элементы второго тела. Через эллиптические элементы новые элементы выражаются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
\Lambda &= \beta\sqrt{a},\\
\lambda &= l + \pi,\\
\xi &= \sqrt{2\Lambda\left(1 - \sqrt{1 - e^2}\right)}\cos\pi,\\
\eta &= -\sqrt{2\Lambda\left(1 - \sqrt{1 - e^2}\right)}\sin\pi,\\
p &= \sqrt{2\Lambda\sqrt{1 - e^2}\,(1 - \cos i)}\cos\Omega,\\
q &= -\sqrt{2\Lambda\sqrt{1 - e^2}\,(1 - \cos i)}\sin\Omega,
\end{aligned}\right\} \tag{180}$$

откуда видно, что если e и i малы, то и ξ, η, p и q также будут малы по абсолютной величине, вследствие чего оказывается очень выгодным разлагать пертурбационную функцию по степеням этих величин. Заметим, что последние элементы введены Пуанкаре и поэтому называются каноническими элементами Пуанкаре.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ ЗАДАЧИ О ТРЕХ ТЕЛАХ

35. Задача о двух неподвижных центрах. Рассмотрим следующую задачу. Пусть мы имеем две неподвижные материальные точки с массами m и m', под действием ньютонианского притяжения которых движется материальная точка P.

Рассмотрим для простоты случай плоского движения, для чего необходимо, чтобы направление начальной скорости точки P лежало в плоскости, образованной точками m и m' и начальным положением P. Примем за начало координат середину постоянного расстояния между точками m и m'. Ось x направим по линии mm', ось y — перпендикулярно к mm'. Тогда диференциальные уравнения движения точки напишутся в следующем виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y}, \tag{199}$$

где

$$U=\frac{m}{r}+\frac{m'}{r'}, \tag{200}$$

и r, r' суть расстояния точки P от m и m':

$$r=\sqrt{(c-x)^2+y^2}, \quad r'=\sqrt{(c+x)^2+y^2}, \tag{201}$$

причем $2c$ обозначает постоянное расстояние mm'. Систему (199) нетрудно привести к каноническому виду. Действительно, обозначая через H разность $T-U$:

$$H=T-U,$$

где

$$T=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]=\frac{1}{2}(x'^2+y'^2),$$

мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial x'}, & \frac{dx'}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial x},\\ \frac{dy}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial y'}, & \frac{dy'}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{202}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби для системы (202) напишется в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right]=\frac{m}{\sqrt{(c-x)^2+y^2}}+\frac{m'}{\sqrt{(c+x)^2+y^2}}+h \tag{203}$$

и непосредственно в этом виде интегрировано быть не может.

Введем теперь вместо переменных x, y, x', y' новые переменные q_1, q_2, p_1, p_2 формулами:

$$\left.\begin{aligned}q_1&=\frac{1}{2}(r+r'), & p_1&=\frac{\partial T}{\partial q_1'},\\ q_2&=\frac{1}{2}(r-r'), & p_2&=\frac{\partial T}{\partial q_2'}.\end{aligned}\right\} \tag{204}$$

Переменные q_1 и q_2 называются эллиптическими координатами, так как геометрическое место точек, для которых $q_1 = \text{const.}$, есть эллипс с фокусами в m и m', и геометрическое место точек, для которых $q_2 = \text{const.}$, есть гипербола с теми же фокусами. Очевидно, что переменные q_1, q_2, p_1, p_2 образуют каноническую систему, и мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_2}, \\ \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}, & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_2}. \end{aligned}\right\} \tag{205}$$

Теперь остается выразить характеристическую функцию H через новые переменные. Из формул (204) мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} c^2x^2 &= q_1^2 \cdot q_2^2, \\ c^2y^2 &= (q_1^2 - c^2)(c^2 - q_2^2). \end{aligned}\right\} \tag{206}$$

Логарифмируя и диференцируя эти формулы, получим

$$\frac{dx}{x} = \frac{dq_1}{q_1} + \frac{dq_2}{q_2},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{q_1 dq_1}{q_1^2 - c^2} - \frac{q_2 dq_2}{c^2 - q_2^2}$$

или

$$c\,dx = q_2\,dq_1 + q_1\,dq_2,$$

$$c\,dy = \sqrt{\frac{c^2 - q_2^2}{q_1^2 - c^2}}\,q_1\,dq_1 - \sqrt{\frac{q_1^2 - c^2}{c^2 - q_2^2}}\,q_2\,dq_2.$$

Следовательно:

$$dx^2 + dy^2 = \frac{q_1^2 - q_2^2}{q_1^2 - c^2}\,dq_1^2 + \frac{q_1^2 - q_2^2}{c^2 - q_2^2}\,dq_2^2,$$

откуда

$$T = \frac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2)\left[\frac{q_1'^2}{q_1^2 - c^2} + \frac{q_2'^2}{c^2 - q_2^2}\right].$$

По формулам (204) находим:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'} = \frac{q_1^2 - q_2^2}{q_1^2 - c^2}\,q_1', \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'} = \frac{q_1^2 - q_2^2}{c^2 - q_2^2}\,q_2',$$

и следовательно:

$$T = \frac{1}{2(q_1^2 - q_2^2)}[(q_1^2 - c^2)\,p_1^2 + (c^2 - q_2^2)\,p_2^2]. \tag{207}$$

Силовая функция U, как легко проверить, будет иметь следующий вид:

$$U = \frac{1}{q_1^2 - q_2^2}[(m + m')\,q_1 - (m - m')\,q_2]. \tag{208}$$

Обращаясь к § 20, мы видим, что в настоящем случае соблюдены условия теоремы Лиувилля и, следовательно, уравнение Гамильтона-Якоби интегрируется в квадратурах. Так как (см. § 20)

$$A_1(q_1) = q_1^2 - c^2, \qquad A_2(q_2) = c^2 - q_2^2,$$
$$B_1(q_1) = q_1^2, \qquad B_2(q_2) = -q_2^2,$$
$$U_1(q_1) = (m + m')\,q_1, \qquad U_2(q_2) = -(m - m')\,q_2,$$

то полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби напишется в виде:

$$W = \int \sqrt{2(q_1^2 - c^2)\left[(m + m')\,q_1 + hq_1^2 + \alpha_1\right]}\,dq_1 + \\ + \int \sqrt{2(c^2 - q_2^2)\left[-hq_2^2 + \alpha_2 - (m - m')\,q_2\right]}\,dq_2, \tag{209}$$

где $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, и решение системы (205) определится формулами:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial h} &= t + \beta_1, & \frac{\partial W}{\partial q_1} &= p_1, \\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} &= \beta_2 & \frac{\partial W}{\partial q_2} &= p_2. \end{aligned}\right\} \tag{210}$$

Из формул (210) можно определить координаты q_1 и q_2 в функции времени и четырех произвольных постоянных h, α_2, β_1, β_2. Относительно t, q_1 и q_2 будут эллиптическими функциями. Задача решается до конца и с математической стороны разработана очень подробно.

36. Ограниченная задача о трех телах. Диференциальные уравнения задачи были выведены в главе VIII. Мы рассмотрим здесь только случай плоского движения. Тогда $z = 0$, и уравнения примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{211}$$

где

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{m}{r} + \frac{m'}{r'}. \tag{212}$$

Чтобы привести систему к каноническому виду, положим:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= x, & q_2 &= y, \\ p_1 &= \frac{dx}{dt} - y, & p_2 &= \frac{dy}{dt} + x. \end{aligned}\right\} \tag{213}$$

Тогда

$$T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + (p_1 q_2 - p_2 q_1) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2), \tag{214}$$

и характеристическая функция H примет следующий вид:

$$H = T - U = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + (p_1 q_2 - p_2 q_1) - \frac{m}{r} - \frac{m'}{r'} \ldots \tag{215}$$

Система (211) заменится следующей:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_2}, \\ \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}, & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \end{aligned}\right\} \tag{216}$$

Эта система имеет интеграл:

$$H = \text{const.},$$

который носит название интеграла Якоби.

Напишем теперь уравнение Гамильтона-Якоби для системы (216). Мы имеем:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 + 2q_2 \frac{\partial W}{\partial q_1} - 2q_1 \frac{\partial W}{\partial q_2} = 2h + \frac{2m}{r} + \frac{2m'}{r'}. \tag{217}$$

Уравнение (217) не интегрируется в квадратурах, и поэтому для решения задачи нужно прибегнуть к приближенным методам. Для этой цели можно воспользоваться результатами предыдущего параграфа.

Преобразуем переменные так, чтобы начало координат лежало по середине между телами m и m'. Так как для системы (211) начало координат лежит в центре тяжести тел m и m', то координаты середины отрезка m и m' будут:

$$\frac{1}{2}\,\frac{m - m'}{m + m'} \quad \text{и} \quad 0.$$

Перенося начало координат, вводим новые переменные формулами:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \xi_1 + \frac{1}{2}\,\frac{m - m'}{m + m'}, & q_2 &= \xi_2, \\ \eta_1 &= p_1, & \eta_2 &= p_2. \end{aligned}\right\}$$

Очевидно, что новые переменные также образуют каноническую систему, и мы имеем вместо (216):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \eta_1}, & \frac{d\xi_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \eta_2}, \\ \frac{d\eta_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_1}, & \frac{d\eta_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_2}. \end{aligned}\right\} \tag{219}$$

Характеристическая функция H в новых переменных будет иметь вид:

$$H = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) + \eta_1 \xi_2 - \eta_2 \xi_1 - \frac{1}{2}\,\frac{m - m'}{m + m'}\,\eta_2 - \frac{m}{r} - \frac{m'}{r'}. \tag{220}$$

Разобьем H на две части, полагая:

$$H = H_0 + H_1,$$

где

$$H_0 = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2) - \frac{m}{r} - \frac{m'}{r'},$$

$$H_1 = \eta_1\xi_2 - \eta_2\xi_1 - \frac{1}{2}\frac{m - m'}{m + m'}\eta_2.$$

Система:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial \eta_1}, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial \eta_2},$$

$$\frac{d\eta_1}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial \xi_1}, \quad \frac{d\eta_2}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial \xi_2}$$

может быть интегрирована так же, как в § 35.

Тогда (см. § 25) канонические элементы α_i и w_i определятся системой:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial w_1}, & \frac{d\alpha_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial w_2}, \\ \frac{dw_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \alpha_1}, & \frac{dw_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \alpha_2}, \end{aligned}\right\} \qquad (221)$$

которую можно интегрировать приближенно при помощи разложений в ряды.

Заметим, что фактически этот метод ни разу не применялся, и ограниченная задача о трех телах исследуется обычно другими методами.

