Проф. М. А. Тихомандрицкій.

КУРСЪ
ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО И ИНТЕГРАЛЬНАГО
ИСЧИСЛЕНІЙ.

(СЪ ПРИМѢРАМИ ДЛЯ УПРАЖНЕНІЙ).

ТОМЪ II-й.

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій, обыкновенныхъ и съ частными производными 1-го порядка.

Изданіе А. Дредера.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія Адольфа Дарре, Московская ул., д. № 19.
1903.

Дозволено цензурою. Харьковъ, 1 Іюня 1902 г.

Предисловіе.

Когда явилась надобность во второмъ изданіи моей книги: «Курсъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій», я намѣревался сдѣлать къ нему значительныя дополненія въ видахъ приближенія его къ университетскому курсу; не желая при этомъ задерживать изданіе, я рѣшился отнести всѣ дополненія къ отдѣльному второму тому. Пока, однако, представилась возможность къ осуществленію этого намѣренія, второе изданіе оказалось почти разошедшимся, и я получилъ отъ г-на Дредера предложеніе изготовить третье изданіе этой книги. Тогда я вернулся къ первоначальному своему плану, именно, каждое дополненіе сдѣлать въ соотвѣтственномъ мѣстѣ перваго тома, посвященнаго дифференціальному исчисленію съ его приложеніями къ анализу и геометріи, и интегральному исчисленію, именно первой части его: интегрированію функцій и его приложеніямъ къ геометріи; второй же томъ посвятить всецѣло второй части интегральнаго исчисленія, именно «Интегрированію уравненій обыкновенныхъ и съ частными производными 1-го порядка», такъ какъ эта часть въ университетахъ и другихъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ обыкновенно читается студентамъ другого курса.

Этотъ II-й томъ составился изъ тѣхъ двухъ курсовъ: I) Интегрированія обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій и II) Интегрированія частныхъ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка, которые я читалъ въ Императорскомъ Харьковскомъ Университетѣ по порученію Физико-математическаго Факультета въ 1900—1902 годахъ. Я старался изложить все существенно-необходимое ясно, насколько это возможно въ сжатомъ изложеніи, отсылая болѣе любознательныхъ читателей къ другимъ указаннымъ сочиненіямъ какъ на иностранныхъ языкахъ, такъ и на русскомъ; ибо пора обращать намъ вниманіе на труды своихъ соотечественниковъ, желающихъ приносить посильную пользу наукѣ и учащимся.

Нѣкоторыя мѣста этого тома, особенно въ послѣднихъ главахъ, требуютъ знакомства съ теоріей опредѣлителей, безъ помощи которой при нынѣшнемъ развитіи науки нельзя обходиться безъ ущерба для ясности, краткости и изящества изложенія; учащійся найдетъ всё необходимое въ моей книгѣ: Краткій Курсъ Высшей Алгебры. Изданіе, 2-е исправленное и дополненное. Харьковъ, 1892 г.

Для разумнаго изученія предмета важно, чтобы учебникъ содержалъ достаточное количество примѣровъ для уясненія и провѣрки каждой теоріи. Съ этою цѣлью и во II-мъ томѣ послѣ каждой главы помѣщены «примѣры для упражненія», выбранные изъ разныхъ русскихъ и иностранныхъ сочиненій, по большей части съ рѣшеніями. Я не имѣлъ времени провѣрить эти рѣшенія; очень возможно, что окажутся въ нихъ погрѣшности: учащійся долженъ пріучаться, не полагаясь на указанныя рѣшенія, дѣлать самъ повѣрку каждаго найденнаго имъ рѣшенія, возвращаясь отъ него къ данному дифференціальному уравненію путемъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ или произвольныхъ функцій—для частныхъ дифференціальныхъ уравненій, и я буду очень благодаренъ каждому, кто укажетъ мнѣ найденную имъ погрѣшность. Замѣченныя мною погрѣшности указаны въ концѣ книги, и я прошу каждаго читателя предварительно ихъ исправить.

Буду очень радъ, если составленный мною II-й томъ также окажется полезнымъ учащимся, какъ и I-й. Тѣ, которые вынуждены ограничить себя въ изученіи этого предмета программами спеціальныхъ учебныхъ заведеній, легко могутъ выпустить нетребуемое отъ нихъ: это сдѣлать легче, чѣмъ пополнить пропущенное въ книгѣ. Такіе, можетъ быть, впослѣдствіи, на досугѣ, поинтересуются выпущеннымъ, и такое возвращеніе къ наукѣ окажется могучимъ противодѣйствіемъ неблагопріятному вліянію той среды, въ которой придется иному вращаться по окончаніи курса.

Подробное оглавленіе позволитъ читателю составить предварительное понятіе о содержаніи и планѣ этого II-го тома.

Гатчина, 19$\frac{28}{\mathrm{IV}}$03. Профессоръ *М. Тихомандрицкій.*

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Глава VII. *Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій высшихъ порядковъ* . . . 176

Глава VIII. *Линейныя дифференціальныя уравненія* . . . 203

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій.

ГЛАВА I.

Интегрированіе полныхъ дифференціаловъ.
Разныя слѣдствія.

1. Прежде чѣмъ приступить къ собственному предмету этой части курса, намъ надлежитъ заняться интегрированіемъ полныхъ дифференціаловъ; при изложеніи этой статьи намъ понадобится дифференцированіе опредѣленнаго интеграла по параметру, а потому мы начнемъ съ этого вопроса.

2. Пусть данъ интегралъ

$$u=\int_a^b f(x,\alpha)\,dx, \tag{1}$$

гдѣ α параметръ; отъ него, вообще говоря, могутъ зависѣть и предѣлы интеграла; но мы разсмотримъ сперва случай, когда a и b не зависятъ отъ α. Давъ α приращеніе $\Delta\alpha$, мы получимъ для приращенія интеграла u, которое означимъ чрезъ Δu, слѣдующее выраженіе:

$$\Delta u=\int_a^b [f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]\,dx; \tag{2}$$

но

$$\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}=\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}+\varepsilon(x,\alpha,\Delta\alpha), \tag{3}$$

гдѣ $\varepsilon(x,\alpha,\Delta\alpha)$ функція, обращающаяся въ нуль вмѣстѣ съ $\Delta\alpha$, а потому (2), по раздѣленіи на $\Delta\alpha$, приметъ такой видъ:

$$\frac{\Delta u}{\Delta\alpha}=\int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx+\int_a^b \varepsilon(x,\alpha,\Delta\alpha)\,dx; \tag{4}$$

если теперь

$$\text{пред.}\int_a^b \varepsilon(x, \alpha, \Delta\alpha)\,dx\Big|_{\Delta\alpha=0}=0, \tag{5}$$

то изъ (4) въ предѣлѣ получимъ:

$$\frac{du}{d\alpha}=\int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}dx, \tag{6}$$

которое равенство и выражаетъ правило дифференцированія опредѣленнаго интеграла по параметру, когда отъ него зависитъ только подъинтегральная функція, но не предѣлы. Если функція $\varepsilon(x, \alpha, \Delta\alpha)$ остается конечною въ предѣлахъ интеграла и непрерывною, то по первому предложенію о среднихъ величинахъ будемъ имѣть:

$$\int_a^b \varepsilon(x, \alpha, \Delta\alpha)\,dx=\varepsilon(a+\theta(b-a), \alpha, \Delta\alpha)(b-a); \tag{7}$$

но какъ $\varepsilon(x, \alpha, \Delta\alpha)$ обращается въ нуль вмѣстѣ съ $\Delta\alpha$ при всякихъ значеніяхъ x и α въ предѣлахъ конечности и непрерывности функціи, то (5) будетъ имѣть мѣсто въ этомъ случаѣ; въ случаѣ безконечныхъ a или b, или обоихъ, нужно спеціальное разсмотрѣніе въ каждомъ случаѣ.

3. Предположимъ теперь, что a и b суть функціи отъ α; тогда будемъ имѣть:

$$\Delta u=\int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(x, \alpha+\Delta\alpha)\,dx-\int_a^b f(x, \alpha)\,dx, \tag{1}$$

или

$$\begin{aligned}\Delta u=\int_a^b [f(x, \alpha+\Delta\alpha)-f(x, \alpha)]\,dx+\int_b^{b+\Delta b} f(x, \alpha+\Delta\alpha)dx-\\ -\int_a^{a+\Delta a} f(x, \alpha+\Delta\alpha)\,dx;\end{aligned} \tag{2}$$

примѣняя къ послѣднимъ двумъ членамъ теорему о среднихъ величинахъ, а къ первому формулу (4) пред. §, по раздѣленіи на $\Delta\alpha$, будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta u}{\Delta\alpha}=\int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}dx+\int_a^b \varepsilon(x, \alpha, \Delta\alpha)dx+f(b+\theta\Delta b, \alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta b}{\Delta\alpha}-\\ -f(a+\vartheta\Delta a, \alpha+\Delta\alpha)\frac{\Delta a}{\Delta\alpha},\end{aligned} \tag{3}$$

и переходя къ предѣлу, на основаніи (5) пред. §:

$$\frac{du}{d\alpha}=\int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}dx+f(b, \alpha)\frac{db}{d\alpha}-f(a, \alpha)\frac{da}{d\alpha}. \tag{4}$$

Эту формулу можно было бы и прямо получить, дифференцируя нашъ интегралъ по правилу сложныхъ функцій и помня, что производная интеграла по верхнему предѣлу равна значенію подъинтегральной функціи при $x=b$, а производная по нижнему предѣлу равна значенію той же функціи для нижняго предѣла, взятой со знакомъ —, такъ какъ перестановка предѣловъ измѣняетъ знакъ интеграла.

4. Въ теоріи опредѣленныхъ интеграловъ показываются многоразличныя примѣненія формулы дифференцированія опредѣленнаго интеграла по параметру; здѣсь мы ограничимся только однимъ приложеніемъ ея, сдѣланнымъ Е. И. Золотаревымъ (въ Nouvelles Annalles), къ выводу ряда Лагранжа съ остаточнымъ членомъ, форма котораго однако будетъ отлична отъ той, которую далъ П. Л. Чебышевъ, выводъ котораго былъ изложенъ въ началѣ курса интегрированія функцій.

Пусть дано уравненіе

$$z=x+\alpha\varphi(z), \tag{1}$$

опредѣляющее z функціей отъ x; возьмемъ опредѣленный интегралъ:

$$S_m=\int_x^z [x+\alpha\varphi(u)-u]^m F'(u)du \tag{2}$$

и продифференцируемъ его по параметру x, отъ котораго зависятъ и оба предѣла интеграла; будемъ имѣть:

$$\begin{gathered}\frac{dS_m}{dx}=\int_x^z m[x+\alpha\varphi(u)-u]^{m-1} F'(u)du+\\ +[x+\alpha\varphi(z)-z]^m F'(z)\frac{dz}{dx}-[x+\alpha\varphi(x)-x]^m F'(x),\end{gathered} \tag{3}$$

или, (на основаніи (1) и обозначенія (2)):

$$\frac{dS_m}{dx}=m\,S_{m-1}-\alpha^m[\varphi(x)]^m F'(x). \tag{4}$$

Перенеся послѣдній членъ въ другую часть, взявъ отъ обѣихъ производную $m-1$-го порядка по x и раздѣливъ обѣ части на $m!$, получимъ отсюда:

$$\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}S_{m-1}}{dx^{m-1}}=\frac{1}{m!}\frac{d^m S_m}{dx^m}+\frac{\alpha^m}{m!}\frac{d^{m-1}\left\{[\varphi(x)]^m F'(x)\right\}}{dx^{m-1}}; \tag{5}$$

просумировавъ по m отъ $m=1$ до $m=n$, будемъ имѣть:

$$\sum_{m=1}^n\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}S_{m-1}}{dx^{m-1}}=\sum_{m=1}^n\frac{1}{m!}\frac{d^m S_m}{dx^m}+\sum_{m=1}^n\frac{\alpha^m}{m!}\frac{d^{m-1}\left\{[\varphi(x)]^m F'(x)\right\}}{dx^{m-1}}. \tag{6}$$

Такъ какъ лѣвая сумма отстаетъ отъ правой на одинъ рангъ, а число членовъ одинаковое n, то по сокращеніи на $n-1$ членовъ, общихъ обѣимъ суммамъ, останется отъ первой одинъ первый членъ:

$$\frac{1}{0!}\frac{d^0 S_0}{dx^0}=S_0=\int_x^z F'(u)du=F(z)-F(x),$$

а отъ второй одинъ послѣдній:

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n S_n}{dx^n},$$

а потому изъ (6) получится такая формула:

$$F(z)=F(x)+\sum_{m=1}^{n}\frac{\alpha^m}{m!}\frac{d^{m-1}\left\{[\varphi(x)]^m F'(x)\right\}}{dx^{m-1}}+ \tag{7}$$
$$+\frac{1}{n!}\frac{d^n\int_x^z[x+\alpha\varphi(u)-u]^n F'(u)du}{dx^n},$$

что и представляетъ строку Лагранжа *).

5. Пусть теперь дано равенство:

$$du=Mdx+Ndy, \tag{1}$$

гдѣ M и N функціи x и y. Эти функціи не могутъ быть заданы вполнѣ произвольно, если правая часть должна быть полнымъ дифференціаломъ, ибо изъ (1) слѣдуетъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=N; \tag{2}$$

дифференцируя первое изъ этихъ равенствъ по y, второе по x, и имѣя въ виду, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},$$

мы получимъ отсюда:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}; \tag{3}$$

вотъ, стало быть, какому условію должны удовлетворять функціи M и N въ правой части равенства (1), чтобы она представляла полный дифференціалъ.

---

*) Въ XXII т. Московскаго Математическаго Сборника, стр. 219, проф. Н. В. Бугаевъ съ помощью метода Золотарева получилъ еще болѣе общую формулу, чѣмъ Лагранжевская. Этому ряду посвящена монографія П. А. Некрасова, изданная въ 1885 г. въ Москвѣ, подъ заглавіемъ „Рядъ Лагранжа“.

6. Если это условіе (3) выполнено, то функція u, опредѣляемая равенствомъ (1), можетъ быть найдена. Дѣйствительно, это условіе по произвольности dx и dy равносильно двумъ условіямъ (2), какъ мы видѣли. Въ первомъ изъ этихъ уравненій y трактуется какъ постоянное, и тогда всѣ функціи, ему удовлетворяющія, найдутся, интегрируя его по x, разсматривая при этомъ y какъ постоянную, параметръ, и мы будемъ имѣть:

$$u = \int_{x_0}^{x} M dx + Y, \tag{1}$$

гдѣ постоянную производную мы обозначили чрезъ Y, чтобы показать, что она можетъ быть функціей y. Эту функцію Y можно такъ опредѣлить, что (1) будетъ удовлетворять и второму равенству (2) пред. §. Дѣйствительно, дифференцируя u по y, параметру, будемъ имѣть (такъ какъ предѣлы не зависятъ отъ y), подставляя во второе изъ (2):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx + \frac{dY}{dy} = N, \tag{2}$$

откуда находимъ

$$\frac{dY}{dy} = N - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx, \tag{3}$$

— выраженіе, которое дѣйствительно не зависитъ отъ x, ибо дифференцируя правую часть по x, получаемъ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

по (3) пред. §; слѣд. интегрируя (3) наст. §, мы и найдемъ Y. Для удобства вычисленій замѣтимъ, что по (3) пред. §:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x} dx = N - N_0, \tag{5}$$

если N_0 получается изъ N чрезъ замѣну перемѣнной x чрезъ x_0. Вносяя это въ (3), найдемъ:

$$\frac{dY}{dy} = N_0; \tag{6}$$

слѣд.

$$Y = \int_{x_0}^{x} N_0 dy + C, \tag{7}$$

гдѣ C произвольная постоянная. Вносяя это въ (1), будемъ имѣть:

$$u=\int_{x_0}^{x} Mdx+\int_{y_0}^{y} N_0 dy+C. \tag{8}$$

Вотъ какъ выражается функція u, которой полный дифференціалъ $du = Mdx + Ndy$. Какъ содержащая произвольную постоянную, эта функція называется неопредѣленнымъ интеграломъ и короче обозначается такъ:

$$u=\int Mdx+Ndy, \tag{9}$$

гдѣ знакъ интеграла распространяется на все выраженіе, стоящее послѣ него, хотя скобокъ не пишутъ при этомъ. Это краткое, но неясное обозначеніе, не имѣетъ другого смысла, какъ (8), или же еще того, которое получимъ мѣняя порядокъ интегрированія, т. е. начиная съ интегрированія по y, а потомъ производя его по x, именно:

$$u=\int_{y_0}^{y} Ndy+\int_{x_0}^{x} M_0 dx+C, \tag{10}$$

гдѣ M_0 значеніе M, когда вмѣсто y подставимъ y_0. Интегралъ, исчезающій при $(x=x_0,\ y=y_0)$, получится отсюда и изъ (8), полагая $C=0$, и мы будемъ имѣть:

$$u=\int_{x_0}^{x} Mdx+\int_{y_0}^{y} N_0 dy=\int_{y_0}^{y} Ndy+\int_{x_0}^{x} M_0 dx. \tag{11}$$

Это равенство даетъ поводъ къ интересному и важному по своимъ приложеніямъ обобщенію понятія объ интегралѣ; но прежде чѣмъ сдѣлать это, поясним изложенное примѣромъ.

7. Пусть требуется найти:

$$u=\int\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right); \tag{1}$$

здѣсь

$$M=\frac{x^2+xy+y^2}{(x^2+y^2)x}=\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2+y^2};\quad N=-\frac{x^2+xy+y^2}{(x^2+y^2)y}=-\frac{1}{y}-\frac{x}{x^2+y^2}; \tag{2}$$

слѣд. $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$; условіе $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ выполнено, и потому

$$u=\int_1^x Mdx+Y=\int_1^x\frac{dx}{x}+\int_1^x\frac{ydx}{x^2+y^2}+Y=\log x+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}-\operatorname{arctg}\frac{1}{y}+Y. \tag{3}$$

Дифференцируя это по y и сравнивая съ (2), получимъ:

$$-\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{dY}{dy}=-\frac{1}{y}-\frac{x}{x^2+y^2}, \tag{4}$$

откуда

$$\frac{dY}{dy} = -\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y^2}, \tag{5}$$

и слѣд.

$$Y = -\log y - \operatorname{arctg} y + C'. \tag{6}$$

Вносяэто въ (3) и имѣя въ виду, что

$$\operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg}\frac{1}{y} = \frac{\pi}{2}, \tag{7}$$

будемъ имѣть:

$$u = \log\frac{x}{y} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C. \tag{8}$$

8. Иногда данное выраженіе разбивается на сумму нѣсколькихъ, изъ которыхъ каждое въ отдѣльности удовлетворяетъ условію (3) § 5; въ такомъ случаѣ проще бываетъ находить отдѣльно интегралы каждой части. Такъ, въ примѣрѣ пред. §, имѣя въ виду, что

$$\frac{x^2+y^2+xy}{x^2+y^2} = 1 + \frac{xy}{x^2+y^2},$$

можно подъинтегральную функцію такъ представить:

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} + \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2};$$

здѣсь первая пара членовъ есть $d\log\frac{x}{y}$, а послѣдній членъ $d\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, какъ легко видѣть, и, интегрируя, мы сразу получаемъ равенство (8) того же §.

9. Иногда такое раздѣленіе на части становится возможнымъ по введеніи новыхъ перемѣнныхъ. Такъ, если дано найти

$$u = \int\left(\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]\frac{dy}{y}\right), \tag{1}$$

то, полагая

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \tag{2}$$

т. е. вводя полярныя координаты вмѣсто прямоугольныхъ, будемъ имѣть слѣдующее:

$$\begin{aligned} u = \int\left(\frac{dr}{r} - \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta\right) &= \log r + \log(1+\cos\theta) + C = \\ &= \log r(1+\cos\theta) + C = \log(x + \sqrt{x^2+y^2}) + C, \end{aligned} \tag{3}$$

[ибо $\int\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta = \int\frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}\,d\theta = \int\frac{\sin\theta d\theta}{1+\cos\theta} = -\log(1+\cos\theta)$.]

Впрочемъ, этотъ интегралъ безъ труда найдется и на основаніи замѣчанія пред. §, ибо его можно такъ представить:

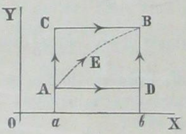
$$u=\int\frac{ydx-xdy}{y\sqrt{x^2+y^2}}+\int\frac{dy}{y}=\int\frac{d\frac{x}{y}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}}+\int\frac{dy}{y}= \tag{4}$$

$$=\log\left(\frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\right)+\log y+C=\log(x+\sqrt{x^2+y^2})+C.$$

10. Написавъ въ (11) § 6 X и Y вмѣсто x и y въ верхнихъ предѣлахъ интеграла и переставанливая члены каждой части одинъ съ другимъ, будемъ имѣть:

$$\int_{y_0}^{Y}N_0dy+\int_{x_0}^{X}Mdx=\int_{x_0}^{X}M_0dx+\int_{y_0}^{Y}Ndy; \tag{1}$$

1.



первый членъ лѣвой части представляетъ предѣлъ суммы значеній выраженія $Mdx+Ndy$, которыя оно принимаетъ во всѣхъ точкахъ прямой $X=X_0$ параллельной оси OY, отъ точки $A(x_0, y_0)$ до точки $C(x_0, Y)$, ибо для такой линіи $dx=0$, такъ какъ перемѣщеніе отъ одного элемента къ смежному происходитъ параллельно оси OY, слѣд. x не измѣняется; второй членъ лѣвой части — предѣлъ суммы значеній того же выраженія вдоль прямой $y=Y$ параллельной оси OX отъ точки $C(x_0, Y)$ до точки $B(X, Y)$, ибо вдоль такой прямой $dy=0$. Точно также первый членъ правой части представляетъ предѣлъ суммы значеній, которыя принимаетъ тоже выраженіе вдоль линіи $y=y_0$, параллельной оси OX, отъ точки $A(x_0, y_0)$ до точки $D(X, y_0)$, ибо для нея $dy=0$, а второй — предѣлъ суммы значеній того же выраженія вдоль прямой $x=X$, параллельной оси OY, отъ точки $D(X, y_0)$ до точки $B(X, Y)$, ибо для такой $dx=0$. Равенство (1) говоритъ намъ, что предѣлъ суммы значеній выраженія $Mdx+Ndy$ вдоль ломанной линіи ACB равенъ предѣлу суммы значеній того же выраженія вдоль ломанной линіи ADB, когда выполнено условіе $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ внутри прямоугольника $ACBD$ и на его сторонахъ. Естественною является мысль о замѣнѣ этихъ ломанныхъ линій какою-нибудь кривою AEB, идущею изъ точки A въ точку B: предѣлъ суммы значеній выраженія $Mdx+Ndy$ вдоль линіи AEB отъ A до B называется интеграломъ, взятымъ отъ A до B по кривой AEB, и обозначается онъ такъ:

$$\int_{(AEB)}Mdx+Ndy. \tag{2}$$

Такой интегралъ не отличается существенно отъ интеграловъ вида $\int f(x)dx$, которые мы разсматривали доселѣ, ибо вдоль кривой AEB одна изъ перемѣнныхъ, напр. y, становится функціей другой x, въ силу уравненія кривой AEB, которое будетъ вообще вида:

$$f(x, y, \alpha) = 0, \tag{3}$$

гдѣ α параметръ кривой, причемъ первая часть этого уравненія предполагается такою, чтобы при всякомъ α оно удовлетворялось, какъ положеніемъ $x = x_0$, $y = y_0$, такъ и положеніемъ $x = X$ и $y = Y$*). Въ такомъ случаѣ нашъ интегралъ приметъ видъ:

$$u = \int_{x_0}^{X} (M + Ny')dx, \tag{4}$$

причемъ предѣлы и соотвѣтствующія значенія y_0 и Y отъ α не будутъ зависѣть. Вообще же въ силу уравненія (3) y, а слѣд. и его производная по x, именно y', будутъ зависѣть отъ α. Если u не зависитъ отъ α, то $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ будетъ $= 0$, и наоборотъ: если $\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0$, то u не будетъ зависѣть отъ α, слѣд. отъ вида кривой, вдоль которой берется интегралъ. Поэтому беремъ производную отъ интеграла (4) по параметру α; будемъ имѣть:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{X} \left(\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} y'\right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx + \int_{x_0}^{X} N \frac{\partial y'}{\partial \alpha} dx. \tag{5}$$

Но $\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{d\frac{\partial y}{\partial \alpha}}{dx}$, ибо α и x независимыя перемѣнныя; а потому будемъ имѣть:

$$\int_{x_0}^{X} N \frac{\partial y'}{\partial \alpha} dx = \int_{x_0}^{X} N \frac{d\frac{\partial y}{\partial \alpha}}{dx} dx = \left[N \frac{\partial y}{\partial \alpha}\right]_{x_0}^{X} - \int_{x_0}^{X} \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} y'\right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx; \tag{6}$$

но $\left.\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right|_{x = x_0} = 0$, $\left.\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right|_{x = X} = 0$, ибо по предположенію предѣльныя значенія y для всѣхъ значеній α одинаковы; а потому:

$$\int_{x_0}^{X} N \frac{\partial y'}{\partial \alpha} dx = -\int_{x_0}^{X} \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} y'\right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx. \tag{7}$$

---

*) Это можно сдѣлать различными способами, напр. принявъ

$$f(x, y, \alpha) = (x - x_0)^m (y - Y)^n \varphi(x, y, \alpha) + (x - X)^{m'} (y - y_0)^{n'} \psi(x, y, \alpha);$$

гдѣ m, n, m', n' положительныя числа, а функціи φ и ψ остаются конечными при $x = x_0$, $y = y_0$, и при $x = X$, $y = Y$.

Вνося это въ (5), по сокращенiи получимъ:

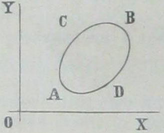
(8)
$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}=\int_{x_0}^{X}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial \alpha}dx.$$

При условiи (3) § 5 это выраженiе будетъ $=0$; наоборотъ, для того, чтобы u не зависѣло отъ α, слѣд. это выраженiе было бы $=0$, необходимо, чтобы было:

(9)
$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0,$$

ибо вслѣдствiе произвольности кривой (3) можно такъ сдѣлать, что знакъ $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ будетъ одинаковъ со знакомъ $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$, и слѣд. интегралъ, состоя тогда изъ однихъ положительныхъ членовъ, не можетъ обратиться иначе въ нуль, какъ при (9).

2.



11. Отсюда вытекаетъ такое слѣдствiе: интегралъ отъ полнаго дифференцiала $Mdx+Ndy$, взятый по сомкнутой кривой, равенъ нулю. Дѣйствительно, при условiи (9) будетъ по доказанному:

(1)
$$\int_{(ADB)} Mdx+Ndy=\int_{(ACB)} Mdx+Ndy;$$

но

(2)
$$\int_{(ACB)} Mdx+Ndy=-\int_{(BCA)} Mdx+Ndy,$$

какъ то было доказано въ началѣ курса интегрированiя функцiй, (ибо для каждой части равенства (1) интегралъ имѣетъ смыслъ (4) пред. §, только кривыя интегрированiя различныя); а потому, по перенесенiи послѣ подстановки изъ (2) въ (1) всего въ лѣвую часть, будемъ имѣть:

(3)
$$\int_{ADB} Mdx+Ndy+\int_{BCA} Mdx+Ndy=\int_{(ADBCA)} Mdx+Ndy=0,$$

что и выражаетъ наше предложенiе.

12. Можно поставить себѣ теперь подобный вопросъ относительно интеграла:

(1)
$$W=\int_{(C)} UdV,$$

гдѣ U и V функцiи x и y, и интегрированiе идетъ по кривой C отъ точки (x_0, y_0) до точки (X, Y), именно — когда такой интегралъ не будетъ зависѣть отъ вида кривой (C)? Для рѣшенiя его замѣтимъ, что такъ какъ

$$dV=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy,$$

то

$$W=\int\limits_{(C)} U\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy\right); \qquad (2)$$

слѣд.

$$M=U\frac{\partial V}{\partial x};\quad N=U\frac{\partial V}{\partial y}; \qquad (3)$$

а потому

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}+U\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x};\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}+U\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}; \qquad (4)$$

слѣд. условіе (9) § 10 принимаетъ такой видъ:

$$\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}=0, \qquad (5)$$

или

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix}=0, \qquad (6)$$

т. е. якобіанъ функцій U и V долженъ быть равенъ нулю; а это значитъ, что между обѣими функціями должна быть такого рода связь:

$$\varphi(U, V)=0, \qquad (7)$$

въ силу которой одна становится функціей другой, напр. $U=\Psi(V)$. Вотъ, слѣд., условіе, при которомъ W не будетъ зависѣть отъ вида кривой интегрированія (C).

13. Прежде чѣмъ перейти къ приложеніямъ изложеннаго въ послѣднихъ §§, напомнимъ доказательство предложенія насчетъ якобіана, только-что упомянутаго.

Что при условіи (7) якобіанъ отъ U и V будетъ $=0$, то это слѣдуетъ изъ того, что производныя по x и y отъ сего (7) уравненія:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x}=0 \quad\text{и}\quad \frac{\partial\varphi}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial y}=0 \qquad (1)$$

показываютъ, что элементы первой строки опредѣлителя (6) отличаются отъ соотвѣтственныхъ второй общимъ множителемъ $-\frac{\partial\varphi}{\partial V}:\frac{\partial\varphi}{\partial U}$. Обратное предложеніе, что когда якобіанъ $=0$, то между U и V имѣетъ мѣсто соотношеніе (7), такъ докажется. Изъ уравненій:

$$U=f(x, y),\quad V=F(x, y) \qquad (2)$$

мы можемъ, рѣшая послѣднее по y и внося это выраженіе его чрезъ x и V въ первое, получить:

(3) $$U=\Phi(x, V).$$

Дифференцируя первое изъ (2) по x въ предположеніи, что y выражено чрезъ V и x, (слѣд. считая V за постоянное, а не y,) мы будемъ имѣть:

(4) $$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

гдѣ $\frac{\partial y}{\partial x}$ опредѣлится изъ такого уравненія:

(5) $$\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=0;$$

беря отсюда $\frac{\partial y}{\partial x}$ и внося въ (4), будемъ имѣть:

(6) $$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\frac{\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}}{\frac{\partial V}{\partial y}}=0$$

на основаніи (6) пред. §, а это значитъ, что x не входитъ въ (3), т. е. U есть функція одного V. Мы предполагали, что y входитъ въ V, такъ что $\frac{\partial V}{\partial y}$ отлично отъ нуля; въ противномъ случаѣ, т. е. когда V было бы функціей одного x, слѣд. $\frac{\partial V}{\partial y}=0$, условіе (5) пред. § превратилось бы въ такое:

(7) $$-\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}=0,$$

откуда слѣдовало бы, такъ какъ $\frac{\partial V}{\partial x}$ не$=0$, что

(8) $$\frac{\partial U}{\partial y}=0,$$

т. е. что и U въ такомъ случаѣ было бы функціей одного x, а потому послѣ подстановки выраженія x чрезъ V изъ второго уравненія (2) въ первое, и U обратилось бы въ функцію одного V.

14. Доказанное въ предыдущемъ § предложеніе распространяется на якобіаны какого угодно порядка n. Если между n функціями:

(1) $$y_i=f_i(\overset{n}{\underset{1}{x_j}})$$

существуетъ связь вида:

(2) $$\Phi(\overset{n}{\underset{1}{y_i}})=0,$$

то якобіанъ:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \ldots\ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \ldots\ldots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \ldots\ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}=0; \tag{3}$$

и наоборотъ, если имѣетъ мѣсто (3), то имѣетъ мѣсто и (2). Прямое предложеніе доказывается очень просто. Изъ (2), дифференцируя по x_k, имѣемъ:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_k}=0, \tag{5}$$

откуда получаемъ:

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_k}=-\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}:\frac{\partial \Phi}{\partial y_n}\right)\frac{\partial y_i}{\partial x_k}, \tag{6}$$

такъ что элементы послѣдней строки оказываются одинаковыми линейными функціями соотвѣтственныхъ элементовъ прочихъ строкъ, а въ такомъ случаѣ опредѣлитель $=0$. Обратное предложеніе такъ докажется. Предполагая обозначенія функцій такъ выбранными, что x_i входитъ въ f_i, мы рѣшимъ $y_1=f_1$ по x_1 и вставимъ въ слѣдующія; то, въ которомъ послѣ этого окажется x_2, рѣшимъ относительно его и результатъ подставимъ въ остальныя и такъ далѣе; въ концѣ концовъ получимъ такія выраженія:

$$\left.\begin{array}{l} y_1=f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n) \\ y_2=\varphi_2(y_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n) \\ y_3=\varphi_3(y_1, y_2, x_3 \ldots\ldots x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n=\varphi_n(y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, x_n); \end{array}\right\} \tag{7}$$

эти равенства можно такъ представить (принимая $\varphi_1=f_1$):

$$\varphi_k(y_1, y_2, \ldots y_{k-1}; x_k, x_{k+1}, \ldots x_n)-y_k=0. \quad (k=1, 2, 3 \ldots n) \tag{8}$$

Беря производное уравненіе по x_h, легко получимъ изъ него:

$$\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_h}-\frac{\partial y_k}{\partial x_h}=\left.\begin{array}{cl} 0 & \text{при } h<k, \\ -\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_h} & \text{при } h\geqslant k. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Если изъ правыхъ и лѣвыхъ частей для $k=1, 2, \ldots n$ и $h=1, 2, \ldots n$, составить опредѣлитель, то налѣво получится опредѣлитель, разлагающійся на произведеніе двухъ, изъ которыхъ одинъ будетъ J; такъ что будемъ имѣть:

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} & -1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial y_2} & -1 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_2} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_3} & \ldots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_{n-1}} & -1 \end{vmatrix} J=(-1)^n \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ 0 & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ 0 & 0 & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

откуда получимъ:

$$(11)\qquad J=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3}\ \ldots\ldots\ \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n},$$

такъ какъ опредѣлители лѣвой и правой части приведутся къ діагональному члену, имѣя по одну сторону главной діагонали нули. Но отсюда видно, что $J=0$ можетъ быть только тогда, когда $\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}=0$, т. е. когда

$$(12)\qquad y_n=\varphi(y_1, y_2, \ldots\ldots y_{n-1}),$$

т. е. будетъ функціей остальныхъ, что и требовалось доказать. Это предложеніе намъ понадобится не разъ въ теченіе нашего курса.

15. Прежде всего мы примѣнимъ предыдущее къ опредѣленію условій необходимыхъ и достаточныхъ для того, чтобы функція

$$(1)\qquad u=\varphi(x, y)+i\psi(x, y),$$

гдѣ $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ вещественныя функціи отъ вещественныхъ перемѣнныхъ x и y, а $i=\sqrt{-1}$, была функціей отъ другой z:

$$(2)\qquad z=x+iy.$$

На основаніи (6) § 12 для этого долженъ быть $=0$ якобіанъ этихъ функцій, т. е. должно быть:

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y}+i\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ 1 & +i \end{vmatrix}=0,$$

или

$$(4)\qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial y}=0; \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial x}=0, \end{aligned}\right\},$$

такъ какъ вещественныя и мнимыя части должны отдѣльно равняться нулю. Уравненія (4) и суть искомыя условія.

Величина z, опредѣляемая равенствомъ (2), называется *комплексною перемѣнною*; величина u, ея функція при условіяхъ (4), будетъ слѣд. функція комплексной перемѣнной z.

16. Если въ формулѣ (1) § 12 за U примемъ только что разсмотрѣнную функцію (1) пред. §, а за V величину z, то будемъ имѣть интегралъ

$$w = \int_{(C)} [\varphi(x, y) + i\psi(x, y)](dx + idy), \qquad (1)$$

взятый по кривой C отъ точки $z_0 = x_0 + iy_0$ до точки $Z = X + iY$ отъ функціи комплексной перемѣнной z, — если C кривая идущая отъ точки z_0 до точки Z. Реальное значеніе этого интеграла явствуетъ изъ слѣдующаго его вида:

$$w = \int_{(C)} [\varphi(x, y)\, dx - \psi(x, y)\, dy] + i\int_{(C)} [\psi(x, y)\, dx + \varphi(x, y)\, dy], \qquad (2)$$

гдѣ каждый интегралъ есть вещественный интегралъ по кривой (C). Въ силу (4) пред. § подъинтегральное выраженіе въ каждомъ интегралѣ есть полный дифференціалъ, а потому w не зависитъ отъ вида кривой, пока она лежитъ въ области значеній комплексной перемѣнной z, въ которой функція $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, [которую означимъ чрезъ $f(z)$, такъ что будетъ

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),] \qquad (3)$$

будетъ однозначна, конечна и непрерывна, и будетъ имѣть частныя производныя по x и y. Этотъ интегралъ можно такъ теперь означить:

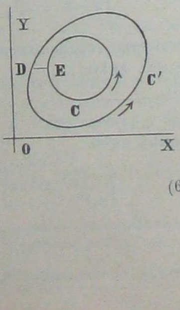
$$w = \int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz. \qquad (4)$$

17. Если интегралъ (2) будетъ взятъ по сомкнутой кривой, (иначе точка Z совпадетъ съ z_0,) то на основаніи § 11 онъ будетъ равенъ нулю:

$$\int_{(C)} f(z)\, dz = 0:$$

въ этомъ заключается *теорема Коши*: «интегралъ отъ функціи комплексной перемѣнной, взятый по сомкнутой кривой, внутри и на которой функція остается однозначною, конечною и непрерывною, и имѣетъ частныя производныя по x и по y, равенъ нулю».

3



Слѣдствіе. Если въ области, лежащей между сомкнутыми кривыми C и C', функція $f(z)$ однозначна, конечна и непрерывна, и имѣетъ частныя производныя по x и по y, то

$$\int_{(C')} f(z)\, dz = \int_{(C)} f(z)\, dz. \qquad (6)$$

Для доказательства соединяемъ точку D одного контура C' съ точкою E другого C; тогда будетъ

(7) $$\int_{(DECED)} f(z)\,dz = \int_{(DC'D)} f(z)\,dz;$$

но

(8) $$\int_{(DECED)} f(z)\,dz = \int_{(DE)} f(z)\,dz + \int_{(ECE)} f(z)\,dz + \int_{(ED)} f(z)\,dz;$$

первый же и послѣдній интегралъ второй части, будучи взяты по кривой DE разъ въ одномъ, другой—въ противоположномъ направленіи, дадутъ въ суммѣ нуль; а потому интегралъ (8) приведется къ среднему члену, и мы будемъ имѣть:

(9) $$\int_{(ECE)} f(z)\,dz = \int_{(DC'D)} f(z)\,dz,$$

что и требовалось доказать.

18. Предположимъ, что внутри круга, описаннаго радіусомъ r изъ точки z_0, функція $f(z)$ однозначна, конечна и непрерывна; если t точка внутри окружности, и $\rho < \delta$, наименьшаго разстоянія точки t отъ окружности, и мы опишемъ окружность радіусомъ ρ изъ t, какъ центра, то внутри перваго круга и внѣ послѣдняго тѣмъ же свойствомъ будетъ обладать и функція $\frac{f(z)}{z-t}$; а потому, по только что доказанному предложенію, будемъ имѣть:

(1) $$\int_{(\rho)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz = \int_{(r)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz,$$

гдѣ круги указаны ихъ радіусами. Разберемъ сперва первый интегралъ. Положимъ $z-t=\rho e^{\theta i}$; тогда при интегрированіи по кругу радіуса ρ будетъ ρ постояннымъ, а θ измѣняться отъ 0 до 2π, слѣд. $dz=\rho i e^{\theta i}$, и нашъ интегралъ такъ представится:

(2) $$\int_{(\rho)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(t+\rho e^{\theta i})}{\rho e^{\theta i}}\,\rho i e^{\theta i}\,d\theta = i\int_0^{2\pi} f(t+\rho e^{\theta i})\,d\theta.$$

Вслѣдствіе предположенной непрерывности $f(z)$ при ρ очень маломъ будемъ имѣть:

(3) $$f(t+\rho e^{\theta i})\,d\theta = f(t)+\eta,$$

гдѣ η функція отъ t, ρ, θ, обращающаяся въ нуль вмѣстѣ съ ρ. Тогда будемъ имѣть:

(4) $$\int_{(\rho)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz = i\int_0^{2\pi} f(t)\,d\theta + i\int_0^{2\pi} \eta\,d\theta = 2\pi i f(t) + i\bar{\eta}2\pi,$$

если $\tilde{\eta}$ среднее значеніе изъ всѣхъ значеній η въ точкахъ окружности радіуса ρ:

$$\tilde{\eta}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\eta d\theta; \tag{5}$$

но модуль суммы меньше суммы модулей; потому

$$\text{мод.}\tilde{\eta}<\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\text{мод.}\eta d\theta<\text{мод.max.}\eta \tag{6}$$

на всей окружности; но эта величина исчезаетъ вмѣстѣ съ величиною ρ; слѣдов., второй членъ въ (4) будетъ стремиться къ нулю вмѣстѣ съ ρ; а потому вторая часть въ (4) приведется къ первому члену ея. Такъ какъ (1) имѣетъ мѣсто, какъ бы мало ρ ни было, то въ предѣлѣ будемъ имѣть изъ (1) *формулу Коши:*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(r)}\frac{f(z)}{z-t}dz, \tag{7}$$

дающую значеніе функціи для внутренней точки по значеніямъ ея на окружности круга. [Здѣсь кругъ можетъ быть замѣненъ какою-угодно сомкнутою кривою, лежащею внутри этого круга радіуса r, заключающею внутри себя точку t.]

Дифференцируя k разъ (7) по t, что, очевидно, возможно, пока t внутри кривой, но не на ней находится, мы будемъ имѣть:

$$f^{(k)}(t)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{(r)}\frac{f(z)}{(z-t)^{k+1}}dz. \tag{8}$$

Эти результаты легко распространяются на функціи какого-угодно числа независимыхъ перемѣнныхъ, лишь бы по отношенію къ каждой изъ нихъ были выполнены вышеизложенныя условія по отношенію z. Пусть въ (7) вмѣсто $f(z)$ стоитъ функція $\frac{f(z,u)}{u-v}$; тогда будемъ имѣть:

$$\frac{f(t,u)}{u-v}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(z,u)dz}{(z-t)(u-v)}; \tag{9}$$

помножая на du и интегрируя по кривой (C'), окружающей точку v, внутри которой эта функція $f(z,u)$ однозначна, конечна и непрерывна при z постоянномъ, мы будемъ имѣть:

$$f(t,v)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C')}\frac{f(t,u)du}{u-v}=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{2}\int_{(C')}\int_{(C)}\frac{f(z,u)dzdu}{(z-t)(u-v)}. \tag{10}$$

Дифференцируя это k разъ по t, l разъ по v, мы будемъ имѣть:

$$(11)\qquad f^{(k+l)}_{t^k,v^l}(t,v)=\frac{\partial^{k+l}f(t,v)}{\partial t^k\partial v^l}=\frac{k!\,l!}{(2\pi i)^2}\int_{(C')}\int_{(C)}\frac{f(z,u)\,dz\,du}{(z-t)^{k+1}(u-v)^{l+1}}\,.$$

19. Формулы Коши, (7) и (8) пред. §, можно представить еще иначе. Полагая $t=z_0$, $z-z_0=re^{\theta i}$, слѣд. $dz=re^{\theta i}i\,d\theta$, мы имъ дадимъ такой видъ:

$$(1)\qquad f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{\theta i})\,d\theta;$$

$$(2)\qquad f^{(k)}(z_0)=\frac{k!}{2\pi r^k}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{\theta i})e^{-k\theta i}\,d\theta.$$

Если обозначимъ чрезъ M наибольшее изъ значенiй модуля $f(z_0+re^{\theta i})$ въ точкахъ окружности радiуса r, изъ z_0 какъ центра описанной, по которой происходитъ интегрированiе, то будемъ имѣть, означая чрезъ $|A|$ модуль A:

$$(3)\qquad |f(z_0)|<M;$$

$$(4)\qquad |f^{(k)}(z_0)|<\frac{k!\,M}{r^k},$$

[ибо по вынесенiи M за знакъ $\int$, такъ какъ мод. $e^{-k\theta i}=1$, будемъ имѣть $\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$.] Эти формулы намъ будутъ не разъ полезны.

Изъ (10) и (11) пред. § получимъ такимъ же образомъ:

$$(5)\qquad f(z_0,u_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{\theta i},\,u_0+\rho e^{\varphi i})\,d\theta\,d\varphi$$

и

$$(6)\qquad \frac{\partial^{k+l}f(z_0,u_0)}{\partial z_0{}^k\partial u_0{}^l}=\frac{k!\,l!}{(2\pi)^2r^k\rho^l}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{\theta i},\,u_0+\rho e^{\varphi i}).\,e^{-k\theta i}.\,e^{-l\varphi i}d\theta.\,d\varphi.$$

Отсюда, аналогично (3) и (4), получимъ, если $M=$ мод. max. $f(z,u)$ на окружностяхъ, изъ z_0 и u_0 описанныхъ радiусами r и ρ:

$$(7)\qquad |f(z_0,u_0)|<M;$$

$$(8)\qquad \left|f^{(k+l)}_{z_0{}^k u_0{}^l}(z_0,u_0)\right|<\frac{k!\,l!\,M}{r^k\rho^l}.$$

Это распространяется легко на какое-угодно число независимыхъ перемѣнныхъ.

20. Такъ какъ въ формулѣ (7) § 18 t точка внутри, а z точка на окружности, описанной изъ z_0 радіусомъ r, то мод. $(t-z_0) <$ мод. $(z-z_0) < r$, и потому мод. $\frac{t-z_0}{z-z_0} < 1$. Вслѣдствіе этого рядъ

$$\frac{1}{z-t}=\frac{1}{z-z_0-(t-z_0)}=$$

$$=\frac{1}{z-z_0}\left\{1+\frac{t-z_0}{z-z_0}+\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^2+\ldots.+\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^k+\ldots\right\}= \tag{1}$$

$$=\frac{1}{z-z_0}+\frac{t-z_0}{(z-z_0)^2}+\frac{(t-z_0)^2}{(z-z_0)^3}+\ldots.+\frac{(t-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}+R_{k+1}(z)$$

будетъ сходящійся. Внося его въ формулу (7) § 18, будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(r)}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dt+\frac{(t-z_0)}{2\pi i}\int_{(r)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz+\frac{(t-z_0)^2}{2\pi i}\int_{(r)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz+\\+\ldots.+\frac{(t-z_0)^k}{2\pi i}\int_{(r)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{(r)}f(z)R_{k+1}(z)\,dz.\end{aligned} \tag{2}$$

Но по (7) и (8) § 18 для $t=z_0$ имѣемъ:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(r)}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz;\quad \frac{f^{(k)}(z_0)}{1.2.3\ldots k}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(r)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz; \tag{3}$$

потому (2) приметъ такой видъ:

$$\begin{aligned}f(t)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1}(t-z_0)+\frac{f''(z_0)}{1.2}(t-z_0)^2+\frac{f'''(z_0)}{1.2.3}(t-z_0)^3+\ldots.\\ \ldots.+\frac{f^{(k)}(z_0)}{1.2.3\ldots k}(t-z_0)^k+\mathfrak{R}_{k+1}(t),\end{aligned} \tag{4}$$

гдѣ положено

$$\mathfrak{R}_{k+1}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(r)}f(z)R_{k+1}(z)dz. \tag{5}$$

Разсмотримъ модуль этого остатка; если онъ будетъ стремиться къ нулю, когда k будетъ стремиться къ ∞, то и $\mathfrak{R}_{k+1}(t)$ будетъ стремиться тогда къ нулю, а потому рядъ (4) можетъ быть тогда продолженъ до безконечности. Но, какъ извѣстно:

$$R_{k+1}(z)=\frac{(t-z_0)^{k+1}}{(z-z_0)^{k+1}(z-t)}; \tag{6}$$

потому

$$\mathfrak{R}_{k+1}(t)=\frac{(t-z_0)^{k+1}}{2\pi i}\int_{(r)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}(z-t)}\,dz. \tag{7}$$

Если положимъ здѣсь

$$(8)\qquad z-z_0=re^{\theta i},$$

то будемъ имѣть:

$$(9)\qquad \mathfrak{R}_{k+1}(t)=\frac{(t-z_0)^{k+1}}{2\pi r^{k+1}}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{\theta i})e^{-(k+1)\theta i}d\theta}{1-\frac{1}{r}(t-z_0)e^{-\theta i}}.$$

Если M наибольшее значеніе модуля функціи $f(z)$ на окружности (r) и мод. $(t-z_0)=\rho$, то отсюда будемъ имѣть:

$$(10)\qquad \text{мод.}\,\mathfrak{R}_{k+1}(t)<\left(\frac{\rho}{r}\right)^{k+1}\cdot\frac{M}{1-\frac{\rho}{r}};$$

здѣсь второй множитель конечный, первый же стремится къ нулю съ увеличеніемъ k до ∞, ибо $\frac{\rho}{r}<1$; а потому

$$(11)\qquad \text{пред. мод.}\,\mathfrak{R}_{k+1}(t)|_{k=\infty}=0,$$

и слѣд. рядъ (4) можетъ быть продолженъ до ∞ для всякаго t внутри разсматриваемаго круга. Этотъ кругъ называется кругомъ сходимости ряда:

$$(12)\quad f(z)=f(z_0)+f'(z_0)\frac{z-z_0}{1}+f''(z_0)\frac{(z-z_0)^2}{1.2}+\cdots+f^{(k)}(z_0)\frac{(z-z_0)^k}{1.2.3...k}+\cdots,$$

[гдѣ мы перемѣнили t на обычное z, предполагая, что z лежитъ внутри круга сходимости ряда (12)]. Это и есть строка Тэйлора. Можно было бы, преобразуя остаточный членъ, привести его легко къ виду, похожему на формулу Шлёмильха; но мы на этомъ не будемъ останавливаться *).

Строка Тэйлора можетъ быть распространена на нѣсколько перемѣнныхъ или способомъ § 303 моего «Курса диф. и инт. исчисленій» (стр. 332 2-го изданія), или разлагая $\frac{1}{u-v}$ такъ, какъ мы разложили $\frac{1}{z-t}$, и внося это въ формулу (10) § 18, а затѣмъ преобразуя результатъ съ помощью формулы (11) того же §. Оба указанные пріема распространимы на какое угодно число независимыхъ перемѣнныхъ.

21. Выведя изъ выраженія интеграла отъ полнаго дифференціала функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ цѣлый рядъ необходимыхъ для насъ въ дальнѣйшемъ слѣдствій, вернемся опять къ этому предмету, предположивъ, что число независимыхъ перемѣнныхъ будетъ 3. Пусть дано найти u изъ условія:

---

*) Это можно найти въ „Введеніи“ моей книги: „Теорія эллиптическихъ интеграловъ и эллиптическихъ функцій“. Харьковъ, 1895 г.

$$du = Mdx + Ndy + Pdz, \tag{1}$$

гдѣ M, N, P функціи независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z. Здѣсь также функціи M, N, P не могутъ быть заданы вполнѣ произвольно, ибо онѣ должны удовлетворять тремъ условіямъ для возможности рѣшенія задачи. Дѣйствительно, условіе (1) равносильно тремъ слѣдующимъ, по произвольности dx, dy, dz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = P; \tag{2}$$

отсюда, дифференцируя каждое уравненіе по каждой изъ прочихъ перемѣнныхъ и принимая во вниманіе независимость производной по двумъ перемѣннымъ отъ порядка дифференцированія по нимъ, мы будемъ имѣть три условія:

$$\frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Если эти условія выполнены, то функція u можетъ быть найдена. Всякая функція, удовлетворяющая первымъ двумъ изъ уравненій (2) по (8) § 6, такъ представится:

$$u = \int_{x_0}^{x} Mdx + \int_{y_0}^{y} N_0 dy + Z, \tag{4}$$

гдѣ Z функція одного z, который въ обоихъ интегралахъ играетъ роль параметра. Дифференцируя по этому параметру и имѣя въ виду третье уравненіе изъ (2), мы будемъ имѣть:

$$\frac{dZ}{dz} = P - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial z} dx - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial N_0}{\partial z} dy = P - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial x} dx - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P_0}{\partial y} dy = \tag{5}$$
$$= P - (P - P_0) - (P_0 - P_{00}) = P_{00}.$$

Обозначая черезъ P_{00} значеніе P при $x = x_0$, $y = y_0$. Это выраженіе, слѣд. не зависитъ ни отъ x, ни отъ y, а только отъ z. Слѣд. интегрируя, будемъ имѣть:

$$Z = \int_{z_0}^{z} P_{00} dz + C. \tag{6}$$

Такимъ образомъ, внося это въ (4), будемъ имѣть:

$$u = \int_{x_0}^{x} Mdx + \int_{y_0}^{y} N_0 dy + \int_{z_0}^{z} P_{00} dz + C. \tag{7}$$

Этотъ интегралъ менѣе ясно, но короче, обозначаютъ такъ:

$$u = \int Mdx + Ndy + Pdz. \tag{8}$$

22. Для примѣра пусть дано найти u по условію:

$$du = (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz. \tag{1}$$

Задача возможна, ибо частныя производныя M, N, P по каждой перемѣнной, кромѣ отсутствующей, равны 1, слѣд. условія (3) пред. § удовлетворяются. Ищемъ сперва

$$u=\int_{x_0}^{x}(y+z)dx=(y+z)(x-x_0)+Y,$$

$$Y=\int_{y_0}^{y}(z+x_0)dy=(z+x_0)(y-y_0)+Z,$$

$$Z=\int_{z_0}^{z}(x_0+y_0)dz=(x_0+y_0)(z-z_0)+C;$$

слѣд.

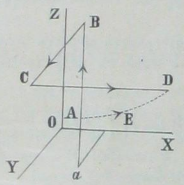
$$u=(y+z)(x-x_0)+(z+x_0)(y-y_0)+(x_0+y_0)(z-z_0)+C=$$
$$=yx+zx-yx_0--zx_0+zy+x_0y-zy_0-x_0y_0+$$
$$+x_0z+y_0z-x_0z_0-y_0z_0+C=yz+zx+xy+C',$$

полагая

$$C-y_0z_0-z_0x_0-x_0y_0=C'.$$

Этотъ результатъ сразу получится, если принять $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=0$, что въ данномъ случаѣ возможно.

4.



23. Перемѣнивъ въ (7) § 21 въ предѣлахъ x, y, z на X, Y, Z, и принявъ $C=0$, будемъ имѣть интегралъ (8) отъ точки $A(x_0, y_0, z_0)$ до точки $D(X, Y, Z)$, взятый вдоль ломанной линіи $\overrightarrow{ABCD}$:

$$(1)\qquad u=\int_{x_0}^{X}Mdx+\int_{y_0}^{Y}N_0dy+\int_{z_0}^{Z}P_{00}dz,$$

если начать съ послѣдняго интеграла и идти въ обратномъ написанному порядкѣ (по направленію стрѣлокъ на чертежѣ (4)); ибо вдоль AB имѣемъ $x=x_0$, $y=y_0$, а z измѣняется отъ z_0 до Z; вдоль BC имѣемъ $x=x_0$, $z=Z$, а y измѣняется отъ y_0 до Y, и, наконецъ, вдоль CD имѣемъ $y=Y$, $z=Z$, а x измѣняется отъ x_0 до X, [такъ какъ въ (7) § 21 x, y, z въ верхнихъ предѣлахъ означаютъ ихъ значенія въ послѣднемъ элементѣ интеграла.] Можно, измѣняя порядокъ интегрированія по x, y, z, получить другія выраженія u, которыя будутъ представлять результаты интегрированія по другимъ ломаннымъ линіямъ, аналогичнымъ $ABCD$. Можно ломанныя замѣнить произвольною линіей AED, проведенной между точками A и D въ томъ пространствѣ, для котораго выполняются условія (3) § 21, и результатъ останется тотъ же. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ въ этомъ случаѣ y и z будутъ функціями x въ силу уравненій кривой, то нашъ интегралъ (1) можно такъ представить:

$$u=\int_{x}^{X}(M+Ny'+Pz')dx. \tag{2}$$

Если уравненія кривой AED содержатъ произвольный параметръ α, то вообще u будетъ его функція; но если выполнены условія (3) § 21, то u будетъ постоянная, ибо $\frac{\partial u}{\partial \alpha}=0$ въ такомъ случаѣ; и, наоборотъ, для того, чтобы u не зависѣло отъ α, т. е. чтобы было $\frac{\partial u}{\partial \alpha}=0$, необходимо и достаточно, чтобы условія (3) § 21 были выполнены. Для доказательства беремъ отъ (2) производную по α; будемъ имѣть, такъ какъ предѣлы и предѣльныя значенія y и z считаемъ независящими отъ α, слѣдующее:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \alpha}=\int_{x_0}^{X}\Big[\Big(\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial y}y'+\frac{\partial P}{\partial y}z'\Big)\frac{\partial y}{\partial \alpha}+\Big(\frac{\partial M}{\partial z}+\frac{\partial N}{\partial z}y'+\frac{\partial P}{\partial z}z'\Big)\frac{\partial z}{\partial \alpha}\Big]dx+\\+\int_{x_0}^{X}\Big(N\frac{\partial y'}{\partial \alpha}+P\frac{\partial z'}{\partial \alpha}\Big)dx.\end{aligned} \tag{3}$$

Второй интегралъ при помощи интегрированія по частямъ такъ преобразуется:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{X}\Big(N\frac{\partial y'}{\partial \alpha}+P\frac{\partial z'}{\partial \alpha}\Big)dx=\Big(N\frac{\partial y}{\partial \alpha}+P\frac{\partial z}{\partial \alpha}\Big)_{x_0}^{X}-\\-\int_{x_0}^{X}\Big[\Big(\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}y'+\frac{\partial N}{\partial z}z'\Big)\frac{\partial y}{\partial \alpha}+\Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}y'+\frac{\partial P}{\partial z}z'\Big)\frac{\partial z}{\partial \alpha}\Big]dx;\end{aligned} \tag{4}$$

внося это въ (3), получимъ:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}=\int_{x_0}^{X}\Big[\Big\{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}+\Big(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}\Big)z'\Big\}\frac{\partial y}{\partial \alpha}+\Big\{\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x}+\Big(\frac{\partial N}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)y'\Big\}\frac{\partial z}{\partial \alpha}\Big]dx, \tag{5}$$

ибо проинтегрированная часть $=0$, такъ какъ предѣльныя значенія y и z отъ α не зависятъ. Отсюда ясно, что при условіяхъ (3) § 21 подъинтегральное въ (5) будетъ тождественно $=0$, и слѣд.

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}=0. \tag{6}$$

Наоборотъ, для того, чтобы имѣло мѣсто (6), должно быть, по произвольности $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}+\Big(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}\Big)z'=0;\\\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x}+\Big(\frac{\partial N}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)y'=0.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Такъ какъ при однихъ и тѣхъ же x, y, z, производныя y', z', завися отъ α, могутъ быть многоразличны, то эти равенства приводятся къ (3) § 21, что и требовалось доказать.

24. Переходимъ теперь къ общему случаю—къ интегрированію полнаго дифференціала функціи n независимыхъ перемѣнныхъ, общій видъ котораго такой:

$$du=\sum_{i=1}^{n}X_i dx_i, \tag{1}$$

гдѣ $X_i=\varphi_i(\overset{n}{\underset{1}{x_j}})$ суть функціи n независимыхъ перемѣнныхъ $\overset{n}{\underset{1}{x_j}}$ *). Это условіе (1) равносильно n уравненіямъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=X_i. \qquad (i=1,\ 2,\ldots n) \tag{2}$$

Такъ какъ $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$, то отсюда получаемъ $\frac{n(n-1)}{1.2}$ условій вида:

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_i}-\frac{\partial X_i}{\partial x_j}=0. \tag{3}$$

Однако, какъ показалъ Якоби, изъ числа этихъ условій только $2n-3$ независимыхъ. Введемъ такое обозначеніе для первыхъ частей этихъ уравненій:

$$(j,k)=\frac{\partial X_j}{\partial x_k}-\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\cdot \tag{4}$$

Беря производную отъ обѣихъ частей по x_i, будемъ имѣть:

$$\frac{\partial (j,k)}{\partial x_i}=\frac{\partial^2 X_j}{\partial x_i \partial x_k}-\frac{\partial^2 X_k}{\partial x_i \partial x_j}; \tag{5}$$

отсюда чрезъ круговую перестановку значковъ $(i,\ j,\ k)$ получаемъ слѣдующія два равенства:

$$\frac{\partial (k,i)}{\partial x_j}=\frac{\partial^2 X_k}{\partial x_j \partial x_i}-\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k}; \qquad \frac{\partial (i,j)}{\partial x_k}=\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_k \partial x_j}-\frac{\partial^2 X_j}{\partial x_k \partial x_i}; \tag{6}$$

складывая ихъ съ (5), получаемъ такое тождество:

$$\frac{\partial (j,k)}{\partial x_i}+\frac{\partial (k,i)}{\partial x_j}+\frac{\partial (i,j)}{\partial x_k}=0. \tag{7}$$

Отсюда видно, что если $(i,j)\equiv 0$ **), $(k,i)\equiv 0$, то $\frac{\partial (j,k)}{\partial x_i}\equiv 0$, т. е. (j,k) не зависитъ отъ x_i. Пусть теперь имѣются условія:

---

*) Мы будемъ, для краткости, очень часто писать $\overset{n}{\underset{1}{x_j}}$ вмѣсто $x_1, x_2, \ldots x_n$; также и сумму будемъ обозначать, какъ въ (1), при помощи знака суммы Σ, поставленнаго предъ представителемъ всѣхъ слагаемыхъ.

**) Знакъ $\equiv$ означаетъ тождественно $=0$.

$$(1,\ 2)=0,\qquad (2,\ 3)=0,\qquad (3,\ 4)=0, \tag{8}$$

$$(1,\ 3)=0,\qquad (1,\ 4)+x_3(2,4)=0; \tag{9}$$

Въ случаѣ $n=4$ всѣхъ условій вида (3) $\dfrac{n(n-1)}{1.2}=\dfrac{4.3}{1.2}=6$; остаются слѣд. условія: $(1,\ 4)=0$ и $(2,\ 4)=0$; они будутъ слѣдствіемъ (8) и (9). Дѣйствительно: $(1,\ 4)$ не зависитъ отъ x_3, какъ то видно изъ (7) для $i=1,\ j=3,\ k=4$: $\dfrac{\partial(3,4)}{\partial x_1}+\dfrac{\partial(4,1)}{\partial x_3}+\dfrac{\partial(1,3)}{\partial x_4}=0$, ибо первыя и послѣднія скобки находятся въ числѣ (8) и (9); точно также $(2,4)$ не зависитъ отъ x_3, ибо изъ (7) для $i=2,\ j=3,\ k=4$ имѣемъ: $\dfrac{\partial(3,4)}{\partial x_2}+\dfrac{\partial(4,2)}{\partial x_3}+$ $+\dfrac{\partial(2,3)}{\partial x_4}=0$; здѣсь опять крайнія скобки находятся въ числѣ (8) и (9); слѣд. уравненіе $(1,4)+x_3(2,4)=0$ можетъ имѣть мѣсто тождественно только при условіи: $(1,4)\equiv 0$, $(2,4)\equiv 0$. Идя въ такомъ же направленіи дальше, Якоби пришелъ къ заключенію, что независимыя условія будутъ:

$$\left.\begin{array}{ll}
(1,2)=0, & \\
(2,3)=0, & (1,3)=0, \\
(3,4)=0, & (1,4)+x_3(2,4)=0, \\
(4,5)=0, & (1,5)+x_4(2,5)+x^2{}_4(3,5)=0, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n-1,n)=0, & (1,n)+x_{n-1}(2,n)+x^2{}_{n-1}(3,n)+\ldots+x_{n-1}^{n-3}(n-2,n)=0.
\end{array}\right\} \tag{10}$$

Законъ составленія ихъ легко подмѣтить *).

25. Когда эти условія, а слѣд. и (4) пред. § выполнены, тогда u найдется по формулѣ:

$$u=\int_{x_1{}^0}^{x_1{}'} X_1\,dx_1+\int_{x_2{}^0}^{x_2{}'} X_2^{(0)}dx_2+\int_{x_3{}^0}^{x_3{}'} X_3^{(0,0)}dx_3+\cdots+ \tag{1}$$
$$+\int_{x^0{}_n}^{x'{}_n} X_n^{(0,0\ldots0)}dx_n+C,$$

гдѣ нули въ скобкахъ при $X_i^{(0,0\ldots0)}$ показываютъ, что всѣмъ x_j при $j<i$ даны частныя значенія, отвѣчающія нижнимъ предѣламъ предшествующихъ интеграловъ; тѣ же перемѣнныя, въ которыхъ $j>i$, въ i-омъ членѣ будутъ имѣть значенія, равныя верхнимъ предѣламъ послѣдующихъ интеграловъ. Для доказательства этой формулы допустимъ, что она вѣрна для $n-1$ независимыхъ перемѣнныхъ; тогда будемъ имѣть:

---

*) См. *Hoüel.* Cours de Calcul infinitésimal. T. II, § 777, p. 292—293.

$$(2)\qquad u=\int_{x_1^0}^{x_1'} X_1\,dx_1+\int_{x_2^0}^{x_2'} X_2^{(0)}dx_2+\int_{x_3^0}^{x_3'} X_3^{(0,0)}dx_3+\cdots+$$
$$+\int_{x^0_{n-1}}^{x'_{n-1}} X_{n-1}^{(0,0\ldots 0)}dx_{n-1}+Y,$$

гдѣ Y зависитъ только отъ x'_n. Дѣйствительно, беря производную по x'_n отъ этого выраженія u и сравнивая съ даннымъ формулою (2) § 24 для $i=n$, именно: $\frac{\partial u}{\partial x'_n}=X'_n$, будемъ имѣть:

$$(3)\qquad \frac{dY}{dx'_n}=X_n'-\int_{x_1^0}^{x_1'}\frac{\partial X_1}{\partial x'_n}dx_1-\int_{x_2^0}^{x_2'}\frac{\partial X_2^{(0)}}{\partial x'_n}dx_2-\int_{x_3^0}^{x_3'}\frac{\partial X_3^{(0,0)}}{\partial x'_n}dx_3-\cdots-$$
$$-\int_{x^0_{n-1}}^{x'_{n-1}}\frac{\partial X_{n-1}^{(0,0\ldots 0)}}{\partial x'_n}dx_{n-1},$$

гдѣ значекъ (′) у X_n показываетъ, что перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ получили значенія $x'_1, x'_2, \ldots x'_{n-1}$. Этому выраженію съ помощію (3) пред. § можно дать такой видъ:

$$(4)\qquad \frac{dY}{dx'_n}=X'_n-\int_{x_1^0}^{x_1'}\frac{\partial X_n}{\partial x_1}dx_1-\int_{x_2^0}^{x_2'}\frac{\partial X_n^{(0)}}{\partial x_2}dx_2-\int_{x_3^0}^{x_3'}\frac{\partial X_n^{(0,0)}}{\partial x_3}dx_3-\cdots-$$
$$-\int_{x^0_{n-1}}^{x'_{n-1}}\frac{\partial X_n^{(0,0\ldots 0)}}{\partial x_{n-1}}dx_{n-1}=X_n'-(X_n'-X_n^{(0)})-(X_n^{(0)}-X_n^{(0,0)})-(X_n^{(0,0)}-$$
$$-X_n^{(0,0,0)})-\cdots-(X_n^{(0,0\ldots 0)}-X_n^{(0,0\ldots 0,0)})=X_n^{(0,0\ldots 0,0)}$$

и слѣдовательно

$$Y=\int_{x^0_n}^{x'_n} X_n^{(0,0\ldots 0,0)}dx_n+C.$$

Внося это во (2), и получимъ (1), которая такимъ образомъ доказана по способу заключенія отъ $n-1$ къ n.

26. Измѣняя порядокъ интегрированія, можно получить $n!$ различныхъ формъ интеграла, всѣ одинаковой величины. Это нетрудно доказать и обобщить, если придать геометрическую форму нашему предмету. Если имѣемъ систему n независимыхъ перемѣнныхъ $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$, то говорятъ, что имѣемъ *пространство* *) *n измѣреній*; каждая система частныхъ значеній этихъ

---

*) Или *многообразіе* (Mannigfaltigkeit, variété).

перемѣнныхъ опредѣляетъ *точку* въ этомъ пространствѣ. Если свяжемъ значенія независимыхъ перемѣнныхъ однимъ уравненіемъ вида:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \tag{1}$$

то будемъ имѣть *поверхность* въ пространствѣ n измѣреній; въ частности если уравненіе 1-ой степени относительно всѣхъ перемѣнныхъ:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i x_i + B = 0, \tag{2}$$

то оно будетъ представлять *плоскость*; если оно вида:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^{(0)})^2 - r^2 = 0, \tag{3}$$

то оно опредѣляетъ сферу радіуса r съ центромъ въ точкѣ $\big(\overset{n}{\underset{1}{x}}{}_i^{(0)}\big)$ въ пространствѣ n измѣреній. Уравненіе

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - 1 = 0 \tag{4}$$

представитъ элипсоидъ, и т. д. Если независимыя перемѣнныя связаны $n-1$ уравненіями вида:

$$f_h(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \qquad (h = 1, 2, \ldots n-1) \tag{5}$$

то получимъ *линію* въ пространствѣ n измѣреній; въ частности *прямую*, если уравненія будутъ 1-ой степени; прямую въ пространствѣ n измѣреній можно всегда представить въ видѣ, принадлежащемъ Коши:

$$\frac{x_1 - x_1{}^0}{l_1} = \frac{x_2 - x_2{}^0}{l_2} = \frac{x_3 - x_3{}^0}{l_3} = \cdots = \frac{x_n - x^0{}_n}{l_n} = k. \tag{6}$$

Съ помощію уравненій (5) можно координаты точки на линіи выразить въ функціи одной перемѣнной t, такимъ образомъ:

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{7}$$

и это безчисленнымъ множествомъ способовъ, такъ какъ для x_1 мы полагаемъ *произвольно* $x_1 = \varphi_1(t)$, для прочихъ же выраженія получаются, рѣшая уравненія по $x_2, x_3 \ldots x_n$. Равнымъ образомъ система n уравненій (7) всегда опредѣляетъ *линію* въ пространствѣ n измѣреній, ибо, исключая изъ нихъ t, мы получимъ $n-1$ уравненій между $x_1, x_2, \ldots x_n$ вида (5). Если имѣемъ систему n уравненій вида:

$$x_i = \varphi_i(t, \alpha), \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{8}$$

то, исключая t, мы получимъ $n-1$ уравненій между $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$, содержащихъ произвольный параметръ α, а потому принадлежащихъ цѣлому семейству кривыхъ въ пространствѣ n измѣреній.

27. Предположимъ, что функціи $\varphi_i(t, \alpha)$ выбраны такимъ образомъ, что всегда возможно, что $\varphi_i(t_0, \alpha) = x_i^0$, $\varphi_i(t_1, \alpha) = x_i'$, при всякомъ значеніи параметра α, [для этого стоитъ, напр. положить:

$$\varphi_i(t_0, \alpha) = x_i^0 \frac{t - t_1}{t_0 - t_1} + x'_i \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} + (t - t_0)(t - t_1)\psi_i(t, \alpha), \tag{1}$$

гдѣ $\psi_i(t, \alpha)$ остается конечною при $t = t_0$, $t = t_1$]; дифференцируя (8) пред. § по t, будемъ имѣть:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} dt; \tag{2}$$

а потому по подстановкѣ изъ (8) пред. § значеній x_i, а изъ (2) наст. § ихъ дифференціаловъ въ выраженіе (1) § 24 и интегрированіи его по t отъ t_0 до t_1, будемъ имѣть:

$$u_1 - u_0 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial t} dt; \tag{3}$$

— интегралъ, взятый по кривой (8) въ пространствѣ n измѣреній отъ точки $\overset{n}{\underset{1}{(x_i^0)}}$, отвѣчающей $t = t_0$, до точки $\overset{n}{\underset{1}{(x_i')}}$, отвѣчающей $t = t_1$. Опредѣляемое изъ (3) значеніе u_1, въ которомъ u_0 есть произвольная постоянная, будетъ вообще зависѣть отъ параметра α; оно не будетъ отъ него зависѣть при условіяхъ (3) § 24 и притомъ только тогда, когда они выполнены, т. е. эти условія необходимы и достаточны для того, чтобы u_1 не зависѣло отъ α. Дѣйствительно, мы имѣемъ:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \alpha} \frac{\partial x_i}{\partial t} dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha \partial t} dt; \tag{4}$$

но какъ $\frac{\partial^2 x_i}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial \alpha}$, то

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha \partial t} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}}{\partial t} dt = \left[\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} dt; \tag{5}$$

внѣинтегральный членъ $= 0$ вслѣдствіе независимости предѣльныхъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$ отъ α; а потому, внося изъ (5) въ (4), перемѣнивъ предварительно направо въ (5) значки i на j одинъ на другой (что возможно, такъ какъ они пробѣгаютъ одинъ и тотъ же рядъ значеній), мы получимъ:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial x_j}{\partial \alpha} \frac{\partial x_i}{\partial t} dt. \tag{6}$$

Отсюда видно, что когда выполнены условія (3) § 24, именно:

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j}-\frac{\partial X_j}{\partial x_i}=0, \qquad (i, j=1, 2, \ldots n) \tag{7}$$

тогда будетъ

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha}\equiv 0, \tag{8}$$

и, наоборотъ, для того чтобы имѣло мѣсто это тождество, должны имѣть мѣсто равенства (7), такъ какъ $\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial x_j}{\partial t}$ величины совершенно произвольныя, ибо таковы $\varphi_i(t, \alpha)$.

28. Если условія (7) не выполнены, то $\frac{\partial u_1}{\partial \alpha}$ будетъ функція отъ α; помножая обѣ части (6) пред. § на $d\alpha$ и интегрируя отъ α_0 до α_1, мы будемъ имѣть:

$$u_1(\alpha_1)-u_1(\alpha_0)=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}-\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_j}{\partial \alpha}dtd\alpha. \tag{1}$$

Здѣсь по (3) пред. §

$$u_1(\alpha_1)=\int_{t_0}^{t_1}(\alpha_1)\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial x_i}{\partial t}dt+u_0;$$

$$u_1(\alpha_0)=\int_{t_0}^{t}(\alpha_0)\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial x_i}{\partial t}dt+u_0;$$

поэтому будетъ:

$$u_1(\alpha_1)-u_1(\alpha_0)=-\int_{(C)}\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial x_i}{\partial t}dt, \tag{2}$$

гдѣ (C) кривая, идущая отъ t_0 до t_1 по той изъ семейства, для которой $\alpha=\alpha_0$, и отъ t_1 до t_0 по той, для которой $\alpha=\alpha_1$. Далѣе, двойную сумму въ (1) можно перемѣнить на такую:

$$\sum_{i,j=1}^{n}{}'\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}-\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_j}{\partial \alpha}-\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\frac{\partial x_j}{\partial t}\right), \tag{3}$$

распространенную на различныя i и j. Тогда по (2) и (3) равенство (1) такъ перепишется:

$$-\int_{(C)}\sum_{i=1}^{n}X_i dx_i=\iint_{(S)}\sum_{i,j=1}^{n}{}'\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}-\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)dx_i dx_j, \tag{4}$$

ибо

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} dt, \tag{5}$$

а

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} \frac{\partial x_j}{\partial t}\right) dt d\alpha = dx_i dx_j, \tag{6}$$

какъ извѣстно изъ теоріи преобразованія двойныхъ интеграловъ къ новымъ перемѣннымъ. Здѣсь (S) та площадь, которую описываетъ линія интегрированія въ (6) пред. §, когда параметръ α измѣняется отъ α_0 до α_1. Это есть формула *Стокса* (Stokes). —

Разсмотрѣніемъ полныхъ дифференціаловъ и ихъ интегрированіемъ заканчивается курсъ интегрированія функцій, и съ этою статьею необходимо было намъ познакомиться, какъ скоро увидимъ, до начала интегрированія дифференціальныхъ уравненій; кратное же интегрированіе по одной и той же перемѣнной составляетъ частный случай задачи новаго курса, и потому легко можетъ быть перенесено въ него и будетъ изложено въ своемъ мѣстѣ; такъ что теперь мы переходимъ собственно къ курсу интегрированія дифференціальныхъ уравненій.

ГЛАВА II.

Происхожденіе дифференціальныхъ уравненій; ихъ интегралы; доказательства ихъ существованія.

29. Всякое представленное въ формѣ уравненія соотношеніе между производными одной или нѣсколькихъ функцій, или ихъ дифференціалами, называется *дифференціальнымъ уравненіемъ*, причемъ въ это уравненіе рядомъ съ своими производными могутъ входить и сами функціи и независимыя перемѣнныя, однако необязательно; тогда какъ присутствіе производныхъ функцій или дифференціаловъ въ уравненіи необходимо для того, чтобы оно было «дифференціальное».

30. Если всѣ производныя или дифференціалы относятся къ одной независимой перемѣнной, то уравненіе называется *обыкновеннымъ* дифференціальнымъ уравненіемъ или просто дифференціальнымъ уравненіемъ; если же производныя или дифференціалы относятся къ нѣсколькимъ независимымъ перемѣннымъ, то уравненіе будетъ *уравненіемъ съ частными производными*, или *частнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ*,—если въ него входятъ частныя производныя, и *уравненіемъ въ полныхъ дифференціалахъ*, если въ него входятъ полные дифференціалы функцій.

Если въ уравненіе входитъ нѣсколько функцій, то одного уравненія недостаточно для ихъ опредѣленія: число ихъ должно вообще равняться числу неизвѣстныхъ функцій; тогда данныя уравненія образуютъ *систему совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій.*

Проинтегрировать данное уравненіе, или данную систему совокупныхъ уравненій, значитъ найти уравненія, связующія функціи съ независимыми перемѣнными, на основаніи которыхъ каждое дифференціальное уравненіе данной системы обращалось бы въ тождество.

31. Теорія дифференціальныхъ уравненій и ихъ интегрированія распадается по числу независимыхъ перемѣнныхъ на два отдѣла: 1) на теорію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій и ихъ системъ, и 2) на теорію частныхъ дифференціальныхъ уравненій и ихъ системъ и уравненій въ полныхъ дифференціалахъ. Первая часть теоріи дифференціальныхъ уравненій, именно, теорія обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, займетъ бо́льшую часть этого курса; въ концѣ его разсмотримъ частныя дифференціальныя уравненія перваго порядка, т. е. содержащія частныя производныя перваго порядка.

32. Какъ тѣ, такъ и другія дифференціальныя уравненія раздѣляются на порядки по порядку наивысшей изъ входящихъ въ нихъ производныхъ, такъ: если входятъ въ уравненіе только первыя производныя, то уравненіе будетъ перваго порядка; если входятъ и вторыя, но не выше, то—второго порядка; если входятъ производныя до n-го порядка, но не выше, то уравненіе будетъ n-го порядка.

33. Еще уравненія опредѣленнаго порядка раздѣляются на степени, по наивысшей степени старшей производной, т. е. наивысшаго порядка опредѣляющаго порядокъ этого уравненія. Для опредѣленія степени дифференціальнаго уравненія оно должно быть приведено къ такому виду, чтобы первая часть его была цѣлая раціональная функція всѣхъ входящихъ въ него производныхъ. Такъ, если напр. дано дифференціальное уравненіе:

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=ax+b, \tag{1}$$

выражающее кривую, радіусъ кривизны которой есть опредѣленная линейная функція абсциссы, то мы его сперва возвышаемъ въ квадратъ, затѣмъ помножаемъ на $(y'')^2$, переносимъ все въ одну часть; будемъ имѣть:

$$(ax+b)^2(y'')^2-(1+y'^2)^3=0, \tag{2}$$

слѣд. уравненіе второго порядка и второй степени. Если всѣ производныя и сама функція входятъ въ 1-ой степени, то уравненіе получаетъ названіе *линейнаго уравненія.* Таковы уравненіе гипергеометрическаго ряда:

(3) $$x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y=0,$$

линейное второго порядка, и

(4) $$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}-1=0,$$

линейное частное дифференціальное уравненіе перваго порядка, которое представляетъ всѣ цилиндрическія поверхности, производящія которой параллельны прямой:

(5) $$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{1}.$$

34. Прежде чѣмъ приступить къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій, намъ нужно познакомиться съ тѣмъ, какъ получаются дифференціальныя уравненія. Здѣсь мы ограничимся обыкновенными дифференціальными уравненіями, находя болѣе удобнымъ держаться вышеуказаннаго дѣленія курса на два отдѣла—по числу независимыхъ перемѣнныхъ.