ДОБАВЛЕНИЕ II

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

ПОСТАНОВКА ВОПРОСА

1. Общее определение устойчивости. Пусть имеем какую-нибудь материальную систему (например систему материальных точек), положение которой определяется k независимыми переменными:

$$q_1, q_2, \ldots, q_k.$$

Пусть эти переменные определяются системой диференциальных уравнений в виде Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = R_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \qquad (1)$$

где T и R_i суть известные функции от $t, q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots q'_k$. Уравнения (1) образуют систему обыкновенных диференциальных уравнений второго порядка, и решение этих уравнений при заданных T и R_i определяется системой начальных значений функций q_i и q'_i при $t = t_0$, где t_0 — произвольное, но определенное число. Как и раньше, эти начальные значения мы будем обозначать буквами:

$$\left.\begin{array}{l} q_1^0, \ q_2^0, \ \ldots, \ q_k^0, \\ q_1'^0, \ q_2'^0, \ \ldots, \ q_k'^0. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Тогда решение системы (1) запишется в следующем виде:

$$q_i = q_i\,(t, q_1^0, q_2^0, \ldots, q_k^0; q_1'^0, q_2'^0, \ldots, q_k'^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \qquad (3)$$

Предположим, что мы нашли некоторое частное решение системы (1). Этому частному решению соответствует определенная система начальных значений, которые мы будем обозначать теми же буквами, но с чертой наверху:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{q}_1^0, \ \overline{q}_2^0, \ \ldots, \ \overline{q}_k^0, \\ \overline{q}_1'^0, \ \overline{q}_2'^0, \ \ldots, \ \overline{q}_k'^0. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

$\overline{q}_i^0$ и $\overline{q}_i'^0$ суть определенные данные числа. Соответствующее частное решение мы напишем следующим образом:

$$q_1 = f_1(t), \quad q_2 = f_2(t), \quad \ldots, \quad q_k = f_k(t). \qquad (5)$$

Этому частному решению будет соответствовать некоторое определенное движение нашей системы.

Следуя терминологии А. М. Ляпунова, мы будем называть это движение *невозмущенным*, а все другие движения той же системы, которые мы будем сравнивать известным образом с движением (5), мы будем называть *возмущенными*.

Во избежание недоразумений отметим, что эта терминология не имеет ничего общего с аналогичной терминологией в небесной механике, где возмущенные движения определяются при тех же начальных условиях, как и невозмущенное, но *другими* диференциальными уравнениями. Здесь, наоборот, невозмущенное и возмущенное движения определяются одной и той же системой (1), но *различными* начальными условиями.

Рассмотрим те возмущенные движения нашей системы, начальные условия которых мало отличаются от начальных условий данного невозмущенного движения. Иными словами, рассмотрим те решения системы (1), начальные условия которых (2) *близки* к начальным условиям (4) данного частного решения (5). Математически мы можем это записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} q_1^0 &= \bar{q}_1^0 + \varepsilon_1, \quad q_2^0 = \bar{q}_2^0 + \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad q_k^0 = \bar{q}_k^0 + \varepsilon_k, \\ q_1'^0 &= \bar{q}_1'^0 + \varepsilon_1', \quad q_2'^0 = \bar{q}_2'^0 + \varepsilon_2', \quad \ldots, \quad q_k'^0 = \bar{q}_k'^0 + \varepsilon_k', \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где ε_i и ε_i' малы по абсолютной величине.

Постоянные ε_i и ε_i' мы будем называть *возмущениями*.

Пусть теперь $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ будут *данные* непрерывные функции величин q_i и q_i'.

$$Q_j = Q_j\ (q_1, q_2, \ldots, q_n;\ q_1', q_2', \ldots, q_n') \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Если мы подставим в эти выражения вместо q_i их значения (5) для невозмущенного движения, то они обратятся в некоторые известные функции от t, которые обозначим соответственно через $F_1(t), F_2(t), \ldots, F_n(t)$. Если же в выражения (7) вместо q_i мы подставим их значения (3), определяющие возмущенное движение, то ввиду формул (6) Q_i будут функциями t и $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n'$. Когда все ε_i и ε_i' равны нулю, то очевидно, что возмущенное движение совпадает с невозмущенным, и, следовательно, все разности

$$Q_1 - F_1, \quad Q_2 - F_2, \quad \ldots, \quad Q_n - F_n \tag{7}$$

будут равны нулю для всякого значения t.

Пусть теперь ε_i и ε_i' не равны нулю, но очень малы по абсолютной величине. Тогда в силу непрерывности функций Q_j разности (7) будут также очень малы по абсолютной величине для $t = t_0$ и для всех значений t, достаточно близких к t_0. Возникает вопрос, останутся ли абсолютные величины разностей (7) очень малыми для всех значений t, больших, чем t_0? Очевидно, что это не всегда будет так, и решение этого вопроса зависит и от характера рассматриваемого невозмущенного движения и от выбора функций Q_j.

Если функции Q_j таковы, что абсолютные величины разностей $Q_j - F_j$ для всех значений $t > t_0$ очень малы, то мы будем говорить, что *невозмущенное движение устойчиво по отношению к величинам* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$. Если же хотя бы одна из величин $Q_j - F_j$ не остается очень малой для всякого $t > t_0$, то мы будем говорить, что *невозмущенное движение неустойчиво по отношению к величинам* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$.

Точное определение формулируется следующим образом: *Если всякой системе произвольно заданных, сколь угодно малых положительных чисел* $L_1, L_2, \ldots, L_n$ *соответствует такая система положительных чисел* $E_1, E_2, \ldots, E_k, E'_1, E'_2, \ldots, E'_k$, *что неравенства*

$$|\varepsilon_i| \leqslant E_i, \quad |\varepsilon'_i| \leqslant E'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

влекут за собой как следствия, справедливые при всяком значении t, *большем* t_0, *неравенства:*

$$|Q_1 - F_1| < L_1, \quad |Q_2 - F_2| < L_2, \quad \ldots, \quad |Q_n - F_n| < L_n,$$

то невозмущенное движение называется по отношению к величинам $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ *устойчивым. В противном случае невозмущенное движение называется неустойчивым.* В частном случае мы можем иметь:

$$Q_1 = q_1, \quad Q_2 = q_2, \quad \ldots, \quad Q_k = q_k, \quad Q_{k+1} = q'_1, \quad Q_{k+2} = q'_2, \quad \ldots, \quad Q_{2k} = q'_k.$$

Тогда невозмущенное движение называется устойчивым *по отношению к координатам*, если при

$$|\varepsilon_i| \leqslant E_i, \ |\varepsilon'_i| \leqslant E'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

мы будем иметь неравенства:

$$|q_i - f_i(t)| < L_i,$$
$$|q'_i - f'_i(t)| < L_{k+i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

справедливые для всякого значения t, большего t_0. Если при соблюдении предыдущих условий мы имеем, кроме того,

$$\lim_{t \to \infty} |q_i - f_i(t)| = 0, \quad \lim_{t \to \infty} |q'_i - f'_i(t)| = 0,$$

то мы будем говорить, что всякое невозмущенное движение *асимптотически* приближается к невозмущенному движению. Может случиться, что при *произвольных* малых возмущениях ε_i, ε'_i нельзя найти пределов E_i, E'_i, удовлетворяющих предыдущему определению, но можно найти такие пределы для возмущений, связанных условиями вида:

$$\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k; \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_k) = 0, \quad \text{или} \quad \varphi \geqslant 0,$$

где φ — некоторая функция величин ε_i, ε_i', обращающаяся в нуль при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_k = \varepsilon_1' = \varepsilon_2' = \ldots = \varepsilon_k' = 0$. В таком случае мы будем говорить, что невозмущенное движение обладает *условной устойчивостью*, или что оно устойчиво условно.

Для лучшего уяснения и понимания введенного определения мы рассмотрим сейчас несколько простых примеров, в которых изложенные обстоятельства будут отчетливо фигурировать. Эти примеры не связаны ни с какими определенными динамическими задачами и взяты из теории обыкновенных диференциальных уравнений.

2. Примеры устойчивых и неустойчивых решений диференциальных уравнений. Рассмотрим систему второго порядка:

$$\frac{dq_1}{dt} = q_2, \quad \frac{dq_2}{dt} = -2q_1 - 2q_2. \tag{8}$$

Общее решение этой системы будет:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= e^{-t}\,[q_1^0 \cos t + (q_1^0 + q_2^0) \sin t], \\ q_2 &= e^{-t}\,[q_2^0 \cos t - (2q_1^0 + q_2^0) \sin t], \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где q_1^0 и q_2^0 суть значения функций q_1 и q_2 при $t = 0$.

Рассмотрим частное решение системы (8), определяемое следующими начальными условиями:

$$\bar{q}_1^0 = 0, \quad \bar{q}_2^0 = 1.$$

Это частное решение будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} f_1(t) &= e^{-t} \sin t, \\ f_2(t) &= e^{-t} (\cos t - \sin t). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Исследуем устойчивость решения (10) относительно координат q_1 и q_2. Для этого положим:

$$q_1^0 = \varepsilon_1, \quad q_2^0 = 1 + \varepsilon_2$$

и возьмем разности между возмущенным решением (9) и невозмущенным решением (10). Мы получим, очевидно:

$$\begin{aligned} q_1 - f_1(t) &= e^{-t}\,[\varepsilon_1 \cos t + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sin t], \\ q_2 - f_2(t) &= e^{-t}\,[\varepsilon_2 \cos t - (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sin t], \end{aligned}$$

откуда, как легко видеть, имеем:

$$\lim_{t \to \infty} [q_1 - f_1(t)] = 0, \quad \lim_{t \to \infty} [q_2 - f_2(t)] = 0.$$

Следовательно, частное решение (10) устойчиво, и все возмущенные решения приближаются к нему асимптотически при t, стремящемся к бесконечности.

В качестве второго примера возьмем систему:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dq_1}{d} + 2q_1 + 4q_2 = 1 + 4t, \\ &\frac{dq_2}{dt} + \ q_1 - q_2 \ = 1{,}5\, t^2. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Обозначая, как и выше, через q_1^0 и q_2^0 значения функций q_1 и q_2 при $t=0$, мы получим общее решение этой системы в виде:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \quad t + t^2 + \frac{q_1^0 - 4q_2^0}{5} e^{2t} + \frac{4(q_1^0 + q_2^0)}{5} e^{-3t}, \\ q_2 &= -\frac{1}{2} t^2 \ - \frac{q_1^0 - 4q_2^0}{5} e^{2t} + \frac{q_1^0 + q_2^0}{5} e^{-3t}. \end{aligned}\right\}$$

Рассмотрим частное решение:

$$f_1(t) = t + t^2, \quad f_2(t) = -\frac{1}{2} t^2, \qquad (13)$$

соответствующее начальным значениям:

$$\bar{q}_1^0 = 0, \quad \bar{q}_2^0 = 0,$$

и исследуем его устойчивость по отношению к координатам. Для этого положим:

$$q_1^0 = \bar{q}_1^0 + \varepsilon_1 = \varepsilon_1, \quad q_2^0 = \bar{q}_2^0 + \varepsilon_2 = \varepsilon_2$$

и вычислим разности между возмущенным и невозмущенным решениями. Мы получим:

$$\left.\begin{aligned} q_1 - f_1(t) &= \qquad \frac{\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2}{5} e^{2t} + \frac{4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{5} e^{-3t}, \\ q_2 - f_2(t) &= -\frac{\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2}{5} e^{2t} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{5} \quad e^{-3t}. \end{aligned}\right\}$$

Так как эти разности неограниченно возрастают вместе с t по абсолютной величине, то частное решение (13) неустойчиво при произвольных малых возмущениях ε_1 и ε_2. Однако если мы будем рассматривать только такие возмущения, для которых

$$\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2 = 0,$$

то получим:

$$\lim_{t\to\infty} [q_1 - f_1(t)] = 0, \quad \lim_{t\to\infty} [q_2 - f_2(t)] = 0,$$