Пусть дано уравненіе

(1) $$F(x, y, C)=0,$$

содержащее параметръ C. Геометрически оно представляетъ семейство кривыхъ линій. Продифференцировавъ его, будемъ имѣть другое уравненіе (принадлежащее тому же семейству кривыхъ линій):

(2) $$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0.$$

Если мы исключимъ C изъ этихъ уравненій, то получимъ такое уравненіе:

(3) $$f(x, y, y')=0,$$

которое будетъ дифференціальное уравненіе, ибо содержитъ производную y по x; геометрически оно будетъ дифференціальнымъ уравненіемъ семейства кривыхъ (1) и будетъ выражать нѣкоторое свойство ихъ по отношенію къ касательной, общее всѣмъ индивидуальнымъ кривымъ семейства, независящее отъ частнаго значенія параметра C, такъ какъ онъ не входитъ въ это уравненіе (3). Уравненіе (1) по отношенію къ (3) называется его полнымъ *первообразнымъ* или его *полнымъ интеграломъ*, также *общимъ рѣшеніемъ*. Въ частномъ случаѣ, когда первообразное имѣетъ такой видъ:

(4) $$\varphi(x, y)=C,$$

исключеніе C происходитъ само собою при дифференцированіи уравненія, чрезъ что получается:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'=0, \tag{5}$$

— дифференціальное уравненіе семейства кривыхъ. Иногда удается получить для даннаго дифференціальнаго уравненія интегралъ въ видѣ (4); тогда $\varphi(x, y)$, т. е. первая часть такого уравненія, рѣшеннаго относительно произвольной постоянной C, называется *интегральною функціей:* её не смѣшивать съ y, который есть искомая функція.

35. Если C получитъ частное значеніе, то будемъ имѣть *частное рѣшеніе* или частный интегралъ; оно — безъ произвольной постоянной. Каждое частное рѣшеніе заключается въ общемъ какъ частный случай и можетъ быть получено изъ общаго, давая надлежащее значеніе C. Часто его ищутъ подъ условіемъ, чтобы при $x=x_0$ было $y=y_0$. Въ такомъ случаѣ для опредѣленія C будемъ имѣть такое уравненіе:

$$F(x_0, y_0, C)=0. \tag{1}$$

Рѣшая его по C и подставляя въ (1) пред. §, и будемъ имѣть требуемое частное рѣшеніе. Если общій интегралъ получится въ формѣ (4) пред. §, тогда сразу получаемъ:

$$C=\varphi(x_0, y_0), \tag{2}$$

и искомое частное рѣшеніе будетъ:

$$\varphi(x, y)=\varphi(x_0, y_0). \tag{3}$$

36. Но могутъ быть рѣшенія уравненія безъ произвольной постоянной, которыя однако не могутъ быть получены изъ общаго, давая C какое-либо частное значеніе. Такія рѣшенія уравненія называются *особенными.* Они могутъ быть получены, если въ общее рѣшеніе, вмѣсто произвольной постоянной, будетъ подставлена нѣкоторая функція, какъ увидимъ въ своемъ мѣстѣ.

37. Если дано уравненіе между x и y, содержащее n произвольныхъ постоянныхъ, какъ напр.:

$$F(x, y;\ C_1, C_2, C_3, \dots C_n)=0, \tag{1}$$

то исключить эти произвольныя постоянныя можно только присоединивъ къ нему n послѣдовательныхъ производныхъ уравненій:

$$\frac{d}{dx}F=0,\ \frac{d^2}{dx^2}F=0,\ \dots\ \frac{d^n}{dx^n}F=0, \tag{2}$$

такъ что получится уравненіе вида:

$$\Phi(x, y, y', y'', y''', \dots y^{(n)})=0, \tag{3}$$

слѣд. дифференціальное уравненіе n-го порядка. Уравненіе (1) будетъ его *общимъ рѣшеніемъ* или *полнымъ интеграломъ:* характерный при-знакъ общаго рѣшенія — это, что число произвольныхъ постоянныхъ равно числу, показывающему порядокъ дифференціальнаго уравненія; рѣшенія съ меньшимъ числомъ произвольныхъ постоянныхъ будутъ частныя рѣшенія или особенныя. Такое названіе (1) получаетъ, впрочемъ, когда отъ (3) предлагается перейти къ (1); когда же дано (1), и изъ него выводится указаннымъ способомъ (3), то оно называется полнымъ первообразнымъ. Такъ какъ, полагая

$$(4)\qquad y'=z_1,\quad y''=z_1'=z_2,\quad y'''=z_2'=z_3,\quad \ldots\quad y^{(n-1)}=z'_{n-2}=z_{n-1},$$

мы будемъ имѣть: $y^{(n)}=z'_{n-1}$, и внося это въ (3), мы сведемъ на основаніи (4) уравненіе (3) къ такой системѣ уравненій 1-го порядка:

$$(5)\qquad \begin{cases} y'=z_1,\quad z_1'=z_2,\quad z_2'=z_3,\quad \ldots\quad z'_{n-2}=z_{n-1}, \\ \Phi(x, y, z_1, z_2, z_3, \ldots z_{n-1}, z'_{n-1})=0, \end{cases}$$

то подробное разсмотрѣніе этихъ дифференціальныхъ уравненій мы отложимъ до того времени, когда приступимъ къ теоріи системъ дифференціальныхъ уравненій; въ ближайшемъ же займемся дифференціальными уравненіями перваго порядка.

38. Переходимъ теперь къ доказательству основного предложенія нашей теоріи, именно, касающагося существованія интеграла предложеннаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка:

$$(1)\qquad f(x, y, y')=0.$$

Если оно первой степени относительно y', то чрезъ умноженіе на dx оно приводится къ такому виду:

$$(2)\qquad Mdx+Ndy=0,$$

гдѣ M и N функціи x и y, или же, рѣшая по y',—къ такому:

$$(3)\qquad y'=\varphi(x, y).$$

Къ этому виду приводится дифференціальное уравненіе (1) и въ томъ случаѣ, когда оно степени n относительно y'; для этого стоитъ только положить:

$$(4)\qquad y'=z;$$

тогда (1) обратится въ такое:

$$(5)\qquad f(x, y, z)=0,$$

и слѣд. (4) будетъ дифференціальное уравненіе вида (3), гдѣ z есть алгебраическая функція x, y, опредѣляемая уравненіемъ (5). Такимъ образомъ, чрезъ посредство неявныхъ алгебраическихъ функцій дифференціальному уравненію 1-го порядка всегда можно дать видъ (3). Не нужно забывать при этомъ, что функція z для каждой системы значеній x и y имѣетъ n значеній, которыя для нѣкоторыхъ особенныхъ значеній x и y могутъ дѣлаться равными и, слѣд. переходить одни въ другія. На послѣднемъ основаніи, эти значенія называются вѣтвями функціи z. При доказательствѣ основного предложенія нашей теоріи, можно ограничиться разсмотрѣніемъ одной какой-либо вѣтви, что мы и будемъ дѣлать въ дальнѣйшемъ. Мы дадимъ 3 доказательства этого предложенія: Коши, Пикара, и Бріо и Букэ.

39. Первое доказательство въ своемъ первоначальномъ видѣ было извѣстно и ранѣе Коши: его находимъ у Lacroix; Коши, затѣмъ Липшицъ и Пикаръ его усовершенствовали. Подъ именемъ Коши его встрѣчаемъ у Пикара въ его Traité d'Analyse, т. II p. 291. Мы изложимъ его по Пикару.

Пусть дано уравненіе:

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

гдѣ $f(x, y)$ непрерывная функція отъ обѣихъ перемѣнныхъ (вещественныхъ), пока онѣ находятся въ предѣлахъ, опредѣляемыхъ неравенствами:

$$|x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b\text{ *)}, \tag{2}$$

(гдѣ x_0 и y_0 такія значенія, для которыхъ $f(x, y)$ конечна, опредѣленна и непрерывна), слѣд. по данному ε всегда можно найти такое δ, что для всякихъ Δx и Δy, которыхъ абсолютное значеніе $< \delta$:

$$|\Delta x| < \delta, \quad |\Delta y| < \delta, \tag{3}$$

будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$|f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \varepsilon, \tag{4}$$

причемъ и старыя и новыя значенія независимыхъ перемѣнныхъ должны принадлежать къ области, опредѣляемой неравенствами (2). Далѣе, предположимъ, что $f(x, y)$ такова, что всегда можно найти такое число k для всякихъ y_1 и y_2 лежащихъ съ x въ той же области, что будетъ имѣть мѣсто неравенство:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| < k(y_2 - y_1) \tag{5}$$

$(y_2 > y_1)$; необходимость этого дополненія указана Липшицемъ; это условіе выполнено, если $f(x, y)$ имѣетъ производную по y. Пусть теперь M обозначаетъ наибольшее значеніе функціи $|f(x, y)|$ для x и y, лежащихъ въ предѣлахъ, указанныхъ неравенствами (2), и A число удовлетворяющее обоимъ слѣдующимъ неравенствамъ:

$$A \leqq a, \quad A.M \leqq b; \tag{6}$$

---

*) Чрезъ $|a|$ обозначается, по Вейерштрассу, абсолютное или численное значеніе величины, если она вещественная, и модуль, если она комплексная.

въ такомъ случаѣ можно доказать, что «существуетъ такая функція y, опредѣленная и непрерывная въ предѣлахъ значеній x, удовлетворяющихъ неравенству

$$|x-x_0|<A, \tag{7}$$

и принимающая при $x=x_0$, значеніе $y=y_0$, которая удовлетворяетъ уравненію (1)».

Для доказательства вставимъ между x_0 и $x>x_0$ рядъ промежуточныхъ значеній: $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, причемъ

$$x_0<x_1<x_2<x_3<\ldots<x_{n-1}<x, \tag{8}$$

и такихъ, чтобы разности $x_{i+1}-x_i$ были достаточно малы. Затѣмъ составляемъ разности:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1-y_0=(x_1-x_0)f(x_0, y_0), \\ y_2-y_1=(x_2-x_1)f(x_1, y_1), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y-y_{n-1}=(x-x_{n-1})f(x_{n-1}, y_{n-1}); \end{array}\right. \tag{9}$$

онѣ опредѣляютъ рядъ величинъ $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, y$, которыя всѣ лежатъ въ указанномъ промежуткѣ. Въ самомъ дѣлѣ, замѣняя въ первомъ изъ этихъ равенствъ $f(x_0, y_0)$ наибóльшимъ значеніемъ ея модуля, будемъ имѣть:

$$|y_1-y_0|<(x_1-x_0)M<AM<b;$$

слѣд. y_1 лежитъ къ указанныхъ предѣлахъ, а потому также получимъ изъ слѣдующаго равенства:

$$|y_2-y_1|<(x_2-x_1)M<AM<b;$$

складывая это съ предыдущимъ и имѣя въ виду, что

$$|y_2-y_0|<|y_2-y_1|+|y_1-y_0|,$$

получимъ:

$$|y_2-y_0|<(x_2-x_0)M<AM<b;$$

слѣд. и y_2 лежитъ въ указанныхъ предѣлахъ. Идя такъ дальше, дойдемъ до того результата, что всѣ y_i до y_{h-1} лежатъ въ указанныхъ предѣлахъ, и потому мы будемъ имѣть такой рядъ неравенствъ:

$$\left\{\begin{array}{l} |y_1-y_0|<(x_0-x_1)M, \\ |y_2-y_1|<(x_1-x_0)M, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ |y_h-y_{h-1}|<(x_h-x_{h-1})M; \end{array}\right. \tag{10}$$

складывая ихъ и помня, что численное значеніе суммы меньше суммы численныхъ значеній слагаемыхъ, мы будемъ имѣть:

$$|y_h-y_0|<(x_h-x_0)M<AM<b, \tag{11}$$

откуда и слѣдуетъ сказанное. Нужно теперь доказать, что съ увеличеніемъ числа n послѣднее изъ нихъ, отвѣчающее x, именно y, будетъ стремиться къ опредѣленному предѣлу.

Мы будемъ въ каждый промежутокъ въ (8) вставлять новыя значенія, и полученный рядъ значеній будемъ отличать отъ прежняго значкомъ наверху; такимъ образомъ для промежутка $\overline{x_i\, x_{i+1}}$ будемъ имѣть:

$$x_i = x'_l < x'_{l+1} < x'_{l+2} < \ldots < x'_m < \ldots < x'_p = x_{i+1}. \tag{12}$$

Какъ и выше будемъ имѣть для соотвѣтствующихъ значеній y:

$$\left.\begin{aligned} y'_{l+1} - y'_l &= (x'_{l+1} - x'_l) f(x_l, y_l) = (x'_{l+1} - x'_l)[f(x_l, y_l) + 0.\varepsilon] \\ y'_{l+2} - y'_{l+1} &= (x'_{l+2} - x'_{l+1}) f(x'_{l+1}, y'_{l+1}) = (x'_{l+2} - x'_{l+1})[f(x'_l, y'_l) + \theta_1.\varepsilon] \\ y'_{l+3} - y'_{l+2} &= (x'_{l+3} - x'_{l+2}) f(x'_{l+2}, y'_{l+2}) = (x'_{l+3} - x'_{l+2})[f(x'_l, y'_l) + \theta_2.\varepsilon] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_p - y'_{p-1} &= (x'_p - x'_{p-1}) f(x'_{p-1}, y'_{p-1}) = (x'_p - x'_{p-1})[f(x'_l, y'_l) + \theta_{p-1-l}.\varepsilon], \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ибо, вслѣдствіе предположенія, что промежутки перваго дѣленія достаточно малы, будемъ имѣть:

$$|f(x'_m, y'_m) - f(x'_l, y'_l)| < \varepsilon, \tag{14}$$

и слѣд.

$$f(x'_m, y'_m) - f(x'_l, y'_l) = \theta_{m-l}\varepsilon, \tag{15}$$

гдѣ $|\theta_{m-l}| < 1$. Складывая равенства (13), получимъ:

$$y'_p - y'_l = (x'_p - x'_l)[f(x'_l, y'_l) + \theta\varepsilon], \tag{16}$$

гдѣ

$$\theta = \frac{(x'_{l+2} - x'_{l+1})\theta_1 + (x'_{l+3} - x'_{l+2})\theta_2 + \cdots + (x'_p - x'_{p-1})\theta_{p-1-l}}{x'_p - x'_l}, \tag{17}$$

очевидно, правильная дробь, ибо она меньше средней отъ правильныхъ дробей $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{p-1-l}$, ибо $x'_p - x'_l > x'_p - x'_{l+1}$. Эту формулу (16) можно еще такъ написать:

$$y'_p - y'_l = (x_{i+1} - x_i)[f(x'_l, y'_l) + \theta\varepsilon]. \tag{18}$$

Но по (9) имѣемъ:

$$y_{i+1} - y_i = (x_{i+1} - x_i) f(x_i, y_i); \tag{19}$$

вычитая изъ предыдущаго, получимъ:

$$y'_p - y_{i+1} = y'_l - y_i + (x_{i+1} - x_i)[f(x'_l, y'_l) - f(x_i, y_i) + \theta\varepsilon]; \tag{20}$$

отсюда на основаніи (5), а также замѣняя θ единицею, получаемъ:

$$|y'_p - y_{i+1}| < |y'_i - y_i| + (x_{i+1} - x_i)[k(y'_i - y_i) + \varepsilon], \tag{21}$$

и придавая къ обѣимъ частямъ по $\frac{\varepsilon}{k}$:

$$|y'_p - y_{i+1}| + \frac{\varepsilon}{k} < \left(|y'_i - y_i| + \frac{\varepsilon}{k}\right)[1 + k(x_{i+1} - x_i)]. \tag{22}$$

Положимъ для краткости

$$|y'_i - y_i| = V_i; \tag{23}$$

тогда предыдущее такъ напишется:

$$V_{i+1} + \frac{\varepsilon}{k} < \left(V_i + \frac{\varepsilon}{k}\right)[1 + k(x_{i+1} - x_i)] < \left(V_i + \frac{\varepsilon}{k}\right)e^{k(x_{i+1} - x_i)}, \tag{24}$$

ибо при $\alpha > 0$:

$$1 + \alpha < e^{\alpha}. \tag{25}$$

Написавъ подобныя неравенства для всѣхъ i отъ 0 до i и имѣя въ виду, что $V_0 = |y'_0 - y_0| = 0$, ибо $y'_0 = y_0$, мы, по перемноженіи ихъ и сокращеніи послѣ того на общихъ множителей обѣихъ частей полученнаго неравенства, будемъ имѣть:

$$V_{i+1} + \frac{\varepsilon}{k} < \frac{\varepsilon}{k} e^{k(x_{i+1} - x_0)}, \tag{26}$$

или

$$V_{i+1} < \frac{\varepsilon}{k}[e^{k(x_{i+1} - x_0)} - 1]; \tag{27}$$

вставляя сюда значеніе V_{i+1}, будемъ имѣть:

$$|y'_p - y_{i+1}| < \frac{\varepsilon}{k}[e^{k(x_{i+1} - x_0)} - 1]. \tag{28}$$

Примѣняя эту формулу, дающую разность значеній y, отвѣчающихъ точкѣ перваго дѣленія и той же точкѣ второго, вычисленныхъ по способу (9) и (13), къ точкѣ x, конечной разсматриваемаго интервала, будемъ имѣть:

$$|y' - y| < \frac{\varepsilon}{k}[e^{k(x - x_0)} - 1]. \tag{29}$$

Слѣд. значеніе y', отвѣчающее второму дѣленію, упадетъ въ промежутокъ между

$$y - \frac{\varepsilon}{k}[e^{k(x - x_0)} - 1] \quad \text{и} \quad y + \frac{\varepsilon}{k}[e^{k(x - x_0)} - 1], \tag{30}$$

величина котораго $= \frac{2\varepsilon}{k}[e^{k(x - x_0)} - 1]$, слѣд. съ уменьшеніемъ ε стремится къ нулю. Здѣсь ε относился къ первому дѣленію; если ε' относится ко второму, то можно выбрать $\varepsilon' < \varepsilon$, ибо вторые промежутки мельче; потому y'', относящееся къ третьему дѣленію, упадетъ между

$$y' - \frac{\varepsilon'}{k}[e^{k(x-x_0)} - 1] \text{ и } y' + \frac{\varepsilon'}{k}[e^{k(x-x_0)} - 1], \tag{31}$$

къ четвертому между

$$y'' - \frac{\varepsilon''}{k}[e^{k(x-x_0)} - 1] \text{ и } y'' + \frac{\varepsilon''}{k}[e^{k(x-x_0)} - 1], \text{ и т. д.} \tag{32}$$

причемъ величины интерваловъ будутъ дѣлаться всё меньше и меньше, ибо каждый послѣдующій будетъ занимать часть предыдущаго, причемъ они никогда цѣликомъ не выйдутъ изъ перваго промежутка, слѣд. будутъ сжиматься безпредѣльно около нѣкоторой точки его. (Выступающія изъ предыдущаго интервала части можно очевидно отбрасывать).

Остается показать, что это опредѣленное значеніе не зависитъ отъ начальнаго дѣленія. Пусть теперь одно первое дѣленіе указывается значкомъ ($'$) наверху, другое внизу ($_1$); третье выберемъ такъ, чтобы оно заключало точки обоихъ вмѣстѣ и, слѣд., было бы послѣдующимъ и въ томъ и другомъ; его мы означимъ чрезъ ($''$). Тогда будемъ имѣть по (29) такія два неравенства:

$$|y'' - y'| < \frac{\varepsilon}{k}[e^{k(x-x_0)} - 1] \quad \text{и} \quad |y'' - y_1| < \frac{\varepsilon}{k}[e^{k(x-x_0)} - 1]; \tag{33}$$

отсюда, помня, что модуль разности менѣе суммы модулей, мы получимъ:

$$|y' - y_1| < \frac{2\varepsilon}{k}[e^{k(x-x_0)} - 1], \tag{34}$$

а здѣсь вторая часть можетъ быть послѣдовательными дѣленіями интервала сдѣлана $<$ всякой данной величины, какъ бы она мала ни была.

Наконецъ, надобно показать, что это предѣльное значеніе y будетъ непрерывная функція x, удовлетворяющая данному уравненію. Пусть x' значеніе $> x$ и очень близкое къ нему, такое что $|x' - x_0| < A$, и $x' - x < \delta$. Означимъ значеніе y, получающееся какъ предѣлъ при дѣленіи $\overline{x_0x'}$ на все меньшія части, чрезъ y', а чрезъ Y' его значеніе, вычисляемое по (9) прямо по формулѣ:

$$Y' - y = (x' - x) f(x, y); \tag{35}$$

тогда по предыдущему [формула (29)] будетъ:

$$|Y' - y'| < \frac{\varepsilon}{k}[e^{k(x'-x)} - 1], \tag{36}$$

или, означая чрезъ ϑ правильную дробь:

$$Y' - y' = \vartheta \frac{\varepsilon}{k}[e^{k(x'-x)} - 1]; \tag{37}$$

вычитая это изъ (35), будемъ имѣть:

(38)
$$y'-y=(x'-x)f(x,y)-\vartheta\frac{\varepsilon}{k}[e^{k(x'-x)}-1],$$

откуда:

(39)
$$\frac{y'-y}{x'-x}=f(x,y)-\vartheta\frac{\varepsilon}{k}\frac{e^{k(x'-x)}-1}{x'-x};$$

но здѣсь лѣвая часть будетъ стремиться къ $\frac{dy}{dx}$, когда x' будетъ стремиться къ x; а правая къ $f(x,y)$, ибо ε можетъ быть сдѣлано $<$ всякой данной величины, а пред. $\left.\frac{e^{k(x'-x)}-1}{x'-x}\right|_{x'=x}=k$. Итакъ, въ предѣлѣ будемъ имѣть:

(40)
$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

чрезъ что наше предложенiе доказано во всѣхъ своихъ частяхъ.

40. Второе доказательство, принадлежащее Пикару, основано на способѣ послѣдовательнаго приближенiя. Пусть дано дифференцiальное уравненiе:

(1)
$$y'=f(x,y),$$

гдѣ $f(x,y)$ конечна и непрерывна, пока x и y находятся въ предѣлахъ:

(2)
$$|x-x_0|<a, \quad |y-y_0|<b;$$

предположимъ также, что всегда можно найти такое k, что для x, y_2 и y_1, лежащихъ въ этихъ предѣлахъ, будетъ

(3)
$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|<k|y_2-y_1|.$$

Означимъ еще чрезъ M наибольшее значенiе $|f(x,y)|$ для значенiй x и y, лежащихъ въ указанныхъ предѣлахъ. Требуется найти функцiю y такую, которая удовлетворяла бы уравненiю (1) и принимала бы значенiе y_0 при $x=x_0$. Замѣнимъ въ уравненiи (1) y чрезъ y_0 и будемъ искать функцiю y_1 изъ уравненiя:

(4)
$$\frac{dy_1}{dx}=f(x,y_0),$$

при условiи, чтобы $y_1=y_0$ при $x=x_0$. Такъ какъ въ (4) направо имѣемъ явную функцiю одного x, то y_1 находится съ помощiю квадратуры:

(5)
$$y_1=\int_{x_0}^{x}f(x,y_0)\,dx+y_0.$$

Это значенiе y_1 вносимъ въ правую часть (1) и будемъ искать функцiю y_2 изъ уравненiя:

$$\frac{dy_2}{dx}=f(x, y_1); \tag{6}$$

и тоже $=y_0$ при $x=x_0$; на основаніи (5) здѣсь направо имѣемъ опять функцію одного x; слѣдовательно, функція y_2, обращающаяся въ y_0 при $x=x_0$, будетъ:

$$y_2=\int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx+y_0. \tag{7}$$

Вносия это въ правую часть (1), найдемъ точно такъ же:

$$y_3=\int_{x_0}^{x} f(x, y_2)\,dx+y_0, \tag{8}$$

и, продолжая подставлять найденную функцію въ правую часть (1) и опять интегрировать между тѣми же предѣлами, мы будемъ имѣть:

$$y_m=\int_{x_0}^{x} f(x, y_{m-1})\,dx+y_0. \tag{9}$$

Допустимъ, что для $h=1, 2, 3\ldots l-1$ будетъ:

$$|y_h-y_0|<b;$$

тогда изъ (9) для $m=l$ будетъ слѣдовать, что

$$|y_l-y_0|<\int_{x_0}^{x} M\,dx=M(x-x_0),$$

слѣдовательно,

$$|y_l-y_0|<MA<b;$$

т. е. и y_l будетъ лежать въ тѣхъ же предѣлахъ. Слѣдовательно, всѣ y_m, полученные по этому способу, будутъ лежать въ тѣхъ же предѣлахъ.

Эти величины: y_1, y_2, y_3,....y_{m-1}, y_m съ увеличеніемъ m до ∞ будутъ стремиться къ нѣкоторому предѣлу. Разсмотримъ съ этою цѣлью разность:

$$y_h-y_{h-1}=\int_{x_0}^{x}[f(x, y_{h-1})-f(x, y_{h-2})]\,dx. \tag{10}$$

Изъ (5) мы имѣемъ

$$|y_1-y_0|<M(x-x_0). \tag{11}$$

Изъ (10) для $h=2$, и далѣе по условію (3) (Липшица) и (11), имѣемъ

$$|y_2-y_1|<\int_{x_0}^{x}|f(x, y_1)-f(x, y_0)|\,dx<\int_{x_0}^{x}k|y_1-y_0|\,dx<\int_{x_0}^{x}kM(x-x_0)\,dx,$$

т. е.

$$|y_2-y_1|<Mk\frac{(x-x_0)^2}{1.2}. \tag{12}$$

Изъ (10) для $h=3$ точно также имѣемъ:

$$|y_3 -- y_2| < \int_{x_0}^{x} |f(x, y_2) - f(x, y_1)|\, dx < \int_{x_0}^{x} k\, |y_2 - y_1|\, dx < \int_{x_0}^{x} Mk^2 \frac{(x-x_0)^2}{1.2}\, dx;$$

т. е.

$$|y_3 - y_2| < Mk^2 \frac{(x-x_0)^3}{1.2.3}. \tag{13}$$

Допустимъ, что

$$|y_l - y_{l-1}| < Mk^{l-1} \frac{(x-x_0)^l}{l!}. \tag{14}$$

Изъ (10) для $h=l+1$ имѣемъ:

$$|y_{l+1} - y_l| < \int_{x_0}^{x} |f(x, y_l) - f(x, y_{l-1})|\, dx < \int_{x_0}^{x} k\, |y_l - y_{l-1}|\, dx <$$

$$< \int_{x_0}^{x} Mk^l \frac{(x-x_0)^l}{l!}\, dx,$$

т. е. по (14):

$$|y_{l+1} - y_l| < Mk^l \frac{(x-x_0)^{l+1}}{(l+1)!}. \tag{15}$$

Слѣд. формула (14) вѣрна для всякаго l.

Теперь мы имѣемъ:

$$y_m = y_0 + \sum_{h=1}^{m} (y_h - y_{h-1}); \tag{16}$$

этотъ рядъ будетъ сходящимся и притомъ безусловно, ибо рядъ модулей его членовъ:

$$\sum_{h=1}^{m} |y_h - y_{h-1}| \tag{17}$$

будетъ сходящимся, такъ какъ члены его меньше по (14) членовъ сходящаго ряда:

$$\frac{M}{k} \sum_{h=1}^{m} \frac{[k(x-x_0)]^h}{h!}. \tag{18}$$

Отсюда слѣдуетъ, что y_m съ увеличеніемъ m до ∞ будетъ стремиться къ нѣкоторому предѣлу.

Мы предполагали, что $x > x_0$, написавъ неравенство (11); если же $x < x_0$, то его слѣдуетъ такъ написать:

$$|y_1 - y_0| < M(x_0 - x), \tag{19}$$

а далѣе, чтобы считать $dx < 0$, мы должны переставить предѣлы интеграловъ во всѣхъ слѣдующихъ интегралахъ, и тогда будемъ имѣть, опуская постояннаго множителя:

$$\int_{x}^{x_0}(x_0-x)\,dx=\left(-\frac{(x_0-x)^2}{1.2}\right)_x^{x_0}=\frac{(x_0-x)^2}{1.2},$$

$$\int_{x}^{x_0}\frac{(x_0-x)^2}{1.2}\,dx=\left(-\frac{(x_0-x)^3}{1.2.3}\right)_x^{x_0}=\frac{(x_0-x)^3}{1.2.3}$$

и т. д., отчего всѣ наши выводы сохранятся.

Предѣлы сходимости будутъ опредѣляться неравенствомъ

$$|x-x_0|<A<a; \tag{20}$$

причемъ $AM<b$, откуда $A<\frac{b}{M}$; если $\frac{b}{M}>a$, то границей будетъ a, иначе $\frac{b}{M}$; короче сказать: наименьшая изъ величинъ

$$a \text{ и } \frac{b}{M}.$$

Остается показать, что

$$\text{пред.}\, y_m|_{m=\infty}=\int_{x_0}^{x} \text{пред.}\, f(x, y_{m-1})_{m=\infty}dx+y_0 \tag{21}$$

будетъ удовлетворять данному дифференціальному уравненію. Для этого замѣтимъ, что пред. $f(x, y_{m-1})=f(x, y)$; слѣд. $f(x, y_{m-1})=f(x, y)+\theta_{m-1}\varepsilon$, и

$$y_m=\int_{x_0}^{x}f(x, y)dx+y_0+\varepsilon\int_{x_0}^{x}\theta_{m-1}dx; \tag{22}$$

но $\int_{x_0}^{x}\theta_{m-1}dx$ величина конечная; потому послѣдній членъ въ (21) обратится въ нуль вмѣстѣ съ ε, и слѣд. будетъ

$$\text{пред.}\, y_m=y=\int_{x_0}^{x}f(x, y)\,dx+y_0, \tag{23}$$

откуда, дифференцируя, получимъ:

$$y'=f(x, y), \tag{24}$$

т. е. наше дифференціальное уравненіе.

41. Переходимъ къ третьему доказательству—Бріо и Букэ, распространенному ими на системы, а С. В. Ковалевской и на частныя дифференціальныя уравненія. Знать его не менѣе важно, какъ и предыдущія; оно предполагаетъ обѣ перемѣнныя комплексными; такое предположеніе налагаетъ, правда, ограниченіе на характеръ измѣненія функціи, но, благодаря ему мы можемъ зато глубже проникнуть въ природу такихъ функцій, которыя къ тому же обладаютъ многими интересными свойствами.

Здѣсь мы изложимъ доказательство Бріо и Букэ въ примѣненіи къ интересующему насъ теперь простѣйшему случаю—уравненія перваго порядка:

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx}=f(x, y),$$

гдѣ $f(x, y)$ есть функція однозначная, конечная и непрерывная внутри нѣкоторой области комплексныхъ значеній перемѣнныхъ x и y, лежащей вокругъ точки x_0, соотвѣтственно y_0, и имѣющей производныя по этимъ перемѣннымъ, короче голоморфная. (Holomorphe—имѣющая видъ цѣлой функціи.) Не нарушая общности доказательства, можно предположить $x_0=0$, и $y_0=0$, ибо, въ противномъ случаѣ, полагая $x=x_0+x'$, $y=y_0+y'$ таковыя начальныя значенія будутъ отвѣчать новымъ перемѣннымъ x' и y'. Дифференцируя послѣдовательно уравненіе (1), получимъ такія уравненія:

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx};$$

$$(3) \qquad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2},$$

. . . .

изъ которыхъ вмѣстѣ съ (1), полагая $x=x_0=0$, $y=y_0=0$, получимъ послѣдовательно значенія $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$ для $x=0$ и $y=0$, именно:

$$(4) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 \ldots$$

такъ что по строкѣ Маклореня будемъ имѣть формально:

$$(5) \qquad y=\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 x+\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 x^2+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 x^3+\ldots;$$

если этотъ рядъ будетъ сходящійся, то онъ будетъ опредѣлять функцію, удовлетворяющую уравненію (1); ибо отсюда имѣемъ:

$$(6) \qquad \frac{dy}{dx}=\left(\frac{dy}{dx}\right)_0+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 x+\frac{1}{1.2}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 x^2+\ldots,$$

гдѣ производныя опредѣляются, напоминаемъ, изъ (1), (2) и (3); но такимъ же образомъ опредѣлятся и полныя производныя $f(x, y)$: правыя части (2) и (3) и суть не что иное, какъ полныя производныя отъ $f(x, y)$ 1-го 2-го и т. д. порядковъ; слѣд. разложеніе $f(x, y)$ въ рядъ по степенямъ x будетъ тождественно съ рядомъ (6).

Этотъ послѣдній мы получили, дифференцируя рядъ (5): это не всегда возможно; но въ данномъ случаѣ, если только докажемъ, что рядъ (5) безусловно-сходящійся, то тогда это возможно. Послѣднее такъ докажется, и въ этомъ, такъ сказать, центръ тяжести доказательства нашего предложенія.

Рядъ будетъ безусловно-сходящійся, когда будетъ сходиться рядъ модулей членовъ его; мы докажемъ, что это имѣетъ мѣсто относительно (5), при посредствѣ «превышающей функціи»—fonction majorante, какъ её нынче называютъ: она обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что модули ея производныхъ при $x=0$, $y=0$, бóльше модулей производныхъ того же порядка нашей функціи; слѣд. если такой рядъ, какъ (5), для этой новой функціи будетъ безусловно-сходящимся, то таковымъ же будетъ и самъ рядъ (5), чрезъ что наше предложеніе будетъ вполнѣ доказано.

Замѣняя въ (1), (2), (3) функцію $f(x, y)$ и ея частныя производныя наибольшимъ въ разсматриваемой области значеніемъ ея модуля, которое означимъ чрезъ M, и соотвѣтственно высшими предѣлами модуля этихъ производныхъ по формулѣ

$$\left|\frac{\partial^m f(x, y)}{\partial x^k \partial y^{m-k}}\right| < \frac{k!(m-k)!M}{\rho^k r^{m-k}}, \tag{7}$$

(гдѣ ρ и r радіусы круговъ около $x=x_0=0$ и около $y=y_0=0$ какъ центровъ въ соотвѣтственныхъ плоскостяхъ), мы будемъ имѣть величины, превосходящія модули $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0\ldots$, ибо модуль суммы менѣе суммы модулей, особенно же, когда вмѣсто слагаемыхъ подставимъ не самые модули ихъ, а величины еще бóльшія.

Возьмемъ теперь функцію:

$$\varphi(x, Y) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)\left(1-\frac{Y}{r}\right)}, \tag{8}$$

и положимъ

$$\frac{dY}{dx} = \varphi(x, Y); \tag{9}$$

тогда будемъ имѣть:

$$\frac{\partial^m \varphi(x, Y)}{\partial x^k . \partial Y^{m-k}} = \frac{k!(m-k)!M}{\rho^k . r^{m-k}}\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{-(k+1)}\left(1-\frac{Y}{r}\right)^{-(m-k+1)}; \tag{10}$$

полагая $x=0$, $Y=0$, получимъ:

$$\left.\frac{\partial^m \varphi(x, Y)}{\partial x^k . \partial Y^{m-k}}\right|_{x=0,\ Y=0} = \frac{k!(m-k)!M}{\rho^k . r^{m-k}}. \tag{11}$$

Значенія производныхъ этой функціи при $x=0$, $Y=0$ суть вещественныя и равныя второй части (7), т. е. представляютъ величины, равныя соотвѣтственно высшимъ предѣламъ модулей функціи $f(x, y)$ и ея производныхъ, найденнымъ выше. Дифференцируя уравненіе (8) и полагая $x=0$, $Y=0$ въ полученныхъ уравненіяхъ, которыя будутъ такого же вида, какъ (2) и (3),... мы будемъ имѣть значенія $\left(\frac{dY}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_0$, $\left(\frac{d^3Y}{dx^3}\right)_0\dots$ Эти значенія, какъ вещественныя и положительныя, будутъ равны своему модулю и въ то же время будутъ равны тѣмъ величинамъ, которыя мы получили изъ (2) и (3)..., для высшихъ предѣловъ модулей $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0\dots$; слѣд. функція Y,—если только она существуетъ, и будетъ искомая fonction majorante; остается, слѣд. убѣдиться въ существованіи этой послѣдней. Это вполнѣ возможно, ибо не трудно получить уравненіе, опредѣляющее такую функцію Y. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (9) можно такъ представить:

$$\left(1-\frac{Y}{r}\right)\cdot\frac{dY}{dx}=\frac{M}{1-\frac{x}{\rho}}; \tag{12}$$

здѣсь каждая часть по умноженіи на dx будетъ полнымъ дифференціаломъ, ибо будетъ содержать только одну перемѣнную:

$$\left(1-\frac{Y}{r}\right)dY=\frac{Mdx}{1-\frac{x}{\rho}}; \tag{13}$$

а потому, интегрируя отъ 0, помня начальное условіе: $Y=0$, при $x=0$, мы будемъ имѣть:

$$Y-\frac{Y^2}{2r}=-M\rho\log\left(1-\frac{x}{\rho}\right), \tag{14}$$

$$Y^2-2rY=2M\rho r\log\left(1-\frac{x}{\rho}\right); \tag{15}$$

отсюда находимъ:

$$Y=r\pm\sqrt{r^2+2M\rho r\log\left(1-\frac{x}{\rho}\right)}. \tag{16}$$

Каждая вѣтвь функціи Y будетъ оставаться конечною, однозначною и непрерывною, пока не обратится въ нуль подрадикальное выраженіе, когда оба значенія Y сравняются:

$$r^2+2M\rho r\log\left(1-\frac{x}{\rho}\right)=0. \tag{17}$$

Отсюда находимъ:

$$\log\left(1-\frac{x}{\rho}\right)=-\frac{r}{2M\rho},$$

слѣдовательно,

$$x=\rho\left(1-e^{-\frac{r}{2M\rho}}\right); \tag{18}$$

оно, какъ видимъ, вообще $<\rho$. Въ кругѣ этого радіуса Y будетъ разлагаться въ сходящійся рядъ. Мы должны выбрать въ (16) ту вѣтвь, которая обращается въ нуль при $x=0$: тогда радикалъ приводится къ $\sqrt{r^2}=r$; слѣд. нужно въ (16) взять знакъ —, чтобы имѣть нашу, fonction majorante:

$$Y=r-\sqrt{r^2+2M\rho\log\left(1-\frac{x}{\rho}\right)}^{*)}. \tag{19}$$

42. Предыдущія доказательства удостовѣряютъ существованіе интеграла дифференціальнаго уравненія:

$$y'=f(x, y) \tag{1}$$

внутри области, опредѣляемой неравенствами:

$$|x-x_0|<A, \quad |y-y_0|<b, \tag{2}$$

гдѣ $A<a$, $AM<b$, такого, который принимаетъ при $x=x_0$ значеніе $y=y_0$. Выбравъ внутри этой области (2) точку $x=x_1$, значеніе функціи y въ которой пусть будетъ y_1, и примѣняя тѣже разсужденія, мы найдемъ интегралъ того же уравненія (1), имѣющій мѣсто въ области

$$|x-x_1|<A, \quad |y-y_1|<b, \tag{3}$$

которая отчасти можетъ выступать изъ прежней. Продолжая это, т. е. выбирая x_2 и соотвѣтствующее y_2 за начальныя значенія x и y, причемъ x_2 лежитъ въ этой выступающей части, мы можемъ еще прибавить къ прежней области новую часть и такъ идти до естественныхъ предѣловъ функціи, (ибо есть такія, которыя не могутъ существовать какъ только внутри извѣстной области). Это называется *аналитическимъ продолженіемъ функціи*. Объ этомъ подробнѣе говорится въ курсахъ по теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго. Идею эту нѣкоторые приписываютъ Вейерштрассу, ибо она играла большую роль въ его изслѣдованіяхъ; но справедливость требуетъ сказать, что она была у Коши, и ею много пользовался Пьюзе въ своей теоріи алгебраическихъ функцій; а также не чужда она была Гауссу, Куммеру и Якоби, которые даютъ разложенія гипергеометрической функціи, годныя для различныхъ областей, только частью покрывающихъ одна другую **).

43. Не легко было доказать существованіе интеграла; еще труднѣе найти его, такъ какъ только въ немногихъ случаяхъ намъ удается свести

---

*) См. *Briot et Bonduct:* Théorie des fonctions doublement periodiques et en particulier des fonctions elliptiques. Paris, 1859. Также въ ихъ: Traité des fonctions elliptiques. Paris, 1875. 4°.

**) Объ этомъ см. мое разсужденіе „О гипергеометрическихъ рядахъ“. СПБ. 1876 г.

искомый интегралъ къ извѣстнымъ функціямъ или къ квадратурамъ; вообще же свойства функцій надобно выводить изъ самого дифференціальнаго уравненія. Это сдѣлано лишь для немногихъ классовъ уравненій, изъ которыхъ особенно выдѣляются линейныя послѣ работъ Фукса; вообще же можно сказать, что разработка такихъ уравненій еще только началась, хотя уже начали появляться сочиненія, какъ E. Picard'а и Forsyth'а, въ которыхъ дѣлается попытка свести въ одно цѣлое то, что сдѣлано по этому предмету. Это однако не можетъ войти въ нашъ курсъ, въ которомъ мы ограничимся разсмотрѣніемъ важнѣйшихъ изъ тѣхъ уравненій, интегрированіе которыхъ удается въ старомъ смыслѣ, т. е. приводится или къ извѣстнымъ функціямъ, или къ квадратурамъ.

44. Составленіе дифференціальныхъ уравненій чрезъ исключеніе произвольныхъ постоянныхъ не представляетъ иныхъ трудностей, кромѣ алгебраическихъ; а потому можно ограничиться для поясненія этой операціи слѣдующими примѣрами.

Примѣръ I. Дано уравненіе:

$$y = ax^2 + bx; \tag{1}$$

дифференцируя его разъ и другой, будемъ имѣть такія уравненія:

$$y' = 2ax + b; \qquad y'' = 2a; \tag{2}$$

изъ послѣдняго имѣемъ $a = \frac{1}{2}y''$, послѣ чего предыдущее даетъ: $b = y' - xy''$; внося эти выраженія въ (1), будемъ имѣть, перенося все въ лѣвую часть:

$$x^2y'' - xy' - \frac{1}{2}x^2y'' + y = 0 \tag{3}$$

или

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0. \tag{4}$$

Примѣръ II. Дано уравненіе;

$$y = ce^{ax} + c'e^{bx}, \tag{5}$$

гдѣ a и b данныя постоянныя величины, c и c' произвольныя постоянныя величины, которыя требуется исключить. Дифференцируя (5) разъ и другой, будемъ имѣть:

$$y' = ca\, e^{ax} + c'b\, e^{bx}, \tag{6}$$

$$y'' = ca^2e^{ax} + c'b^2e^{bx}. \tag{7}$$

Исключая изъ этихъ трехъ уравненій -1, ce^{ax}, $c'e^{bx}$, получимъ:

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & a & b \\ y'' & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad y''(b-a) + y'(a^2-b^2) + y(ab^2-a^2b) = 0, \tag{8}$$

и дѣля на $b-a$:

$$y'' - (a+b)y' + aby = 0. \tag{9}$$

Примѣры для упражненій.

a) Интегрированіе полныхъ дифференціаловъ.

1) $(3x^2+2bxy-3y^2)dx+(bx^2-6xy+3cy^2)dy$.

2) $\dfrac{(x+y)dx+xdy}{\sqrt{x^2+2xy}}$; 3) $\dfrac{ydx-xdy}{x^2\pm y^2}$.

4) $(y\cos x+2xy^2)dx+(\sin x-a\sin y+2x^2y)dy$.

5) $2x\log\dfrac{y+x}{y-x}dx+\dfrac{2x^2(ydx-xdy)}{y^2-x^2}$.

6) $x^{y-1}ydx+x^y\log xdy$, 7) $\dfrac{xydx+(a^2-x^2)dy}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

8) $\dfrac{ydx}{y+z}+\dfrac{xzdy}{(y+z)^2}-\dfrac{xydz}{(y+z)^2}$. 9) $\dfrac{xdy-xdz+zdx-ydx}{(x-y+z)^2}$.

10) $(2x-3y+4z)dz+(2y-3x-5z)dy+(2z+4x-5y)dz$.

11) $(y+z+w)dx+(z+w+x)dx+(w+x+y)dz+(x+y+z)dw$.

12) $\dfrac{2\sqrt{xy}-z}{2u^2\sqrt{x}}dx+\dfrac{xdy}{2u^2\sqrt{y}}-2\dfrac{x\sqrt{y}-z\sqrt{x}}{u^3}du-\dfrac{\sqrt{x}}{u^2}dz$.

b) Исключеніе произвольныхъ постоянныхъ.

1) $y=Ce^x$; 2) $y=2Cx+C'x^2$; 3) $x^2=Cx+C'y$.

4) $\dfrac{x^2}{a^2+C}+\dfrac{y^2}{b^2+C}-1=0$; 5) $(x-C)^2+(y-C')^2+C''=0$.

6) $y^2-2Cy+x^2=C'^2$; 7) $Cx+C'y=xy$.

8) $(1-x)y=Cx^2+C'x+C''$; 9) $y=e^x(C+C'x+C''x^2)$.

10) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\sin(x+C_4)$.

ГЛАВА III.

Способъ отдѣленія перемѣнныхъ.

43. Интегрированіе уравненій перваго порядка вида:

$$Mdx+Ndy=0, \tag{1}$$

гдѣ M и N суть функціи x и y, возможно непосредственно, когда эти функціи удовлетворяютъ условію:

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0, \tag{2}$$

ибо тогда лѣвая часть уравненія будетъ полный дифференціалъ нѣкоторой функціи u, такъ что уравненіе (1) можетъ быть такъ представлено:

$$du=0, \tag{3}$$

гдѣ u найдётся по правиламъ § 6; интегралъ же уравненія (3), очевидно, будетъ

$$u=C, \tag{4}$$

ибо если дифференціалъ какой-либо функціи равенъ нулю, то эта функція сохраняетъ постоянно свое значеніе, т. е. есть постоянная.

Такъ, если дано уравненіе:

$$(2\alpha x+\beta y+\delta)dx+(\beta x+2\gamma y+\varepsilon)dy=0, \tag{5}$$

то замѣчая, что

$$\frac{\partial(2\alpha x+\beta y+\delta)}{\partial y}=\beta,\ \frac{\partial(\beta x+2\gamma y+\varepsilon)}{\partial x}=\beta,$$

и, слѣд. условіе (2) выполнено, мы будемъ имѣть:

$$(2\alpha x+\beta y+\delta)dx+(\beta x+2\gamma y+\varepsilon)dy=du,$$

и, слѣд.

$$u=\int_0^x(2\alpha x+\beta y+\delta)dx+\int_0^y(2\gamma y+\varepsilon)dy=$$

$$=\alpha x^2+\beta xy+\delta x+\gamma y^2+\varepsilon y;$$

а потому интеграломъ уравненія (5) будетъ такое уравненіе:

$$\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2+\delta x+\varepsilon y=C. \tag{6}$$

44. Условіе (2) пред. § всегда выполнено, когда M есть функція одного x — пусть X, а N функція одного y — пусть Y, ибо тогда каждый членъ лѣвой части (2) тождественно равенъ нулю. Перемѣняя по этому M на X, а N на Y, мы будемъ имѣть уравненіе вида:

$$Xdx+Ydy=0, \tag{1}$$

въ которомъ, какъ говорятъ, перемѣнныя *отдѣлены*. Такое уравненіе интегрируется сразу, и его интеграломъ будетъ:

$$\int_{x_0}^{x} Xdx + \int_{y_0}^{y} Ydy = C, \tag{2}$$

какъ то слѣдуетъ изъ пред. §, и легко провѣряется дифференцированіемъ.

Такъ, если дано уравненіе

$$xdx + ydy = 0, \tag{3}$$

то его интеграломъ будетъ:

$$x^2 + y^2 = C. \tag{4}$$

45. Къ предыдущему виду легко приводится уравненіе вида:

$$XY_1 dx + YX_1 dy = 0, \tag{1}$$

гдѣ X и X_1 функціи одного x, а Y и Y_1 функціи одного y; въ самомъ дѣлѣ, *для отдѣленія* перемѣнныхъ въ этомъ уравненіи стоитъ только раздѣлить первую часть его на произведеніе $X_1 . Y_1$: тогда оно обратится въ такое:

$$\frac{X}{X_1} dx + \frac{Y}{Y_1} dy = 0, \tag{2}$$

въ которомъ перемѣнныя отдѣлены и которое потому будетъ имѣть такой интегралъ:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{X}{X_1} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{Y}{Y_1} dy = C. \tag{3}$$

Такъ, если дано уравненіе

$$\sqrt{1+x^2}\, ydy + x\sqrt{1+y^2}\, dx = 0, \tag{4}$$

то, раздѣляя его на произведеніе $\sqrt{1+x^2} . \sqrt{1+y^2}$, мы будемъ имѣть уравненіе съ отдѣленными перемѣнными:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} dy = 0, \tag{5}$$

интеграломъ котораго будетъ

$$\int_{0}^{x} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} + \int_{0}^{y} \frac{ydx}{\sqrt{1+y^2}} = C, \tag{6}$$

или, выполняя квадратуры:

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x^2} = C. \tag{7}$$

46. Не всегда эти квадратуры выполняются; тѣмъ не менѣе вопросъ объ интегрированія уравненія считается рѣшеннымъ, когда онъ сведенъ къ квадратурамъ, ибо вообще въ математикѣ вопросъ считается рѣшеннымъ, когда онъ приводится къ простѣйшему.

Мы знаемъ, что квадратуры приводятъ насъ часто къ новымъ трансцендентнымъ, свойства которыхъ должны быть изучаемы при помощи особыхъ пріемовъ, исходя изъ самаго опредѣленія функціи выражающимъ её интеграломъ. Для многихъ простѣйшихъ функцій, опредѣляемыхъ дифференціальными уравненіями съ отдѣленными перемѣнными, которыхъ, замѣтимъ, квадратуры представляютъ частный случай:

$$f(x)dx - dy = 0, \tag{1}$$

можно бываетъ, съ помощію особыхъ пріемовъ получить интегралъ, кромѣ трансцендентной формы, еще и въ алгебраической формѣ; сличая обѣ формы интеграловъ, можно бываетъ открыть характернѣйшія свойства этихъ трансцендентныхъ. Въ старину это называлось «сравненіемъ трансцендентныхъ» (comparaison des transcendentes.) Мы приведемъ въ слѣдующихъ §§ простѣйшіе и въ то же время наиболѣе важные примѣры такого сравненія трансцендентныхъ.

47. Пусть дано уравненіе:

$$ydx + xdy = 0; \tag{1}$$

здѣсь условіе (2) § 43 выполнено, ибо $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$; $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$; а потому первая часть есть полный дифференціалъ нѣкоторой функціи u, которая по общему способу интегрированія таковыхъ выраженій найдется $= xy$, такъ что интеграломъ (1) будетъ уравненіе

$$xy = C. \tag{2}$$

Но въ уравненіи (1) перемѣнныя легко и раздѣлить, дѣля первую часть его на xy; оно приметъ тогда такой видъ:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0; \tag{3}$$

въ этомъ видѣ интеграломъ его будетъ уравненіе:

$$\int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^y \frac{dy}{y} = C_1. \tag{4}$$

(Мы принимаемъ $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, ибо здѣсь нельзя интегрировать отъ нуля.) Оба уравненія будутъ опредѣлять ту же самую функцію y отъ x, если опредѣлить надлежащимъ образомъ постоянныя C и C_1. Полагая въ обоихъ $x = 1$ и означая соотвѣтственное значеніе y чрезъ y_1, получимъ изъ (2):

$$y_1 = C, \tag{5}$$

изъ (4):

$$\int_1^{y_1}\frac{dy}{y}=C_1; \tag{6}$$

слѣд.

$$C_1=\int_1^{C}\frac{dy}{y}; \tag{7}$$

вотъ какова должна быть связь между постоянными C и C_1, для того чтобы оба уравненія (2) и (4) давали бы намъ ту же самую функцію y отъ x. Мы знаемъ, что

$$\int_1^{x}\frac{dx}{x}=\log x; \tag{8}$$

съ помощію этого обозначенія будемъ имѣть:

$$\int_1^{y}\frac{dy}{y}=\log y;\quad C_1=\int_1^{C}\frac{dy}{y}=\log C=\log(xy). \tag{9}$$

На основаніи этого уравненіе (4) такъ перепишется:

$$\log x+\log y=\log(xy). \tag{10}$$

Это уравненіе выражаетъ характерное свойство логариѳмической функціи, откуда могутъ быть выведены всѣ другія ея свойства; мы на этомъ однако не будемъ останавливаться, а перейдемъ къ другому примѣру.

48. Пусть дано уравненіе:

$$\sqrt{1-y^2}\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0; \tag{1}$$

въ немъ перемѣнныя отдѣляются сразу чрезъ раздѣленіе на произведеніе $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$, и мы получаемъ уравненіе:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-x^2}}=0, \tag{2}$$

котораго интегралъ будетъ:

$$\int_0^{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_0^{y}\frac{dy}{\sqrt{1-x^2}}=C. \tag{3}$$

Условіе (2) § 43 не выполняется нашимъ уравненіемъ, а потому другого интеграла нельзя получить способомъ, которымъ онъ былъ полученъ въ предыдущемъ примѣрѣ; но его можно получить слѣдующимъ образомъ. Замѣчая, что въ силу самого уравненія (1) y есть функція x, и слѣд. $dy=y'dx$, мы можемъ его представить въ такомъ видѣ:

$$(\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-x^2}\,y')dx=0; \tag{4}$$

интегрируя, мы получимъ:

$$(5) \qquad \int_0^x (\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-x^2}y')dx = C_1.$$

Лѣвая часть этого равенства разбивается на сумму двухъ интеграловъ, которые мы преобразуемъ съ помощію интегрированія по частямъ:

$$\int_0^x \sqrt{1-y^2}dx = x\sqrt{1-y^2}+\int_0^x x\frac{yy'}{\sqrt{1-y^2}}dx; \text{ (полагая } u=\sqrt{1-y^2},\ dv=dx,\text{)}$$

$$\int_0^x \sqrt{1-x^2}y'dx = y\sqrt{1-x^2}+\int_0^x y\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx; \text{ (полагая } u=\sqrt{1-x^2},\ dv=y'dx.\text{)}$$

Складывая эти равенства, получимъ на основаніи (5):

$$(6) \qquad x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}+\int_0^x xy\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{y'}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = C_1,$$

но множитель въ скобкахъ подъ знакомъ интеграла тождественно $=0$, представляя лѣвую часть уравненія (2), раздѣленнаго на dx; а потому это уравненіе (6) принимаетъ такой видъ:

$$(7) \qquad x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C_1.$$

Уравненія (3) и (7) будутъ давать ту же функцію y отъ x, если опредѣлимъ надлежащимъ образомъ постоянныя C и C_1. Полагая въ этихъ уравненіяхъ $x=0$ и обозначая чрезъ y_1 соотвѣтствующее значеніе y, будемъ имѣть:

$$(8) \qquad \int_0^{y_1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=C;$$

$$(9) \qquad y_1=C_1.$$

Если положимъ теперь:

$$(10) \qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x=u; \quad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\arcsin y=v,$$

то будемъ имѣть отсюда:

$$(11) \qquad x=\sin u; \quad \sqrt{1-x^2}=\cos u; \quad y=\sin v; \quad \sqrt{1-y^2}=\cos v;$$

и точно такъ же изъ (8) и (9):

$$(12) \qquad C_1=\sin C=\sin(u+v),$$

ибо по (3):

$$(13) \qquad C=u+v.$$

Внося эти значенія въ (7), будемъ имѣть:

$$(14) \qquad \sin(u+v)=\sin u\cos v+\cos u\sin v.$$

Отсюда при помощи соотношенія:

$$\sin^2 u+\cos^2 u=1, \tag{15}$$

вытекающаго изъ (11), легко получимъ:

$$\cos(u+v)=\cos u\cos v-\sin u\sin v. \tag{16}$$

Обѣ формулы (14) и (16) выражаютъ теорему сложенія для тригонометрическихъ функцій sin и cos, которая здѣсь выведена независимо отъ ихъ опредѣленія, даваемаго въ тригонометріи, а отсюда легко получаются всѣ ихъ главныя свойства. Если положимъ:

$$\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{\pi}{2}, \tag{17}$$

то отсюда будетъ слѣдовать на основаніи (11):

$$\sin\frac{\pi}{2}=1, \quad \cos\frac{\pi}{2}=0; \tag{18}$$

поэтому, полагая въ (14) и (19) $v=\frac{\pi}{2}$, будемъ имѣть:

$$\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right)=\cos u; \quad \cos\left(u+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin u; \tag{19}$$

перемѣняя здѣсь u на $u+\frac{\pi}{2}$, на основаніи этихъ самыхъ равенствъ получимъ:

$$\sin(u+\pi)=-\sin u; \quad \cos(u+\pi)=-\cos u; \tag{20}$$

перемѣняя здѣсь u на $u+\pi$, будемъ имѣть на основаніи ихъ же:

$$\sin(u+2\pi)=\sin u; \quad \cos(u+2\pi)=\cos u. \tag{21}$$

Эти равенства говорятъ намъ, что $\sin u$ и $\cos u$ имѣютъ періодомъ 2π. Чрезъ повторное примѣненіе этихъ формулъ получаемъ болѣе общія, гдѣ m какое угодно цѣлое положительное число:

$$\sin(u+2m\pi)=\sin u; \quad \cos(u+2m\pi)=\cos u. \tag{22}$$

Перемѣняя здѣсь u на $u-2m\pi$, легко убѣждаемся, что въ этихъ формулахъ m можетъ быть какимъ угодно цѣлымъ числомъ, и отрицательнымъ. Вводя функціи

$$\operatorname{tg}u=\frac{\sin u}{\cos u}, \quad \operatorname{cotg}u=\frac{\cos u}{\sin u}, \tag{23}$$

чрезъ раздѣленіе (19), одной на другую, получаемъ:

$$\operatorname{tg}\left(u+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{cotg}u, \tag{24}$$

а чрезъ раздѣленіе (20), одной на другую:

$$\text{(25)}\qquad \mathrm{tg}(u+\pi)=\mathrm{tg}\pi;\qquad \mathrm{cotg}(u+\pi)=\mathrm{cotg}u,$$

изъ которыхъ видно, что обѣ функціи будутъ имѣть періодомъ величину π.

Что π есть Архимедово число (т. е. отношеніе окружности къ діаметру), въ этомъ убѣждаемся, вычисляя длину дуги четверти круга радіуса $=1$:

$$\text{(26)}\qquad x^2+y^2=1,$$

по формулѣ (3) § 273, [I тома, 2-е изд.] по которой будемъ имѣть:

$$\text{(27)}\qquad s=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2},$$

по (17). Изъ выведенныхъ формулъ легко получаются извѣстныя другія; но мы на этомъ не будемъ останавливаться, а переходимъ къ третьему примѣру, котораго разработка дастъ новые для насъ интересные результаты.

49. Положимъ:

$$\text{(1)}\qquad \Delta(x)=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

гдѣ k означаетъ число вещественное, меньшее 1, и составимъ уравненіе

$$\text{(2)}\qquad \Delta(y)dx+\Delta(x)dy=0.$$

Условію (2) § 43 первая часть его не удовлетворяетъ; но перемѣнныя легко отдѣляются чрезъ раздѣленіе на $\Delta(x).\Delta(y)$; тогда оно принимаетъ такой видъ:

$$\text{(3)}\qquad \frac{dx}{\Delta(x)}+\frac{dy}{\Delta(y)}=0,$$

и его интегралъ въ трансцендентной формѣ будетъ:

$$\text{(4)}\qquad \int_0^x\frac{dx}{\Delta(x)}+\int_0^y\frac{dy}{\Delta(y)}=C.$$

Чтобы получить интегралъ уравненія (2) въ другой формѣ, попробуемъ нельзя ли будетъ его проинтегрировать, какъ полный дифференціалъ, по умноженіи на нѣкоторый, пока не опредѣленный, множитель M, функцію отъ x и y. Мы такимъ образомъ употребимъ Эйлеровскій пріемъ интегрированія при посредствѣ интегрирующаго множителя, которому будетъ далѣе посвящена особая глава; здѣсь мы его найдемъ съ помощію пріема, близкаго къ употребленному въ пред. §. Итакъ, пусть по умноженіи на M первой части (2), она обратится въ полный дифференціалъ; тогда мы будемъ лѣвую часть его, т. е. уравненія:

$$\text{(5)}\qquad M(\Delta(y)dx+\Delta(x)dy)=0$$

интегрировать, и получимъ сперва

$$\int_0^x M(\Delta(y)+\Delta(x)y')dx = C_1. \tag{6}$$

Преобразуемъ теперь каждый членъ, на сумму которыхъ разобьется лѣвая часть, по формулѣ интегрированія по частямъ; будемъ имѣть:

$$\int_0^x M\Delta(y)\,dx = [xM\Delta(y)]_0^x - \int_0^x x\frac{d(M\Delta(y))}{dx}dx, \tag{7}$$

(полагая $u = M\Delta(y)$, $dv = dx$);

$$\int_0^x M\Delta(x)y'dx = [yM\Delta(x)]_0^x - \int_0^x y\frac{d(M\Delta(x))}{dx}dx, \tag{8}$$

(полагая $u = M\Delta(x)$, $dv = y'dx$.). Складывая, будемъ имѣть по (6):

$$[xM\Delta(y)+yM\Delta(x)]_0^x - \int_0^x\left[x\frac{d(M\Delta(y))}{dx}+y\frac{d(M\Delta(x))}{dx}\right]dx = C_1. \tag{9}$$

Если приравняемъ выраженіе въ скобкахъ [ ] подъ знакомъ интеграла нулю:

$$x\frac{d(M\Delta(y))}{dx}+y\frac{d(M\Delta(x))}{dx} = 0, \tag{10}$$

и затѣмъ значеніе внѣинтегральнаго члена для нижняго предѣла, которое будетъ постоянное, перенесемъ во вторую часть и скроемъ въ произвольной постоянной, то мы получимъ интегралъ нашего уравненія въ новой формѣ:

$$M(x\Delta(y)+y\Delta(x)) = C', \tag{11}$$

гдѣ M опредѣляется изъ уравненія (10). Прежде всего раскроемъ его; будемъ имѣть:

$$\frac{d(M\Delta(y))}{dx} = \frac{dM}{dx}\Delta y + M\frac{-(1+k^2)y+2k^2y^3}{\Delta(y)}\cdot y'; \tag{12}$$

$$\frac{d(M\Delta(x))}{dx} = \frac{dM}{dx}\Delta x + M\frac{-(1+k^2)x+2k^2x^3}{\Delta(x)}; \tag{13}$$

въ уравненіи (12) можно вмѣсто $\frac{y'}{\Delta(y)}$ написать $\frac{-1}{\Delta(x)}$, какъ то слѣдуетъ изъ (3); тогда, внося отсюда, т. е. изъ (12) и (13), въ (10), мы дадимъ ему (по сокращеніи) такой видъ:

$$\frac{dM}{dx}(x\Delta(y)+y\Delta(x)) - M\frac{2k^2xy(y^2-x^2)}{\Delta(x)} = 0. \tag{14}$$

Это уравненіе представляетъ намъ новый примѣръ такого, въ которомъ перемѣнныя M и x отдѣляются (помня, что y есть функція x); дѣля его на $M[x\Delta(y)+y\Delta(x)]$, мы дадимъ ему такой видъ:

$$\frac{1}{M}\,\frac{dM}{dx}-\frac{2k^2xy(y^2-x^2)}{[x\Delta(y)+y\Delta(x)]\Delta(x)}=0. \tag{15}$$

Помножимъ числителя и знаменателя второго члена на $x\Delta(y)-y\Delta(x)$; тогда оно приметъ такой видъ:

$$\frac{1}{M}\,\frac{dM}{dx}-\frac{2k^2xy(y^2-x^2)\,[x\frac{\Delta(y)}{\Delta(x)}-y]}{x^2(\Delta(y))^2-y^2(\Delta(x))^2}=0. \tag{16}$$

Но по уравненію (3)

$$x\frac{\Delta(y)}{\Delta(x)}-y=-x\frac{dy}{dx}-y=-\frac{d(xy)}{dx}, \tag{17}$$

а по (1) и выводящемуся изъ него чрезъ перемѣну x на y мы найдемъ легко:

$$x^2(\Delta(y))^2-y^2(\Delta(x))^2=(x^2-y^2)\,(1-k^2x^2y^2); \tag{18}$$

внося изъ (17) и (18) въ (16) и сокращая, мы будемъ имѣть:

$$\frac{1}{M}\,\frac{dM}{dx}+\frac{-2k^2xy\frac{d(xy)}{dx}}{1-k^2x^2y^2}=0. \tag{19}$$

Такъ какъ въ каждомъ членѣ въ числителѣ стоитъ производная знаменателя, то, интегрируя, получимъ:

$$\log[M(1-k^2x^2y^2)]=C'', \tag{20}$$

а переходя отъ log къ числу, слѣдующее:

$$M(1-k^2x^2y^2)=e^{C''}. \tag{21}$$

Беря отсюда M и внося въ (11), получимъ, полагая притомъ $C'e^{-C''}=C_0$, слѣдующее:

$$\frac{x\Delta(y)+y\Delta(x)}{1-k^2x^2y^2}=C_0, \tag{22}$$

— интегралъ нашего уравненія въ новой формѣ — алгебраической. Оба уравненія, (4) и (22), будутъ давать ту же функцію y отъ x, если установимъ надлежащую связь между обѣими произвольными постоянными C и C_0. Для этого положимъ въ обоихъ уравненіяхъ $x=0$; обозначая соотвѣтствующее значеніе y чрезъ y_1, будемъ имѣть:

$$\int_0^{y_1}\frac{dy}{\Delta(y)}=C; \tag{23}$$

$$y_1=C_0; \tag{24}$$

отсюда видно, что C_0 будетъ такая же функція отъ C, какъ въ интегралѣ

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta(x)} = u \tag{25}$$

x отъ u, или въ интегралѣ

$$\int_0^y \frac{dy}{\Delta(y)} = v, \tag{26}$$

y отъ v. Этимъ функціямъ дано особое обозначеніе знаменитымъ Якоби. Мы видѣли раньше, что полагая въ (25)

$$x = \sin\varphi, \tag{27}$$

мы будемъ имѣть:

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta(x)} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u, \tag{28}$$

гдѣ

$$\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}; \tag{29}$$

Якоби назвалъ φ амплитудою u, и ввелъ такое обозначеніе:

$$\varphi = \mathrm{am}u, \tag{30}$$

и потому такъ же слѣдующія по (27) и (29):

$$\left.\begin{aligned} x = \sin\varphi = \sin \mathrm{am}u; \\ \sqrt{1-x^2} = \cos\varphi = \cos \mathrm{am}u; \\ \sqrt{1-k^2x^2} = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Delta\varphi = \Delta\,\mathrm{am}u. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Изъ (28) слѣдуетъ, что

$$\frac{d\mathrm{am}u}{du} = \Delta\mathrm{am}u; \tag{32}$$

и потому по правиламъ дифференцированія функцій отъ функцій:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\sin \mathrm{am}u}{du} &= \cos \mathrm{am}u\Delta\mathrm{am}u; \\ \frac{d\cos \mathrm{am}u}{du} &= -\sin \mathrm{am}u\Delta\mathrm{am}u, \\ \frac{d\Delta\mathrm{am}u}{du} &= -k^2\sin \mathrm{am}u\cos \mathrm{am}u. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Вводя обозначенія изъ (25) и (26) въ (4), будемъ имѣть:

$$u+v=C; \tag{34}$$

и [по (23) и (24)]

$$C_0 = \sin(u+v); \tag{35}$$

вводя Якобіевскія обозначенія въ (22), а вмѣсто C_0 его только что написанное выраженіе, будемъ имѣть:

$$(36)\qquad \sin\mathrm{am}(u+v)=\frac{\sin\mathrm{am}u\cos\mathrm{am}v\,\Delta\mathrm{am}v+\sin\mathrm{am}v\cos\mathrm{am}u\,\Delta\mathrm{am}u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}u\sin^2\mathrm{am}v}.$$

Отсюда, пользуясь тѣмъ, что по (31):

$$(37)\qquad \sin^2\mathrm{am}u+\cos^2\mathrm{am}u=1,$$

$$(38)\qquad \Delta^2\mathrm{am}u+k^2\sin^2\mathrm{am}u=1,$$

мы безъ большого труда найдемъ:

$$(39)\qquad \cos\mathrm{am}(u+v)=\frac{\cos\mathrm{am}u\cos\mathrm{am}v-\sin\mathrm{am}u\sin\mathrm{am}v\,\Delta\mathrm{am}u\,\Delta\mathrm{am}v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}u\sin^2\mathrm{am}v}$$

$$(40)\qquad \Delta\mathrm{am}(u+v)=\frac{\Delta\mathrm{am}u\,\Delta\mathrm{am}v-k^2\sin\mathrm{am}u\sin\mathrm{am}v\cos\mathrm{am}u\cos\mathrm{am}v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}u\sin^2\mathrm{am}v}.$$

Такъ какъ при выводѣ этихъ формулъ по указанному способу приходится извлекать квадратный корень, то вопросъ о знакѣ рѣшается съ помощью того соображенія, что при $v=0$ обѣ части формулы (39) обращаются въ $\cos\mathrm{am}u$, а формулы (40) въ $\Delta\mathrm{am}u$.

Если въ (28) перемѣнить φ на $-\varphi$, то какъ по (29) $\Delta(-\varphi)=\Delta\varphi$, мы будемъ имѣть

$$(41)\qquad \int_0^{-\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=-u=-\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

т. е. $\varphi=\mathrm{am}u$ есть нечетная функція отъ u:

$$(42)\qquad \mathrm{am}(-u)=-\mathrm{am}u;$$

а потому будетъ также

$$(43)\qquad \left\{\begin{array}{l}\sin\mathrm{am}(-u)=-\sin\mathrm{am}u;\\ \cos\mathrm{am}(-u)=\cos\mathrm{am}u;\\ \Delta\mathrm{am}(-u)=\Delta\mathrm{am}u.\end{array}\right.$$

Замѣтивъ это, читатель легко получитъ изъ (36), (39) и (40) формулы для функцій $\mathrm{am}(u-v)$, перемѣнивъ на противный знакъ второго члена числителя въ этихъ формулахъ. Комбинируя ихъ различнымъ образомъ, Якоби въ своемъ знаменитомъ сочиненіи «Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum» 1829 г. вывелъ множество другихъ, значительную часть которыхъ читатель найдетъ также и въ моей книгѣ: «Теорія эллиптическихъ интеграловъ и эллиптическихъ функцій». Харьковъ, 1895 г., гдѣ встрѣтитъ самое новѣйшее изложеніе предмета; желающій же дальше идти въ только что указанномъ направленіи можетъ прочесть III-ю книгу *Bertrand, J.* «Calcul intégral». Paris, 1870, гдѣ найдетъ хорошее изложеніе прежней теоріи эллиптическихъ функцій. Въ слѣдующемъ § мы намѣрены только показать, какимъ образомъ можно вывести изъ полученныхъ формулъ двоякую періодичность эллиптическихъ функцій, которая послужила въ 50-ыхъ годахъ Ліувилю исходнымъ пунктомъ для развитія всей теоріи этихъ функцій; его а также и Коши послѣдователями были Briot et Bouquet.

50. Положимъ въ (28) пред. § $\varphi=\frac{\pi}{2}$, и, слѣд. по (27) $x=1$, получимъ постоянную, обозначаемую по Якоби чрезъ K:

$$\int_0^1\frac{dx}{\Delta(x)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=K. \tag{1}$$

Изъ формулъ (31) пред. § для $u=K$ будутъ слѣдовать такія:

$$\sin\operatorname{am}K=1,\quad \cos\operatorname{am}K=0,\quad \Delta\operatorname{am}K=\sqrt{1-k^2}=k', \tag{2}$$

гдѣ k' называется *дополнительнымъ* модулемъ модуля k. Положивъ $v=K$ въ формулахъ (36), (39), (40) пред. § и тѣхъ, которыя получаются изъ нихъ чрезъ перемѣну v на $-v$, мы получимъ на основаніи (2) слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned}\sin\operatorname{am}(u\pm K)&=\pm\frac{\cos\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u};\\ \cos\operatorname{am}(u\pm K)&=\mp k'\frac{\sin\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u};\\ \Delta\operatorname{am}(u\pm K)&=\frac{k'}{\Delta\operatorname{am}u}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Изъ этихъ формулъ вытекаютъ такія:

$$\left.\begin{aligned}\sin\operatorname{am}(u+K)&=-\sin\operatorname{am}(u-K);\\ \cos\operatorname{am}(u+K)&=-\cos\operatorname{am}(u-K);\\ \Delta\operatorname{am}(u+K)&=\Delta\operatorname{am}(u-K).\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Перемѣняя здѣсь u на $u+K$, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}\sin\operatorname{am}(u+2K)&=-\sin\operatorname{am}u;\\ \cos\operatorname{am}(u+2K)&=-\cos\operatorname{am}u;\\ \Delta\operatorname{am}(u+2K)&=\Delta\operatorname{am}u.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Послѣднее равенство говоритъ намъ, что $2K$ будетъ періодомъ $\Delta\operatorname{am}u$; но оно не будетъ періодомъ первыхъ двухъ функцій; но перемѣняя u на $u+2K$ изъ первыхъ двухъ равенствъ (5) на основаніи ихъ же получимъ такія:

$$\left.\begin{aligned}\sin\operatorname{am}(u+4K)&=\sin\operatorname{am}u;\\ \cos\operatorname{am}(u+4K)&=\cos\operatorname{am}u,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

которыя говорятъ, что періодомъ функцій $\sin\operatorname{am}u$ и $\cos\operatorname{am}u$ будетъ величина $4K$. Чрезъ повторное примѣненіе формулъ (5) до m разъ получатся такія, представляющія ихъ обобщеніе:

$$(7)\quad \begin{cases} \sin \mathrm{am}(u+2mK)=(-1)^m \sin \mathrm{am} u; \\ \cos \mathrm{am}(u+2mK)=(-1)^m \cos \mathrm{am} u; \\ \Delta \mathrm{am}(u+2mK)=\Delta \mathrm{am} u. \end{cases}$$

Но эти функціи сверхъ указанныхъ имѣютъ еще каждая другой періодъ мнимый, или комплексный; но прежде чѣмъ это показать, нужно дать опредѣленіе эллиптическихъ функцій для мнимаго, а затѣмъ и комплекснаго аргумента.

51. Перемѣнимъ въ равенствѣ

$$(1)\quad \int_0^x \frac{dx}{\Delta(x)}=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=u$$

x на yi, т. е. примемъ

$$(2)\quad x=yi;$$

тогда будемъ имѣть:

$$(3)\quad \int_0^x \frac{dx}{\Delta(x)}=i\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}}=vi=u,$$

если

$$(4)\quad v=\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}}.$$

Послѣдній интегралъ приведется къ тому же виду, какъ и первый, но только съ дополнительнымъ модулемъ, если положить

$$(5)\quad y=\frac{z}{\sqrt{1-z^2}};$$

такъ что будемъ имѣть

$$(6)\quad v=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}},$$

гдѣ $k'^2=1-k^2$, и слѣд.

$$(7)\quad z=\sin \mathrm{am}(v,k'),$$

гдѣ мы приписываемъ послѣ аргумента и модуль, такъ какъ будемъ теперь разсматривать эллиптическія функціи съ разными модулями. Внося это въ (5), будемъ имѣть:

$$(8)\quad y=\frac{\sin \mathrm{am}(v,k')}{\cos \mathrm{am}(v,k')};$$

на основаніи этого и (3), по которому $u=vi$, равенство (2) даетъ намъ такое соотношеніе:

$$(9)\quad \sin \mathrm{am}(vi,k)=i\frac{\sin \mathrm{am}(v,k')}{\cos \mathrm{am}(v,k')},$$

которое и послужитъ для опредѣленія $\sin \mathrm{am}$ отъ мнимаго аргумента. Внося это въ выраженія $\cos \mathrm{am} u$ и $\Delta \mathrm{am} u$ чрезъ $\sin \mathrm{am} u$, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \cos \mathrm{am}(vi,k) &= \frac{1}{\cos \mathrm{am}(v,k')}; \\ \Delta \mathrm{am}(vi,k) &= \frac{\Delta \mathrm{am}(v,k')}{\cos \mathrm{am}(v,k')}, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

которыя равенства и опредѣлятъ эти функціи для мнимыхъ значеній аргумента. На комплексныя величины наши функціи можно распространить, какъ то и было сдѣлано Абелемъ и Якоби, при помощи теоремы сложенія, выражаемой формулами (36), (39) и (40) § 7, перемѣнивъ тамъ v на vi.

Изъ послѣднихъ трехъ формулъ, такъ какъ

$$\cos \mathrm{am}(K', k') = 0, \qquad (11)$$

гдѣ K' опредѣляется равенствомъ

$$\int_0^1 \frac{dz}{\Delta(z)} = K', \qquad (12)$$

слѣдуетъ, что

$$\sin \mathrm{am}(K'i,k) = \infty, \ \cos \mathrm{am}(K'i,k) = \infty, \ \Delta \mathrm{am}(K'i,k) = \infty \qquad (13)$$

т. е. всѣ три функціи амплитуды обращаются въ безконечность при $u = K'i$. Вслѣдствіе этого въ упомянутыхъ формулахъ сложенія нельзя прямо положить $v = K'i$, ибо получатся результаты вида $\frac{\infty}{\infty}$. Но, помножая равенства (9) и (10) на $\cos \mathrm{am}(v,k')$ и полагая $v = K'$, мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \sin \mathrm{am}(vi,k) \cos \mathrm{am}(v,k') \Big|_{v=K'} &= i, \\ \cos \mathrm{am}(vi,k) \cos \mathrm{am}(v,k') \Big|_{v=K'} &= 1; \\ \Delta \mathrm{am}(vi,k) \cos \mathrm{am}(v,k') \Big|_{v=K'} &= k, \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

такъ какъ $\sin \mathrm{am}(K',k') = 1$, $\Delta \mathrm{am}(K',k') = \sqrt{1-k'^2} = k$. Поэтому, помножая числителя и знаменателя вышеупомянутыхъ формулъ для эллиптическихъ функцій отъ $u \pm vi$, на $\cos^2 \mathrm{am}(v,k')$ и полагая $v = K'$, мы на основаніи (11) и (14) получимъ слѣдующія формулы:

$$\left.\begin{aligned} \sin \mathrm{am}(u \pm K'i) &= \frac{1}{k \sin \mathrm{am} u}; \\ \cos \mathrm{am}(u \pm K'i) &= \mp \frac{i}{k} \frac{\Delta \mathrm{am} u}{\sin \mathrm{am} u}; \\ \Delta \mathrm{am}(u \pm K'i) &= \mp i \frac{\cos \mathrm{am} u}{\sin \mathrm{am} u}. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ:

$$\left\{\begin{aligned} &\sin\mathrm{am}(u+K'i)=\sin\mathrm{am}(u-K'i);\\ &\cos\mathrm{am}(u+K'i)=-\cos\mathrm{am}(u-K'i);\\ &\Delta\mathrm{am}(u+K'i)=-\Delta\mathrm{am}(u-K'i). \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Перемѣняя здѣсь u на $u+K'i$, получимъ:

$$\left\{\begin{aligned} &\sin\mathrm{am}(u+2K'i)=\sin\mathrm{am}u;\\ &\cos\mathrm{am}(u+2K'i)=-\cos\mathrm{am}u;\\ &\Delta\mathrm{am}(u+2K'i)=-\Delta\mathrm{am}u. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Первая изъ этихъ формулъ говоритъ, что величина $2K'i$ будетъ другимъ періодомъ функціи $\sin\mathrm{am}u$. Если во второй изъ этихъ формулъ перемѣнимъ u на $u+2K$, то на основаніи (5) пред. § будемъ имѣть:

$$\cos\mathrm{am}(u+2K+2K'i)=\cos\mathrm{am}u, \tag{18}$$

откуда будетъ слѣдовать, что вторымъ періодомъ этой функціи будетъ комплексная величина $2K+2K'i$. Перемѣняя въ третьей изъ формулъ (17) u на $u+2K'i$, на основаніи ея же получимъ:

$$\Delta\mathrm{am}(u+4K'i)=\Delta\mathrm{am}u, \tag{19}$$

откуда будетъ слѣдовать, что вторымъ періодомъ этой функціи будетъ величина $4K'i$. Итакъ, дѣйствительно, всѣ три эллиптическія функціи суть двоякопеіодическія.

Чрезъ повторное примѣненіе формулы (17) обобщаются въ слѣдующія:

$$\left\{\begin{aligned} &\sin\mathrm{am}(u+2nK'i)=\sin\mathrm{am}u;\\ &\cos\mathrm{am}(u+2nK'i)=(-1)^n\cos\mathrm{am}u;\\ &\Delta\mathrm{am}(u+2nK'i)=(-1)^n\Delta\mathrm{am}u. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Перемѣняя здѣсь u на $u+2mK$, на основаніи равенствъ (7) пред. §, получимъ слѣдующія болѣе общія:

$$\left\{\begin{aligned} &\sin\mathrm{am}(u+2mK+2nK'i)=(-1)^m\sin\mathrm{am}u;\\ &\cos\mathrm{am}(u+2mK+2nK'i)=(-1)^{m+n}\cos\mathrm{am}u;\\ &\Delta\mathrm{am}(u+2mK+2nK'i)=(-1)^n\Delta\mathrm{am}u. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Полагая въ первой изъ этихъ формулъ $u=0$, во второй $u=K$, въ третьей $u=K+K'i$, и во всѣхъ $u=K'i$, мы будемъ имѣть:

$$\left\{\begin{aligned} &\sin\mathrm{am}(2mK+2nK'i)=0;\\ &\cos\mathrm{am}((2m+1)K+2nK'i)=0;\\ &\Delta\mathrm{am}((2m+1)K+(2n+1)K'i)=0;\\ &f\mathrm{am}(2mK+(2n+1)K'i)=\infty. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

гдѣ f означаетъ каждую изъ трехъ функцій sin, cos и Δ. Въ самомъ дѣлѣ, если въ (25) § 49 x сольется съ нижнимъ предѣломъ, то оба u и x будутъ заразъ $=0$, откуда

$$\sin \operatorname{am} 0 = 0; \tag{23}$$

мы уже видѣли, (2) § 50, что

$$\cos \operatorname{am} K = 0; \tag{24}$$

изъ (15) для $u=K$ на основаніи этого слѣдуетъ, что

$$\Delta \operatorname{am}(K \pm K'i) = 0; \tag{25}$$

изъ тѣхъ же равенствъ (15) по (23) слѣдуетъ, полагая $u=0$, что всѣ три функціи обращаются въ безконечность при аргументѣ $=K'i$.