и мы скажем, что частное решение (13) обладает условной устойчивостью по отношению к координатам q_1 и q_2. В качестве последнего примера рассмотрим систему четвертого порядка:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2q_1}{dt^2}+2q_1+4q_2&=e^t,\\ \frac{d^2q_2}{dt^2}-q_1-3q_2&=-t. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Сохраняя прежние обозначения, мы получим, как нетрудно проверить, общее решение этой системы в виде:

$$\begin{aligned} q_1={}&\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,q_1^0-4\sqrt{2}\,q_2^0-q_1'^0-4q_2'^0}{6\sqrt{2}}\,e^{t\sqrt{2}}+\\ &+\frac{-1-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,q_1^0-4\sqrt{2}\,q_2^0+q_1'^0+4q_2'^0}{6\sqrt{2}}\,e^{-t\sqrt{2}}+\\ &+\frac{4q_1^0+4q_2^0-2}{3}\cos t+\frac{4q_1'^0+4q_2'^0+2}{3}\sin t+e^t-2t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2={}&\frac{-1+\sqrt{2}+\sqrt{2}\,q_1^0+4\sqrt{2}\,q_2^0+q_1'^0+4q_2'^0}{6\sqrt{2}}\,e^{t\sqrt{2}}+\\ &+\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2}\,q_1^0+4\sqrt{2}\,q_2^0-q_1'^0-4q_2'^0}{6\sqrt{2}}\,e^{-t\sqrt{2}}+\\ &+\frac{4q_1^0+4q_2^0-2}{12}\cos t-\frac{4q_1'^0+4q_2'^0+2}{12}\sin t+\frac{1}{2}e^t+t. \end{aligned}$$

Рассмотрим частное решение:

$$\begin{aligned} f_1(t)&=e^t-2t,\\ f_2(t)&=-\frac{1}{2}e^t+t, \end{aligned} \tag{15}$$

получающееся из общего при

$$\bar{q}_1^0=1,\qquad \bar{q}_1'^0=-1,$$

$$\bar{q}_2^0=-\frac{1}{2},\quad \bar{q}_2'^0=\frac{1}{2}.$$

Полагая:

$$q_1^0=1+\varepsilon_1,\qquad q_1'^0=-1+\varepsilon_1',$$

$$q_2^0=-\frac{1}{2}+\varepsilon_2,\quad q_2'^0=\frac{1}{2}+\varepsilon_2'$$

и вычисляя разности между возмущенным и невозмущенным решениями, мы найдем:

$$q_1-f_1(t)=-\frac{\sqrt{2}\,\varepsilon_1+4\sqrt{2}\,\varepsilon_2+\varepsilon_1'+4\varepsilon_2'}{6\sqrt{2}}e^{t\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}\,\varepsilon_1+4\sqrt{2}\,\varepsilon_2-\varepsilon_1'-4\varepsilon_2'}{6\sqrt{2}}e^{-t\sqrt{2}}+$$
$$+\frac{4\varepsilon_1+4\varepsilon_2}{3}\cos t+\frac{4\varepsilon_1'+4\varepsilon_2'}{3}\sin t,$$

$$q_1'-f_1'(t)=-\frac{\sqrt{2}\,\varepsilon_1+4\sqrt{2}\,\varepsilon_2+\varepsilon_1'+4\varepsilon_2'}{6}e^{t\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}\,\varepsilon_1+4\sqrt{2}\,\varepsilon_2-\varepsilon_1'-4\varepsilon_2'}{6}e^{-t\sqrt{2}}-$$
$$-\frac{4\varepsilon_1+4\varepsilon_2}{3}\sin t+\frac{4\varepsilon_1'+4\varepsilon_2'}{3}\cos t,$$

$$q_2-f_2(t)=\frac{\sqrt{2}\,\varepsilon_1+4\sqrt{2}\,\varepsilon_2+\varepsilon_1'+4\varepsilon_2'}{6\sqrt{2}}e^{t\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}\,\varepsilon_1+4\sqrt{2}\,\varepsilon_2-\varepsilon_1'-4\varepsilon_2'}{6\sqrt{2}}e^{-t\sqrt{2}}-$$
$$-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{3}\cos t-\frac{\varepsilon_1'+\varepsilon_2'}{3}\sin t,$$

$$q_2'-f_2'(t)=\frac{\sqrt{2}\,\varepsilon_1+4\sqrt{2}\,\varepsilon_2+\varepsilon_1'+4\varepsilon_2'}{6}e^{t\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}\,\varepsilon_1+4\sqrt{2}\,\varepsilon_2'-\varepsilon_1'-4\varepsilon_2'}{6}e^{-t\sqrt{2}}+$$
$$+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{3}\sin t-\frac{\varepsilon_1'+\varepsilon_2'}{3}\sin t.$$

Отсюда видно, что частное решение (15) неустойчиво, так как при произвольных значениях возмущений ε_1, ε_2, ε_1', ε_2', как бы они малы ни были, предыдущие разности неограниченно возрастают по абсолютной величине, когда t стремится к бесконечности. Но если возмущения не произвольны, а связаны соотношением:

$$\sqrt{2}\varepsilon_1+4\sqrt{2}\varepsilon_2+\varepsilon_1'+4\varepsilon_2'=0, \tag{16}$$

то из предыдущих выражений выпадают члены, содержащие $e^{t\sqrt{2}}$, и если ε_1, ε_2, ε_1', ε_2' малы по абсолютной величине, то предыдущие разности никогда не превзойдут известных пределов и решение будет устойчивым. Итак, частное решение (15) обладает только условной устойчивостью по отношению к координатам и скоростям. Заметим, что если возмущения удовлетворяют условию (16), то возмущенные решения не приближаются асимптотически к невозмущенному решению (15), как мы имели в предыдущем примере.

Из приведенных примеров следует, что решение вопроса об устойчивости не представляет никаких затруднений, если можно найти общее решение данной системы. Но очевидно, что такие случаи составляют редкие исключения. Вообще мы не можем найти общего решения, и поэтому для решения вопроса об устойчивости данного частного решения мы должны применять какие-нибудь другие методы. Эти методы были указаны А. М. Ляпуновым в его знаменитом мемуаре «Общая задача об устойчивости движения», и мы изложим некоторые основные фрагменты из этого мемуара.

3. Диференциальные уравнения возмущенного движения. Согласно определению, данному в § 1, для решения вопроса об устойчивости данного невозмущенного движения (5) по отношению к величинам Q_1, Q_2, ..., Q_n мы должны исследовать, возможно ли найти такие пределы $L_1, L_2, \ldots, L_n$, которых никогда не превзойдут абсолютные величины разностей $Q_1 - F_1, Q_2 - F_2, \ldots, Q_n - F_n$. Для этого введем обозначения:

$$x_1 = Q_1 - F_1, \quad x_2 = Q_2 - F_2, \ldots, \quad x_n = Q_n - F_n \tag{17}$$

и составим диференциальные уравнения, которым должны удовлетворять функции $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пусть $n = 2k$. Тогда из выражений (17) мы получим:

$$\left.\begin{aligned} q_i &= \varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ q_i' &= \psi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \right\} \tag{18}$$

Диференцируя теперь формулы (17), мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} = {} & \frac{\partial Q_j}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial Q_j}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \\ & + \frac{\partial Q_j}{\partial q_1'}\frac{dq_1'}{dt} + \frac{\partial Q_j}{\partial q_2'}\frac{dq_2'}{dt} + \ldots + \frac{\partial Q_j}{\partial q_k'}\cdot\frac{dq_k'}{dt} - F_j', \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где $j = 1, 2, \ldots, n$.

Исключая из правых частей этих уравнений: q_i, $\frac{dq_i}{dt}$ и $\frac{dq_i'}{dt}$ при помощи уравнений движения (1) и равенств (18), мы получим уравнения вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ суть известные функции своих переменных. Нетрудно убедиться, что все эти функции обращаются в нуль при:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Для этого напишем уравнения (19) в виде:

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{dQ_s}{dt} - F_s' \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

При $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ функции Q_s тождественно равны F_s, и, следовательно, $\frac{dQ_s}{dt} = F_s'$, откуда:

$$X_s(t, 0, 0, \ldots, 0) \equiv 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

что и требовалось показать.

Допустим, кроме того, что функции R_i и T, определяющие систему (1), таковы, что функции X_s разложимы в ряды по целым положительным степеням $x_1, x_2, \ldots, x_n$, абсолютно и равномерно сходящиеся для всех значений $t \geqslant t_0$ и для всех x_s, удовлетворяющих условиям:

$$|x_1| = A_1, \quad |x_2| \leqslant A_2, \quad \ldots, \quad |x_n| \leqslant A_n,$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ суть или отличные от нуля постоянные или такие функции от t, которые никогда не обращаются в нули.

Если функции X_s удовлетворяют этому условию, то мы будем говорить для сокращения, что X_s суть голоморфные функции величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть

$$X_s = p_{s1} x_1 + p_{s2} x_2 + \ldots + p_{sn} x_n + \overline{X}_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \quad (21)$$

где $\overline{X}_s$ обозначают совокупности членов не ниже второго порядка в разложениях X_s. Мы можем написать:

$$\overline{X}_s = \sum P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n},$$

где сумма распространяется на все целые неотрицательные числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$, удовлетворяющие условию:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n > 1.$$

В этих разложениях коэфициенты $p_{s\sigma}$ и $P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$ суть или постоянные величины, или функции от t, определенные для всякого значения $t \geqslant t_0$. Система (20) напишется в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= p_{11} x_1 + p_{12} x_2 + \ldots + p_{1n} x_n + \overline{X}_1, \\
\frac{dx_2}{dt} &= p_{21} x_1 + p_{22} x_2 + \ldots + p_{2n} x_n + \overline{X}_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{dx_n}{dt} &= p_{n1} x_1 + p_{n2} x_2 + \ldots + p_{nn} x_n + \overline{X}_n,
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

и мы будем называть ее *диференциальными уравнениями возмущенного движения*. Система (22), очевидно, имеет частное решение:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0. \quad (23)$$

Это частное решение соответствует решению (5) системы (1), и задача об исследовании устойчивости невозмущенного движения приводится к исследованию устойчивости частного решения (23) системы (22).

Рассмотрим какое-нибудь решение системы (22), отличное от решения (23). Мы можем записать его в виде:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= x_1(t, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \\
x_2 &= x_2(t, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x_n &= x_n(t_n, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0),
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

где $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ суть начальные значения функций $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при $t=t_0$. Если $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ малы по абсолютной величине, то мы будем говорить, что решение (24) близко к рассматриваемому частному решению (23). Для того чтобы частное решение (5) системы (1) было устойчивым, необходимо, чтобы для всякого $t>t_0$ функции x_s не превосходили известных пределов, т. е. чтобы решение (23) было также устойчивым.