Зная нули и безконечности функцій, можно получить ихъ разложенія на частныя дроби и въ безконечныя произведенія, какъ то можно видѣть изъ нашей статьи: «Разложеніе тригонометрическихъ и эллиптическихъ функцій на частныя дроби и въ безконечныя произведенія.» Харьковъ, 1889 г. (также въ Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества, 2-я серія, т. II. стр. 166) и въ вышеупомянутомъ сочиненіи: «Теорія эллиптическихъ интеграловъ и эллиптическихъ функцій.» Харьковъ, 1895 г., глава X.

52. Сдѣлавъ отступленіе въ область теоріи эллиптическихъ функцій, нельзя пройти молчаніемъ другого вывода алгебраическаго интеграла уравненія вида

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = 0, \tag{1}$$

гдѣ $R(x)$ какой-угодно полиномъ четвертой степени, принадлежащаго *Лагранжу* и основаннаго на особомъ пріемѣ. Но такъ какъ этотъ выводъ для общаго вида полинома $R(x)$ читатель можетъ найти на русскомъ языкѣ въ книгѣ проф. *Д. Деларю:* «Курсъ теоріи дифференціальныхъ уравненій». Харьковъ, 1880 г. стр. 103 (тамъ же, стр. 101, и способъ Эйлера для той же цѣли), то мы можемъ ограничиться примѣненіемъ метода Лагранжа къ выводу теоремы сложенія для эллиптической функціи $\wp(u)$, введенной въ науку *Вейерштрассомъ,* [съ которой читатель можетъ подробнѣе познакомиться изъ вышеназваннаго нашего сочиненія, въ которомъ однако теорема сложенія выведена иначе, именно, изъ теоремы Абеля.] Вейерштрассъ опредѣляетъ свою функцію такимъ образомъ. Пусть

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3, \tag{2}$$

положимъ

$$\int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}} = u; \tag{3}$$

тогда будетъ

$$s = \wp(u) \tag{4}$$

функція отъ u, обращающаяся въ ∞^2 при $u=0$, ибо когда $s=\infty$, тогда $u=0$; что безконечность будетъ второго порядка это доказывается въ теоріи эллиптическихъ функцій при помощи разложенія въ ряды. Пусть теперь дано уравненіе

$$\frac{ds_1}{\sqrt{S_1}} + \frac{ds_2}{\sqrt{S_2}} = 0 \tag{5}$$

съ раздѣленными перемѣнными s_1 и s_2; S_1 и S_2 обозначаютъ результаты вставки s_1 и s_2 вмѣсто s въ формулу (2). Интеграломъ этого уравненія въ трансцендентной формѣ будетъ поэтому:

$$\int_{s_1}^{\infty} \frac{ds_1}{\sqrt{S_1}} + \int_{s_2}^{\infty} \frac{ds_2}{\sqrt{S_2}} = C, \tag{6}$$

или, полагая:

$$\int_{s_1}^{\infty} \frac{ds_1}{\sqrt{S_1}} = u_1; \qquad \int_{s_2}^{\infty} \frac{ds_2}{\sqrt{S_2}} = u_2, \tag{7}$$

слѣдующій:

$$u_1 + u_2 = C. \tag{8}$$

Чтобы получить алгебраическій интегралъ уравненія (5), положимъ, слѣдуя Лагранжу:

$$\frac{ds_1}{\sqrt{S_1}} = -\frac{ds_2}{\sqrt{S_2}} = dt; \tag{9}$$

будемъ имѣть:

$$\frac{ds_1}{dt} = \sqrt{S_1}; \qquad \frac{ds_2}{dt} = -\sqrt{S_2}. \tag{10}$$

Возвышая эти равенства въ квадратъ и вычитая одно изъ другого, въ виду значеній S_1 и S_2, получимъ такое:

$$\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{ds_2}{dt}\right)^2 = 4(s_1^3 - s_2^3) - g_2(s_1 - s_3) = \tag{11}$$

$$= (s_1 - s_2)[4(s_1^2 + s_1 s_2 + s_2^2) - g_2];$$

полагая теперь:

$$s_1 + s_2 = p; \qquad s_1 - s_2 = q; \tag{12}$$

мы будемъ имѣть:

$$\frac{ds_1}{dt} + \frac{ds_2}{dt} = \frac{dp}{dt}; \qquad \frac{ds_1}{dt} - \frac{ds_2}{dt} = \frac{dq}{dt}; \tag{13}$$

слѣд.

$$\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{ds_2}{dt}\right)^2 = \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dq}{dt}; \tag{14}$$

далѣе

$$s_1{}^2+s_2{}^2=\frac{p^2+q^2}{2};\qquad s_1s_2=\frac{p^2-q^2}{4};\tag{15}$$

и слѣд.

$$s_1{}^2+s_2{}^2+s_1s_2=\frac{3p^2+q^2}{4}.\tag{16}$$

Внося изъ второго (12), изъ (14) и (16) вмѣсто лѣвыхъ частей ихъ правыя въ (11), мы будемъ имѣть:

$$\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}=q(3p^2+q^2-g_2).\tag{17}$$

Но, дифференцируя (10) по возвышенiи каждаго въ квадратъ, затѣмъ дѣля первое на $\frac{ds_1}{dt}$, второе на $\frac{ds_2}{dt}$, мы получимъ слѣдующiя два равенства:

$$2\frac{d^2s_1}{dt^2}=12s_1{}^2-g_2;\qquad 2\frac{d^2s_2}{dt^2}=12s_2{}^2-g_2;\tag{18}$$

складывая ихъ и имѣя въ виду, что дифференцированiе перваго изъ (13) даетъ

$$\frac{d^2s_1}{dt^2}+\frac{d^2s_2}{dt^2}=\frac{d^2p}{dt^2},\tag{19}$$

мы получимъ такое равенство:

$$2\frac{d^2p}{dt^2}=12(s_1{}^2+s_2{}^2)-2g_2=6(p^2+q^2)-2g_2.\tag{20}$$

Помножая его, (въ послѣдней формѣ) на q и вычитая изъ произведенiя уравненiе (17), помноженное на 2, мы будемъ имѣть:

$$2q\frac{d^2p}{dt^2}-2\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}=4q^3.\tag{21}$$

Помножимъ это уравненiе на $\frac{1}{q^3}\frac{dp}{dt}$; получимъ въ виду того, что

$$\frac{2}{q^2}\cdot\frac{dp}{dt}\cdot\frac{d^2p}{dt^2}-\frac{2}{q^3}\frac{dq}{dt}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{q^2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2\right),$$

слѣдующее:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{q^2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2\right)=4\frac{dp}{dt}.\tag{22}$$

Помножая это на dt и интегрируя, получимъ:

$$\frac{1}{q^2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2=4p+C',\tag{23}$$

или, дѣля на 4 и полагая $\frac{1}{4}C'=C_1$, слѣдующее:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{q}\frac{dp}{dt}\right)^2=p+C_1. \tag{24}$$

На основаніи первыхъ изъ (12) и (13), затѣмъ (10), по перенесеніи p налѣво, оно преобразуется въ такое:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}{s_1-s_2}\right)^2-s_1-s_2=C_1. \tag{25}$$

Это представляетъ искомый алгебраическій интегралъ дифференціальнаго уравненія (5). При надлежащемъ опредѣленіи произвольныхъ постоянныхъ C и C_1 въ уравненіяхъ (6) и (25) соотвѣтственно, оба уравненія будутъ давать ту же самую функцію s_2 отъ s_1. Если въ (6) принять $s_1=\infty$, то оно приметъ такой видъ:

$$\int_{s_2^{(1)}}^{\infty}\frac{ds_2}{\sqrt{S_2}}=C, \tag{26}$$

гдѣ $s_2^{(1)}$ соотвѣтственное значеніе перемѣнной s_2. Если положимъ $s_1=\infty$ въ уравненіи (25), то лѣвая часть его приметъ неопредѣленный видъ $\infty-\infty$; эту неопредѣленность можно раскрыть слѣдующимъ образомъ. Мы имѣемъ, умножая числителя и знаменателя на сопряженное числителю выраженіе:

$$\frac{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}{s_1-s_2}=\frac{(S_1-S_2):(s_1-s_2)}{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}=\frac{4(s_1{}^2+s_1s_2+s_2{}^2)-g_2}{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}; \tag{27}$$

а это послѣднее выраженіе можно такъ представить:

$$\frac{4s_1{}^2\left(1+\frac{s_2}{s_1}+\frac{s_2{}^2-\frac{1}{4}g_2}{s_1{}^2}\right)}{2s_1{}^{\frac{3}{2}}\left[\sqrt{1-\frac{g_2}{4s_1{}^2}-\frac{g_3}{4s_1{}^3}}+\frac{1}{2}s_1{}^{-\frac{3}{2}}\sqrt{S_2}\right]}=2s_1{}^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1+\frac{s_2}{s_1}+\frac{s^2{}_2-\frac{1}{4}g_2}{s_1{}^2}}{\sqrt{1-\frac{g_2}{4s_1{}^2}-\frac{g_3}{4s_1{}^3}}+\frac{1}{2}s_1{}^{-\frac{3}{2}}\sqrt{S_2}}=$$

$$=2s_1{}^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{s_2}{s_1}+\frac{1}{s_1{}^2}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{s_1}\right)\right), \tag{28}$$

гдѣ $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{s_1}\right)$ означаетъ рядъ, расположенный по восходящимъ степенямъ величины $\frac{1}{s_1}$, сходящійся для очень большихъ значеній s_1. Итакъ, имѣемъ отсюда:

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}{s_1-s_2}=s_1{}^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{s_2}{s_1}+\frac{1}{s_1{}^2}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{s_1}\right)\right). \tag{29}$$

Внося это въ (25), получимъ слѣдующее:

$$s_1\left(1+2\frac{s_2}{s_1}+\frac{1}{s_1^{\,2}}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{s_1}\right)\right)-s_1-s_2=C_1, \tag{30}$$

гдѣ $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{s_1}\right)$ имѣетъ тотъ же смыслъ. Это равенство по сокращенiи принимаетъ такой видъ:

$$s_2+\frac{1}{s_1}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{s_1}\right)=C_1; \tag{31}$$

полагая здѣсь $s_1=\infty$, мы получимъ.

$$s_2^{(1)}=C_1, \tag{32}$$

такъ какъ второй членъ лѣвой части, очевидно, обратится въ нуль. Но изъ (26) слѣдуетъ, что

$$s_2^{(1)}=\wp(C); \tag{33}$$

а потому получаемъ такое соотношенiе между постоянными:

$$C_1=\wp(C). \tag{34}$$

Внося сюда вмѣсто C и C_1 ихъ значенiя изъ (8) и (25), будемъ имѣть:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}{s_1-s_2}\right)^2-s_1-s_2=\wp(u_1+u_2). \tag{35}$$

Но изъ (7), въ виду $s_1=\wp(u_1)$, $s_2=\wp(u_2)$, имѣемъ:

$$\frac{ds_1}{du_1}=\wp'(u_1)=-\sqrt{S_1};\quad \frac{ds_2}{du_2}=\wp'(u_2)=-\sqrt{S_2}; \tag{36}$$

потому (35) принимаетъ окончательно такой видъ:

$$\wp(u_1+u_2)=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u_1)-\wp'(u_2)}{\wp(u_1)-\wp(u_2)}\right)^2-\wp(u_1)-\wp(u_2). \tag{37}$$

Это равенство выражаетъ теорему сложенiя для Вейерштрассовской функцiи $\wp(u)$: эта функцiя для $u=u_1+u_2$, т. е. отъ суммы двухъ аргументовъ, выражается рацiонально чрезъ таковыя функцiи и ихъ производныя перваго порядка отъ каждаго изъ слагаемыхъ аргументовъ. Для дальнѣйшихъ подробностей совѣтуемъ обратиться къ нашему вышеуказанному сочиненiю по теорiи эллиптическихъ функцiй.

53. Послѣ уравненiй, въ которыхъ перемѣнныя отдѣляются непосредственно, какъ въ §§ 44—45, мы должны разсмотрѣть тѣ, въ которыхъ отдѣленiе перемѣнныхъ становится возможнымъ послѣ нѣкотораго преобразованiя. Къ такимъ уравненiямъ относятся прежде всего *однородныя* уравненiя. Такъ называется уравненiе

$$Mdx + Ndy = 0, \tag{1}$$

когда M и N однородныя функціи одинаковаго измѣренія n. Въ этомъ случаѣ, какъ извѣстно, они могутъ бы такъ представлены:

$$M = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad N = x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right); \tag{2}$$

раздѣляя въ такомъ случаѣ уравненіе (1) на x^n, мы приведемъ его къ такому виду:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0. \tag{3}$$

Положимъ здѣсь:

$$\frac{y}{x} = u; \tag{4}$$

будемъ имѣть:

$$y = xu, \quad \text{и слѣд.:} \quad dy = udx + xdu; \tag{5}$$

внося это въ (3), мы дадимъ ему такой видъ:

$$[\varphi(u) + u\psi(u)]dx + x\psi(u)du = 0; \tag{6}$$

въ этомъ уравненіи перемѣнныя отдѣляются по способу, указанному въ § 45, и мы будемъ имѣть такое уравненіе:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(u)du}{\varphi(u) + u\psi(u)} = 0. \tag{7}$$

интеграломъ котораго будетъ

$$\log x + \int_{u_0}^{u} \frac{\psi(u)du}{\varphi(u) + u\psi(u)} = C; \tag{8}$$

по выполненіи квадратуры, останется исключить съ помощью (4) вспомогательную перемѣнную u, чтобы получить соотношеніе между x и y, представляющее интегралъ даннаго уравненія.

Пусть дано для I-го примѣра такое уравненіе:

$$(x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0, \tag{9}$$

въ которомъ M и N суть однородныя функціи 2-го измѣренія; раздѣляя его потому на x^2 и дѣлая положеніе (4), на основаніи (5) приведемъ его къ такому виду:

$$(1 - u^2)(udx + xdu) - 2udx = 0,$$

или

$$(u - u^3 - 2u)dx + x(1 - u^2)du = 0.$$

и отдѣляя перемѣнныя послѣ очевиднаго упрощенія:

$$\frac{dx}{x} - \frac{1 - u^2}{u(1 + u^2)} du = 0; \tag{10}$$

интегрируя, будемъ имѣть:

$$\log x - \int \frac{1-u^2}{u(1+u^2)} du = C'. \qquad (11)$$

Такъ какъ

$$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)} = \frac{1+u^2-2u^2}{u(1+u^2)} = \frac{1}{u} - \frac{2u}{1+u^2},$$

то

$$\int \frac{1-u^2}{u(1+u^2)} du = \log u - \log(1+u^2) = \log \frac{u}{1+u^2}; \qquad (12)$$

произвольную постоянную не пишемъ, ибо она сольется съ C' послѣ постановки изъ (12) въ (11). Выполняя её, будетъ имѣть:

$$\log x - \log u + \log(1+u^2) = C', \qquad (13)$$

и переходя отъ log къ числу:

$$\frac{x(1+u^2)}{u} = C, \qquad (14)$$

гдѣ $C = e^{C'}$. Вставляя сюда вмѣсто u его значеніе изъ (4) и, по сокращеніи, приводя къ одному знаменателю и перенося всё налѣво, получимъ:

$$x^2 + y^2 - Cy = 0. \qquad (15)$$

II-й примѣръ. Пусть дано уравненіе:

$$(x - \sqrt{xy} - y)dx + \sqrt{xy}\, dy = 0, \qquad (16)$$

коэффиціенты котораго суть однородныя функціи 1-го измѣренія. Полагая $y = xu$, слѣд. $dy = xdu + udx$, по раздѣленіи на x, получимъ:

$$(1 - \sqrt{u} - u)dx + \sqrt{u}(xdu + udx) = 0,$$

или

$$(1 - \sqrt{u} - u + u\sqrt{u})dx + x\sqrt{u}\, du = 0,$$

и отдѣляя перемѣнныя:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\sqrt{u}\, du}{1 - \sqrt{u} - u + u\sqrt{u}} = 0. \qquad (2)$$

Полагая здѣсь $\sqrt{u} = t$, слѣд. $u = t^2$ и $du = 2tdt$, мы будемъ имѣть:

$$\frac{dx}{x} + \frac{2t^2dt}{1 - t - t^2 + t^3} = 0, \qquad (3)$$

котораго интеграломъ будетъ:

$$\log x + \int \frac{2t^2dt}{1 - t - t^2 + t^3} = C. \qquad (4)$$

Квадратура здѣсь легко выполняется, послѣ чего будемъ имѣть:

$$\log x - \frac{1}{t-1} + \frac{3}{2}\log(t-1) + \frac{1}{2}\log(t+1) = C,$$

или, преобразуя послѣдніе два члена:

(5) $$\log x + \log(t-1) + \frac{1}{2}\log(t^2-1) - \frac{1}{t-1} = C.$$

Но $t = \sqrt{u} = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$; внося это сюда, получимъ:

$$\log x + \log\left(\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{y-x}{x}\right) - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}} = C,$$

или

(6) $$\log\left[(\sqrt{y}-\sqrt{x})\sqrt{y-x}\right] - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}} = C,$$

а переходя отъ логариѳма къ числу:

(7) $$(\sqrt{y}-\sqrt{x})\sqrt{y-x} = C' e^{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}},$$

гдѣ $C' = e^C$. Провѣрку предлагаемъ читателю, въ качествѣ примѣра для упражненія въ составленіи дифференціальныхъ уравненій чрезъ исключеніе произвольныхъ постоянныхъ.

54. Къ однородному легко приводится уравненіе

(1) $$(ax+by+c)dx + (a'x+b'y+c')dy = 0,$$

въ которомъ коэффиціенты при dx и dy суть линейныя функціи перемѣнныхъ x и y. Положимъ съ этою цѣлью:

(2) $$x = x_1 + \alpha, \quad y = y_1 + \beta,$$

гдѣ x_1 и y_1 новыя перемѣнныя, а α и β пока неопредѣленныя постоянныя величины. Подставляя это въ (1) и полагая:

(3) $$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0, \\ a'\alpha + b'\beta + c' = 0, \end{cases}$$

мы получимъ однородное уравненіе:

(4) $$(ax_1 + by_1)dx_1 + (a'x_1 + b'y_1)dy_1 = 0,$$

интегралъ котораго найдется по способу предыдущаго §; если онъ будетъ

(5) $$f(x_1, y_1) = C,$$

то подставляя сюда вмѣсто x_1 и y_1 ихъ значенія изъ (2), будемъ имѣть интегралъ уравненія (1):

(6) $$f(x-\alpha, y-\beta) = C,$$

если подъ α и β будемъ разумѣть рѣшенія уравненій (3). Эти уравненія всегда рѣшимы, когда опредѣлитель:

(7) $$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = (ab' - a'b) \neq 0,$$

(не равенъ нулю), ибо мы получимъ тогда для α и β конечныя и опредѣленныя величины. Если же это условіе не выполнено, тогда указанный пріемъ не примѣнимъ и долженъ быть замѣненъ другимъ. Если

$$ab'-a'b=0. \tag{8}$$

то отсюда будемъ имѣть:

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=k; \tag{9}$$

на основаніи этого предложенное уравненіе (1) можетъ быть такъ представлено:

$$(ax+by+c)dx+[k(ax+by)+c']dy=0; \tag{10}$$

положимъ

$$ax+by=z; \tag{11}$$

дифференцируя это равенство, будемъ имѣть:

$$adx+bdy=dz; \tag{12}$$

исключая y и dy съ помощію (11) и (12) изъ (10), будемъ имѣть:

$$(z+c)dx+(kz+c')\frac{1}{b}(dz-adx)=0, \tag{13}$$

или

$$[b(z+c)-a(kz+c')]dx+(kz+c')dz=0. \tag{14}$$

Въ этомъ уравненіи перемѣнныя легко отдѣляются, и оно приводится къ такому:

$$dx+\frac{(kz+c')dz}{b(z+c)-a(kz+c')}=0. \tag{15}$$

интеграломъ котораго будетъ:

$$x+\int\frac{(kz+c')dz}{(b-ak)z+bc-ac'}=C; \tag{16}$$

квадратура эта легко выполняется и въ общемъ видѣ; но мы на этомъ не будемъ останавливаться. Найдя интегралъ, мы должны подставить въ него вмѣсто z его значеніе изъ (11) и тогда будемъ имѣть интегралъ уравненія (1).

Рѣшеніе системы (3) получитъ неопредѣленный видъ, если кромѣ (8) будетъ имѣть мѣсто также такое

$$ac'-a'c=0, \tag{17}$$

изъ котораго будетъ слѣдовать:

$$\frac{a'}{a}=\frac{c'}{c}=k; \tag{18}$$

но въ этомъ случаѣ уравненіе (1) можетъ быть представлено такъ:

$$(ax+by+c)(dx+kdy)=0; \tag{19}$$

ему можно удовлетворить, полагая или:

(20) $$ax+by+c=0,$$
или
(21) $$dx+kdy=0.$$

Въ послѣднемъ перемѣнныя отдѣлены, и оно интегрируется тотчасъ:

(22) $$x+ky=C.$$

Первое вообще не будетъ интеграломъ уравненія (19), такъ какъ, дифференцируя его, получаемъ:

(23) $$adx+bdy=0;$$

слѣд. будемъ имѣть $\frac{dy}{dx}=-\frac{a}{b}$, что вообще не будетъ $=-\frac{1}{k}$, какъ оно должно быть по данному дифференціальному уравненію въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ. Вообще, слѣдовательно, $ax+by+c$ будетъ множитель посторонній данному дифференціальному уравненію; оно будетъ частнымъ интеграломъ, когда $b=a'$, ибо тогда $\frac{b}{a}=k$ по (18), и (20) содержится въ (22).

Въ общемъ случаѣ уравненіе (1) можетъ быть приведено къ линейному еще и такимъ способомъ. Положимъ

(24) $$ax+by+c=x_1; \quad a'x+b'y+c'=y_1;$$

тогда будемъ имѣть:

$$adx+bdy=dx_1; \quad a'dx+b'dy=dy_1,$$

откуда найдемъ:

(25) $$dx=\frac{b'dx_1-bdy_1}{ab'-a'b}; \quad dy=\frac{-a'dx_1+ady_1}{ab'-a'b};$$

внося изъ (24) и (25) въ (1), будемъ имѣть однородное уравненіе:

(26) $$(b'x_1-a'y_1)dx_1+(ay_1-bx_1)dx_1=0;$$

проинтегрировавъ его и подставивъ въ интегралъ вмѣсто x_1 и y_1 ихъ выраженія изъ (24), будемъ имѣть интегралъ даннаго уравненія, (1). Этотъ способъ также не приложимъ, какъ и первый, когда $ab'-a'b=0$, какъ то слѣдуетъ изъ формулъ (25).

Для примѣра возьмемъ уравненіе:

(27) $$(2x+8)dx+(3y-5x-11)dy=0.$$

Полагая здѣсь

(28) $$x=x_1+\alpha, \quad y=y_1+\beta,$$

получимъ:

(28) $$(2x_1+2\alpha+8)dx_1+(3y_1-5x_1+3\beta-5\alpha-11)dy_1=0;$$

полагая

(29) $$2\alpha+8=0, \quad 3\beta-5\alpha-11=0,$$

получимъ отсюда

$$\alpha = -4, \quad \beta = -3, \tag{30}$$

и приведемъ уравненіе (28) къ виду:

$$2x_1 dx_1 + (3y_1 - 5x_1) dy_1 = 0, \tag{31}$$

или, раздѣляя на x_1 и полагая $\frac{y_1}{x_1} = u$ и, слѣд. $dy_1 = u dx_1 + x_1 du$:

$$2dx_1 + (3u - 5)(u dx_1 + x_1 du) = 0,$$

или

$$(3u^2 - 5u + 2) dx_1 + (3u - 5) x_1 du = 0. \tag{32}$$

Отдѣляя перемѣнныя и интегрируя, получимъ:

$$\log x_1 + \int \frac{(3u - 5) du}{3u^2 - 5u + 2} = C. \tag{33}$$

Входящая сюда квадратура легко находится; мы имѣемъ:

$$3u^2 - 5u + 2 = 3u^2 - 3u - 2u + 2 = (3u - 2)(u - 1);$$

слѣд.

$$\frac{3u - 5}{3u^2 - 5u + 2} = \frac{A}{u - 1} + \frac{B}{u - \frac{2}{3}} = -\frac{2}{u - 1} + \frac{3}{u - \frac{2}{3}},$$

и потому

$$\int \frac{(3u - 5) du}{3u^2 - 5u + 2} = -2 \int \frac{du}{u - 1} + 3 \int \frac{du}{u - \frac{2}{3}} = \log \frac{\left(u - \frac{2}{3}\right)^3}{(u - 1)^2}; \tag{34}$$

внося это въ (33), получимъ:

$$\log \frac{x_1 \left(u - \frac{2}{3}\right)^3}{(u - 1)^2} = C, \tag{35}$$

откуда найдемъ:

$$\frac{x_1 (3u - 2)^3}{(u - 1)^2} = C'; \tag{36}$$

полагая $C' = 27e^C$. Внося сюда $\frac{y_1}{x_1}$ вмѣсто u, получимъ:

$$\frac{(3y_1 - 2x_1)^3}{(y_1 - x_1)^2} = C'; \tag{37}$$

внося сюда вмѣсто x_1 и y_1 ихъ значенія изъ (28) и (30), именно:

$$x_1 = x - \alpha = x + 4; \qquad y_1 = y - \beta = y + 3, \tag{38}$$

мы получимъ окончательно, по освобожденіи отъ знаменателя:

$$(3y - 2x + 1)^3 - C'(y - x - 1)^2 = 0. \tag{39}$$

55. Разсмотрѣнныя въ предыдущемъ § уравненія могутъ быть приведены и помимо однородныхъ къ такому виду, что перемѣнныя отдѣлятся; для этого стоитъ только положить, какъ то показалъ проф. В. П. Ермаковъ *):

$$(1)\qquad \frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}=z,$$

послѣ чего уравненіе (1) пред. § приметъ такой видъ:

$$(2)\qquad zdx+dy=0.$$

Подставляя сюда вмѣсто dy его значеніе, получаемое чрезъ дифференцированіе выраженія y чрезъ x и z изъ (1):

$$(3)\qquad y=\frac{(a'x+c')z-ax-c}{b-b'z},$$

именно:

$$(4)\qquad dy=\frac{a'z-a}{b-b'z}dx+\frac{b(a'x+c')-b'(ax+c)}{(b-b'z)^2}dz,$$

мы получимъ:

$$(5)\qquad \left(z+\frac{a'z-a}{b-b'z}\right)dx+\frac{b(a'x+c')-b'(ax+c)}{(b-b'z)^2}dz=0.$$

Въ этомъ уравненіи перемѣнныя отдѣляются, и мы будемъ имѣть такой интегралъ:

$$(6)\qquad \int\frac{dx}{(a'b-ab')x+bc'-b'c}+\int\frac{dz}{(b'z-b)[b'z^2-(b+a')z+a]}=C.$$

Въ случаѣ, когда имѣетъ мѣсто уравненіе (8) § 54, первая квадратура упрощается, ибо знаменатель приводится къ постоянной $bc'-b'c$. Если же выполнено эквивалентное ему условіе (9) и, кромѣ того, (18) того же § 54, то будетъ также $bc'-b'c=0$, и знаменатель обратится въ нуль, такъ что формула (6) теряетъ силу; но тогда $z=\frac{1}{k}$, т. е. постоянной, и уравненіе (2) интегрируется непосредственно, и мы получимъ:

$$(7)\qquad \frac{1}{k}x+y=C',$$

что, по умноженіи на k, приметъ видъ (22) § 54.

Пояснимъ эту методу на томъ же примѣрѣ (взятомъ нами изъ книги проф. Ермакова):

$$(8)\qquad (2x+8)dx+(3y-5x-11)dy=0.$$

Положимъ

$$(9)\qquad \frac{3y-5x-11}{x+4}=z,$$

откуда получимъ:

---

*) *В. П. Ермаковъ.* Дифференціальныя уравненія перваго порядка. Кіевъ, 1887. Стр. 30.

$$y=\frac{(x+4)z+5x+11}{3} \quad \text{и} \quad dy=\frac{(z+5)dx+(x+4)dz}{3};$$

уравненіе (8) обратится тогда въ такое:

$$\left(2+\frac{z^2+5z}{3}\right)dx+\frac{(x+4)z\,dz}{3}=0, \tag{11}$$

а по отдѣленіи перемѣнныхъ — въ такое:

$$\frac{dx}{x+4}+\frac{z\,dz}{z^2+5z+6}=0; \tag{12}$$

интегрируя, получимъ:

$$\log(x+4)-2\log(z+2)+3\log(z+3)=\log C, \tag{13}$$

и, переходя отъ log къ числу, — слѣдующее:

$$\frac{(x+4)(z+3)^3}{(z+2)^2}=C. \tag{14}$$

Подставляя сюда вмѣсто z его значеніе изъ (9), получимъ уравненіе (39) пред. §.

Проф. В. П. Ермаковъ примѣняетъ*) ту же методу къ уравненію вида

$$(ax+by+c)dx+(a'x+b'y+c')dy+mx(xdy-ydx)=0, \tag{15}$$

полагая этотъ разъ

$$\frac{ax+by+c-mxy}{a'x+b'y+c'+my^2}=z, \tag{16}$$

и къ уравненію (15) сводитъ и уравненіе Якоби (Jacobi):

$$(ax+by+c)dx+(a'x+b'y+c')dy+(a''x+b''y+c'')(xdy-ydx)=0. \tag{17}$$

Интересующихся этимъ предметомъ отсылаемъ къ его вышеупомянутому сочиненію. Способъ Якоби см. Journal v. Crelle, Bd. XXIV, S. 1 — 4. или его Werke, Bd. IV. S. 257 — 262. См. также *Serret J. A.* Cours de calcul dif. et int. Paris, 1868. T. II. p. 425. *Деларю* примѣняетъ способъ Миндинга къ уравненію Якоби (см. стр. 91 вышеупомянутаго его сочиненія), *Алексѣевъ* способъ интегрирующаго множителя. (См. его «Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій. Вып. I. Москва, 1878 г. стр. 59 и слѣд.).

56. Существуютъ нѣкоторыя неоднородныя уравненія, которыя приводятся къ однороднымъ чрезъ перемѣну искомой функціи на другую, или обѣихъ перемѣнныхъ на другія. Такъ, нѣкоторыя уравненія приводятся къ однороднымъ, полагая

$$y=\frac{1}{z}. \tag{1}$$

---

*) Въ томъ же сочиненіи (стр. 32).

Таково, напр. уравненіе

$$(a^2+xy)dy-xy^3dx=0. \tag{2}$$

Изъ (1) имѣемъ: $dy=-\frac{dz}{z^2}$; подставляя это и значеніе y изъ (1), по умноженіи всего на $-z^3$, будемъ имѣть:

$$(a^2z+x)dz+xdx=0, \tag{3}$$

уравненіе однородное 1-го измѣренія.

Уравненіе вида

$$x^m(aydx+bxdy)+y^n(a'ydx+b'xdy)=0 \tag{4}$$

приводится къ однородному въ новыхъ перемѣнныхъ, полагая

$$x^m=\xi, \quad y^n=\eta; \tag{5}$$

отсюда чрезъ логариѳмическое дифференцированіе получаемъ:

$$m\frac{dx}{x}=\frac{d\xi}{\xi}; \quad n\frac{dy}{y}=\frac{d\eta}{\eta}; \tag{6}$$

но, раздѣляя (4) на произведеніе xy, мы дадимъ ему такой видъ:

$$x^m\left(a\frac{dx}{x}+b\frac{dy}{y}\right)+y^n\left(a'\frac{dx}{x}+b'\frac{dy}{y}\right)=0, \tag{7}$$

а это на основаніи (5) и (6) приведется къ такому:

$$\xi\left(\frac{a}{m}\frac{d\xi}{\xi}+\frac{b}{n}\frac{d\eta}{\eta}\right)+\eta\left(\frac{a'}{m}\frac{d\xi}{\xi}+\frac{b'}{n}\frac{d\eta}{\eta}\right)=0, \tag{8}$$

или, группируя иначе члены:

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{a'}{m}\frac{\eta}{\xi}\right)d\xi+\left(\frac{b}{n}\frac{\xi}{\eta}+\frac{b'}{n}\right)d\eta=0, \tag{9}$$

гдѣ налѣво мы имѣемъ при дифференціалахъ однородные коэффиціенты нулевого измѣренія.

57. Есть еще классъ уравненій, которыя дѣлаются однородными чрезъ подстановку:

$$y=\eta^\alpha \tag{1}$$

при надлежащемъ опредѣленіи показателя α. Такія уравненія проф. Ермаковъ называетъ *обобщенными однородными уравненіями*. Въ однородныхъ уравненіяхъ, коэффиціенты которыхъ при дифференціалахъ x и y суть однородныя функціи этихъ перемѣнныхъ степени m, послѣ подстановки tx и ty вмѣсто x и y, гдѣ t постоянное, можно вывести за скобки t^{m+1}; уравненіе будетъ обобщеннымъ однороднымъ, если это возможно будетъ сдѣлать послѣ подстановки (1), опредѣливъ надлежащимъ образомъ показатель α. Мы это поясримъ на примѣрѣ, заимствованномъ изъ вышеупомянутаго сочиненія проф. Ермакова. Пусть дано уравненіе:

$$xydx-(x^2+y^4)dy=0; \tag{2}$$

полагая здѣсь

$$y=z^\alpha,\quad \text{и слѣд. } dy=\alpha z^{\alpha-1}dz, \tag{3}$$

мы будемъ имѣть:

$$xz^\alpha dx-(x^2+z^{4\alpha})\alpha z^{\alpha-1}dz=0. \tag{4}$$

Подставивъ здѣсь tx и tz вмѣсто x и z соотвѣтственно, гдѣ t постоянное, мы получимъ:

$$t^{\alpha+2}[xz^\alpha dx-(x^2+t^{4\alpha-2}z^{4\alpha})\alpha z^{\alpha-1}dz]=0; \tag{5}$$

нужно опредѣлить теперь α такъ, чтобы t ушло изъ выраженія въ скобкахъ [ ]; этого мы достигнемъ, положивъ

$$4\alpha-2=0, \tag{6}$$

откуда найдемъ

$$\alpha=\frac{1}{2}; \tag{7}$$

при этомъ значеніе α, останется только $t^{\alpha+2}$ за скобками; отбрасывая его, мы будемъ имѣть уравненіе:

$$xz^{\frac{1}{2}}dx-(x^2+z^2)\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz=0, \tag{8}$$

однородное $\frac{3}{2}$ измѣренія въ коэффиціентахъ. Помножая его на $2z^{\frac{1}{2}}$ во избѣжаніе дробей, получимъ уравненіе:

$$2xzdx-(x^2+z^2)dz=0, \tag{9}$$

коэффиціенты котораго будутъ 2-го измѣренія. Интеграломъ его будетъ уравненіе:

$$x^2-y^4-Cy^2=0, \tag{10}$$

что читатель можетъ найти самъ, примѣняя способъ § 53.

58. Мы достигли возможности отдѣленія перемѣнныхъ въ однородныхъ уравненіяхъ, разбивая, такъ сказать, y на произведеніе двухъ множителей, изъ которыхъ одинъ былъ независимая перемѣнная x, другой новая функція. Этотъ пріемъ разложенія y на произведеніе двухъ функцій, но изъ которыхъ вообще ни одна не приводится къ x, а обѣ неизвѣстныя, позволитъ намъ проинтегрировать другой классъ уравненій, такъ называемыхъ *линейныхъ*, которыя поэтому естественно разсматривать послѣ однородныхъ.

Уравненіе называется *линейнымъ*, когда оно первой степени не только относительно производной y по x, но и относительно самой искомой функціи y; слѣд. оно вида:

$$y'+Py-Q=0, \tag{1}$$

или, какъ его чаще пишутъ:

$$y'+Py=Q. \tag{2}$$

Мы положимъ

$$y=u.v, \tag{3}$$

и слѣд.

$$y'=u'v+uv'; \tag{4}$$

внося это во (2), будемъ имѣть:

$$(u'+Pu)v+uv'=Q. \tag{5}$$

Намъ нужно опредѣлить двѣ функціи u и v; поэтому нужно имѣть два уравненія; одно мы уже имѣемъ, другое выберемъ такъ, чтобы первое упростилось, именно, чтобы въ немъ сдѣлалось возможнымъ отдѣленіе перемѣнныхъ. Этого мы достигнемъ, положивъ

$$u'+Pu=0, \tag{6}$$

вслѣдствіе чего уравненіе (5) обратится въ такое:

$$uv'=Q. \tag{7}$$

Опредѣливъ изъ перваго u и подставивъ во второе, мы найдемъ изъ него v, а слѣд. будемъ по (3) знать y. Въ уравненіи (6) перемѣнныя отдѣляются, и, помножая его на dx, мы будемъ имѣть:

$$\frac{du}{u}+Pdx=0, \tag{8}$$

откуда, интегрируя, получимъ:

$$\log u+\int_{x_0}^{x} Pdx=\log C' \tag{9}$$

(ибо всегда можно такъ представить произвольную постоянную). Переходя отъ log къ числу, найдемъ отсюда:

$$u=C'e^{-\int_{x_0}^{x} Pdx}. \tag{10}$$

Внося это въ (7) и помножая на dx, будемъ имѣть:

$$C'e^{-\int_{x_0}^{x} Pdx}\,dv=Qdx. \tag{11}$$

Въ этомъ уравненіи перемѣнныя отдѣляются, и мы получимъ такое:

$$dv=\frac{1}{C'}Qe^{\int_{x_0}^{x} Pdx}\,dx; \tag{12}$$

интегрируя, будемъ имѣть:

$$v=\frac{1}{C'}\int_{x_0}^{x} Qe^{\int_{x_0}^{x} Pdx}\,dx+C''. \tag{13}$$

Внося изъ (10) и (13) въ (3), получимъ:

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} Pdx}\left[\int_{x_0}^{x} Qe^{\int_{x_0}^{x} Pdx} dx + C\right], \tag{14}$$

гдѣ $C'C'' = C$. Мы видимъ отсюда, что въ (10) можно было бы принять $C' = 1$, ибо результатъ получился бы тотъ же самый, что и теперь; на практикѣ такъ обыкновенно и дѣлаютъ.—Предлагаемъ провѣрить это рѣшеніе, исключивъ произвольную постоянную C.