Сформулируем точное определение устойчивости решения (23). *Если всякому сколь угодно малому положительному числу H соответствует такое другое положительное число A, что неравенства*

$$|x_s^0|<A \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

влекут за собой как следствия неравенства

$$|x_s(t)|<H \qquad (s=1, 2, \ldots, n),$$

справедливые при всяком $t>t_0$, то решение (23) *будет называться устойчивым. В противном случае решение* (23) *будет называться неустойчивым.*

Мы видим, что определение совершенно эквивалентно определению, данному в § 1, и является его следствием. Заметим, что предыдущее определение можно заменить следующим: Решение $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ устойчиво, если всякому сколь угодно малому положительному числу H соответствует такое другое положительное число A, что неравенство

$$(x_1^0)^2+(x_2^0)^2+\ldots+(x_n^0)^2<A^2$$

влечет за собой как следствие справедливое для всякого $t>t_0$ неравенство:

$$x_1^2(t)+x_2^2(t)+\ldots+x_n^2(t)<H^2.$$

4. Интегрирование уравнений возмущенного движения. Перейдем теперь к интегрированию уравнений возмущенного движения (22). Так как эти уравнения вообще не интегрируются в конечном виде, то единственный доступный нам путь есть путь последовательных приближений, основанный на том допущении, что начальные значения искомых функций весьма малы. Метод последовательных приближений приводит к рядам, которые могут быть получены следующим образом. Положим:

$$x_s=x_s^{(1)}+x_s^{(2)}+x_s^{(3)}+\ldots+x_s^{(m)}+\ldots \quad (s=1, 2, \ldots, n) \qquad (25)$$

и будем рассматривать величины $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}$ и их первые производные по времени как величины порядка m. Подставим теперь выражения (25) функций x_s в уравнения (22) и в каждом из последних приравняем между собой совокупности членов одного и того же порядка в левой и правой частях равенств. Нетрудно видеть, что мы получим следующие системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1^{(1)}}{dt} &= p_{11}\, x_1^{(1)} + p_{12}\, x_2^{(1)} + \ldots + p_{1n}\, x_n^{(1)},\\
\frac{dx_2^{(1)}}{dt} &= p_{21}\, x_1^{(1)} + p_{22}\, x_2^{(1)} + \ldots + p_{2n}\, x_n^{(1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{dx_n^{(1)}}{dt} &= p_{n1}\, x_1^{(1)} + p_{n2}\, x_2^{(1)} + \ldots + p_{nn}\, x_n^{(1)}
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

и

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1^{(m)}}{dt} &= p_{11}\, x_1^{(m)} + p_{12}\, x_2^{(m)} + \ldots + p_{1n}\, x_n^{(m)} + R_1^{(m)},\\
\frac{dx_2^{(m)}}{dt} &= p_{21}\, x_1^{(m)} + p_{22}\, x_2^{(m)} + \ldots + p_{2n}\, x_n^{(m)} + R_2^{(m)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dx_2^{(m)}}{dt} &= p_{n1}\, x_1^{(m)} + p_{n2}\, x_2^{(m)} + \ldots + p_{nn}\, x_n^{(m)} + R_n^{(m)},
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

где $m = 2, 3, \ldots, \infty$.

Величины $R_1^{(m)}, R_2^{(m)}, \ldots, R_n^{(m)}$ суть известные целые рациональные функции величин $x_\sigma^{(\mu)}$ с коэфициентами, представляющими суммы произведений из функций $P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$ на целые положительные числа, причем очевидно, что все $R_s^{(m)}$ будут зависеть только от тех $x_\sigma^{(\mu)}$, для которых $\mu < m$. Поэтому функции $x_s^{(m)}$ можно определить из предыдущих уравнений последовательно в порядке возрастания m. Таким образом прежде всего нужно проинтегрировать систему (26).

Система (26) представляет собой систему линейных диференциальных уравнений, которую можно получить из системы (22), просто отбрасывая в уравнениях (22) все члены выше первого порядка относительно x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Система (26) определяет *первое* приближение функций x_1, $x_2, \ldots, x_n$ и называется иногда *системой уравнений в вариациях* для системы (22).

Допустим, что мы сумели проинтегрировать систему (26). Из теории линейных диференциальных уравнений нам известно, что система (26) всегда имеет n независимых частных решений, образующих фундаментальную систему. Пусть эти частные решения будут:

1-е	частное	решение:	$x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}$,
2-е	»	»	$x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2}$,
. . .	. . .	. . .	. . . .
n-е	»	»	$x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}$.

Обозначим через Δ детерминант, составленный из n^2 функций x_{ij}:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11}, & x_{21}, & \ldots, & x_{n1} \\ x_{12}, & x_{22}, & \ldots, & x_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1n}, & x_{2n}, & \ldots, & x_{nn} \end{vmatrix}. \tag{28}$$

Детерминант Δ будет функцией от t, не обращающейся в нуль ни при каком значении t, так как по известной теореме [1]):

$$\Delta = C_e^{\int\limits_{t_0}^{t} (p_{11} + p_{22} + \ldots + p_{nn})\, dt},$$

где C — постоянная не равная нулю.

Общее решение системы (26) напишется в виде:

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(1)} &= a_1 x_{11} + a_2 x_{12} + \ldots + a_n x_{1n}, \\ x_2^{(1)} &= a_1 x_{21} + a\ x_{22} + \ldots + a_n x\ _n, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n^{(1)} &= a_1 x_{n1} + a_2 x_{n2} + \ldots + a_n x_{nn}, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные постоянные.

Рассмотрим теперь уравнения (27) для $m = 2$. Функции $R_s^{(2)}$ зависят только от $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$, а так как последние определены, то $R_s^{(2)}$ суть известные функции от t и произвольных постоянных $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Уравнения, определяющие второе приближение, т. е. функции $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}$, суть линейные неоднородные уравнения с теми же коэфициентами $p_{s\sigma}$, как и система (26). Из общей теории известно, что общее решение неоднородной системы представляется в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. Следовательно, нам остается получить какое-нибудь частное решение неоднородной системы, так как общее решение однородной системы будет иметь такой же вид, как и решение (29), только с другими произвольными постоянными. Пусть это решение будет:

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(2)} &= C_1 x_{11} + C_2 x_{12} + \ldots + C_n x_{1n}, \\ x_2^{(2)} &= C_1 x_{21} + C_2 x_{22} + \ldots + C_n x_{2n}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n^{(2)} &= C_1 x_{n1} + C_2 x_{n2} + \ldots + C_n x_{nn}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Частное решение неоднородной системы получим по методу вариации произвольных постоянных. Для этого диференцируем формулы (30), счи-

[1]) См., например, Э. Гурса, Курс математического анализа, т. II, ч. 2, ГТТИ, Москва 1933.

тая $C_1, C_2, \ldots, C_n$ функциями t, и подставляем полученные выражения в уравнения (27) для $m=2$. Мы получим уравнения:

$$\begin{aligned}
&x_{11}\frac{dC_1}{dt}+x_{12}\frac{dC_2}{dt}+\ldots+x_{1n}\frac{dC_n}{dt}=R_1^{(2)},\\
&x_{21}\frac{dC_1}{dt}+x_{22}\frac{dC_2}{dt}+\ldots+x_{2n}\frac{dC_n}{dt}=R_2^{(2)},\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&x_{n1}\frac{dC_1}{dt}+x_{n2}\frac{dC_2}{dt}+\ldots+x_{nn}\frac{dC_n}{dt}=R_n^{(2)}.
\end{aligned}$$

Обозначая через Δ_{ij} минор детерминанта Δ, соответствующий элементу x_{ij}, мы получим, решая предыдущую систему относительно производных $\frac{dC_1}{dt}$, $\frac{dC_2}{dt}$, $\ldots$, $\frac{dC_n}{dt}$ следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta\cdot\frac{dC_1}{dt}=\Delta_{11}R_1^{(2)}+\Delta_{21}R_2^{(2)}+\ldots+\Delta_{n1}R_n^{(2)},\\
&\Delta\cdot\frac{dC_2}{dt}=\Delta_{12}R_1^{(2)}+\Delta_{22}R_2^{(2)}+\ldots+\Delta_{n2}R_n^{(2)},\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\Delta\cdot\frac{dC_n}{dt}=\Delta_{1n}R_1^{(2)}+\Delta_{2n}R_2^{(2)}+\ldots+\Delta_{nn}R_n^{(2)}.
\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

Так как правые части этих уравнений суть известные функции t, то $C_1, C_2, \ldots, C_n$ найдутся отсюда квадратурами. Эти квадратуры введут n новых произвольных постоянных, которыми мы можем распорядиться по произволу, так как решение системы (22), определяемое формулами (25), уже содержит n необходимых произвольных постоянных, входящих в первое приближение, т. е. в функции $x_s^{(1)}$. Мы выберем эти новые постоянные так, чтобы $x_s^{(2)}$ обращались в нуль при $t=t_0$. При этом условии формулы (31) дают:

$$C_j=\int_{t_0}^{t}\frac{\Delta_{1j}R_1^{(2)}+\Delta_{2j}R_2^{(2)}+\ldots+\Delta_{nj}R_n^{(2)}}{\Delta}\,dt=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{n}\Delta_{ij}R_i^{(2)}\,dt,$$

откуда по формулам (30) находим:

$$x_s^{(2)}=x_{s1}\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_{i1}}{\Delta}R_i^{(2)}\,dt+x_{s2}\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_{i2}}{\Delta}R_i^{(2)}\,dt+\ldots+x_{sn}\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_{in}}{\Delta}R_t^{(2)}\,dt,$$

что можно переписать более кратко следующим образом:

$$x_s^{(2)}=\sum_{j=1}^{n}x_{sj}\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}R_i^{(2)}\,dt.\tag{32}$$

Таким образом мы получили второе приближение, которое дает величины $x_s^{(2)}$ как функции t и произвольных постоянных $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Очевидно, что относительно этих постоянных $x_s^{(2)}$ суть целые однородные функции второй степени.

Точно так же можно поступать и дальше. Найденные значения $x_s^{(1)}$ и $x_s^{(2)}$ подставляем в функции $R_s^{(3)}$ и интегрируем систему линейных неоднородных уравнений, определяющих $x_s^{(3)}$ так же, как и выше. Получив $x_s^{(3)}$, находим аналогичным образом $x_s^{(4)}$ и так далее. Очевидно, что выражения для этих последовательных приближений будут иметь такой же вид, как и выражение (32) для второго приближения с заменой только индекса 2 на 3, 4 и так далее. Вообще мы можем написать:

$$x_s^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} x_{sj} \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} R_i^{(m)} dt$$

или

$$x_s^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{sj} \int_{t_0}^{t} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} R_i^{(m)} dt \qquad (m = 2, 3, \ldots, \infty). \quad (33)$$

Функции $x_s^{(m)}$, определяемые этими формулами, будут определенными и непрерывными функциями времени. Относительно произвольных постоянных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ функции $x_s^{(m)}$ суть целые однородные функции степени m. Наконец, по формулам (25) получаем общее решение системы уравнений (22) возмущенного движения в следующем виде:

$$x_s = a_1 x_{s1} + a_2 x_{s2} + \ldots + a_n x_{sn} + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{sj} \int_{t_0}^{t} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} R_i^{(m)} dt. \quad (34)$$

Остается рассмотреть сходимость рядов (34), расположенных по целым положительным степеням постоянных a_s. Мы не будем приводить доказательство и укажем только, что ряды (34) сходятся абсолютно и равномерно для всех значений t, лежащих между t_0 и T, как бы ни было велико данное число T, и при всех значениях постоянных a_s, абсолютные значения которых не превосходят некоторого отличного от нуля предела, зависящего от T.

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

5. Исследование устойчивости невозмущенного движения. В предыдущих параграфах мы установили, что исследование устойчивости данного невозмущенного движения приводится к исследованию устойчивости частного решения:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0$$

системы:

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n, \quad (35)$$

где X_n суть голоморфные функции переменных x_n, обращающиеся в нуль, когда все эти переменные суть нули. Ряды, которыми представляются функции X_s, сходятся, по условию, для всех значений x_s, удовлетворяющих неравенствам:

$$|x_s| < A_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

где A_s, вообще говоря, суть функции t, никогда не обращающиеся в нули.

Обозначим через A нижний предел для всех этих функций, т. е. такое постоянное число, что при всех значениях $t > t_0$

$$A_s > A.$$

Тогда функции X_s будут наверное голоморфными функциями для всех значений x_s, удовлетворяющих неравенствам:

$$|x_1| < A, \quad |x_2| < A, \quad \ldots, \quad |x_n| < A.$$

Обозначим теперь через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ некоторые постоянные числа, удовлетворяющие неравенствам:

$$|a_s| < A \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

и рассмотрим функции x_s, удовлетворяющие уравнениям (35) и принимающие значения a_s при $t = t_0$. Эти функции определятся рядами, полученными в предыдущем параграфе, если мы выберем фундаментальную систему для уравнений в вариациях таким образом, чтобы при $t = t_0$

$$x_{ii} = 1, \quad x_{ij} = 0 \qquad (i \neq j)$$

Постоянные a_s можно выбрать настолько малыми, чтобы полученные ряды представляли функции x_s для всех значений t, лежащих между t_0 и T, как бы ни было велико число T, и чтобы значения $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ этих функций при $t = T$ были численно сколько угодно малыми. Обратно, числа ξ_s всегда можно выбрать настолько малыми, чтобы им соответствовала одна определенная система начальных значений a_s и чтобы все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ были также сколь угодно малы.

Отсюда следует, что при решении вопросов об устойчивости можно рассматривать только значения t, большие сколь угодно большого предела T, и заменить рассмотрение начальных значений функций x_s рассмотрением их значений ξ_s при $t = T$.

Имея в виду все высказанные условия, докажем теперь несколько общих теорем А. М. Ляпунова, дающие общие критерии устойчивости или неустойчивости данного частного решения:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0.$$

Эти теоремы, следовательно, дают признаки, по которым можно судить, остаются ли абсолютные значения функций x_s меньше некоторого достаточно малого положительного числа для *всех* значений $t > T$, так как мы уже видели, что при надлежащем выборе начальных значений для $t < T$

эти условия уже соблюдаются. А доказав, что все x_s остаются очень малыми для $t > T$, мы тем самым и докажем устойчивость исследуемого частного решения, а следовательно, и устойчивость данного невозмущенного движения. Наоборот, если мы докажем, что хотя бы одна из функций не остается малой по абсолютной величине, то этим самым будет доказана неустойчивость исследуемого частного решения, а следовательно, и данного невозмущенного движения.

Предварительно введем несколько определений. Рассмотрим некоторую функцию переменных $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$V(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

непрерывную и однозначную при

$$t \geqslant T \quad \text{и} \quad |x_s| < H \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{36}$$

и обращающуюся в нуль при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

где T — достаточно большое и H — достаточно малое положительные числа.

Мы будем называть функцию V *знакопостоянной*, если при всех значениях t и x_s, удовлетворяющих неравенствам (36), она сохраняет один и тот же знак. Если этот знак есть плюс, то мы будем говорить, что V есть положительная функция, если минус — то отрицательная. Если функция V не зависит от t, а постоянная H может быть выбрана настолько малой, что V обращается в нуль только при $x_s = 0$, то мы будем называть ее *знакоопределенной* функцией, а в зависимости от знака, — *определенно-положительной* или *определенно-отрицательной*.

Если же V зависит от t, то мы будем называть ее знакоопределенной только в том случае, если существует такая не зависящая от t определенно-положительная функция W, что одно из двух выражений

$$V - W \quad \text{или} \quad -V - W$$

есть функция положительная.

Если постоянная H настолько мала, что при условиях (36) функция V имеет некоторый верхний предел, то мы будем называть ее *ограниченной*.

Если ограниченная функция V такова, что всякому сколь угодно малому положительному числу ε соответствует такое отличное от нуля число h, что при

$$t \geqslant T, \quad |x_s| \leqslant h \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

мы будем иметь

$$|V| < \varepsilon,$$

то мы будем говорить, что функция V *имеет бесконечно малый верхний предел*.

Пусть V удовлетворяет последнему условию. Тогда, если переменные t и x_s удовлетворяют условиям:

$$t \geqslant T, \quad |V| \geqslant l,$$

где l — положительное число, то существует другое положительное число λ, такое, что, обозначая через x наибольшую из величин $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|$, мы необходимо будем иметь:

$$x \geqslant \lambda.$$

Действительно, если такого числа λ не существует, то существует такое число h, что $x < h$, а следовательно, и $|x_s| < h$, так как x есть наибольшая из величин $|x_s|$. Но тогда можно найти такое сколь угодно малое положительное число $\varepsilon < l$, что мы будем иметь $|V| < \varepsilon$, что противоречит условию $|V| \geqslant l$.

Одновременно с функцией V мы будем рассматривать также ее полную производную по t:

$$V' = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Если функции x_s удовлетворяют уравнениям (35), то предыдущее выражение напишется в виде:

$$V' = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n + \frac{\partial V}{\partial t}. \tag{37}$$

Теперь перейдем к доказательству теорем А. М. Ляпунова.

6. Критерии устойчивости. Сохраняя все обозначения и определения предыдущего параграфа докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Если диференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует такая знакоопределенная функция V, производная которой V' в силу этих уравнений или тождественно равна нулю или есть знакопостоянная функция, знак которой противоположен знаку V, то невозмущенное движение устойчиво.*

Доказательство. Предположим для определенности, что найденная функция V определенно-положительна, а производная ее V' или тождественно равна нулю или есть функция отрицательная. Тогда найдутся такие числа T и H, что при

$$t \geqslant T$$

и

$$|x_s| \leqslant H \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

мы будем иметь:

$$V' \leqslant 0, \quad V \geqslant W, \tag{38}$$

где W — некоторая определенно-положительная функция (т. е. W не зависит от t и обращается в нуль только, если все x_s равны нулю).

Допустим, что значения ξ_s функций x_s при $t=T$ удовлетворяют неравенствам:

$$|\xi_s|<H \qquad (s=1, 2, \ldots, n).$$

Так как функции x_s непрерывны, то неравенства

$$|x_s|<H \tag{39}$$

будут выполняться по крайней мере для всех достаточно близких T значений времени.

Подставив в V вместо x_s их выражения, удовлетворяющие уравнениям (35), мы видим, что V будет функцией от t. Обозначим ее значение при $t=T$ через V_0. Тогда мы, очевидно, можем написать:

$$V-V_0=\int_T^t V'\,dt. \tag{40}$$

Если в промежутке от T до t $(t>T)$ неравенства (39) удовлетворяются, то в этом промежутке $V'\leqslant 0$, а следовательно, и $V-V_0\leqslant 0$, или $V\leqslant V_0$, откуда ввиду условий (38) мы будем иметь:

$$W\leqslant V_0. \tag{41}$$

Так как V обращается в нуль при $x_s=0$, то, при достаточно малых значениях ξ_s, V_0 будет также величиной сколь угодно малой.

Обозначим, как и раньше, через x наибольшую из величин $|x_1|$, $|x_2|, \ldots, |x_n|$, а через ε сколь угодно малое положительное число, меньшее H, и рассмотрим всевозможные системы значений величин x_s, удовлетворяющие условию:

$$x=\varepsilon.$$

Для различных систем значений x_s, удовлетворяющих этому условию, функция W будет принимать различные значения. Пусть наименьшее из этих значений будет l. Это число будет положительным, так как W — положительная функция, и не равным нулю, так как W обращается в нуль только при

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=0.$$

Далее, так как число V_0 можно сделать сколь угодно малым, то можно найти такое отличное от нуля положительное число λ, что при

$$|\xi_s|<\lambda \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \tag{42}$$

мы будем иметь:

$$V_0<l.$$

Выберем ξ_s согласно неравенствам (42). Так как λ не может быть больше ε, то в силу непрерывности функций x_s мы будем иметь для всех значений t, достаточно близких к T, неравенства:

$$|x_s| < \varepsilon \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{43}$$

Но изменяясь с течением времени непрерывно, x_s могут нарушить эти неравенства, только достигнув предварительно значений, удовлетворяющих условию $x = \varepsilon$. Но это сейчас же ведет к противоречию, так как при $V_0 < l$ мы получаем из (41): $W < l$, что невозможно, так как l есть наименьшее значение функции W.

Следовательно, каковы бы ни были ξ_s, удовлетворяющие неравенствам (42), функции x_s будут удовлетворять неравенствам (43) для всех значений t, больших T.

Из определений, данных в § 3, следует что невозмущенное движение устойчиво и теорема доказана.

Точно так же можно доказать теорему, предположив, что V есть определенно-отрицательная функция и V' тождественно равна нулю или есть функция положительная.

Теорема 2. *Если функция V, удовлетворяя условиям предыдущей теоремы, имеет сверх того бесконечно малый верхний предел, а V' есть знакоопределенная функция, то всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, будет приближаться к нему асимптотически.*

Доказательство. Предположим опять, что функция V определенно положительна, и рассмотрим какое-нибудь возмущенное движение, которому соответствуют настолько малые значения ξ_s, что неравенства

$$|x_s| < H \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

остаются справедливыми для всех значений t, больших T, и докажем, что

$$\lim_{t\to\infty} x_s = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{44}$$

Действительно, предположим, что равенства (44) не выполняются. Тогда, если постоянная H достаточно мала, то можно найти такое положительное число l, что для всех значений $t > T$ мы будем иметь:

$$V > l. \tag{45}$$

Но так как V имеет бесконечно малый верхний предел, то, если неравенство (45) выполняется для всех значений $t > T$, можно найти такое положительное число λ (см. конец § 5), что мы будем иметь:

$$x > \lambda$$

(x попрежнему обозначает наибольшую из величин $|x_s|$), для всех значений $t > T$. Но тогда можно доказать, что при тех же значениях t и функция $-V'$ будет иметь некоторый положительный нижний предел l'.

Действительно, согласно условиям теоремы, функция $-V'$ есть определенно-положительная функция. Следовательно, при $t \geqslant T$ и $x < H$ мы будем иметь:

$$-V' \geqslant W',$$

где W' есть некоторая, не зависящая от t положительная функция, обращающаяся в нуль только при $x = 0$ [1]). Но так как переменные x_s удовлетворяют неравенству:

$$\lambda \leqslant x \leqslant H,$$

то W' в нуль обратиться не может и, следовательно, имеет некоторый положительный нижний предел l'. Следовательно:

$$W' \geqslant l',$$

откуда имеем:

$$-V' > l'.$$

Так как это равенство должно выполняться для всех значений $t > T$, то для тех же значений t из формулы (40) мы находим:

$$V < V_0 - l'(t - T),$$

что немедленно приводит к противоречию, так как левая часть неравенства есть положительная функция, а правая при достаточно больших значениях t делается отрицательной. Полученное противоречие приводит к заключению, что сделанное предположение неправильно, а следовательно, мы должны иметь:

$$\lim_{t \to \infty} x_s = 0,$$

что и требовалось доказать.