Пояснимъ эту методу примѣромъ. Пусть дано уравненіе:

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3. \tag{15}$$

Полагая $y = uv$, и слѣд. $y' = u'v + v'u$, мы будемъ имѣть:

$$\left(u' - \frac{2u}{x+1}\right)v + uv' = (x+1)^3; \tag{16}$$

сдѣлаемъ

$$u' - \frac{2u}{x+1} = 0; \tag{17}$$

тогда уравненіе (16) приведется къ такому:

$$uv' = (x+1)^3. \tag{18}$$

Но уравненіе (17) представляется по отдѣленіи перемѣнныхъ такъ:

$$\frac{du}{u} - \frac{2dx}{x+1} = 0; \tag{19}$$

интегрируя по x отъ нуля и, по сдѣланному выше замѣчанію, ограничиваясь частнымъ интеграломъ этого уравненія, мы будемъ имѣть:

$$\log u - \log(x+1)^2 = 0, \tag{20}$$

откуда, переходя къ числу, получимъ

$$u = (x+1)^2. \tag{21}$$

Внося это въ (18), по сокращеніи получимъ:

$$v' = (x+1); \tag{22}$$

интегрируя, найдемъ:

$$v = \frac{1}{2}(x+1)^2 + C. \tag{23}$$

Слѣд.

$$y = uv = (x+1)^2\left[\frac{1}{2}(x+1)^2 + C\right], \tag{24}$$

или

$$\frac{1}{2}(x+1)^4 + C(x+1)^2 - y = 0. \tag{25}$$

59. Сличая вспомогательное уравненіе (6) § 58 съ даннымъ (2), мы замѣчаемъ, что оно отличается отъ этого послѣдняго только тѣмъ, что въ немъ нѣтъ извѣстнаго члена: Q замѣнено нулемъ. Такое уравненіе, получающееся изъ уравненія:

$$y'+Py=Q, \tag{1}$$

чрезъ замѣну Q нулемъ:

$$y'_1+Py_1=0, \tag{2}$$

называется *уравненіемъ безъ послѣдняго члена*. Его интегралъ такъ представится по (10) пред. §:

$$y_1=Ce^{-\int_{x_0}^{x}Pdx}, \tag{3}$$

гдѣ C произвольное постоянное. Посмотримъ теперь нельзя ли, трактуя C какъ новую функцію — почему мы напишемъ C_x вмѣсто C—, на что наводитъ предыдущая метода, такъ опредѣлить эту функцію, чтобы выраженіе

$$y=C_xe^{-\int_{x_0}^{x}Pdx} \tag{4}$$

удовлетворяло уравненію (1), слѣд. было бы его рѣшеніемъ. Дифференцируя (4), получаемъ:

$$y'=C'_xe^{-\int_{x_0}^{x}Pdx}+C_xe^{-\int_{x_0}^{x}Pdx}.-P; \tag{5}$$

внося это, а также и (4) въ (1), будемъ имѣть по сокращеніи:

$$C'_xe^{-\int_{x_0}^{x}Pdx}=Q; \tag{6}$$

отсюда получимъ:

$$C'_x=Qe^{\int_{x_0}^{x}Pdx}. \tag{7}$$

Интегрируя, будемъ имѣть:

$$C_x=\int_{x_0}^{x}Qe^{\int_{x_0}^{x}Pdx}dx+C, \tag{8}$$

гдѣ C произвольная постоянная,—т. е. то, что мы нашли въ пред. § для v [формула (13), (при $C'=1$)]; что, впрочемъ, и нужно было ожидать, ибо (4) представляетъ y въ видѣ произведенія двухъ функцій, изъ которыхъ одна наше прежнее u. Какъ видимъ, эта метода отъ предыдущей отличается только точкой отправленія, а не тѣми дѣйствіями, которыя приходится выполнять для нахожденія y; слѣд. новаго здѣсь — только взглядъ на эти дѣйствія, а не самыя дѣйствія. Но новая точка зрѣнія на нихъ имѣетъ важное значеніе въ наукѣ, ибо даетъ методу, которая распространяется на многія другія уравненія и системы уравненій. Лагранжъ назвалъ эту методу «измѣненіемъ произвольныхъ постоянныхъ».—Подставляя изъ (8) въ (4) найденное значеніе C_x, будемъ имѣть (14) § 58.

Пояснимъ её примѣромъ. Пусть дано уравненіе:

$$y' - \frac{ny}{x+1} = e^x(x+1)^n. \tag{9}$$

Найдемъ сперва интегралъ уравненія безъ послѣдняго члена:

$$y'_1 - \frac{ny_1}{x+1} = 0; \tag{10}$$

отдѣляя перемѣнныя, будемъ имѣть:

$$\frac{dy_1}{y_1} - n\frac{dx}{x+1} = 0, \tag{11}$$

что будетъ имѣть своимъ интеграломъ:

$$\log y_1 - \log(x+1)^n = \log C, \tag{12}$$

откуда найдемъ:

$$y_1 = C(x+1)^n. \tag{13}$$

Пусть теперь

$$y = C_x(x+1)^n, \tag{14}$$

гдѣ C_x функція x. Дифференцируя, получимъ:

$$y' = C'_x(x+1)^n + C_x n(x+1)^{n-1}; \tag{15}$$

внося это и (14) въ (9), по сокращеніи будемъ имѣть:

$$C'_x(x+1)^n = e^x(x+1)^n, \tag{16}$$

или, дѣля на $(x+1)^n$:

$$C'_x = e^x, \tag{17}$$

откуда, интегрируя, найдемъ:

$$C_x = e^x + C; \tag{18}$$

внося это въ (14), будемъ имѣть искомое рѣшеніе уравненія (9):

$$y = (x+1)^n(e^x + C). \tag{19}$$

Предлагаемъ для упражненія примѣнить ту же методу къ примѣру § 58, а къ уравненію (9) настоящаго § методу § 58, а также провѣрить рѣшеніе чрезъ исключеніе произвольной постоянной.

60. Къ интегрированію линейныхъ уравненій приводятся многіе геометрическіе вопросы и задачи; для примѣра возьмемъ задачу de Beaune:

«Найти кривую, подкасательная которой такъ относится къ ординатѣ, какъ нѣкоторая постоянная величина a къ разности между ординатой и абсциссой».

Подкасательная къ кривой выражается формулой: $st=\frac{y}{y'}$; а потому условіе задачи выразится такою пропорціей:

(1) $$\frac{y}{y'}:y=a:(y-x),$$

или

$$1:y'=a:(y-x),$$

откуда получаемъ:

(2') $$ay'=y-x,$$

или

(2) $$ay'-y=-x.$$

Это есть линейное дифференціальное уравненіе. Слѣдуя первому методу, положимъ

(3) $$y=uv, \quad \text{и слѣд.} \quad y'=u'v+uv';$$

тогда будемъ имѣть:

(4) $$(au'-u)v+auv'=-x;$$

полагая теперь:

(5) $$au'-u=0,$$

приведемъ наше уравненіе (4) къ такому:

(6) $$auv'=-x.$$

Изъ предыдущаго, интегрируя, получаемъ:

(7) $$\log u-\frac{x}{a}=0,$$

слѣд.

(8) $$u=e^{\frac{x}{a}};$$

внося это въ (6), получимъ оттуда:

(9) $$v'=-\frac{x}{a}e^{-\frac{x}{a}};$$

интегрируя, будемъ имѣть:

(10) $$v=(x+a)e^{-\frac{x}{a}}+C;$$

слѣд. по (3) искомый интегралъ будетъ:

(11) $$y=x+a+Ce^{\frac{x}{a}}.$$

Таково будетъ уравненіе искомой кривой.

61. Нѣкоторыя уравненія приводятся къ линейнымъ послѣ легкаго преобразованія. Такъ, если дано уравненіе вида:

(1) $$f'(y)y'+\varphi(x)f(y)=\psi(x);$$

то стоитъ только положить:

$$f(y)=z, \quad \text{слѣд.} \quad f'(y)y'=z', \tag{2}$$

чтобы привести его къ линейному:

$$z'+\varphi(x).z=\psi(x). \tag{3}$$

Такъ, если дано уравненіе:

$$y'\cos y+\frac{\sin y}{x}=e^x, \tag{4}$$

то, полагая $\sin y=z$, будемъ имѣть $\cos y.y'=z'$, и наше уравненіе обратится въ такое:

$$z'+\frac{z}{x}=e^x. \tag{5}$$

Уравненіе безъ послѣдняго члена будетъ:

$$z'_1+\frac{z_1}{x}=0, \tag{6}$$

интегрируя послѣ отдѣленія перемѣнныхъ, получимъ:

$$\log z_1+\log x=\log C, \tag{7}$$

слѣд.

$$z_1=\frac{C}{x}, \tag{8}$$

гдѣ C произвольная постоянная. Перемѣняя C на C_x, положимъ

$$z=\frac{C_x}{x} \tag{9}$$

и внесемъ это въ уравненіе (5). Изъ (9) имѣемъ:

$$z'=\frac{C'_x}{x}-\frac{C_x}{x^2}; \tag{10}$$

слѣд. будемъ имѣть послѣ сказаннаго внесенія такое уравненіе:

$$\frac{C'_x}{x}=e^x, \tag{11}$$

или

$$C'_x=xe^x; \tag{12}$$

интегрируя, получимъ:

$$C_x=(x-1)e^x+C. \tag{13}$$

Слѣд. по (9):

$$z=\left(1-\frac{1}{x}\right)e^x+\frac{C}{x}, \tag{14}$$

а потому интеграломъ уравненія (4) будетъ:

$$\sin y=\left(1-\frac{1}{x}\right)e^x+\frac{C}{x}, \tag{15}$$

что легко провѣряется.

Также если дано уравненіе:

$$y^p y' + Py^{p+1} = Q, \tag{16}$$

(P и Q функціи одного x), то, помножая его на $p+1$ и полагая $y^{p+1} = z$, мы получимъ линейное уравненіе:

$$z' + (p+1) Pz = (p+1) Q. \tag{17}$$

Къ уравненію (16) легко сводится уравненіе:

$$y^p y' + Py^{p+1} = Qy^q; \tag{18}$$

для этого стоитъ только раздѣлить обѣ части его на y^q; тогда будемъ имѣть:

$$y^{p-q} y' + Py^{p-q+1} = Q, \tag{19}$$

что отъ (16) отличается лишь тѣмъ, что вмѣсто p стоитъ $p-q$.

Но, раздѣляя уравненіе на y^p и полагая $q-p=n$, мы приведемъ уравненіе (18) къ другому виду, извѣстному подъ именемъ уравненія *Ивана Бернулли:*

$$y' + Py = Qy^n, \tag{20}$$

которое отъ линейнаго отличается лишь тѣмъ, что Q множится на y^n. Оно сводится къ линейному чрезъ раздѣленіе на $\frac{y^n}{n-1}$ и положеніе:

$$\frac{1}{y^{n-1}} = z; \tag{21}$$

отсюда будемъ имѣть $-\frac{n-1}{y^n} y' = z'$, и слѣд. уравненіе (20) приведется къ такому:

$$z' - (n-1) Pz = -(n-1) Q. \tag{22}$$

Но уравненіе Ивана Бернулли можно интегрировать и прямо по тому же способу § 58 какъ линейное, не приводя предварительно его къ линейному. Полагая въ (20) $y = uv$, слѣд. $y' = u'v + uv'$, мы будемъ имѣть:

$$(u' + Pu)v + uv' = Qu^n v^n; \tag{23}$$

полагая

$$u' + Pu = 0, \tag{24}$$

мы приведемъ предыдущее къ такому:

$$uv' = Qu^n v^n,$$

или

$$v^{-n} v' = Qu^{n-1}. \tag{25}$$

Интегрируя (24), мы найдемъ:

$$u = e^{-\int_{x_0}^{x} Pdx}; \tag{26}$$

внося это въ (25), будемъ имѣть:

$$v^{-n}v'=Qe^{-(n-1)\int_{x_0}^{x}Pdx}. \tag{27}$$

Интегрируя это уравненіе, по умноженіи его на dx, получимъ:

$$\frac{v^{1-n}}{1-n}=\int_{x_0}^{x}Qe^{-(n-1)\int_{x_0}^{x}Pdx}.dx+C. \tag{28}$$

Возвышая уравненіе (26) въ степень $1-n$ и перемножая результатъ съ (28), въ виду того, что $y=uv$, мы получимъ искомый интегралъ уравненія Ивана Бернулли въ такомъ видѣ:

$$\frac{y^{1-n}}{1-n}=e^{(n-1)\int_{x_0}^{x}Pdx}\left\{\int_{x^0}^{x}Qe^{-(n-1)\int_{x_0}^{x}Pdx}.dx+C\right\}. \tag{29}$$

Пусть дано для примѣра уравненіе:

$$y'+y=xy^3. \tag{30}$$

Полагая $y=uv$, слѣд. $y'=u'v+uv'$, мы будемъ имѣть:

$$(u'+u)v+uv'=xu^3v^3; \tag{31}$$

полагая

$$u'+u=0, \tag{32}$$

мы легко сведемъ его къ такому:

$$v^{-3}v'=xu^2. \tag{33}$$

Изъ (32) чрезъ интегрированіе находимъ:

$$u=e^{-x}, \tag{34}$$

и подставляя это въ (33), даемъ ему такой видъ:

$$v^{-3}v'=x.e^{-2x}. \tag{35}$$

Интегрируя, получаемъ:

$$\frac{v^{-2}}{-2}=\int_0^x xe^{-2x}dx+C',$$

или

$$v^{-2}=\int_0^x xe^{-2x}.-2dx+C; \tag{36}$$

Выполняя квадратуру, получимъ:

$$v^{-2}=\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x}+C, \tag{37}$$

но въ силу (34) имѣемъ $u^{-2}=e^{2x}$; слѣд., перемножая это съ (37) получимъ:

$$y^{-2}=x+\frac{1}{2}+Ce^{2x}, \tag{38}$$

такъ какъ $y=uv$. Это и будетъ искомый интегралъ уравненія (31), что нетрудно провѣрить читателю самому.

62. Къ уравненію Ивана Бернулли приводится уравненіе вида

$$Pdx+Qdy+R(xdy-ydx)=0, \tag{1}$$

если P и Q однородныя функціи измѣренія m, а R однородная функція измѣренія n, такъ что можно будетъ ихъ представить такъ:

$$P=x^m\varphi(u), \quad Q=x^m\psi(u), \quad R=x^n\chi(u), \tag{2}$$

полагая $\frac{y}{x}=u$; тогда $xdy-ydx=x^2du$, и уравненіе (1) по раздѣленіи на x^m приметъ такой видъ:

$$\varphi(u)dx+\psi(u)(xdu+udx)+x^{n-m+2}\chi(u)du=0, \tag{3}$$

а это можно такъ представить:

$$\frac{dx}{du}+\frac{\psi(u)}{\varphi(u)+u\psi(u)}x=-\frac{\chi(u)}{\varphi(u)+u\psi(u)}x^{n-m+2}, \tag{4}$$

что представляетъ уравненіе Бернулли, если x считать за функцію отъ u.

Такъ, если дано уравненіе:

$$x^{m-2}y^2dx+x^{m-1}ydy+x^{n-k}y^k(xdy-ydx)=0, \tag{5}$$

то будемъ имѣть, полагая $y=xu$, сокращая на x^m и полагая $n-m+2=q$, слѣдующее:

$$u^2dx+u(xdu+udx)+x^qu^kdu=0 \tag{6}$$

или

$$2u^2dx+uxdu+x^qu^kdu=0, \tag{6'}$$

а это можно привести къ такому

$$\frac{dx}{du}+\frac{1}{2u}x=-\frac{1}{2}u^{k-2}.x^q, \tag{7}$$

которое есть уравненіе Ивана Бернулли. Полагая $x=tv$, слѣдовательно, $\frac{dx}{du}=\frac{dt}{du}v+t\frac{dv}{du}$, мы будемъ имѣть:

$$\left(\frac{dt}{du}+\frac{t}{2u}\right)v+t\frac{dv}{du}=-\frac{1}{2}u^{k-2}.t^q.v^q; \tag{8}$$

полагая

$$\frac{dt}{du}+\frac{t}{2u}=0, \tag{9}$$

мы приведемъ его къ такому:

$$t\frac{dv}{du}=-\frac{1}{2}u^{k-2}t^q.v^q. \tag{10}$$

Изъ уравненія (9), интегрируя, найдемъ:

$$\log t+\frac{1}{2}\log u=0, \quad \text{откуда} \quad t=\frac{1}{\sqrt{u}}. \tag{11}$$

Уравненіе (10) легко приводится къ такому:

$$\frac{1}{v^q}\frac{dv}{du}=-\frac{1}{2}u^{k-2}t^{q-1}, \tag{12}$$

а послѣ подстановки изъ (11) найденнаго значенія t, оно принимаетъ такой видъ:

$$v^{-q}dv=-\frac{1}{2}u^{\frac{q-1}{2}+k-2}du, \tag{13}$$

чего интегралъ будетъ:

$$\frac{v^{1-q}}{1-q}=-\frac{1}{q+2k-3}u^{\frac{q+2k-3}{2}}+C. \tag{14}$$

Но $t^{1-q}=u^{\frac{q-1}{2}}$; перемножая, въ виду $x=tv$, получимъ:

$$\frac{x^{1-q}}{1-q}=-\frac{1}{q+2k-3}u^{q+k-2}+Cu^{\frac{q-1}{2}}. \tag{15}$$

или, вставляя сюда вмѣсто u его значеніе $\frac{y}{x}$, слѣдующее:

$$\frac{x^{1-q}}{1-q}=-\frac{1}{q+2k-3}\left(\frac{y}{x}\right)^{q+k-2}+C\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{q-1}{2}}; \tag{16}$$

если вмѣсто q ввести его значеніе, то будемъ имѣть:

$$\frac{x^{m-n-1}}{m-n-1}=-\frac{1}{n-m+2k-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{n-m+k}+C\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{n-m+1}{2}}. \tag{17}$$

63. Къ уравненію Ив. Бернулли сводится уравненіе вида:

$$y'+Py^2+Qy+R=0, \tag{1}$$

гдѣ P, Q, R суть функціи одного x, когда извѣстно какое-либо частное рѣшеніе его, напр. $y=y_1$. Тогда, подставляя его въ (1), мы будемъ тождественно имѣть:

$$y'_1+Py_1{}^2+Qy_1+R=0; \tag{2}$$

вычитая это изъ (1), получимъ:

$$y'-y'_1+P(y^2-y_1{}^2)+Q(y-y_1)=0; \tag{3}$$

но $y^2-y_1{}^2=(y-y_1)(y+y_1)=z(z+2y_1)$, если положить

$$y-y_1=z, \quad \text{и слѣд.} \quad y'-y'_1=z'; \tag{4}$$

внося это въ (3), мы будемъ имѣть:

$$z'+Pz^2+(2Py_1+Q)z=0; \tag{5}$$

написавъ это такъ:

$$z'+(2Py_1+Q)z=-Pz^2, \tag{6}$$

видимъ справедливость сказаннаго.

Серре приводитъ такой примѣръ:

$$y'+Xy^2+X_1y-(Xx^2+X_1x+1)=0, \tag{7}$$

гдѣ X и X_1 суть функціи x; если положимъ $y=x$, то будетъ имѣть $y'=1$, и тогда получимъ тождество, какъ легко видѣть. Слѣд. можно положить

$$y-x=z; \tag{8}$$

отсюда $y=x+z$, слѣд. $y'=1+z'$; внося это въ (7), получимъ такое:

$$z'+(2Xx+X_1)z+Xz^2=0, \tag{9}$$

что есть уравненіе Ив. Бернулли.

Если же мы не знаемъ ни одного частнаго рѣшенія уравненія (1), то мы не можемъ его интегрировать, за исключеніемъ слѣдующихъ трехъ частныхъ случаевъ: 1) когда P, Q, R постоянныя; въ этомъ случѣ перемѣнныя отдѣляются, и мы будемъ имѣть такой интегралъ уравненія (1):

$$\int\frac{dy}{Py^2+Qy+R}+x=C, \tag{10}$$

гдѣ квадратура выполняется. 2) Когда $\frac{Q}{P}=a$. $\frac{R}{P}=b$, гдѣ a и b постоянныя; въ этомъ случаѣ уравненію (1) можно дать такой видъ:

$$y'+P(y^2+ay+b)=0; \tag{11}$$

здѣсь перемѣнныя отдѣляются, и интеграломъ будетъ уравненіе:

$$\int\frac{dy}{y^2+ay+b}+\int Pdx=C. \tag{12}$$

3) Случай, когда $R=0$, ибо тогда уравненіе (1) обращается въ такое:

$$y'+Py^2+Qy=0, \tag{13}$$

а это есть уравненіе Ив. Бернулли. Нужно замѣтить, что этотъ 3) случай заключается въ разсмотрѣнномъ въ началѣ этого §, ибо $y=0$ есть частное рѣшеніе уравненія (13).

Послѣдніе три случая слишкомъ просты и не представляютъ ничего новаго, чтобы требовалось пояснять ихъ примѣрами; что же касается перваго случая, то для поясненія его разсмотримъ еще уравненіе:

$$y'=(y-x)y+1. \tag{14}$$

Очевидно, ему удовлетворяетъ $y=x$ (какъ въ примѣрѣ Серре); поэтому полагаемъ

$$y=x+u; \quad \text{слѣд.} \quad y'=1+u', \tag{15}$$

и внося въ уравненіе:

$$1+u'=u(x+u)+1,$$

или сокращая:

$$u'=ux+u^2. \tag{16}$$

Раздѣляя это на послѣдній членъ и полагая

$$\frac{1}{u}=v, \quad \text{слѣд.} -\frac{u'}{u^2}=v', \tag{17}$$

мы приведемъ уравненіе (16) къ линейному:

$$v'+xv=-1. \tag{18}$$

Будемъ его интегрировать по способу измѣненія произвольныхъ постоянныхъ; съ этою цѣлью ищемъ интегралъ уравненія безъ послѣдняго члена:

$$v'_1+xv_1=0; \tag{19}$$

находимъ

$$v_1=Ce^{-\frac{x^2}{2}}: \tag{20}$$

полагая теперь

$$v=C_xe^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{21}$$

и внося это и его производную:

$$v'=C'_xe^{-\frac{x^2}{2}}-C_xe^{-\frac{x^2}{2}}x \tag{22}$$

въ (18), по сокращеніи получаемъ:

$$C'_xe^{-\frac{x^2}{2}}=-1; \tag{23}$$

Отсюда

$$C'_x=-e^{\frac{x^2}{2}},$$

и слѣд.

$$C_x=-\int_0^x e^{\frac{x^2}{2}}dx+C, \tag{24}$$

гдѣ C произвольная постоянная. Внося это въ (21), а вмѣсто v его величину $\frac{1}{y-x}$, слѣдующую изъ (15) и (17), мы получимъ:

$$\frac{1}{y-x}=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\int_0^x e^{\frac{x^2}{2}}dx+C\right); \tag{25}$$

или перенося все въ одну часть и освобождая отъ дробей и отрицательныхъ показателей:

$$(y-x)\left(\int_0^x e^{\frac{x^2}{2}}dx-C\right)+e^{\frac{x^2}{2}}=0. \tag{26}$$

Входящая сюда квадратура невыполнима; для вычисленія должно прибѣгнуть къ разложенію функціи $e^{\frac{x^2}{2}}$ въ рядъ по формулѣ для e^{α}, полагая $\alpha=\frac{x^2}{2}$; рядъ этотъ будетъ безусловно и равномѣрно сходящійся, а потому можетъ быть интегрированъ; читатель это легко можетъ сдѣлать самъ.

64. Въ первыя времена послѣ изобрѣтенія интегральнаго исчисленія ученые интересовались трехчленными уравненіями, какъ они называли уравненія вида:

$$ax^{\alpha}y^{\beta}dy+bx^{\alpha'}y^{\beta'}dx=cx^{\alpha''}y^{\beta''}dx, \tag{1}$$

гдѣ a, b, c постоянныя величины. Это уравненіе приводится къ уравненію Ив. Бернулли въ случаѣ $\beta'=\beta+1$, какъ въ томъ убѣждаемся чрезъ раздѣленіе всего уравненія на коэффиціентъ при dy; если же, кромѣ того, $\beta''=\beta$, то y изъ послѣдняго члена уходитъ, и мы получимъ линейное уравненіе.

Въ общемъ случаѣ уравненіе приводится къ болѣе простому виду чрезъ введеніе новыхъ перемѣнныхъ вмѣсто x и y. Съ этою цѣлью раздѣлимъ предварительно уравненіе (1) на $ax^{\alpha}.y^{\beta''}$; тогда оно приметъ такой видъ:

$$y^{\beta-\beta''}dy+\frac{b}{a}x^{\alpha'-\alpha}.y^{\beta'-\beta''}dx=\frac{c}{a}x^{\alpha''-\alpha}dx; \tag{2}$$

положимъ теперь

$$3)\quad y^{\beta-\beta''}dy=\frac{dy_1}{\beta-\beta''+1};\qquad 4)\quad x^{\alpha'-\alpha}dx=\frac{dx_1}{\alpha'-\alpha+1};$$

будемъ имѣть отсюда чрезъ интегрированіе:

$$5)\quad y_1=y^{\beta-\beta''+1};\qquad 6)\quad x_1=x^{\alpha'-\alpha+1},$$

откуда получимъ:

$$7)\quad y=y_1^{\frac{1}{\beta-\beta''+1}};\qquad 8)\quad x=x_1^{\frac{1}{\alpha'-\alpha+1}};$$

на основаніи равенствъ (3)—(8), по умноженіи (2) на $\beta-\beta''+1$ оно приметъ такой видъ:

$$dy_1+\frac{\beta-\beta''+1}{\alpha'-\alpha+1}\frac{b}{a}y_1^{\frac{\beta'-\beta''}{\beta-\beta''+1}}dx_1=\frac{\beta-\beta''+1}{\alpha'-\alpha+1}\frac{c}{a}x_1^{\frac{\alpha''-\alpha}{\alpha'-\alpha+1}}dx_1. \tag{9}$$

Полагая здѣсь

$$\frac{\beta-\beta''+1}{\alpha'-\alpha+1}\frac{b}{a}=A;\qquad \frac{\beta-\beta''+1}{\alpha'-\alpha+1}\frac{c}{a}=B; \tag{10}$$

$$\frac{\beta'-\beta''}{\beta-\beta''+1}=n;\qquad \frac{\alpha''-\alpha}{\alpha'-\alpha+1}=m, \tag{11}$$

мы дадимъ этому уравненію болѣе простой видъ:

$$dy + Ay^n dx = Bx^m dx, \tag{12}$$

отбрасывая для простоты значки у x и y.

Не смотря на очень простой видъ, это уравненіе можетъ проинтегрироваться лишь въ очень немногихъ случаяхъ. При $n=1$ мы будемъ имѣть извѣстный намъ случай линейнаго уравненія. Слѣдующій простѣйшій случай будетъ тотъ, когда $n=2$; въ этомъ случаѣ уравненіе (12) принимаетъ такой видъ:

$$dy + Ay^2 dx = Bx^m dx; \tag{13}$$

по имени своего перваго изслѣдователя, италіанскаго ученаго *Riccatti*, оно извѣстно подъ именемъ уравненія Риккатти. Не смотря на его слишкомъ частный видъ, интересъ къ нему не прекращается, и до сихъ поръ появляются работы, относящіяся къ этому уравненію, и это потому, что многія интересныя задачи въ концѣ концовъ сводятся къ интегрированію этого уравненія. Поэтому оно разсматривается во всѣхъ курсахъ; мы имъ займемся въ слѣдующемъ §.

65. Уравненіе (13), хотя многіе разсматриваютъ его и въ этомъ видѣ, можетъ быть еще упрощено. Помножая его на A, полагая $Ay=z$, $AB=a$, и раздѣляя на dx, мы получимъ:

$$z' + z^2 = ax^m. \tag{1}$$

Въ такомъ видѣ оно зависитъ отъ одного параметра a и отъ одного показателя m; въ этомъ видѣ мы и будемъ его разсматривать. Не смотря на столь простой видъ, оно интегрируется не для всякаго значенія m; существуютъ два ряда значеній m, для которыхъ это возможно, какъ увидимъ.

Интегрированіе удается при $m=0$, ибо тогда перемѣнныя отдѣляются: уравненію (1) можно тогда дать такой видъ:

$$\frac{dz}{a-z^2} = dx; \tag{2}$$

слѣд. интеграломъ его будетъ:

$$\int \frac{dz}{a-z^2} = x + C. \tag{3}$$

Если $a>0$, то $\int \frac{dz}{a-z^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \log \frac{z+\sqrt{a}}{z-\sqrt{a}}$, и уравненіе (3) окончательно будетъ такимъ:

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} \log \frac{z+\sqrt{a}}{z-\sqrt{a}} = x + C, \tag{4}$$

откуда, переходя къ числу и рѣшая по z, найдемъ:

(5) $$z=\sqrt{a}\,\frac{e^{\sqrt{a}(x+C)}+e^{-\sqrt{a}(x+C)}}{e^{\sqrt{a}(x+C)}-e^{-\sqrt{a}(x+C)}}.$$

Если же $a<0$, слѣд. можно положить $a=-b$, гдѣ $b>0$, то будемъ имѣть въ (3):

(6) $$\int\frac{dz}{a-z^2}=-\int\frac{dz}{b+z^2}=\frac{1}{\sqrt{b}}\operatorname{arccotg}\frac{z}{\sqrt{b}};$$

слѣд. оно обратится въ такое:

(7) $$\frac{1}{\sqrt{b}}\operatorname{arccotg}\frac{z}{\sqrt{b}}=x+C,$$

откуда найдемъ:

(8) $$z=\sqrt{b}\operatorname{cotg}\sqrt{b}(x+C).$$

Этотъ результатъ получится и изъ уравненія (5) на основаніи формулъ Эйлера, выражающихъ связь между тригонометрическими и показательными функціями, чрезъ посредство мнимыхъ величинъ.

Положимъ въ уравненіи (1)

(9) $$z=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2z_1},$$

гдѣ z_1 будетъ новая функція: отсюда получаемъ:

(10) $$z^2=\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3z_1}+\frac{1}{x^4{z_1}^2};\qquad z'=-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3z_1}-\frac{z'_1}{x^2{z_1}^2};$$

оттого уравненіе (1) обратится въ такое:

(11) $$-\frac{z'_1}{x^2{z_1}^2}+\frac{1}{x^4{z_1}^2}=ax^m,$$

или освобождая отъ знаменателей и переставляя члены:

(12) $$x^2z'_1+ax^{m+4}{z_1}^2=1.$$

Раздѣляя это на коэффиціентъ при ${z_1}^2$ послѣ введенія $\frac{dz_1}{dx}$ вмѣсто z'_1, мы будемъ имѣть:

(13) $$\frac{dz_1}{ax^{m+2}dx}+{z_1}^2=\frac{1}{a}x^{-m-4}.$$

Полагая теперь:

(14) $$ax^{m+2}dx=dx_1,$$

мы будемъ имѣть, интегрируя:

(15) $$x_1=\frac{a}{m+3}x^{m+3},$$

откуда найдемъ:

$$x=\left(\frac{m+3}{a}\right)^{\frac{1}{m+3}}x_1^{\frac{1}{m+3}};\tag{16}$$

вводя вмѣсто x новую независимую перемѣнную x_1 въ уравненіе (13), мы дадимъ ему такой видъ:

$$\frac{dz_1}{dx_1}+z_1^{\,2}=a_1x_1^{\,m_1},\tag{17}$$

гдѣ положено для краткости:

$$a_1=\frac{1}{a}\left(\frac{a}{m+3}\right)^{\frac{m+4}{m+3}}=-\frac{a^{\frac{1}{m+3}}}{(m+3)^{\frac{m+4}{m+3}}},\tag{18}$$

и

$$m_1=-\frac{m+4}{m+3}.\tag{19}$$

Такимъ образомъ, вводя новую функцію z_1 вмѣсто z съ помощью (9), затѣмъ новую независимую перемѣнную x_1 съ помощью (16), мы привели уравненіе (1) къ уравненію (17), совершенно такого же вида относительно новыхъ перемѣнныхъ. Въ силу этой связи между перемѣнными уравненій (1) и (17), зная интегралъ одного уравненія, найдемъ интегралъ другого. Мы проинтегрировали уравненіе (1) для $m=0$; при этомъ значеніи m уравненіе (19) даетъ $m_1=-\frac{4}{3}$; такъ какъ оба уравненія (1) и (17) одинаковаго вида, то мы заключаемъ, что (1) проинтегрируется для $m=-\frac{4}{3}$. Дѣлая въ (19) $m=-\frac{4}{3}$, мы найдемъ $m_1=-\frac{8}{5}$; давая m это значеніе, найдемъ изъ (19) $m_1=-\frac{12}{7}$ и, продолжая это, увидимъ, что вообще уравненіе Риккатти интегрируется, когда показатель m такого вида:

$$m=-\frac{4i}{2i+1},\tag{20}$$

гдѣ i цѣлое положительное число. Дѣйствительно, давая i значенія 0, 1, 2, 3,... получаемъ для m такія значенія отсюда:

$$0,\ -\frac{4}{3},\ -\frac{8}{5},\ -\frac{12}{7},\dots;\tag{21}$$

справедливость формулы (20) докажется по способу заключенія отъ i къ $i+1$; въ самомъ дѣлѣ, вставляя въ (19) вмѣсто m его выраженіе изъ (20), получимъ:

$$m_1=-\frac{-4i+4(2i+1)}{-4i+3(2i+1)}=-\frac{4(i+1)}{2i+3}=-\frac{4(i+1)}{2(i+1)+1},$$

что получается изъ (20) чрезъ перемѣну i на $i+1$.

Если мы рѣшимъ уравненіе (19) относительно m, то получимъ

(22) $$m = -\frac{3m_1 + 4}{m_1 + 1};$$

давая здѣсь m_1 значеніе $=0$, мы найдемъ $m = -4$; полагая $m_1 = -4$, получимъ $m = -\frac{8}{3}$; полагая $m_1 = -\frac{8}{3}$, получимъ $m_1 = -\frac{12}{5}$; слѣд. общій членъ новаго ряда:

(23) $$-4, \quad -\frac{8}{3}, \quad -\frac{12}{5}, \ldots$$

значеній m, при которыхъ интегрируется уравненіе Риккатти, представится формулою:

(24) $$m = -\frac{4i}{2i - 1},$$

гдѣ i цѣлое положительное число; въ вѣрности ея для всякаго i убѣждаемся такъ же, какъ и въ вѣрности формулы (20). Формула (24) получится изъ (20), если мы перемѣнимъ въ этой послѣдней i на $-i$ и затѣмъ числителя и знаменателя умножимъ на -1; слѣд. обѣ формулы (20) и (24) можно замѣнить одною первою, съ условіемъ, что i пробѣгаетъ весь рядъ цѣлыхъ значеній, какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ; или лучше слить ихъ въ одну такую:

(25) $$m = -\frac{4i}{2i \pm 1},$$

гдѣ i будетъ уже пробѣгать весь рядъ цѣлыхъ положительныхъ значеній. (Для $i < 0$ получится только ∓ 1 вмѣсто ± 1 въ знаменателѣ). Верхнему знаку отвѣчаютъ значенія m численно < 2, нижнему численно > 2; оба ряда съ увеличеніемъ i до безконечности стремятся—одинъ начиная съ 0, другой съ -4, къ предѣльному значенію $m = -2$. Дѣйствительно:

(26) $$m = -\frac{4}{2 \pm \frac{1}{i}}\Bigg|_{i=\infty} = -2.$$

Для этого предѣльнаго значенія показателя m уравненіе Риккатти тоже интегрируется. При $m = -2$, оно обращается въ такое:

(27) $$z' + z^2 = ax^{-2};$$

это уравненіе изъ тѣхъ, которое приводится къ однородному чрезъ подстановку $z = \frac{1}{u}$; такъ какъ $z' = -\frac{u'}{u^2}$, то наше уравненіе по умноженіи на u^2 обратится въ такое:

$$-u'+1=a\left(\frac{u}{x}\right)^2,$$

или

$$u'+a\left(\frac{u}{x}\right)^2=1, \tag{28}$$

которое послѣ положенія $\frac{u}{x}=v$, слѣд. $u'=xv'+v$, приведется къ слѣдующему:

$$xv'+av^2+v-1=0; \tag{29}$$

отдѣляя перемѣнныя, получимъ интегралъ:

$$\log x+\int\frac{dv}{av^2+v-1}=C, \tag{30}$$

гдѣ, по выполненіи квадратуры, останется подставить вмѣсто v его выраженіе:

$$v=\frac{u}{x}=\frac{1}{xz}, \tag{31}$$

чтобы получить интегралъ уравненія (27).

66. Въ заключеніе этой главы укажемъ на связь уравненія Риккатти съ однимъ дифференціальнымъ уравненіемъ 2-го порядка. Если мы положимъ

$$z=(\log u)'=\frac{u'}{u}, \tag{1}$$

то будемъ имѣть

$$z'=\frac{uu''-u'^2}{u^2}; \tag{2}$$

внося это въ уравненіе (1) пред. §, мы будемъ имѣть, по выполненіи сокращеній и перенесеніи всего въ лѣвую часть, умножая затѣмъ всё на u, слѣдующее уравненіе второго порядка безъ послѣдняго члена:

$$u''-ax^m.u=0. \tag{3}$$

Это уравненіе, какъ сводимое на уравненіе Риккатти, будетъ интегрируемо для $m=-\frac{4i}{2i\pm1}$, гдѣ i цѣлое положительное число.

Примѣры для упражненій.

а) Случай полнаго дифференціала.

1) $\left(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx+\left(\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}\right)dy=0.$

Рѣшеніе: $\frac{xy}{x-y}+\log\frac{x}{y}=C.$

2) $(x^3+3xy^2)dx+(y^3+3x^2y)dy=0.$

Рѣшеніе: $x^4+6x^2y^2+y^4=C.$

3) $\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-2\frac{y}{x}dy=0;$ рѣш.: $x^2-y^2=Cx.$

4) $\frac{2xdx}{y^3}+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4}\right)dy=0;$ рѣш.: $x^2-y^2=Cy^3.$

5) $xdx+ydy+\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0;$ рѣш.: $x^2+y^2+2arctg\frac{y}{x}=C.$

6) $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0;$ рѣш.: $x+ye^{\frac{x}{y}}=C.$

7) $\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{dy}{y}=0.$

8) $\left(x-\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\right)dx+\left(y-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\right)dy=0.$

b) Отдѣленіе перемѣнныхъ.

1) $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0;$ рѣш.: $\log(xy)+x-y=C.$

2) $(y^2+xy^2)dx+(x^2-yx^2)dy=0;$ рѣш.: $\log\frac{x}{y}-\frac{x+y}{xy}=C.$

3) $xy(1+x^2)dy-(1+y^2)dx=0;$ рѣш.: $(1+x^2)(1+y^2)-Cx^2=0.$

4) $\sin x\cos y dx-\cos x\sin y dy=0;$ рѣш.: $\cos y-C\cos x=0.$

5) $\frac{xdx}{1+y}-\frac{ydy}{1+x}=0;$ рѣш.: $2(x^3-y^3)+3(x^2-y^2)=C.$

6) $x^2dy-(y+a)dx=0;$ рѣш.: $\log(y+a)=C-\frac{1}{x}.$

7) $\sqrt{1+y^2}\,dx-xdy=0;$ рѣш.: $y+\sqrt{1+y^2}-Cx=0.$

8) $ydx-\sqrt{1-x^2}\,dy=0;$ 9) $ydx-\sqrt{1-y^2}\,dy=0;$

10) $(1-y^2)dx-dy=0;$ 11) $(1+y+y^2)dx+(1+x+x^2)dy=0.$

c) Однородныя уравненія.

1) $(x^2-xy-y^2)dx+y^2dy=0.$

Рѣшеніе: $\log[(y+x)(y-x)^3]+\frac{2x}{x-y}=C.$

2) $(y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx-xdy=0;$ рѣш.: $x^2-C(y+\sqrt{x^2+y^2})=0.$

3) $(y-x)dy+ydx=0;$ рѣш.: $ye^{\frac{x}{y}}=C.$

4) $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$; рѣш.: $\mathrm{Sin}\frac{y}{x} + \log x = C$.

5) $(x-2y)dx + ydy = 0$; рѣш.: $(x-y)e^{\frac{x}{x-y}} = C$.

6) $y^2 + (x^2 - xy)\frac{dy}{dx} = 0$; рѣш.: $y = Ce^{\frac{y}{x}}$.

7) $x + y\frac{dy}{dx} = my$; рѣш.: при $m > 2$: означая чрезъ μ корень уравненія

$v^2 - mv + 1 = 0$:

$$\log(x^2 - mxy + y^2) + \frac{\mu^2+1}{\mu^2-1}\log\frac{y-\mu x}{\mu y - x} = C;$$ при $m < 2$,

полагая $m = 2\cos\lambda$:

$$\log(x^2 - mxy + y^2) + 2\mathrm{cotg}\lambda \,\mathrm{arctang}\frac{y - x\cos\lambda}{\sin\lambda} = C.$$

8) $xydy - y^2dx = (x+y)^2 e^{-\frac{y}{x}}dx$; 9) $x^2dy - (xy + y^2)dx = 0$.

10) $(x^2 + xy + y^2)dx = x^2dy$; 11) $y^3dx + (xy^2 + bx^3)dy = 0$.

12) $(3xy + 2x^2)dy + (2y^2 + 3xy)dx = 0$; 13) $\sqrt{y}\,dx + (\sqrt{y} - \sqrt{x})dy = 0$.

14) $ydx = \frac{x^2 + xy}{x - y}dy$; 15) $xdy - ydx = y\log\left(\frac{y}{x}\right)dx$.

d) Уравненія, приводимыя къ однороднымъ.

1) $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$; рѣш.: $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$.

2) $(3x - 7x + 7)dx + (7y - 3x + 3)dy = 0$;

Рѣшеніе: $(y - x + 1)^2(y + x - 1)^5 = C$.