7. Критерии неустойчивости. Если условия первой теоремы не выполнены, то устойчивость невозмущенного движения остается невыясненной, так как эта теорема дает только достаточные условия устойчивости. Поэтому А. М. Ляпунов дал особые критерии, которые позволяют установить достаточные условия для неустойчивости движения. Эти критерии формулируются в виде двух теорем, к доказательству которых мы сейчас перейдем.

Теорема 3. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция V, которая обладает в силу этих уравнений знакоопределенной производной V', притом допускает бесконечно малый верхний предел и такова, что при всяком t, большем некоторого предела, надлежащим выбором величин x_s, численно как угодно малых, ее можно сделать величиной одинакового знака с ее производной, то невозмущенное движение неустойчиво.*

---

[1]) Функция W' обращается по условию в нуль только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Но так как x обозначает наибольшую из величин $|x_s|$, то при $x_s = 0$ необходимо также и $x = 0$. А условие $x = 0$ может выполняться только в том случае, когда все x_s равны нулю.

Доказательство. Допустим, что функция V, удовлетворяющая условиям теоремы, существует и что ее производная определенно-положительная. Тогда найдутся такие постоянные числа T и H, что при $t \geqslant T$ и

$$|x_s| < H \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{46}$$

мы будем иметь неравенства:

$$V' \geqslant W, \quad |V| < L, \tag{47}$$

где L есть некоторое положительное число, а W — функция от переменных x_s, не зависящая от t и обращающаяся при условиях (46) в нуль, только если все x_s также равны нулю. Пусть значения ξ_s функций x_s при $t = T$ таковы, что

$$|\xi_s| < H \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

и обозначим значение функции V при $t = T$ через V_0. Тогда из уравнения

$$V - V_0 = \int_T^t V' dt \tag{48}$$

мы находим:

$$V \geqslant V_0. \tag{49}$$

По условиям теоремы число T можно выбрать настолько большим, что, выбирая величины ξ_s согласно условиям

$$|\xi_s| < \varepsilon \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

где ε — сколь угодно малое положительное число, отличное от нуля, мы можем сделать V_0 положительным. Если же V_0 — положительное число, то так как функция V имеет бесконечно малый верхний предел (см. конец § 5), существует такое положительное число λ, что мы будем иметь:

$$\lambda \leqslant x \leqslant H.$$

Но если переменные x_s удовлетворяют этому неравенству, то, обозначая через l какое-либо положительное число, меньшее всех возможных значений функции W при этом условии, мы получим из уравнения (48):

$$V > V_0 + l(t - T), \tag{50}$$

и это неравенство будет иметь место для всех значений времени в промежутке от T до t, если в этом промежутке никогда не нарушатся условия (46). Но при тех же условиях функция V должна удовлетворять неравенству (47). Следовательно, мы должны иметь:

$$V_0 + l(t - T) < V < L,$$

откуда получаем:

$$t < T + \frac{L - V_0}{l} = \tau.$$

Таким образом неравенства (47) и (50) могут существовать совместно только при значениях $t < \tau$. Поэтому, если неравенство (50) не должно нарушиться раньше условий (46), то в промежутке от T до τ наверно найдется такое значение t, начиная с которого хотя одно из этих условий не будет выполняться.

Итак, как бы ни было мало ε, величины ξ_s всегда можно выбрать так, что при $|\xi_s| < \varepsilon$, V_0 будет положительным и тогда необходимо наступит момент, когда по крайней мере одна из величин $|x_s|$ достигнет *неизменного* предела H, а отсюда и следует, что невозмущенное движение неустойчиво.

Теорема 4. *Если диференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует ограниченная функция V, производная которой в силу этих уравнений имеет вид:*

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W, \tag{51}$$

где λ — положительная постоянная, а W или тождественно равна нулю, или есть знакопостоянная функция, и если в последнем случае функция V такова, что при всяком t, большем некоторого предела, надлежащим выбором величин x_s, численно как угодно малых, ее можно сделать величиной одинакового знака с W, то невозмущенное движение неустойчиво.

Доказательство. Предположим для определенности, что функция V, удовлетворяющая условиям теоремы, такова, что W есть функция положительная. Тогда найдутся такие постоянные числа T и H, что при $t \geqslant T$ и

$$|x_s| \leqslant H \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{52}$$

мы будем иметь:

$$|V| < L, \quad W \geqslant 0,$$

где L — положительная постоянная.

Пусть постоянная T настолько велика, что величины ξ_s можно выбрать так, чтобы V_0 было положительным. Из уравнения (51) имеем:

$$\frac{dV}{dt} \geqslant \lambda V,$$

откуда

$$V \geqslant V_0 e^{\lambda (t-T)},$$

и, следовательно,

$$L > V_0 e^{\lambda (t-T)}.$$

Но последнее неравенство может иметь место только для тех значений t, которые меньше величины

$$\tau = T + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{L_0}{V_0}.$$

Поэтому в промежутке от T до τ условия (52) не могут постоянно выполняться, откуда и следует, что невозмущенное движение неустойчиво.

Если $W \equiv 0$, то

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V,$$

откуда

$$V = V_0 e^{\lambda(t-T)},$$

а следовательно,

$$L > V_0 e^{\lambda(t-T)},$$

и доказательство заканчивается так же, как и в предыдущем случае.

УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ

8. Уравнения в вариациях. Для приложений наиболее важным случаем является тот, когда все коэфициенты $p_{s\sigma}$, $P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$ в разложениях (21) функций X_s (см. § 3) суть постоянные числа. В этом случае в решении вопроса об устойчивости данного невозмущенного движения играет исключительную важность первое приближение, определяемое системой однородных линейных уравнений (26) (см. § 4), которые мы назвали системой уравнений в вариациях.

Рассмотрим эти уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \ldots + p_{1n}x_n, \\
\frac{dx_2}{dt} &= p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + \ldots + p_{2n}x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dx_n}{dt} &= p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \ldots + p_{nn}x_n.
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Так как по условию все коэфициенты $p_{s\sigma}$ суть постоянные числа, то общий интеграл этой системы может быть найден [1]) самыми элементарными методами. Напомним вкратце, как получается этот общий интеграл. Будем искать частное решение системы (53) в виде:

$$x_1 = K_1 e^{\lambda t}, \quad x_2 = K_2 e^{\lambda t}, \quad \ldots, \quad x_n = K_n e^{\lambda t}, \tag{54}$$

где все K_s и λ суть постоянные. Подстановка этих значений x_s в уравнения (53) приводит к следующим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}
K_1(p_{11} - \lambda) + K_2 p_{12} + \ldots + K_n p_{1n} &= 0, \\
K_1 p_{21} + K_2(p_{22} - \lambda) + \ldots + K_n p_{2n} &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
K_1 p_{n1} + K_2 p_{n2} + \ldots + K_n(p_{nn} - \lambda) &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Чтобы все K_s не были одновременно равны нулю, необходимо, чтобы

---

[1]) См., например, Э. Гурса, Курс математического анализа, т. II, ч. 2, ГТТИ, Москва 1933.

детерминант, составленный из коэфициентов при K_s, в этих уравнениях был равен нулю. Это дает уравнение для λ:

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda, & p_{12}, & \ldots, & p_{1n} \\ p_{21}, & p_{22}-\lambda, & \ldots, & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1}, & p_{n2}, & \ldots, & p_{nn}-\lambda. \end{vmatrix} = 0. \tag{56}$$

Это алгебраическое уравнение r-й степени относительно λ. Оно называется *характеристическим уравнением* системы в вариациях [1]).

Пусть корни этого уравнения все различны и будут

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n. \tag{57}$$

Так как все коэфициенты $p_{s\sigma}$ суть числа действительные, то или все λ_s суть действительные числа, или среди них есть комплексные сопряженные. Каждому корню λ_σ соответствует по уравнениям (55) система постоянных $K_{s\sigma}$, а следовательно, одно частное решение вида (54). Итак, мы получаем систему n различных решений уравнений в вариациях. Можно доказать, на чем мы останавливаться не будем, что эти n частных решений образуют фундаментальную систему, а тогда общее решение системы уравнений в вариациях напишется в виде:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1K_{11}e^{\lambda_1 t} + a_2K_{12}e^{\lambda_2 t} + \ldots + a_nK_{1n}e^{\lambda_n t}, \\ x_2 &= a_1K_{21}e^{\lambda_1 t} + a_2K_{22}e^{\lambda_2 t} + \ldots + a_nK_{\;n}e^{\lambda_n t}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n &= a_1K_{n1}e^{\lambda_1 t} + a_2K_{n2}e^{\lambda_2 t} + \ldots + a_nK_{nn}e^{\lambda_n t}, \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

где $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ — произвольные постоянные.

Если между корнями λ_σ есть кратные, то частные решения вообще будут иметь вид:

$$x_1 = f_1(t)\,e^{\lambda t}, \quad x_2 = f_2(t)\,e^{\lambda t}, \quad \ldots, \quad x_n = f_n(t)\,e^{\lambda t},$$

где $f_s(t)$ суть многочлены относительно t, степени которых не выше числа на единицу меньшего кратности корня.

9. Случай, когда уравнения возмущенного движения имеют каноническую форму. Рассмотрим важный случай, когда уравнения возмущенного движения имеют каноническую форму. Напишем эти уравнения в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y_s}, \\ \frac{dy_s}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_s} \end{aligned} \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ k;\ \ n=2k),\right\} \tag{59}$$

где характеристическая функция H есть голоморфная функция перемен-

---

[2]) А. М. Ляпунов называет уравнение (56) о п р е д е л я ю щ и м, а детерминант, представляющий его левую часть — о с н о в н ы м. Мы пользуемся более обычной терминологией.

ных x_s и y_s, не зависящая явно от t и не содержащая в своем разложении членов ниже второго порядка относительно x_s, y_s. Это разложение, следовательно, имеет вид:

$$H=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(A_{ij}x_ix_j+B_{ij}y_iy_j+C_{ij}x_iy_j)+\text{члены высших порядков}, \quad (60)$$

где

$$A_{ij}=\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\,\partial x_j} \text{ при } x_1=\ldots=x_k=y_1=\ldots=y_k=0,$$

$$B_{ij}=\frac{\partial^2 H}{\partial y_i\,\partial y_j} \quad » \quad x_1=\ldots=x_k=y_1=\ldots=y_k=0,$$

$$C_{ij}=\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\,\partial y_j} \quad » \quad x_1=\ldots=x_k=y_1=\ldots=y_k=0$$

и, следовательно, суть постоянные числа.

Чтобы получить систему уравнений в вариациях, достаточно отбросить в разложении H все члены выше первого порядка. Полученная система, очевидно, также будет канонической.