3) $(1 + x - 2y)dx + (1 - x)dy = 0$.

4) $(7x - 3y - 7)dx + (3x - 7y - 3)dy = 0$.

5) $\left(\frac{a}{x^2} + by^2\right)dx + dy = 0$. $\left[y = \frac{1}{z}\right]$.

6) $x^3(2ydx + 3xdy) + y^2(3ydx - 2xdy) = 0$, [см. § 56].

e) Обобщенныя однородныя уравненія.

1) $ydx + (y^2 - 2x)dy = 0$; 2) $ydx + \left(x - 2\sqrt{\frac{x}{y}}\right)dy = 0$.

3) $(x^2 + y)dx - xdy = 0$; 4) $(4xy^2 + 3x^3)dy + (2y^3 + 5x^2y)dx = 0$.

5) $(2x^3y^3 - 4x^5y^5 + 1)dx - 6x^7y^5dy = 0$.

6) $\left(3x^2y^2 + \frac{4}{x^3y^3} - 5\right)dx + 6x^4y^2dy = 0$.

f) Линейныя уравненія.

1) $x\dfrac{dy}{dx}+y+e^x=0$; рѣш.: $xy+e^x=C$.

2) $\dfrac{dy}{dx}+y=x^3$; рѣш.: $y=Ce^{-x}+x^3-3x^2+6x-6$.

3) $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}-xy=a$; рѣш.: $y=ax+C\sqrt{1+x^2}$.

4) $y'+\dfrac{1-2x}{x^2}y=1$; рѣш.: $y=x^2\left(1+Ce^{\frac{1}{x}}\right)$.

5) $xy'+y=\log\left(\dfrac{1}{1--x}\right)$; $y=\dfrac{C}{x}-\dfrac{1-x}{x}\left(1+\log\dfrac{1}{1-x}\right)$.

6) $y-x\dfrac{dy}{dx}=x-y$; рѣш.: $y=x+Cx^2$.

7) $y'+\dfrac{x}{1+x^2}y=\dfrac{1}{2x(1+x^2)}$; рѣш.: $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(C--\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$.

8) $x(1-x^2)y'+(2x^2-1)y=ax^2$; $y=ax+Cx\sqrt{1-x^2}$.

9) $y'+y\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$; 10) $(1+x^2)y'+y=\mathrm{arctg}\,x$.

11) $(1+x-2y)dx+(1-x)dy=0$; 12) $y'+x^2y=x^3$.

13) $y'+\dfrac{ny}{x}=\dfrac{a}{x^2}$; 14) $\sqrt{x}\,.\,y+x^3y'=x^{\frac{5}{4}}$.

15) $\dfrac{1}{2}\sin 2x\dfrac{dy}{dx}=\cos^5x-y-\cos^7x$; 16) $y'+\dfrac{y}{1+x}+x^2=0$.

g) Уравненія Ив. Бернулли.

1) $dy+ydx=xy^3dx$; рѣш.: $y^{-2}=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+Ce^{2x}$.

2) $dy+(xy-xy^3)dx=0$; рѣш.: $y^2(Ce^{x^2}+1)=1$.

3) $xy'+y=y^2\log x$; рѣш.: $y^{-1}=1+Cx+\log x$.

4) $z'+2xz=2ax^3z^3$; рѣш.: $z^{-2}=Ce^{2x^2}+ax^2+\dfrac{1}{2}a$.

5) $(1-x^2)z'-xz=axz^2$; рѣш.: $z^{-1}=C\sqrt{1-x^2}-a$.

6) $y'+xy=y^2\sin x$; рѣш.: $y^{-1}=Ce^{\frac{1}{2}x^2}-e^{\frac{1}{2}x^2}\displaystyle\int e^{-\frac{1}{2}x^2}\sin x\,dx$.

7) $y'(x^2y^3+xy)=1$; рѣш.: $x^{-1}=Ce^{-\frac{1}{2}y^2}-y^2+2$.

8) $y'+y=x\sqrt{y}$; 9) $y'+y=xy^{-1}$; 10) $y'+\dfrac{a}{x}y+by^2=0$.

h) Уравненія, приводимыя къ линейнымъ. [см. § 61].

1) $y' - \frac{2}{x} = x^3 e^{-y}$; рѣш.: $e^y = \frac{1}{2} x^4 + Cx^2$.

2) $y' - 1 = e^{x+2y}$; рѣш.: $e^{-2y} = Ce^{-2x} - \frac{2}{3} e^x$.

3) $xy' + 1 = e^y$; рѣш. $e^y(1 + Cx) = 1$.

4) $\cos y . y' + \sin y = x$; 5) $xy^2 dy + y^3 dx = a\frac{dx}{x}$.

6) $3y^2 y' - ay^3 = x + 1$; 7) $\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{x}{1-x^2}\sqrt{y} . dx = xdx$.

i) Нахожденіе общаго интеграла по частному, [§ 63].

1) $y' = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}$; $y_1 = -\frac{1}{x}$: $y = \frac{1 + \log x - C}{Cx - x\log x}$.

2) $y' = (y - x)^2 + 1$; $y_1 = x$: $y = x - \frac{1}{x + C}$.

3) $y' = y^2 + \frac{1}{4x^2}$; $y_1 = -\frac{1}{2x}$; $y = -\frac{1}{2x} - \frac{1}{Cx + x\log x}$.

4) $y' = \left(y - \frac{1}{4x}\right)^2$; $y_1 = -\frac{1}{4x}$; $y = -\frac{1}{4x} - \frac{1}{Cx + x\log x}$.

5) $y' = y^2 - \frac{m^2}{x^4}$; $y_1 = \frac{m - x}{x^2}$; $y = \frac{C(m + x) + (m - x)e^{\frac{2m}{x}}}{Cx^2 - x^2 e^{\frac{2m}{x}}}$.

(См. *Ермаковъ*. Диф. уравненія 1-го порядка. Кіевъ, 1887. Стр. 16—20.)

j) Уравненія Риккатти.

1) Привести уравненіе $z' + az^2 = bx^m$ къ виду: $xy' - y + ay^2 = bx^n$.

2) $y' + y^2 = x^{-\frac{4}{3}}$; рѣшеніе: $\frac{y\left(x^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}}\right) + 3}{y\left(x^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}\right) + 3} = Ce^{6x^{\frac{1}{3}}}$.

3) $y' = y^2 + 2x^{-\frac{8}{3}}$; рѣшеніе:

$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2} + y\sqrt[3]{x^5} - 6}{3\sqrt{2}(1 + xy)\sqrt[3]{x}}\right) + C$. (Хандриковъ, 647 стр.).

ГЛАВА IV.

Способъ интегрирующаго множителя.

67. Въ предыдущей главѣ мы разсмотрѣли тотъ случай, когда данное дифференціальное уравненіе:

$$Mdx+Ndy=0 \tag{1}$$

либо представляетъ полный дифференціалъ въ своей лѣвой части, либо приводится къ таковому чрезъ отдѣленіе перемѣнныхъ, предшествуемое для нѣкоторыхъ видовъ уравненія надлежащимъ преобразованіемъ къ новымъ перемѣннымъ. Отдѣленіе перемѣнныхъ достигалось раздѣленіемъ уравненія даннаго, или полученнаго изъ него чрезъ преобразованіе, на нѣкоторую функцію одной или обѣихъ перемѣнныхъ, или, какъ можно сказать также, чрезъ умноженіе на функцію, представляющую величину обратную той. Слѣд. можемъ сказать, что приведеніе даннаго дифференціальнаго уравненія къ виду полнаго дифференціала достигалось чрезъ умноженіе даннаго или преобразованнаго уравненія на нѣкотораго множителя. Возникаетъ вопросъ: всегда ли существуетъ такой множитель, который превращалъ бы по умноженіи на него первую часть даннаго дифференціальнаго уравненія въ полный дифференціалъ, и другой: если онъ существуетъ, то какъ его найти? Эти вопросы представились еще Эйлеру, и онъ получилъ утвердительный отвѣтъ на первый вопросъ; что же касается второго, то оказалось, что нахожденіе интегрирующаго множителя представляетъ вообще задачу не меньшей трудности, чѣмъ интегрированіе уравненія (1), за исключеніемъ частныхъ случаевъ, когда для даннаго уравненія можетъ быть найденъ интегрирующій множитель того или другого вида. Этимъ вопросамъ будетъ посвящена настоящая глава.

68. Представивъ интегралъ даннаго дифференціальнаго уравненія

$$Mdx+Ndy=0 \tag{1}$$

въ такомъ видѣ:

$$f(x,y)=C, \tag{2}$$

по дифференцированіи его будемъ имѣть:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0; \tag{3}$$

такъ какъ это уравненіе должно удовлетворяться тѣми же значеніями дифференціаловъ, какъ и (1), то должно быть:

$$\begin{vmatrix} M & N \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}=0, \tag{4}$$

откуда:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{M}=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{N}=\lambda; \tag{5}$$

слѣд.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda M; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda N; \tag{6}$$

а потому будемъ имѣть:

$$\lambda(Mdx+Ndy)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=df(x,y)=0; \tag{7}$$

т. е. первая часть даннаго уравненія по умноженіи на λ обратится въ полный дифференціалъ функціи $f(x,y)$, которая, будучи приравнена постоянной. даетъ интегралъ уравненія (1). Если существуетъ одинъ такой множитель, то легко убѣдиться, что ихъ будетъ безчисленное множество. Въ самомъ дѣлѣ, полагая для краткости

$$u=f(x,y), \qquad \text{слѣд.} \quad du=df(x,y), \tag{8}$$

и помножая уравненіе (1) на $\Phi(u).\lambda$, гдѣ $\Phi(u)$ какая угодно функція отъ u, будемъ имѣть по (7):

$$\Phi(u)\lambda(Mdx+Ndy)=\Phi(u)du=0, \tag{9}$$

что есть полный дифференціалъ. Отсюда слѣдуетъ, что множитель

$$\mu=\Phi(u).\lambda \tag{10}$$

есть тоже интегрирующій множитель даннаго уравненія. Изъ $du=0$, слѣдуетъ $u=C$, т. е. постоянной; а потому и

$$\frac{\mu}{\lambda}=\Phi(u)=C, \tag{11}$$

т. е. постоянной; значитъ $\frac{\mu}{\lambda}=C$ есть интегралъ уравненія (1). Слѣд., зная два интегральныхъ множителя, мы сейчасъ получимъ интегралъ, приравнивая частное ихъ произвольной постоянной.

Дифференцируя первое изъ уравненій (6) по y, второе по x, и вычитая одинъ результатъ изъ другого, получимъ:

$$\frac{\partial(\lambda M)}{\partial y}-\frac{\partial(\lambda N)}{\partial x}=0. \tag{12}$$

Раскрывая, получимъ такое уравненіе:

$$M\frac{\partial\lambda}{\partial y}-N\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\lambda\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0, \tag{13}$$

что и такъ можно представить:

$$M\frac{\partial\log\lambda}{\partial y}-N\frac{\partial\log\lambda}{\partial x}+\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0. \tag{14}$$

Въ той ли, другой формѣ возьмемъ это уравненіе — оно будетъ не что иное, какъ частное дифференціальное уравненіе перваго порядка. Въ одной изъ дальнѣйшихъ главъ, мы убѣдимся въ существованіи интеграла такого уравненія, а также и въ томъ, что отысканіе интеграла его сводится къ интегрированію системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій; а таковая можетъ быть сведена къ уравненію съ одной функціей одной независимой перемѣнной высшаго порядка, слѣд. представляетъ вообще задачу болѣе трудную, чѣмъ та, которая насъ теперь занимаетъ; однако, есть частные случаи, когда эта задача упрощается.

Замѣтимъ, что предложеніе насчётъ частнаго двухъ множителей, только что доказанное, можетъ быть доказано еще и съ помощью уравненія (14). Если μ есть другой интегрирующій множитель, то точно такъ же будемъ имѣть:

$$M\frac{\partial \log\mu}{\partial y}-N\frac{\partial \log\mu}{\partial x}+\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0; \tag{15}$$

вычитая отсюда (14), будемъ имѣть:

$$M\frac{\partial \log\frac{\mu}{\lambda}}{\partial x}-N\frac{\partial \log\frac{\mu}{\lambda}}{\partial x}=0; \tag{16}$$

на основаніи же даннаго дифференціальнаго уравненія имѣемъ:

$$\frac{dx}{-N}=\frac{dy}{M}; \tag{17}$$

на основаніи этого, замѣняя въ (16) $-N$ и M имъ пропорціональными величинами, будемъ имѣть:

$$\frac{\partial \log\frac{\mu}{\lambda}}{\partial x}dx+\frac{\partial \log\frac{\mu}{\lambda}}{\partial y}dy=0, \tag{18}$$

или

$$d\log\frac{\mu}{\lambda}=0; \qquad \text{слѣд.} \quad \log\frac{\mu}{\lambda}=C_1 \tag{19}$$

и потому

$$\frac{\mu}{\lambda}=C \tag{20}$$

на основаніи (1); слѣд. (20) есть интегралъ (1), что и требовалось доказать.

Иногда легко бываетъ замѣтить интегрирующій множитель. Такъ, если дано уравненіе:

$$(xy^2+y)dx-xdy=0, \tag{21}$$

то, помножая его на $\frac{1}{y^2}$, мы получимъ такое:

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0,$$

или

$$xdx+\frac{ydx-xdy}{y^2}=0,$$

или

$$d\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}\right)=0;$$

слѣд. интегралъ (21) будетъ:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x}{y}=C. \tag{22}$$

Если дано такое уравненіе:

$$(1+y^2)dx+xy\,dy=0, \tag{23}$$

то, помножая его на $2x$, получимъ такое:

$$(1+y^2)2xdx+x^2 2y\,dy=0,$$

или

$$d[x^2(1+y^2)]=0;$$

слѣд.

$$x^2(1+y^2)=C \tag{24}$$

будетъ интеграломъ уравненія (23), а $\lambda=2x$ его интегрирующимъ множителемъ. Но точно также, помножая (23) на $\frac{1}{x(1+y^2)}$, мы будемъ имѣть:

$$\frac{dx}{x}+\frac{ydy}{1+y^2}=0, \tag{25}$$

и слѣд. такой интегралъ:

$$\log(x\sqrt{1+y^2})=C_1, \tag{26}$$

или

$$x\sqrt{1+y^2}=C'. \tag{27}$$

Слѣд. $\mu=\frac{1}{x(1+y^2)}$ есть также интегрирующій множитель. Частное ихъ, приравненное C'':

$$\lambda:\mu=2x^2(1+y^2)=C'' \tag{28}$$

будетъ, слѣд., тоже интеграломъ. Этотъ интегралъ по раздѣленіи на 2 и положеніи C'': $2=C$ приведется къ (24); къ нему же приведется и (27) по возвышеніи въ квадратъ и положеніи $C'^2=C$; равнымъ образомъ и (26), получающееся изъ (27) чрезъ логариѳмированіе — это всё согласно сдѣланному выше замѣчанію, что если $u=C$ есть интегралъ даннаго уравненія, то и $\Phi(u)=C'$, гдѣ $\Phi(u)$ какая угодно функція, будетъ его интеграломъ. — Множитель $\mu=\frac{1}{x(1+y^2)}$ есть тотъ самый, который приводитъ къ отдѣленію перемѣнныхъ. Для уравненія вида:

$$XY_1dx+X_1Ydy=0, \tag{29}$$

этотъ интегрирующій множитель будетъ

(30) $$\lambda=\frac{1}{X_1.Y_1}.$$

Не всегда однако можно отгадать интегрирующій множитель безъ вычисленій; тогда нужно получить его изъ опредѣляющаго его уравненія (13) или (14).

69. Если интегрирующій множитель будетъ функція одного x, тогда $\frac{\partial\log\lambda}{\partial y}=0$, и уравненіе (14) пред. § обращается въ такое:

(1) $$\frac{\partial\log\lambda}{\partial x}=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right),$$

гдѣ вторая часть должна быть функціей одного x; слѣд. мы должны имѣть:

(2) $$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\varphi(x);$$

при соблюденіи этого условія изъ уравненія (1), интегрируя и переходя отъ логариѳма къ числу, найдемъ:

(3) $$\lambda=e^{\int_{x_0}^{x}\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}.$$

Для перваго примѣра возьмемъ линейное уравненіе:

(4) $$dy+Py\,dx=Qdx;$$

представивъ его такъ:

(5) $$(Py-Q)dx+dy=0,$$

видимъ, что

$$M=Py-Q,\qquad N=1;$$

слѣд.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=P,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=0;$$

а потому по (3) будемъ имѣть такой интегрирующій множитель:

(6) $$\lambda=e^{\int_{x_0}^{x}Pdx};$$

помножая на него уравненіе (4), будемъ имѣть:

$$e^{\int_{x_0}^{x}Pdx}.dy+ye^{\int_{x_0}^{x}Pdx}.Pdx=Qe^{\int_{x_0}^{x}Pdx}.dx;$$

или

$$d(e^{\int_{x_0}^{x}Pdx}.y)=Qe^{\int_{x_0}^{x}Pdx}.dx;$$

интегрируя, получимъ:

$$e^{\int_{x_0}^{x} Pdx}.y = \int_{x_0}^{x} Qe^{\int_{x_0}^{x} Pdx}.dx + C; \tag{7}$$

откуда получимъ намъ извѣстную формулу:

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} Pdx}\left(\int_{x_0}^{x} Qe^{\int_{x_0}^{x} Pdx}.dx + C\right). \tag{8}$$

2-й примѣръ. Пусть дано уравненіе:

$$(3x^2 + 6xy + 3y^2)dx + (2x^2 + 3xy)dy = 0. \tag{9}$$

Здѣсь $\frac{\partial M}{\partial y} = 6x + 6y$; $\frac{\partial N}{\partial x} = 4x + 3y$; а потому:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 3y; \quad \text{далѣе } N = (2x + 3y)x;$$

слѣд.:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{x}; \tag{10}$$

а потому

$$\lambda = e^{\int_1^x \frac{dx}{x}} = e^{\log x} = x; \tag{11}$$

помножая на него уравненіе (9), будемъ имѣть:

$$du = (3x^3 + 6x^2y + 3y^2x)dx + (2x^3 + 3x^2y)dy = 0; \tag{12}$$

слѣд.

$$u = \int_0^x (3x^3 + 6x^2y + 3y^2x)dx + \int_0^y (2.0 + 3.0.y)dy = C, \tag{13}$$

или

$$\frac{3}{4}x^4 + 2x^3y + \frac{3}{2}y^2x^2 = C, \tag{14}$$

— искомый интегралъ.

3-й примѣръ. Дано уравненіе:

$$(x^2e^x - y)dx + xdy = 0. \tag{15}$$

Здѣсь $M = x^2e^x - y$; $N = x$; слѣд. $\frac{\partial M}{\partial y} = -1$; $\frac{\partial N}{\partial x} = +1$; и потому

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{x}(-1 - 1) = -\frac{2}{x}, \tag{16}$$

и слѣд.

$$\lambda = e^{-\int_1^x \frac{2dx}{x}} = e^{-2\log x} = \frac{1}{x^2}. \tag{17}$$

Помножая на него уравненіе (15), будемъ имѣть:

$$\left(e^x - \frac{y}{x^2}\right)dx + \frac{1}{x}dy = e^x dx + \frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(e^x + \frac{y}{x}\right) = 0, \tag{18}$$

слѣд. искомый интегралъ будетъ:

$$e^x + \frac{y}{x} = C. \tag{19}$$

70. Можетъ случиться, что интегрирующій множитель будетъ функція одного y. Въ этомъ случаѣ уравненіе (14) § 68 приметъ такой видъ:

$$\frac{\partial \log\lambda}{\partial y} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right); \tag{1}$$

откуда, если выраженіе во второй части дѣйствительно приведется къ функціи одного y, мы получимъ:

$$\lambda = e^{\int_{y_0}^{y} \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dy}. \tag{2}$$

Напр., если дано уравненіе:

$$(e^x y^2 + y)dx - xdy = 0; \tag{3}$$

здѣсь $\frac{\partial N}{\partial x} = -1$; $\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^x y + 1$; и $M = (e^x y + 1)y$; слѣд.

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{-2(e^x y + 1)}{y(e^x y + 1)} = -\frac{2}{y};$$

а потому

$$\lambda = e^{-2\int_1^y \frac{dy}{y}} = e^{-2\log y} = \frac{1}{y^2}; \tag{4}$$

помножая на него (3), получимъ:

$$\left(e^x + \frac{1}{y}\right)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0, \text{ или}$$

$$e^x dx + \frac{ydx - xdy}{y^2} = 0; \tag{5}$$

интегрируя, получимъ:

$$e^x + \frac{x}{y} = C. \tag{6}$$

71. Можетъ случиться, что интегрирующій множитель будетъ симметрическая функція обѣихъ перемѣнныхъ x и y, т. е. не будетъ измѣняться отъ перестановки этихъ буквъ одной на мѣсто другой. Найдемъ условія, при которыхъ это возможно.

Если въ уравненіи

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{1}$$

переставить x и y между собою, то получится другое уравненіе:

$$M_1 dy + N_1 dx = 0. \tag{2}$$

Если ту же перестановку сдѣлать въ уравненіи (14) § 68, которое можно такъ представить:

$$N\frac{\partial \log\lambda}{\partial x}-M\frac{\partial \log\lambda}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}; \tag{3}$$

то оно, по умноженіи еще на -1, обратится въ такое:

$$M_1\frac{\partial \log\lambda}{\partial x}-N_1\frac{\partial \log\lambda}{\partial y}=\frac{\partial N_1}{\partial y}-\frac{\partial M_1}{\partial x}, \tag{4}$$

гдѣ λ осталось тоже согласно условію не измѣняться отъ перестановки x съ y. Рѣшая систему уравненій (3) и (4) относительно производныхъ $\log\lambda$ по x и y, мы будетъ имѣть:

$$\frac{\partial \log\lambda}{\partial x}=\frac{M\left(\frac{\partial N_1}{\partial y}-\frac{\partial M_1}{\partial x}\right)-N_1\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{MM_1-NN_1}=U; \tag{5}$$

$$\frac{\partial \log\lambda}{\partial y}=\frac{N\left(\frac{\partial N_1}{\partial y}-\frac{\partial M_1}{\partial x}\right)-M_1\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{MM_1-NN_1}=V; \tag{6}$$

если названныя нами для краткости чрезъ U и V выраженія удовлетворяютъ условію полнаго дифференціала:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial x}, \tag{7}$$

то задача возможна, и мы будемъ имѣть:

$$\lambda=e^{\int Udx+Vdy}. \tag{8}$$

Для примѣра возьмемъ уравненіе:

$$y^2dx+(xy-1)dy=0; \tag{9}$$

здѣсь:

$$M=y^2; \qquad N=xy-1;$$

слѣд.

$$\left.\begin{aligned} &M_1=x^2; \qquad N_1=xy-1; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

и потому:

$$\left.\begin{aligned} &MM_1-NN_1=x^2y^2-(xy-1)^2=2xy-1;\\ &\frac{\partial M}{\partial y}=2y; \quad \frac{\partial N}{\partial x}=y; \quad \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2y-y=y;\\ &\frac{\partial M_1}{\partial x}=2x; \quad \frac{\partial N_1}{\partial y}=x; \quad \frac{\partial N_1}{\partial y}-\frac{\partial M_1}{\partial x}=x-2x=-x, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

слѣд.

$$\left.\begin{aligned} &U=\frac{-(xy-1)y-xy^2}{2xy-1}=\frac{-2xy^2+y}{2xy-1}=-y;\\ &V=\frac{-(xy-1)x-yx^2}{2xy-1}=\frac{x-2x^2y}{2xy-1}=-x; \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

условіе (7) выполняется, ибо $\frac{\partial U}{\partial y}=-1=\frac{\partial V}{\partial x}$; слѣд.

$$\int U dx + V dy = \int - y dx - x dy = - xy; \qquad \lambda = e^{-xy}; \tag{13}$$

помножая уравненіе (9) на этотъ множитель, будемъ имѣть:

$$e^{-xy} y^2 dx + e^{-xy}(xy - 1) dy = 0; \tag{14}$$

интегрируя, найдемъ:

$$\int_0^x e^{-xy} y^2 dx + \int_0^y - dy = - y(e^{-xy} - 1) - y = - C \tag{15}$$

или, упрощая:

$$ye^{-xy} = C. \tag{16}$$

2-й примѣръ. Дано уравненіе:

$$(x^2y^3 + y)dx + (x^3y^2 - x)dy = 0. \tag{17}$$

Здѣсь

$$M = x^2y^3 + y; \quad N = x^3y^2 - x; \quad M_1 = y^2x^3 + x; \quad N_1 = y^3x^2 - y; \tag{18}$$

слѣд.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2y^2 + 1; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2y^2 - 1; \quad \frac{\partial M_1}{\partial x} = 3x^2y^2 + 1; \quad \frac{\partial N_1}{\partial y} = 3x^2y^2 - 1; \tag{19}$$

$$MM_1 - NN_1 = xy[(x^2y^2 + 1)^2 - (x^2y^2 - 1)^2] = 4x^3y^3; \tag{20}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2; \qquad \frac{\partial N_1}{\partial y} - \frac{\partial M_1}{\partial x} = - 2; \tag{21}$$

$$\left\{ \begin{aligned} U &= [-2(x^2y^3 + y) - 2(y^3x^2 - y)] : 4x^2y^3 = - \frac{4x^2y^3}{4x^3y^3} = - \frac{1}{x}; \\ V &= [-2(x^3y^2 - x) - 2(y^2x^3 + x)] : 4x^3y^2 = - \frac{4x^3y^2}{4x^3y^3} = - \frac{1}{y}. \end{aligned} \right. \tag{22}$$

$$\int U dx + V dy = \int - \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = - \log x - \log y = \log \frac{1}{xy}; \tag{23}$$

$$\lambda = e^{\log \frac{1}{xy}} = \frac{1}{xy}. \tag{24}$$

Помножая на этотъ множитель уравненіе (17), будемъ имѣть:

$$\frac{x^2y^3 + y}{xy} dx + \frac{x^3y^2 - x}{xy} dy = 0, \tag{25}$$

или

$$xy^2 dx + \frac{dx}{x} + x^2 y dy - \frac{dy}{y} = 0,$$

или

$$d\frac{x^2y^2}{2} + d\log x - d\log y = 0; \tag{26}$$

а потому, интегрируя, будемъ имѣть:

$$\frac{x^2y^2}{2} + \log \frac{x}{y} = C. \tag{27}$$

72. Въ предыдущемъ содержатся, какъ частные, случаи, когда интегрирующій множитель имѣетъ одну изъ слѣдующихъ формъ:

$$\text{I)}\quad \lambda=\varphi(x+y);\qquad \text{II)}\quad \lambda=\varphi(xy);$$

но эти частные случаи легче изслѣдуются прямо, на основаніи уравненія (14) § 68, чѣмъ на основаніи формулъ пред. §: послѣднее предлагается учащемуся какъ примѣръ для упражненія. Въ этомъ § мы займемся первой формой. Изъ этой формы I мы получаемъ:

$$\frac{\partial \log\lambda}{\partial x}=\frac{\varphi'(x+y)}{\varphi(x+y)}=\frac{\partial \log\lambda}{\partial y}, \tag{1}$$

гдѣ $\varphi'(x+y)$ означаетъ производную по z отъ $\varphi(z)$, когда въ ней послѣ дифференцированія сдѣлаемъ $z=x+y$. Поэтому уравненіе (14) § 68 для нашего случая приметъ такой видъ:

$$\frac{\varphi'(x+y)}{\varphi(x+y)}(M-N)+\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0, \tag{2}$$

откуда найдемъ:

$$\frac{\varphi'(x+y)}{\varphi(x+y)}=-\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M-N}; \tag{3}$$

если выраженіе во второй части будетъ имѣть видъ $\vartheta(x+y)$, то задача возможна, и мы будемъ имѣть:

$$\lambda=\varphi(x+y)=e^{-\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M-N}dx}. \tag{4}$$

Пусть дано уравненіе:

$$(x^2+x^2y+2xy-y^2-y^3)dx+(y^2+xy^2+2xy-x^2-x^3)dy=0. \tag{5}$$

Здѣсь

$$M-N=(x-y)[(x+y)^2+2(x+y)],$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=4(x-y)(1+x+y);$$

слѣд., полагая $x+y=z$:

$$\int\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M-N}dx=4\int\frac{1+z}{z(z+2)}dz=2\int\frac{dz}{z}+2\int\frac{dz}{z+2}=\log(z^2(z+2)^2); \tag{6}$$

а потому формула (4) дастъ для λ такое значеніе:

$$\lambda=e^{-\log(z^2(z+2)^2)}=\frac{1}{z^2(z+2)^2},$$

или, вставляя вмѣсто z его величину:

(7) $$\lambda=\frac{1}{(x+y)^2(x+y+2)^2}.$$

Помножая на этого множителя уравненіе (5), мы дадимъ ему такой видъ:

(8) $$\frac{x^2+x^2y+2xy-y^2-y^3}{(x+y)^2(x+y+2)^2}dx+\frac{y^2+xy^2+2xy-x^2-x^3}{(x+y)^2(x+y+2)^2}dy=0.$$

Интегрируя по правиламъ для полныхъ дифференціаловъ, читатель найдетъ*) такой интегралъ для уравненія (5):

(9) $$\frac{xy+x+y}{(x+y)(x+y+2)}=C.$$

73. Переходимъ къ тому случаю, когда интегрирующій множитель имѣетъ II-й видъ пред. §, т. е. есть функція произведенія xy:

(1) $$\lambda=\varphi(xy).$$

Въ этомъ случаѣ будутъ:

(2) $$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\varphi'(xy)y; \quad \frac{\partial\lambda}{\partial y}=\varphi'(xy)x,$$

гдѣ опять $\varphi'(xy)=\varphi'(z)_{z=xy}$. Уравненіе (13) § 68 въ этомъ случаѣ обратится въ такое:

(3) $$(Mx-Ny)\varphi'(xy)+\varphi(xy)\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0,$$

откуда найдемъ

(4) $$\frac{\varphi'(xy)}{\varphi(xy)}=-\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{Mx-Ny};$$

если правая часть функція произведенія xy, то задача возможна, и, означая эту функцію чрезъ $\psi(xy)$, слѣд. полагая:

(5) $$\psi(xy)=-\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{Mx-Ny},$$

и дѣлая $xy=z$, мы получимъ изъ (4):

(6) $$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\psi(z),$$

откуда, интегрируя, найдемъ послѣ перехода къ числу:

(7) $$\varphi(z)=e^{\int_{z_0}^{z}\psi(z)dz};$$

слѣд. будемъ имѣть:

(8) $$\lambda=\varphi(xy)=e^{\int_{z_0}^{z}\psi(z)dz}\Big|_{z=xy}.$$

(Чрезъ z_0 обозначено то значеніе z, при которомъ $\varphi(z)=1$).

---

*) Интегрируя раціональную дробь лучше всего по способу Остроградскаго.

Для примѣра возьмемъ уравненіе:

$$(2x^3y^2-y)dx+(2x^2y^3-x)dy=0; \tag{9}$$

здѣсь:

$$M=2x^3y^2-y; \quad N=2x^2y^3-x; \quad Mx-Ny=2x^2y^2(x^2-y^2); \tag{10}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4x^3y-1; \quad \frac{\partial N}{\partial x}=4xy^3-1; \quad \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=4xy(x^2-y^2); \tag{11}$$

слѣд.

$$-\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right):(Mx-Ny)=-\frac{2}{xy}=\frac{\varphi'(xy)}{\varphi(xy)}; \tag{12}$$

полагая $xy=z$, будемъ имѣть:

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=-\frac{2}{z}; \tag{13}$$

слѣд. интегрируя

$$\log\varphi(z)=\log\frac{1}{z^2}; \quad \varphi(z)=\frac{1}{z^2}, \tag{14}$$

и потому

$$\lambda=\varphi(xy)=\frac{1}{x^2y^2}. \tag{15}$$

Помножая на этотъ множитель уравненіе (9), мы дадимъ ему такой видъ:

$$\frac{2x^3y^2-y}{x^2y^2}dx+\frac{2x^2y^3-x}{x^2y^2}dy=0, \tag{16}$$

или

$$2xdx-\frac{dx}{x^2}\cdot\frac{1}{y}+2ydy-\frac{dy}{y^2}\cdot\frac{1}{x}=0,$$

или

$$d(x^2+y^2)+d\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\right)=0; \tag{17}$$

интегрируя это, получимъ:

$$x^2+y^2+\frac{1}{xy}=C, \tag{18}$$

что и представитъ искомый интегралъ уравненія (9).

Для упражненія предлагаемъ примѣнить эту методу къ примѣрамъ § 71.

74. Разсмотримъ случай, когда интегрирующій множитель есть однородная функція x, y, слѣд. можетъ быть такъ представленъ:

$$\lambda=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1}$$

Взявъ логариѳмъ отъ обѣихъ частей этого равенства, получимъ:

$$\log\lambda=n\log x+\log\varphi(u), \quad \text{гдѣ } u=\frac{y}{x}; \tag{2}$$

отсюда получимъ:

$$(3) \qquad \frac{\partial \log\lambda}{\partial x}=\frac{n}{x}+\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\cdot\frac{-y}{x^2}; \qquad \frac{\partial \log\lambda}{\partial y}=\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\cdot\frac{1}{x};$$

внося это въ (14) § 68, будемъ имѣть;

$$(4) \qquad M\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\frac{1}{x}-N\left(\frac{n}{x}-\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\cdot\frac{y}{x^2}\right)+\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0,$$

или

$$(4') \qquad \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\cdot\frac{Mx+Ny}{x^2}-\frac{nN}{x}+\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0,$$

откуда получимъ:

$$(5) \qquad \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}=\frac{nNx-x^2\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{Mx+Ny};$$

если, слѣд., вторая часть приводится къ функціи отъ $u=\frac{y}{x}$, иначе—есть однородная функція отъ x и y нулевого измѣренія, то наша задача возможна, и, называя вторую часть (5) въ этомъ случаѣ чрезъ $\Phi(u)$, интегрируя (5) и переходя отъ логариѳма къ числу, получимъ по (1):

$$(6) \qquad \lambda=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=x^n e^{\int_{u_0}^{\frac{y}{x}}\Phi(u)du}.$$

Для примѣра возьмемъ уравненіе

$$(7) \qquad \left(\frac{1}{y}+\sec\frac{y}{x}\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0.$$

Здѣсь

$$(8) \qquad M=\frac{1}{y}+\sec\frac{y}{x}; \quad N=-\frac{x}{y^2}; \quad \text{слѣд.} \quad Mx+Ny=x\sec\frac{y}{x};$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}+\sec\frac{y}{x}\operatorname{tg}\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}; \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2},$$

и потому

$$(9) \qquad \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{x}\sec\frac{y}{x}\operatorname{tg}\frac{y}{x};$$

внося это всё въ формулу (5), будемъ имѣть:

$$(10) \qquad \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}=\frac{-n\frac{x^2}{y^2}-x\sec\frac{y}{x}\operatorname{tg}\frac{y}{x}}{x\sec\frac{y}{x}};$$

вторая часть можетъ обратиться въ однородную функцію нулевого измѣренія только при $n=0$, и мы тогда будемъ имѣть по сокращеніи:

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = -\operatorname{tg} u = \frac{-\sin u}{\cos u}; \tag{11}$$

отсюда найдемъ, интегрируя:

$$\varphi(u) = \cos u = \cos\frac{y}{x}. \tag{12}$$

Итакъ, для нашего уравненія

$$\lambda = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \cos\frac{y}{x}. \tag{13}$$

Помножая на него уравненіе (7), будемъ имѣть:

$$\left(\frac{1}{y}\cos\frac{y}{x} + 1\right)dx - \cos\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y^2}dy = 0, \tag{14}$$

или

$$dx + \cos\frac{y}{x}\cdot\frac{ydx - xdy}{y^2} = 0; \tag{15}$$

полагая здѣсь

$$\frac{y}{x} = v; \quad \text{слѣд.} \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{v}; \quad \frac{ydx - xdy}{y^2} = d\frac{1}{v};$$

мы будемъ имѣть:

$$dx + \cos v\, d\frac{1}{v} = 0; \tag{16}$$

интегрируя, получимъ:

$$x + \int \cos v\, d\frac{1}{v} = C, \tag{17}$$

или, интегрируя по частямъ второй членъ:

$$x + \frac{\cos v}{v} + \int\frac{\sin v}{v}dv = C; \tag{18}$$

послѣдняя квадратура невыполнима: мы здѣсь имѣемъ интегральный синусъ отъ $v = \frac{y}{x}$. Можно уравненіе (18) такъ написать, внося вмѣсто v его значеніе:

$$x + \frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} + \int_0^{\frac{y}{x}}\frac{\sin v}{v}dv = C. \tag{19}$$

Здѣсь интегрированіе отъ нуля допустимо, ибо при $v = 0$ подъинтегральная функція конечна, именно $= 1$.

2-й примѣръ. Найдемъ интегрирующій множитель для уравненія (9) пред. §, именно:

$$(2x^3y^2 - y)dx + (2x^2y^3 - x)dy = 0, \tag{20}$$

предполагая, что онъ имѣетъ видъ $\lambda = x^n\varphi(u)$, гдѣ $u = \frac{y}{x}$. Въ этомъ случаѣ по (5) будемъ имѣть слѣдующее уравненіе для опредѣленія функціи $\varphi(u)$:

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}=\frac{n(2x^2y^3-x)x-x^2[4x^3y-1-4xy^3+1]}{2x^4y^2-yx+2x^2y^4-xy}=$$

(21) $$=\frac{x^2[(2n+4)xy^3-4x^3y-n]}{2xy[xy^3+yx^3-1]};$$

для того, чтобы правая часть превратилась бы въ функцію отъ u, надобно, чтобы она была однородная нулевого измѣренія; для этого же необходимо сокращеніе ея на неоднородный множитель знаменателя; это сдѣлается возможнымъ, когда будетъ выполнено условіе:

(22) $$\frac{2n+4}{1}=\frac{-4}{1}=\frac{-n}{-1};$$

оба уравненія, заключающіяся въ этой пропорціи, даютъ согласно одно и то же значеніе для n, именно

(23) $$n=-4;$$

слѣд. задача наша возможна, и какъ по сокращеніи на упомянутый множитель знаменателя неоднородный множитель числителя даетъ въ частномъ -4, какъ то видно изъ (22), то мы будемъ имѣть изъ (21):

(24) $$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}=\frac{-4x^2}{2xy}=-\frac{2}{\frac{y}{x}}=-\frac{2}{u},$$

и слѣд.:

(25) $$\varphi(u)=\frac{1}{u^2}, \quad \text{и} \quad \lambda=x^{-4}\cdot\frac{1}{u^2}=x^{-4}\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{1}{x^2y^2},$$

согласно съ результатомъ пред. §.

75. Если будемъ искать интегрирующій множитель, который былъ бы однородною функціей нулевого измѣренія, слѣд. вида $\lambda=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=\varphi(u)$, то формула (5) пред. § упрощается, и переходитъ въ такую для $n=0$:

(1) $$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}=-\frac{x^2\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{Mx+Ny};$$

если вторая часть есть однородная функція нулевого измѣренія, то она приметъ видъ $\varPhi(u)$, и тогда будемъ имѣть:

(2) $$\lambda=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=e^{-\int_{u_0}^{\frac{y}{x}}\varPhi(u)du}.$$

Примѣнимъ эту формулу къ уравненію:

(3) $$ydx+(2y-x)dy=0.$$

если это окажется возможнымъ. Здѣсь $M=y$, $N=2y-x$; потому

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2, \qquad Mx+Ny=2y^2;$$

и слѣд.

$$\frac{x^2\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{Mx+Ny}=\frac{2x^2}{2y^2}=\frac{1}{u^2}; \tag{4}$$

потому по (2) будемъ имѣть:

$$\lambda=e^{-\int_{\infty}^{\frac{y}{x}}\frac{du}{u^2}}=e^{\frac{1}{u}}=e^{\frac{x}{y}}. \tag{5}$$

Помножая на него уравненіе (3), будемъ имѣть:

$$e^{\frac{x}{y}}ydx+e^{\frac{x}{y}}(2y-x)dy=0; \tag{6}$$

его интегралъ будетъ по правилу для полныхъ дифференціаловъ:

$$\int_0^x e^{\frac{x}{y}}ydx+\int_0^y 2ydy=C. \tag{7}$$

т. е.:

$$y^2e^{\frac{x}{y}}-y^2+y^2=C,$$

и окончательно:

$$y^2e^{\frac{x}{y}}=C. \tag{8}$$

76. Естественно искать не имѣетъ ли однороднаго множителя однородное уравненіе:

$$Mdx+Ndy=0, \tag{1}$$

гдѣ, слѣд.: $M=x^m\psi(u)$, $N=x^m\vartheta(u)$, при $u=\frac{y}{x}$.