Обозначая через $\overline{H}$ совокупность членов второго порядка в разложении H, мы напишем эту систему в виде:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_s}{dt}&=\frac{\partial\overline{H}}{\partial y_s},\\ \frac{dy_s}{dt}&=-\frac{\partial\overline{H}}{\partial x_s}\end{aligned}\quad (s=1,\,2,\,\ldots,\,k)\right\} \quad (61)$$

или в раскрытом виде:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt}&=C_{11}x_1+C_{21}x_2+\ldots+C_{k1}x_k+B_{11}y_1+B_{21}y_2+\ldots+B_{k1}y_k,\\
\frac{dx_2}{dt}&=C_{12}x_1+C_{22}x_2+\ldots+C_{k2}x_k+B_{12}y_1+B_{22}y_2+\ldots+B_{k2}y_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dx_k}{dt}&=C_{1k}x_1+C_{2k}x_2+\ldots+C_{kk}x_k+B_{1k}y_1+B_{2k}y_2+\ldots+B_{kk}y_k,\\
\frac{dy_1}{dt}&=-A_{11}x_1-A_{21}x_2-\ldots-A_{k1}x_k-C_{11}y_1-C_{12}y_2-\ldots-C_{1k}y_k,\\
\frac{dy_2}{dt}&=-A_{12}x_1-A_{22}x_2-\ldots-A_{k2}x_k-C_{21}y_1-C_{22}y_2-\ldots-C_{2k}y_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dy_k}{dt}&=-A_{1k}x_1-A_{2k}x_2-\ldots-A_{kk}x_k-C_{k1}y_1-C_{k2}y_2-\ldots-C_{kk}y_k.
\end{aligned}\right\} \quad (62)$$

Характеристическое уравнение этой системы будет:

$$\begin{vmatrix} C_{11}-\lambda, & C_{21}, & \ldots, & C_{k1}, & B_{11}, & B_{21}, & \ldots, & B_{k1} \\ C_{12}, & C_{22}-\lambda, & \ldots, & C_{k2}, & B_{12}, & B_{22}, & \ldots, & B_{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{1k}, & C_{2k}, & \ldots, & C_{kk}-\lambda, & B_{1k}, & B_{2k}, & \ldots, & B_{kk} \\ A_{11}, & A_{21}, & \ldots, & A_{k1}, & C_{11}+\lambda, & C_{12}, & \ldots, & C_{1k} \\ A_{12}, & A_{22}, & \ldots, & A_{k2}, & C_{21}, & C_{22}+\lambda, & \ldots, & C_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1k}, & A_{2k}, & \ldots, & A_{kk}, & C_{k1}, & C_{k2}, & \ldots, & C_{kk}+\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Докажем, что каждому корню λ этого уравнения соответствует корень $-\lambda$, так что уравнение (62) имеет k пар корней, причем корни каждой пары равны по абсолютной величине, но имеют противоположные знаки. Действительно, пусть λ есть корень уравнения (62). Если мы заменим в этом уравнении λ на $-\lambda$, то определитель не изменится, в чем можно убедиться, переставляя строки на место столбцов и переставляя затем надлежащим образом как строчки, так и столбцы и имея в виду, что

$$A_{ij}=A_{ji}, \quad B_{ij}=B_{ji}.$$

Так как определитель не меняется, то $-\lambda$ есть также корень уравнения (62) и наше предложение доказано.

Рассмотрим теперь случай, когда характеристическая функция $\overline{H}$ системы уравнений в вариациях (61) есть знакоопределенная форма переменных x_s, y_s. Тогда все корни характеристического уравнения (62) чисто мнимые, т. е. имеют равные нулю действительные части и не равные нулю коэфициенты при $\sqrt{-1}$. Действительно, система имеет интеграл

$$\overline{H}=\text{const.}=h.$$

Так как $\overline{H}$ по условию есть знакоопределенная форма, то при помощи линейного преобразования она всегда может быть приведена к виду[1]):

$$H=A_1x_1'^2+A_2x_2'^2+\ldots+A_kx_k'^2+B_1y_1'^2+B_2y_2'^2+\ldots+B_ky_k'^2,$$

где x'_s, y'_s суть линейные функции x_s, y_s и все коэфициенты A_s и B_s имеют один и тот же знак — положительный, если $h>0$, и отрицательный, если $h<0$. Отсюда следует, что характеристическое уравнение не может иметь корней, действительные части которых отличны от нуля, так как если бы такие корни имелись, то по первому свойству половина из них имела бы отрицательные действительные части и другая половина — положительные. Тогда по крайней мере некоторые из величин x'_s, y'_s

1) См., например, Смирнов, Курс высшей математики, т. 3.

неограниченно возрастали бы вместе с временем и $\overline{H}$ не могло бы сохранять постоянное значение.

Итак, действительные части всех корней должны быть равны нулю. Наоборот, коэфициенты при $\sqrt{-1}$ необходимо все отличны от нуля. Действительно, в противном случае уравнение (62) имело бы нулевой корень по крайней мере второй кратности, вследствие чего в выражениях x_s и y_s появились бы члены, содержащие t множителем, и $\overline{H}$ опять бы неограниченно возрастала.

10. Некоторые вспомогательные предложения. Чтобы вывести критерии устойчивости и неустойчивости данного невозмущенного движения в случае, когда правые части уравнений возмущенного движения не содержат явно времени, мы можем воспользоваться общими теоремами, доказанными нами выше. Но для этого нам придется доказать предварительно несколько вспомогательных теорем.

Рассмотрим прежде всего следующую задачу. Дано уравнение с частными производными первого порядка

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots+p_{sn}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_s}=\lambda V, \tag{63}$$

где λ — некоторая постоянная. Требуется найти все значения этой постоянной, при которых уравнение (63) удовлетворяется целой однородной функцией степени m от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, m — целое положительное число, равное единице или двум.

Пусть сначала $m=1$, и попробуем удовлетворить уравнению (63) однородной функцией первой степени. Для этого примем

$$V=A_1x_1+A_2x_2+\ldots+A_nx_n, \tag{64}$$

где A_s — неопределенные коэфициенты. Подставляя в уравнение (63) вместо V его выражение (64), мы получим:

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots+p_{sn}x_n)A_s=\lambda(A_1x_1+A_2x_2+\ldots+A_nx_n).$$

Чтобы это уравнение удовлетворялось тождественно, необходимо, чтобы коэфициенты при x_s в левой и правой частях равенства были одинаковы. Это дает нам n линейных однородных уравнений с неизвестными $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\begin{array}{l}
(p_{11}-\lambda)A_1+p_{21}A_2+\ldots+p_{n1}A_n=0,\\
p_{12}A_1+(p_{22}-\lambda)A_2+\ldots+p_{n2}A_n=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p_{1n}A_1+p_{2n}A_2+\ldots+(p_{nn}-\lambda)A_n=0.
\end{array}$$

Чтобы эта система имела отличные от нуля решения, необходимо, чтобы детерминант, составленный из коэфициентов при A_s, был равен нулю. Приравнивая этот детерминант нулю, мы получим для λ то же самое характеристическое уравнение (56), которое было выведено в § 8.

Итак, при $m = 1$ задача имеет решения только в том случае, когда постоянная λ есть корень характеристического уравнения системы в вариациях.

Пусть теперь $m = 2$, и будем искать решение уравнения (63) в виде квадратичной формы переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для этого положим:

$$V = \sum_{s,\sigma=1}^{n} A_{s\sigma} x_s x_\sigma, \tag{65}$$

где $A_{s\sigma}$ — неопределенные коэфициенты. Сосчитаем число этих коэфициентов.

Во-первых, мы имеем n коэфициентов при квадратах переменных, во-вторых, $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ коэфициентов при произведениях переменных. Всего мы будем иметь:

$$n + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} = \frac{n(n+1)}{2} = N$$

коэфициентов.

Для определения этих коэфициентов подставим выражение (65) для V в уравнение (64). Мы имеем:

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n)(A_{s1}x_1 + A_{s2}x_2 + \ldots + A_{sn}x_n) =$$

$$= \lambda \sum_{s,\sigma=1}^{n} A_{s\sigma} x_s x_\sigma.$$

Так как это равенство должно быть тождеством, то коэфициенты при одинаковых произведениях $x_s x_\sigma$ в левой и правой частях равенства должны быть одинаковы. Приравнивая эти коэфициенты, мы получим N линейных однородных уравнений с неизвестными $A_{s\sigma}$. Чтобы эти уравнения имели не нулевые решения, необходимо, чтобы детерминант, составленный из коэфициентов при $A_{s\sigma}$, в этих уравнениях был равен нулю. Это уравнение будет степени N, и задача имеет решения только в том случае, когда постоянная λ есть его корень. Нетрудно сообразить, что это уравнение может быть написано в виде:

$$D_2(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12}, & \ldots, & a_{1N} \\ a_{21}, & a_{22} - \lambda, & \ldots, & a_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{N1}, & a_{N2}, & \ldots, & a_{NN} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

где $a_{s\sigma}$ суть линейные комбинации коэфициентов $p_{s\sigma}$. Зная все корни характеристического уравнения, можно найти также все корни уравнения $D_2(\lambda)=0$. Действительно, можно доказать, что если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ суть корни характеристического уравнения, то все корни уравнения

$$D_2(\lambda)=0$$

получаются из формулы:

$$\lambda = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n, \tag{66}$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ суть всевозможные целые неотрицательные числа, удовлетворяющие соотношению:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 2.$$

Мы не будем останавливаться на доказательстве этого предложения, которое нетрудно проверить непосредственно, и перейдем к доказательству нескольких лемм, необходимых для вывода критериев устойчивости.

Лемма 1. *Если корни характеристического уравнения системы в вариациях таковы, что уравнение $D_2(\lambda)=0$ не имеет нулевых корней, то всегда возможно найти и притом только одну целую однородную функцию второй степени от величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющую уравнению:*

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n)\,\frac{\partial V}{\partial x_s} = U, \tag{67}$$

где U есть произвольно заданная целая однородная функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ также второй степени.

Действительно, для определения коэфициентов искомой функции V, которую опять определим формулой (65), мы получим N линейных неоднородных уравнений, правые части которых будут коэфициентами функции U.

Чтобы эта система уравнений имела единственное решение, необходимо, чтобы детерминант, составленный из коэфициентов при неизвестных, был отличен от нуля. Но этот детерминант есть не что иное, как $D_2(0)$, и он не равен нулю, так как по условию леммы уравнение $D_2(\lambda)=0$ не имеет нулевых корней. Это условие будет, например, выполнено, если действительные части всех корней λ_s отличны от нуля и имеют одинаковые знаки.

В двух следующих леммах мы будем рассматривать величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как функции t, удовлетворяющие системе уравнений в вариациях (53).

Лемма 2. *Если действительные части всех корней λ_s характеристического уравнения отрицательны и если U есть знакоопределенная форма второй степени, то удовлетворяющая уравнению (67) форма второй степени V также будет знакоопределенной и притом противоположного знака с U.*

Доказательство. Образуем полную производную от функции V в предположении, что величины x_s удовлетворяют уравнениям (53). Мы имеем:

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\frac{dx_s}{dt}=\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots+p_{sn}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_s}=U.$$

Так как U есть знакоопределенная форма, то для всякого решения системы (53), отличного от решения $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, функция V будет монотонной функцией от t, возрастающей, если U положительна, и убывающей, если U отрицательна. Но так как по условию действительные части всех λ_s отрицательны, то функции x_s, удовлетворяющие уравнениям (53), все стремятся к нулю, когда t неограниченно возрастает. Следовательно, функция V также стремится к нулю для всякого решения системы (53). А так как V — монотонная функция, то она стремится к нулю по *отрицательным* значениям, если U положительна, и по *положительным*, если U отрицательна. А это и требовалось доказать.

Лемма 3. *Если некоторые корни характеристического уравнения имеют положительные действительные части и U есть знакоопределенная форма второй степени, то удовлетворяющая уравнению* (67) *форма второй степени V наверное не будет знакоопределенной противоположного знака с U.*

Действительно, если величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют уравнениям (53), то мы имеем:

$$\frac{dV}{dt}=U,$$

и, следовательно, $\frac{dV}{dt}$ есть знакоопределенная форма, а V — монотонная функция от t.

Следовательно, если V не может получать значений одинакового знака с U, то она есть знакоопределенная форма противоположного знака с U. Но тогда по теореме 1 § 6 следует, что все величины x_s, удовлетворяющие уравнениям (53), должны иметь некоторые верхние пределы, что невозможно, так как характеристическое уравнение системы (53) имеет по условию корни с положительными действительными частями, и, следовательно, по крайней мере некоторые из величин x_s неограниченно возрастают вместе с t.

Итак, форма V необходимо знакопеременная, что и требовалось доказать.

На основании этих вспомогательных предложений нетрудно уже вывести критерии устойчивости данного невозмущенного движения.

11. Определение устойчивости по корням характеристического уравнения системы в вариациях. Докажем следующие важные теоремы:

Теорема 1. *Если действительные части всех корней λ_s характеристического уравнения отрицательны, то невозмущенное движение устойчиво и всякое возмущенное движение, для которого возмущения достаточно малы, асимптотически приближается к невозмущенному.*

Доказательство. На основании первой леммы предыдущего параграфа мы можем утверждать, что существует квадратичная форма V переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющая уравнению:

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s} = -x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2. \qquad (68)$$

Найдем ее полную производную по t. Мы имеем:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

Вставляя сюда вместо $\frac{dx_n}{dt}$ их значения из уравнений возмущенного движения, мы получим:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s} + \sum_{s=1}^{n} \overline{X}_s \frac{\partial V}{\partial x_s},$$

откуда в силу уравнения (68) находим:

$$\frac{dV}{dt} = -x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2 + \sum_{s=1}^{n} \overline{X}_s \frac{\partial V}{\partial x_s}.$$

При малых значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ знак $\frac{dV}{dt}$ будет совпадать с знаком величины $-x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2$, т. е. $\frac{dV}{dt}$ будет определенно-отрицательной функцией. Отсюда на основании леммы 2 следует, что V будет определенно-положительной формой. Таким образом мы нашли функцию V, удовлетворяющую условиям теоремы 1 § 6. Следовательно, невозмущенное движение *устойчиво*.

Так как V — знакоопределенная форма и величины x_s согласно только что доказанному удовлетворяют неравенствам:

$$|x_s| < H \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

то V имеет бесконечно малый верхний предел и, следовательно, соблюдены условия и второй теоремы § 6.

Следовательно, всякое возмущенное движение, для которого возмущения достаточно малы, будет при $t \to \infty$ асимптотически приближаться к невозмущенному, и теорема доказана в полном объеме.

Теорема 2. *Если в числе корней характеристического уравнения имеются такие, действительные части которых положительны, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Доказательство. Предположим сначала, что величины λ_s таковы, что детерминант $D_2(0)$ не равен нулю. Тогда на основании леммы 1 существует квадратичная форма V, удовлетворяющая уравнению (68). Но на основании леммы 3 эта форма не будет знакоопределенной. Кроме того, при малых значениях x_s она имеет бесконечно малый верхний предел. Таким образом соблюдены все условия теоремы 3 § 7, и, следовательно, невозмущенное движение *неустойчиво*. Если величины λ_s таковы, что $D_2(0)=0$, то формы, удовлетворяющей уравнению (68), не существует. Рассмотрим тогда следующее уравнение:

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s} = \lambda V - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2, \quad (69)$$

где λ — некоторая постоянная, не являющаяся корнем уравнения $D_2(\lambda)=0$. Подставляя в уравнение (69) вместо V выражение (65) и приравнивая коэфициенты при одинаковых произведениях $x_s x_\sigma$, мы опять получим систему N линейных уравнений относительно $A_{s\sigma}$. Левые части этих уравнений, очевидно, будут такие же, как и левые части уравнений, выводимых из уравнения (63), а в правых частях будет или 0 или -1. Детерминат этой системы будет, следовательно, $D_2(\lambda)$. Так как по условию постоянная λ не есть корень уравнения $D_2(\lambda)=0$, то детерминант системы отличен от нуля и, следовательно, система имеет единственное решение. Таким образом форма V, удовлетворяющая уравнению (69), существует. Так как V есть однородная функция второй степени, то по теореме Эйлера мы можем написать:

$$x_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial V}{\partial x_n} = 2V,$$

откуда

$$V = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} x_s \frac{\partial V}{\partial x_s} \quad (70)$$

Функция V удовлетворяет уравнению (69). Вставляя в правую часть этого уравнения вместо V его выражения (70), мы получим новое уравнение, которому, очевидно, V также будет удовлетворять. Легко видеть, что это уравнение можно написать в виде:

$$\sum_{s=1}^{n} \left[p_{s_1}x_1 + p_{s_2}x_2 + \ldots + \left(p_{s_s} - \frac{\lambda}{2}\right)x_s + \ldots + p_{s_n}x_n\right] \frac{\partial V}{\partial x_s} =$$
$$= -x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2.$$

Но последнее уравнение имеет такой же вид, как и уравнение (68), с заменой коэфициентов p_{s_s} коэфициентами $p_{s_s} - \frac{\lambda}{2}$, и к нему можно приложить все предыдущие рассуждения. Новое характеристическое уравнение будет иметь, очевидно, следующие корни:

$$\lambda_1 + \frac{\lambda}{2}, \quad \lambda_2 + \frac{\lambda}{2}, \ldots, \lambda_n + \frac{\lambda}{2}.$$

Так как по условию среди чисел λ_s есть такие, действительные части которых положительны, то величину λ можно выбрать настолько малой, чтобы среди чисел $\lambda_s + \frac{\lambda}{2}$ также были положительные. Но тогда на основании леммы 3 форма V не будет знакоопределенной. Производная от этой формы в силу уравнений возмущенного движения будет иметь вид:

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2 + \sum_{s=1}^{n} \overline{X_s} \frac{\partial V}{\partial x_s},$$

и мы находимся в условиях теоремы 4 § 7. Так как функция W имеет выражение:

$$W = -x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2 + \sum_{s=1}^{n} \overline{X_s} \frac{\partial V}{\partial x_s},$$

то W есть определенно-отрицательная форма, а так как V может получать значения того же знака, как и W_1, то невозмущенное движение неустойчиво.

Теорема 3. *Если характеристическое уравнение имеет один или несколько корней, действительные части которых равны нулю, а действительные части всех остальных корней отрицательны, то вопрос об устойчивости не может быть решен с помощью одного только первого приближения.*

Действительно, этот случай является сомнительным, так как уравнение $D_2(\lambda)$ наверное имеет нулевые корни. Пусть, например, $\lambda_1 = 0$, а действительные части всех остальных корней отрицательны. Положим

$$m_1 = 2, \quad m_2 = 0, \ldots, \quad m_n = 0.$$

Тогда

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 0,$$

и соответствующее значение λ будет:

$$\lambda = 2 \cdot 0 + 0 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + \ldots + 0 \cdot \lambda_n = 0.$$

Пусть далее λ_1 и λ_2 — два сопряженные мнимые корни, а все остальные корни имеют отрицательные действительные части. Положим

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 0, \quad \ldots, \quad m_n = 0.$$

Тогда

$$m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n = 0,$$

и соответствующее значение λ будет:

$$\lambda = 1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \lambda_3 + \ldots + 0 \cdot \lambda_n = 0,$$

так как $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

Следовательно, нельзя найти квадратичной формы V, удолетворяющей уравнению леммы 1, и вопрос об устойчивости остается открытым.

12. Исследование сомнительного случая. В предыдущем параграфе мы показали, что если характеристическое уравнение системы в вариациях не имеет корней, действительные части которых равны нулю, то вопрос об устойчивости полностью решается рассмотрением только первого приближения. Но если действительная часть хотя бы одного корня есть нуль, то первое приближение недостаточно для решения задачи, и приходится принимать в рассмотрение также члены высших порядков в правых частях диференциальных уравнений возмущенного движения. Связанные с этим исследования чрезвычайно сложны и здесь воспроизведены быть не могут.

Заметим, что в общем виде эта задача до сих пор еще не решена. Сам А. М. Ляпунов разобрал и исследовал только наиболее простые случаи, когда характеристическое уравнение имеет или только один нулевой корень или два чисто мнимых корня. Для приложений к небесной механике, однако, эти сомнительные случаи представляют наибольший интерес. Действительно, уравнения небесной механики обычно имеют каноническую форму, и, следовательно, характеристическое уравнение системы в вариациях (см. § 9) имеет одинаковое число корней с положительными и отрицательными действительными частями. Следовательно, если действительные части всех корней отличны от нуля, то невозмущенное движение всегда будет неустойчивым. Для того чтобы движение было устойчивым, *необходимо*, но разумеется *недостаточно*, чтобы действительные части всех корней были равны нулю, т. е. чтобы характеристическое уравнение имело только чисто мнимые корни.

Но этот случай, как мы показали, как раз является сомнительным, и для выяснения вопроса об устойчивости нужны сложные и тонкие исследования членов высших порядков. Например, рассмотрим частные решения ограниченной задачи о трех телах. Было показано (см. главу VIII), что для решений первой группы характеристическое уравнение системы в вариациях при любом значении μ имеет два действительных корня и два чисто мнимых. Так как уравнения возмущенного движения имеют каноническую форму, то действительные корни имеют разные знаки, а, следовательно, частные решения первой группы неустойчивы, и может иметь место только условная устойчивость.

Для частных решений второй группы корни характеристического уравнения все чисто мнимые, если $\mu < 0{,}0385$.

Мы видим, что этот случай является сомнительным и требует дальнейших исследований.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, издание Харьковского математического общества, 1892. Это сочинение переиздано в настоящее время ОНТИ.

А. М. Ляпунов, Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах, отдельный оттиск из *Сообщений Харьковского математического общества*, Харьков 1889.

А. М. Ляпунов, Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. *Математический сборник*, издаваемый Московским математическим обществом, т. 17, вып. 2, Москва 1893.

Первоначальное ознакомление с проблемой устойчивости и с методами определения критериев устойчивости можно получить по книге Гурса:

Э. Гурса, Курс математического анализа, т. III, ч. 1, перевод с французского под редакцией проф. В. В. Степанова, ГТТИ, Москва 1934.

Исследование устойчивости частых решений уравнений небесной маханики см. у

H. Poincarè, Les méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, т. I.

Также см.

H. Poincarè, Sur les courbes définies par les équations différentielles, *Journal de mathématiques*; 3 série, t. 7 et 8, 4 série, t. 1 et 2.