Въ этомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=x^{m-1}\psi'(u); \quad \frac{\partial N}{\partial x}=mx^{m-1}\vartheta(u)-x^{m-2}y\vartheta'(u); \tag{2}$$

слѣд.

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=x^{m-1}[\psi'(u)+u\vartheta'(u)]-mx^{m-1}\vartheta(u), \tag{3}$$

и

$$\begin{aligned}nNx-x^2\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)&=x^{m+1}\{(n+m)\vartheta(u)-[\psi'(u)+u\vartheta'(u)]\}=\\ &=x^{m+1}\{(n+m+1)\vartheta(u)-[\psi'(u)+\vartheta(u)+u\vartheta'(u)]\}=\\ &=x^{m+1}\{(n+m+1)\vartheta(u)-[\psi(u)+u\vartheta(u)]'\};\end{aligned} \tag{4}$$

далѣе:

$$(5)\qquad Mx+Ny=x^{m+1}[\psi(u)+u\vartheta(u)];$$

а потому уравненіе (5) § 74 приметъ такой видъ:

$$(6)\qquad \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}=\frac{(n+m+1)\vartheta(u)-[\psi(u)+u\vartheta(u)]'}{\psi(u)+u\vartheta(u)},$$

откуда, интегрируя, получимъ:

$$(7)\qquad \log\varphi(u)=-\log[\psi(u)+u\vartheta(u)]+(n+m+1)\int_{u_0}^{u}\frac{\vartheta(u)du}{\psi(u)+u\vartheta(u)}.$$

и переходя отъ логариѳма къ числу:

$$(8)\qquad \varphi(u)=\frac{e^{(n+m-1)\int_{u_0}^{u}\frac{\vartheta(u)du}{\psi(u)+u\vartheta(u)}}}{\psi(u)+u\vartheta(u)}.$$

Внося это въ выраженіе интегрирующаго множителя λ, именно $\lambda=x^n\varphi(u)$, и помножая числителя и знаменателя на x^{m+1}, въ виду (5) будемъ имѣть:

$$(9)\qquad \lambda=\frac{x^{n+m+1}e^{(n+m+1)\int_{u_0}^{\frac{y}{x}}\frac{\vartheta(u)du}{\psi(u)+u\vartheta(u)}}}{Mx+Ny}.$$

Въ этой формулѣ n остается неопредѣленнымъ; давая ему то, или другое частное значеніе, будемъ получать различные интегрирующіе множители; самый простѣйшій получится, полагая

$$(10)\qquad n=-m-1,$$

и будетъ

$$(11)\qquad \lambda_1=\frac{1}{Mx+Ny}.$$

Такъ какъ мы теперь имѣемъ два интегрирующихъ множителя (9) и (11), то, приравнивая частное ихъ произвольной постоянной, по § 68 получимъ интегралъ нашего однороднаго уравненія (1), именно:

$$(12)\qquad \frac{\lambda}{\lambda_1}=x^{n+m+1}e^{(n+m+1)\int_{u_0}^{\frac{y}{x}}\frac{\vartheta(u)du}{\psi(u)+u\vartheta(u)}}=C';$$

взявъ логариѳмы отъ обѣихъ частей, раздѣляя на $(n+m+1)$ и полагая $\log C'=C(n+m+1)$, получимъ для нашего однороднаго уравненія интегралъ въ знакомой намъ [§ 53, (8)] формѣ:

$$(13)\qquad \log x+\int_{u_0}^{\frac{y}{x}}\frac{\vartheta(u)du}{\psi(u)+u\vartheta(u)}du=C.$$

Пусть дано для примѣра уравненіе:

$$(14)\qquad (3x+2y)dx+xdy=0;$$

здѣсь будетъ

$$\lambda_1 = \frac{1}{(3x+2y)x+xy} = \frac{1}{3(x^2+xy)}; \qquad (15)$$

помножая на него уравненіе (14), получимъ:

$$\frac{3x+2y}{3(x^2+xy)}dx + \frac{x}{3(x^2+xy)}dy = 0, \qquad (16)$$

и, интегрируя по правиламъ для полныхъ дифференціаловъ, такой результатъ:

$$u = \int_1^x \frac{3x+2y}{3(x^2+xy)}dx + \int_1^y \frac{dy}{3(1+y)} = C'; \qquad (17)$$

но

$$\frac{3x+2y}{3(x^2+xy)} = \frac{3x+2y}{3x(x+y)} = \frac{2}{3}\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x+y};$$

слѣд.

$$u = \int_1^x \frac{3x+2y}{3(x^2+xy)}dx = \frac{2}{3}\int_1^x \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int_1^x \frac{dx}{x+y} + \frac{1}{3}\int_1^y \frac{dy}{1+y} =$$

$$= \frac{2}{3}\log x + \frac{1}{3}\log\frac{x+y}{1+y} + \frac{1}{3}\log(1+y) = \qquad (18)$$

$$= \frac{2}{3}\log x + \frac{1}{3}\log(x+y) = \frac{1}{3}\log[x^2(x+y)] = C',$$

и потому искомый интегралъ будетъ:

$$\log[x^2(x+y)] = 3C', \qquad (19)$$

а, переходя отъ логариѳма къ числу и полагая $\log(3C') = C$:

$$x^2(x+y) = C. \qquad (20)$$

77. Предыдущій способъ непримѣнимъ въ случаѣ

$$Mx + Ny = 0; \qquad (1)$$

по отношенію къ однородному уравненію можно показать, что въ этомъ случаѣ интегрирующимъ множителемъ будетъ

$$\mu = \frac{1}{Mx - Ny}. \qquad (2)$$

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (1) пред. § можно такъ представить:

$$\frac{1}{2}(Mx+Ny)\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right) + \frac{1}{2}(Mx-Ny)\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right) = 0, \qquad (3)$$

что легко провѣряется, располагая по дифференціаламъ dx и dy, или еще такъ:

$$\frac{1}{2}(Mx+Ny)d\log(xy) + \frac{1}{2}(Mx-Ny)d\log\left(\frac{x}{y}\right) = 0; \qquad (4)$$

если $Mx+Ny$ отлично отъ нуля, то, раздѣляя на него уравненіе, будемъ имѣть:

$$\frac{1}{2}d\log(xy)+\frac{1}{2}\frac{Mx-Ny}{Mx+Ny}d\log\frac{x}{y}=0; \tag{5}$$

такъ какъ первый членъ есть полный дифференціалъ, то и второй долженъ быть таковымъ; слѣд. $\frac{Mx-Ny}{Mx+Ny}$ должно приводиться къ функціи отъ $u=\frac{y}{x}$: въ этомъ случаѣ, слѣд., интегрирующій множитель есть $\lambda_1=\frac{1}{Mx+Ny}$, какъ мы уже знаемъ изъ предыдущаго. Но уравненіе (4) можно и такъ представить:

$$\frac{1}{2}\frac{Mx+Ny}{Mx-Ny}d\log(xy)+\frac{1}{2}d\log\frac{x}{y}=0, \tag{6}$$

если только $Mx-Ny$ не равно нулю; здѣсь второй членъ есть полный дифференціалъ; слѣд. долженъ быть таковымъ и первый; это всегда будетъ въ случаѣ, когда имѣетъ мѣсто равенство (1), ибо тогда этотъ первый членъ выпадаетъ изъ уравненія, и слѣд. множитель $\mu=\frac{1}{Mx-Ny}$ будетъ въ этомъ случаѣ интегрирующимъ, ибо приводитъ данное уравненіе къ полному дифференціалу: $\frac{1}{2}d\log\frac{x}{y}=0$; вообще же для этого необходимо, чтобы $\frac{Mx+Ny}{Mx-Ny}$ обращалось въ функцію отъ xy.

Если, напр. дано уравненіе:

$$(x^2y^2+xy^3)dx-(x^3y+x^2y^2)dy=0, \tag{7}$$

то здѣсь будетъ

$$Mx+Ny=x(x^2y^2+xy^3)-y(x^3y+x^2y^2)=0, \tag{8}$$

а потому интегрирующимъ множителемъ будетъ

$$\mu=\frac{1}{Mx-Ny}=\frac{1}{2(x^3y^2+x^2y^3)}; \tag{9}$$

помножая на него уравненіе (7), получимъ такое:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)=0, \tag{10}$$

чего интеграломъ, согласно съ нашимъ выводомъ, будетъ:

$$\frac{1}{2}\log\frac{x}{y}=C. \tag{11}$$

Для другого примѣра возьмемъ уравненіе:

$$(y+xy^2)dx+(x-x^2y)dy=0; \tag{12}$$

здѣсь

$$Mx+Ny=2xy; \quad Mx-Ny=2x^2y^2; \tag{13}$$

слѣд.

$$\frac{Mx+Ny}{Mx-Ny}=\frac{2xy}{2x^2y^2}=\frac{1}{xy}; \tag{14}$$

такъ какъ это функція произведенія xy, то

$$\mu=\frac{1}{Mx-Ny}=\frac{1}{2x^2y^2} \tag{15}$$

будетъ интегрирующимъ множителемъ нашего уравненія; помножая на него (12), будемъ имѣть по (14):

$$\frac{y+xy^2}{2x^2y^2}dx+\frac{x-x^2y}{2x^2y^2}dy=0; \tag{16}$$

слѣд. интегрируя, будемъ имѣть:

$$\int_1^x\frac{y+yx^2}{2x^2y^2}dx+\int_1^y\frac{1-y}{2y^2}dy=C; \tag{17}$$

но

$$\left.\begin{aligned}\int_1^x\frac{y+xy^2}{2x^2y^2}&=\frac{1}{2y}\int_1^x\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{2}\int_1^x\frac{dx}{x}=\frac{1}{2y}\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\log x;\\ \int_1^y\frac{1-y}{2y^2}dy&=\frac{1}{2}\int_1^y\frac{dy}{y^2}-\frac{1}{2}\int_1^y\frac{dy}{y}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{2}\log y;\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

вносятъ это въ предыдушее, будемъ имѣть:

$$-\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2}\log\frac{x}{y}=C', \tag{19}$$

относя $-\frac{1}{2}$ въ постоянную C'.

Этотъ результатъ получается сразу изъ уравненія (6), если туда подставить вмѣсто $(Mx+Ny):(Mx-Ny)$ его значеніе для нашего примѣра изъ (14); сдѣлавъ это, будемъ имѣть:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{xy}d\log(xy)+\frac{1}{2}d\log\frac{x}{y}=0, \tag{20}$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{d(xy)}{(xy)^2}+\frac{1}{2}d\log\frac{x}{y}=0, \tag{21}$$

гдѣ каждый членъ есть полный дифференціалъ, и по интегрированіи получится какъ разъ (19), ибо $\frac{d(xy)}{(xy)^2}=-d\frac{1}{xy}$. Помножая (19) на 2 и полагая $2C'=C$, дадимъ этому уравненію такой видъ:

$$\log\frac{x}{y}-\frac{1}{xy}=C. \tag{22}$$

78. Предыдущій анализъ этого случая принадлежитъ Булю; Н. Алексѣевъ замѣчаетъ въ своей книгѣ, что въ случаѣ $Mx+Ny=0$, имѣемъ $N=-\frac{Mx}{y}$, а потому уравненіе можетъ быть такъ представлено:

$$\frac{M}{y}(ydx-xdy)=0; \tag{1}$$

слѣд., говоритъ онъ, распадается на два:

$$ydx-xdy=0, \tag{2}$$

интегралъ котораго

$$\frac{y}{x}=C, \tag{3}$$

и $\frac{M}{y}=0$, которое *можетъ* дать особенное рѣшеніе. Уравненіе (2) принадлежитъ къ числу допускающихъ отдѣленіе перемѣнныхъ; оно не потребуется, если представить (1) такъ:

$$-\frac{Mx^2}{y}\,\frac{xdy-ydx}{x^2}=-\frac{Mx^2}{y}d\frac{y}{x}=-Mxd\log\frac{y}{x}=0; \tag{4}$$

тогда, помноживъ это уравненіе на

$$\lambda=-\frac{1}{Mx}, \tag{5}$$

мы приведемъ его къ полному дифференціалу:

$$d\log\frac{y}{x}=0, \tag{6}$$

интеграломъ котораго будетъ

$$\log\frac{y}{x}=C', \tag{7}$$

который послѣ перехода отъ логариѳма къ числу принимаетъ видъ (3). Но множитель (5) только постояннымъ множителемъ отличается отъ того, который даетъ для этого случая формула (2) пред. §. Дѣйствительно, изъ уравненія $Mx+Ny=0$ слѣдуетъ, что $-Ny=Mx$; слѣд. по (2) пред. § будетъ:

$$\mu=\frac{1}{2Mx}; \tag{8}$$

это отличается отъ (5) множителемъ $-\frac{1}{2}$, который появится въ лѣвой части (7) при примѣненіи этого множителя, но дѣленіемъ на него переносится въ правую и сливается съ произвольною постоянною.

79. Послѣ однородныхъ уравненій слѣдуетъ разсмотрѣть примѣненіе формулы (5) § 74 къ уравненію § 62, именно къ слѣдующему:

$$Pdx+Qdy+R(xdy-ydx)=0. \tag{1}$$

гдѣ P и Q суть однородныя функціи x и y степени m, а K однородная функція степени n. Если интегрирующій множитель этого уравненія будетъ однородная функція степени q, слѣд. вида

$$\lambda=x^q\vartheta(u), \tag{2}$$

гдѣ $u=\frac{y}{x}$, то онъ такъ найдется. Написавъ уравненіе (1) въ такомъ видѣ:

$$(P-Ry)dx+(Q+Rx)dy=0, \tag{3}$$

мы видимъ, что $M=P-Ry$, $N=Q+Rx$, и, слѣд.

$$Mx+Ny=Px+Qy; \tag{4}$$

далѣе

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial R}{\partial y}y-R; \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial x}x+R; \tag{5}$$

а потому

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}-\left(\frac{\partial R}{\partial x}x+\frac{\partial R}{\partial y}y\right)-2R=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}-(n+2)R, \tag{6}$$

ибо по теоремѣ Эйлера для однородныхъ функцій:

$$\frac{\partial R}{\partial x}x+\frac{\partial R}{\partial y}y=nR; \tag{7}$$

внося это въ формулу (5) § 74, помня, что теперь q означаетъ степень однородности интегрирующаго множителя, которая тамъ означена чрезъ n, мы будемъ имѣть послѣ приведенія подобныхъ членовъ:

$$\frac{\vartheta'(u)}{\vartheta(u)}=\frac{qQx+(q+n+2)Rx^2-x^2\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{Px+Qy}. \tag{8}$$

Здѣсь первый и третій членъ числителя одинаковаго измѣренія со знаменателемъ, именно $m+1$, тогда какъ второй членъ измѣренія $n+2$; слѣд. дробь второй части (8) будетъ однородной функціей x и y нулевого измѣренія и слѣд. можетъ быть выражена функціей $u=\frac{y}{x}$ только тогда, когда будетъ

$$q+n+2=0; \tag{9}$$

отсюда находимъ $q=-n-2$, и уравненіе (8) обращается въ такое:

$$\frac{\vartheta'(u)}{\vartheta(u)}=-\frac{(n+2)Qx+x^2\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{Px+Qy}. \tag{10}$$

Возьмемъ для примѣра уравненіе:

$$y(x^2+y^2)dx+x(xdy-ydx)=0. \tag{11}$$

Здѣсь $P=y(x^2+y^2)$; $Q=0$; $R=x$; поэтому

$$Px+Qy=xy(x^2+y^2); \quad \frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=3y^2+x^2; \tag{12}$$

и (10) принимаетъ такой видъ:

$$\frac{\vartheta'(u)}{\vartheta(u)}=-\frac{x^2(3y^2+x^2)}{xy(y^2+x^2)}=-\frac{3u^2+1}{u(u^2+1)}=-\frac{1}{u}-\frac{2u}{1+u^2}; \tag{13}$$

отсюда, интегрируя и переходя отъ логариѳма къ числу, получимъ:

$$\vartheta(u)=\frac{1}{u(1+u^2)}. \tag{14}$$

Такъ какъ для нашего примѣра $n=1$, то изъ (9) найдемъ $q=-1-2=-3$; слѣд. интегрирующій множитель будетъ:

$$\lambda=x^{-3}\frac{1}{u(1+u^2)}=\frac{1}{y(x^2+y^2)}. \tag{15}$$

Помножая на него уравненіе (11), получимъ такое:

$$dx+\frac{x}{y}\,\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0, \tag{16}$$

которое можно такъ представить:

$$dx+\frac{du}{u(1+u^2)}=0. \tag{17}$$

Интегрируя, получимъ, такъ какъ $\int\frac{du}{u(1+u^2)}=\log\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$:

$$x+\log\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=C. \tag{18}$$

80. Въ предыдущихъ §§ мы искали интегрирующихъ множителей, которые или обладали бы напередъ заданнымъ характеромъ, какъ напр., были бы функціи одного x, одного y, симметрическія функціи обоихъ, или однородныя, или же были бы функціями опредѣленныхъ функцій, какъ сумма $x+y$, или произведеніе xy; разсмотримъ теперь какъ найти, если это окажется возможнымъ, интегрирующій множитель, который былъ бы функціей отъ какой-нибудь напередъ заданной функціи v отъ x и y, слѣд. вида

$$\lambda=\varphi(v); \tag{1}$$

это представитъ обобщеніе случаевъ, только что упомянутыхъ, именно $v=x+y$ и $v=xy$, которые раньше мы разсматривали какъ частные случаи симметрическихъ функцій, и которые теперь представляются какъ частные случаи болѣе широкаго класса какихъ угодно функцій.—Изъ (1) находимъ:

$$\frac{\partial \log\lambda}{\partial x}=\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial \log\lambda}{\partial y}=\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}\frac{\partial v}{\partial y}; \tag{2}$$

внося это въ уравненіе (14) § 68, получимъ такое:

$$\left(M\frac{\partial v}{\partial y}-N\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}+\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0, \tag{3}$$

откуда найдемъ:

$$\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}=-\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M\dfrac{\partial v}{\partial y}-N\dfrac{\partial v}{\partial x}}; \tag{4}$$

для возможности задачи необходимо, слѣд., чтобы правая часть приводилась къ функціи одного v; для этого по § 12 необходимо, чтобы было

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M\dfrac{\partial v}{\partial y}-N\dfrac{\partial v}{\partial x}}\right)\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M\dfrac{\partial v}{\partial y}-N\dfrac{\partial v}{\partial x}}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=0; \tag{5}$$

мы не будемъ раскрывать это выраженіе, ибо на практикѣ удобнѣе пользоваться имъ въ этомъ видѣ.

Пусть дано уравненіе:

$$(x^2+y^2+1)dx-2xydy=0; \tag{6}$$

посмотримъ не имѣетъ ли оно множителемъ функцію отъ $v=y^2-x^2$. Такъ какъ $M=x^2+y^2+1$, $N=-2xy$, то будемъ имѣть: $\dfrac{\partial M}{\partial x}=2y$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}=-2y$; слѣд. $\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=4y$; далѣе: $\dfrac{\partial v}{\partial y}=2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-2x$; потому

$$M\frac{\partial v}{\partial y}-N\frac{\partial v}{\partial x}=(x^2+y^2+1)2y-2xy.2x=2y(y^2-x^2+1)=2y(v+1);$$

потому уравненіе (4) для нашего примѣра будетъ:

$$\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}=-\frac{4y}{2y(v+1)}=-\frac{2}{v+1}, \tag{7}$$

слѣд. функція отъ v. Отсюда интегрируя и переходя отъ логариѳма къ числу, найдемъ

$$\varphi(v) = \frac{1}{(v+1)^2} = \frac{1}{(y^2-x^2+1)^2} = \frac{1}{(x^2-y^2-1)^2}. \tag{8}$$

Помножая наше уравненіе (6) на этотъ множитель, получимъ такое:

$$\frac{x^2+y^2+1}{(x^2-y^2-1)^2}dx + \frac{-2xy}{(x^2-y^2-1)^2}dy = 0; \tag{9}$$

интегралъ его будетъ

$$\int_0^x \frac{x^2+y^2+1}{(x^2-y^2-1)^2}dx = C', \tag{10}$$

въ виду того, что $\frac{-2xy}{(x^2-y^2-1)^2}$ обращается въ нуль при $x=0$. Входящая сюда квадратура легко выполняется. Такъ какъ $x^2-y^2-1 = (x-\sqrt{y^2+1})(x+\sqrt{y^2+1})$, то подъинтегральная дробь такъ разложится:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+y^2+1}{(x^2-y^2-1)^2} &= \frac{A}{x-\sqrt{y^2+1}} + \frac{A_1}{(x-\sqrt{y^2+1})^2} + \\ &+ \frac{B}{x+\sqrt{y^2+1}} + \frac{B_1}{(x+\sqrt{y^2+1})^2};\end{aligned} \tag{11}$$

коэффиціенты A_1 и B_1 легко находятся:

$$\left\{\begin{aligned} A_1 &= \frac{x^2+y^2+1}{(x+\sqrt{y^2+1})^2}\Bigg|_{x=\sqrt{y^2+1}} = \frac{2(y^2+1)}{(2\sqrt{y^2+1})^2} = \frac{2(y^2+1)}{4(y^2+1)} = \frac{1}{2}; \\ B_1 &= \frac{x^2+y^2+1}{(x-\sqrt{y^2+1})^2}\Bigg|_{x=-\sqrt{y^2+1}} = \frac{2(y^2+1)}{(-2\sqrt{y^2+1})^2} = \frac{2(y^2+1)}{4(y^2+1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Вставляя эти значенія A_1 и B_1 въ (11), по перенесеніи найденныхъ членовъ въ лѣвую часть получимъ тамъ дробь съ числителемъ $=0$; отсюда заключаемъ, что

$$A = 0, \qquad B = 0. \tag{13}$$

Вставляя найденныя значенія всѣхъ коэффиціентовъ въ (11) и интегрируя отъ 0, будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{x^2+y^2+1}{(x^2-y^2+1)^2}dx &= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dx}{(x-\sqrt{y^2+1})} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dx}{(x+\sqrt{y^2+1})^2} = \\ = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-\sqrt{y^2+1}} + \frac{1}{x+\sqrt{y^2+1}}\right]_0^x &= -\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2-y^2-1}\right]_0^x = \frac{x}{y^2-x^2+1} = C';\end{aligned} \tag{14}$$

отсюда, освобождая отъ знаменателя и перемѣняя C' на $\frac{1}{C}$, мы получимъ такой интегралъ уравненія (6):

$$y^2 - x^2 + 1 = Cx. \tag{15}$$

81. Иногда уравненіе разбивается на части такія, что для каждой въ отдѣльности легко находится интегрирующій множитель; послѣ того, какъ онъ найденъ для каждой части, можно бываетъ, пользуясь предложеніемъ, что $\Phi(u)\lambda$ тоже интегрирующій множитель, если $u=C$ есть интегралъ, доставляемый этимъ множителемъ, найти интегрирующій множитель для всего уравненія. Lacroix, а затѣмъ и Hoüel поясняютъ это на слѣдующемъ примѣрѣ. Дано уравненіе:

$$aydx+bxdy=x^m y^n(a'ydx+b'xdy), \tag{1}$$

которое похоже на уравненіе (4) § 56: одно сводится на другое чрезъ перемѣну m на $-m$. Выраженіе $aydx+bxdy$ обращается въ полный дифференціалъ чрезъ умноженіе на $\frac{1}{xy}$, и интеграломъ этого полнаго дифференціала будетъ

$$\log x^a y^b = C', \quad \text{или} \quad x^a y^b = C. \tag{2}$$

Слѣд. для лѣвой части общая форма интегрирующаго множителя на основаніи сейчасъ упомянутаго предложенія будетъ:

$$\frac{1}{xy}\varphi(x^a y^b). \tag{3}$$

Такимъ же образомъ убѣждаемся, что общая форма интегрирующаго множителя второй части уравненія (1) будетъ

$$\frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}\psi(x^{a'}y^{b'}). \tag{4}$$

Попробуемъ функціи φ и ψ опредѣлить такъ, чтобы было (3)=(4), или, по освобожденіи отъ знаменателей, чтобы имѣло мѣсто равенство:

$$x^m y^n \varphi(x^a y^b) = \psi(x^{a'}y^{b'}). \tag{5}$$

Положимъ, что $\varphi(z)=z^r$, $\psi(z)=z^s$, и попробуемъ опредѣлить показатели r и s такъ, чтобы было удовлетворено это равенство, — которое въ этомъ предположеніи обратится въ такое:

$$x^{ar+m}y^{br+n} = x^{a's}y^{b's}; \tag{6}$$

чтобы ему удовлетворить, мы должны имѣть:

$$ar+m=a's, \quad br+n=b's, \tag{7}$$

откуда найдемъ:

(8) $$r=\frac{a'n-b'm}{ab'-a'b}; \qquad s=\frac{an-bm}{ab'-a'b},$$

значенія конечныя, за исключеніемъ случая $ab'-a'b=0$.

Изъ (6) получимъ, раздѣляя обѣ части на $x^{m+1}y^{n+1}$:

(9) $$x^{ar-1}y^{br-1}=x^{a's-m-1}y^{b's-n-1},$$

что по (3) и (4) представитъ интегрирующій множитель уравненія (1). По умноженіи на него оно обратится въ такое:

(10) $$x^{ar-1}y^{br-1}(aydx+bxdy)=x^{a's-1}y^{b's-1}(a'ydx+b'xdy),$$

откуда получимъ, интегрируя *):

(11) $$\frac{1}{r}x^{ar}y^{br}=\frac{1}{s}x^{a's}y^{b's}+C.$$

Въ случаѣ $ab'-a'b=0$. будемъ имѣть:

(12) $$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=k;$$

и поэтому $a'=ka$, $b'=kb$; внося это въ (1), мы легко приведемъ его къ такому виду:

(13) $$(1-kx^my^n)(aydx+bxdy)=0,$$

котораго интегрирующій множитель виденъ сразу: это будетъ

(14) $$[(1-kx^my^n)xy]^{-1};$$

помножая на него, получимъ уравненіе

(15) $$a\frac{dx}{x}+b\frac{dy}{y}=0,$$

котораго интегралъ будетъ:

$$\log(x^ay^b)=C'.$$

82. Эта метода можетъ быть обобщена такимъ образомъ. Пусть дано уравненіе:

(1) $$Mdx+Ndy=Pdx+Qdy,$$

и мы можемъ найти интегрирующій множитель отдѣльно для лѣвой части и правой; пусть они соотвѣтственно μ и ν, такъ что будетъ:

(2) $$\mu(Mdx+Ndy)=du; \qquad \nu(Pdx+Qdy)=dv;$$

тогда, помножая уравненіе (1) на $\mu\nu$, на основаніи (2) получимъ:

(3) $$\nu du=\mu dv;$$

---

*) Для чего лѣвую часть надобно помножить и раздѣлить на r, правую — на s.

когда, проинтегрировавъ уравненія (2), найдемъ u и v, то, выразивъ чрезъ нихъ x и y и вставляя эти выраженія въ μ и ν, получимъ изъ (3) уравненіе между u и v, которое проинтегрировавъ и вставляя въ полученный интегралъ вида

$$\Phi(u,\ v)=C, \tag{4}$$

вмѣсто u и v ихъ выраженія, полученныя чрезъ интегрированіе уравненій (2), будемъ имѣть общій интегралъ уравненія (1). Подъ u и v нужно разумѣть частные интегралы уравненій (2).

Пояснимъ эту методу на примѣрѣ пред. §. Мы уже нашли въ предыдущемъ § интегрирующіе множители для каждой части; они были

$$\mu=\frac{1}{xy}, \qquad \nu=\frac{1}{x^{m+1}y^{m+1}} \tag{5}$$

и привели къ такимъ интегральнымъ функціямъ для лѣвой и правой части соотвѣтственно:

$$u=x^a y^b; \qquad v=x^{a'} y^{b'}. \tag{6}$$

Такъ какъ у насъ теперь;

$$\left.\begin{aligned} \mu(aydx+bxdy)&=\frac{1}{xy}(aydx+bxdy)=a\frac{dx}{x}+b\frac{dy}{y}=d\log u=\frac{du}{u};\ ^{*)}\\ \nu(a'ydx+b'xdy)&=\frac{x^m y^n}{x^{m+1}y^{n+1}}(a'ydx+b'xdy)=a'\frac{dx}{x}+b'\frac{dy}{y}=\frac{dv}{v}; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

то уравненію (3) будетъ отвѣчать такое:

$$\frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}\frac{du}{u}=\frac{1}{xy}\frac{dv}{v},$$

или

$$\frac{du}{u}=x^m y^n\frac{dv}{v}. \tag{8}$$

Но взявъ логариѳмы отъ уравненій (6), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \log u&=a\log x+b\log y;\\ \log v&=a'\log x+b'\log y; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

отсюда найдемъ:

$$\log x=\frac{b'\log u-b\log v}{ab'-a'b}; \qquad \log y=\frac{a\log v-a'\log u}{ab'-a'b}; \tag{10}$$

а переходя отъ логариѳма къ числу:

$$x=u^{\frac{b'}{ab'-a'b}}v^{\frac{-b}{ab'-a'b}}; \qquad y=u^{\frac{-a'}{ab'-a'b}}v^{\frac{a}{ab'-a'b}}; \tag{11}$$

возвышая первое въ степень m, второе въ степень n и перемножая, на основаніи (8) пред. § получимъ:

---

*) u формулы (3) отвѣчаетъ $\log u$; v той же формулы отвѣчаетъ $\log v$.

$$x^m y^n = u^{\frac{b'm-a'n}{ab'-a'b}} v^{\frac{an-bm}{ab'-a'b}} = u^{-r} v^s, \tag{12}$$

и слѣд. уравненіе (8) настоящаго § приметъ такой видъ:

$$\frac{du}{u} = u^{-r} v^s \frac{dv}{v}, \tag{13}$$

или

$$u^{r-1} du = v^{s-1} dv. \tag{14}$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ:

$$\frac{u^r}{r} = \frac{v^s}{s} + C, \tag{15}$$

куда остается только подставить вмѣсто u и v ихъ значенія изъ (6). Этотъ результатъ тождественъ съ (11) пред. §.—

Въ своемъ курсѣ дифференціальныхъ уравненій (переводъ В. П. Алексѣева, Харьковъ, 1869 г.) Буль даетъ понятіе о способѣ Эйлера находить интегрирующій множитель даннаго вида по отношенію y, съ коэффиціентами — неопредѣленными сначала функціями независимой перемѣнной x. Ихъ опредѣляютъ, подставляя эту функцію λ въ уравненіе (13) § 68, и по расположеніи по степенямъ y, приравниваютъ нулю коэффиціентъ каждой степени y; это приводитъ къ нѣсколькимъ дифференціальнымъ уравненіямъ для опредѣленія вышеупомянутыхъ коэффиціентовъ при степеняхъ y. Желающіе ознакомиться съ этой методой, вообще не отличающеюся простотою, могутъ обратиться къ упомянутому сочиненію Буля.

Примѣры для упражненій.

а) Множитель фукція одного x.

1) $(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0; \quad \lambda=e^x; \quad e^x(x^2+y^2)=C.$

2) $(x^2+y^2)dx-2xy\,dy=0; \quad \lambda=\frac{1}{x^2}; \quad x-\frac{y^2}{x}=C.$

3) $(2xy+ax)dx+dy=0; \quad \lambda=e^{x^2}; \quad y+\frac{a}{2}=Ce^{-x^2}.$

4) $y'+\frac{y}{2(x+1)}-\frac{1}{4x(x+1)}=0; \quad \lambda=\sqrt{x+1};$

$$4y\sqrt{x+1}+\log\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}=C.$$

5) $y'+ay=e^{mx}; \quad \lambda=e^{ax}; \quad y=Ce^{-ax}+\frac{e^{mx}}{m+a}.$

6) $[x^3(1+\log x)+2y]dx+(3x^3y^2-x)dy=0;$

$$\lambda=\frac{1}{x^3}; \quad y^3-\frac{y}{x^2}+x\log x=C.$$

7) $(5xy^2+5x+4\cos y)dx+(2x^2y-x\sin y)dy=0;$

$\lambda=x^3;\quad x^5+x^5y^2+x^4\cos y=C.$

8) $(x+y)dx+dy=0;\quad \lambda=e^x;\quad (x+y-1)e^x=C.$

9) $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0;\quad \lambda=\frac{1}{x^2};\quad \frac{1}{2}y^2-xy-\frac{1}{x}=C.$

b) Множитель функція одного y.

1) $(xy^2+y)dx-xdy=0;\quad \lambda=\frac{1}{y^2};\quad \frac{1}{2}x^2+\frac{x}{y}=C.$

2) $2xydx+(y^2-3x^2)dy=0;\quad \lambda=\frac{1}{y^4};\quad \frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C.$

3) $(2xy+y^2)dx+(2x^2+3xy+4y^2)dy=0;\quad \lambda=y;\quad x^2y^2+xy^3+y^4=C.$

4) $2ydx+(y^2-6x)dy=0;\quad \lambda=y^{-4};\quad y^2-2x=Cy^3.$

5) $dx+(x+y^2)dy=0;\quad \lambda=e^y;\quad xe^y+\frac{1}{3}y^3=C.$

6) $(2xy^2-y)dx+(y^2+x+y)dy=0;\quad \lambda=\frac{1}{y^2};\quad x^2-\frac{x}{y}+y+\log y=C.$

7) $y\cos^2y(1-y\sin x)dx-(y^2+x\cos^2y)dy=0;$

$\lambda=\frac{1}{y^2\cos^2y};\quad \frac{x}{y}+\cos x-\operatorname{tg}y=C.$

c) Множитель симметрическая функція x и y.

1) $(x+3y)dx+2ydy+a(x+y)(xdy-ydx)=0.$

$\lambda=-\frac{1}{(x+y)^3};\quad \frac{x+2y}{(x+y)^2}+\frac{ax}{x+y}=C.$

2) $(x^2+y^2+y)dx-xdy=0;\quad \lambda=\frac{1}{x^2+y^2};\quad x+\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=C.$

3) Уравненіе (5) § 30 имѣетъ множитель: $\lambda=(x+y+xy)^{-2}.$

4) $xdx+ydy+x(xdy-ydx)=0;\quad \lambda=(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}};\quad \frac{y-1}{\sqrt{x^2+y^2}}=C.$

5) $(x^2+y^2)(xdy+ydx)-2y^3(xdy-ydx)=0;$

$\lambda=(x^2+y^2)^{-1}(xy)^{-\frac{3}{2}};$

$$\frac{4y+2}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\frac{y+x-\sqrt{2xy}}{y+x+\sqrt{2xy}}\right)+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2xy}}{y-x}=C.$$

д) Множитель функція x+y.

1) $(2x^3+3x^2y+y^2-y^3)dx+(2y^3+3xy^2+x^2-x^3)dy=0;$

$\lambda=\frac{1}{(x+y)^2};\quad x^3+xy+y^3=C(x+y).$

2) $(y-\frac{ay}{x}+x)dx+ady=0;\quad \lambda=\frac{1}{x+y};\quad x+a\log\frac{x+y}{x}=C.$

e) Множитель функція произведенія xy.

1) $(x^2y^2+1)ydx+(x^2y^2-1)xdy=0.\quad \lambda=\frac{1}{x^2y^2};\quad x^2+\frac{1}{xy}+y^2=C.$

2) $(x^2y^2+xy)ydx+(x^2y^2-1)xdy=0;\quad \lambda=[xy(xy+1)]^{-1};$
$xy-\log y=C.$

3) $(x^3y^3+x^2y^2+xy+1)ydx+(x^3y^3-x^2y^2-xy+1)xdy=0;$
$\lambda=(xy)^{-2}[xy+1]^{-2}.$

f) Множитель однородная функція x и y.

1) $y(x^2+y^2)dx+x(xdy-ydx)=0;$ λ однородная функція 3-ьей степени:

$$x+\log\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=C.$$

2) $(y^3-axy^2)dy-ay^3dx+(x+y)(xdy-ydx)=0;\quad \lambda=y^{-3}e^{-\frac{ax}{y}}.$

3) $(y-x)dy+ydx-xd\left(\frac{x}{y}\right)=0;\quad \lambda=y^{-1}e^{\frac{x}{y}};\quad \left(1+y-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}=C.$

4) $(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0;\quad \lambda=\frac{1}{x\sqrt{x^2+y^2}};\quad \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}=C.$

5) $(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0;$

$$\lambda=\frac{1}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}\text{ (симметр.)};\quad x^2+y^2=C(x+y).$$

g) Множитель однородныхъ уравненій.

1) $(x^3+3xy^2)dx+(y^3+3x^2y)dy=0;\quad x^4+6x^2y^2+y^4=C.$

2) $x^3dx+(3x^2y+2y^3)dy=0;\quad x^2+2y^2=C\sqrt{x^2+y^2}.$

3) $ydx+(2y-x)dy=0;\quad \lambda=e^{\frac{x}{y}};\quad \mu=y^{-2};\quad \frac{\lambda}{\mu}=y^2e^{\frac{x}{y}}=C.$

4) $(x^2-2xy-2y^2)dx+(2x^2+2xy-y^2)dy=0;$

$$\lambda=\frac{1}{x^3-y^3};\quad x^2+xy+y^2=C(x-y).$$

5) $(y^2-x^2)dx-xydy=0;\quad \frac{1}{2}y^2x^{-2}+\log x=C.$

6) $(x^2+y^2)dx-x^2dy=0;\quad \log x-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2y-x}{x\sqrt{3}}=C.$

7) $(4x^3+3y^3)dx+(9xy^2-8y^3)dy=0;\quad x^4+3xy^3-2y^4=C.$

8) $\left(3x^2+2xy\cos\frac{y}{x}+y^2\sin\frac{y}{x}\right)dx+\left(y^2\cos\frac{y}{x}-xy\sin\frac{y}{x}\right)dy=0;$

$$x^3+x^2y\cos\frac{y}{x}=C.$$

i) Множитель данная функція v отъ x и y.

1) $(y-3x^2y^3-2x^3)dx+(2y^3+3x^3y^2-x)dy=0$; λ функція отъ $v=x^3+y$; $\lambda=(x^3+y)^{-2}$.

2) $(3y^2-x)dx+(2y^3-6xy)dy$; $\lambda=\varphi(x+y^2)$; найти φ.

3) $y(x^2+y^2)dx+x(xdy-ydx)=0$ имѣетъ $\lambda=e^x\phi(x^2+y^2)$; найти ϕ; сравнить его съ прежнимъ рѣшеніемъ и вывести отсюда интегралъ уравненія.

4) $(2\alpha y+3\beta xy^2)dx+(3\alpha x+4\beta x^2y)dy=0$; $\lambda=x^my^n$; найти m и n.

5) $a\dfrac{dx}{x}+b\dfrac{dy}{y}=c\dfrac{x^mdx}{y^b}$; $\lambda=x^m.y^n$; найти m и n.

Многіе изъ примѣровъ обѣихъ послѣднихъ главъ, какъ взятыхъ для поясненія изложенныхъ способовъ, такъ и предложенныхъ для упражненія, допускаютъ примѣненіе и другихъ способовъ кромѣ тѣхъ, ради уясненія и усвоенія которыхъ они избраны; предлагаемъ разсмотрѣть эти примѣры съ цѣлью рѣшенія ихъ по всѣмъ способамъ, которые примѣнимы къ нимъ.

ГЛАВА V.

Уравненія 1-го порядка высшихъ степеней.

83. Случаи, когда мы можемъ проинтегрировать уравненія 1-го порядка высшихъ степеней, весьма не многочислены; важнѣйшіе изъ нихъ мы разсмотримъ въ этой главѣ.

Пусть дано дифференціальное уравненіе перваго порядка n-й степени относительно y':

$$a_0y'^n+a_1y'^{n-1}+a_2y'^{n-2}+\ldots+a_{n-1}y'+a_n=0, \tag{1}$$

гдѣ коэффиціенты a_0, a_1, a_2,...a_n суть функціи x. Полагая

$$y'=p, \tag{2}$$

мы его представимъ такъ:

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}+\ldots+a_{n-1}p+a_n=0; \tag{3}$$

рѣшая его по p, получимъ для него n различныхъ функцій, и вставляя ихъ во (2), будемъ имѣть n такихъ уравненій:

$$y'-p_i=0, \qquad (i=1, 2, 3, \ldots n) \tag{4}$$

гдѣ p_i выраженіе p чрезъ x. Интегрируя эти уравненія, напр. съ помощію интегрирующаго множителя λ_i, такого что

(5) $$\lambda_i(y'-p_i)\,dx=du_i,$$

мы найдемъ n такихъ уравненій:

(6) $$u_i-c_i=0,$$

и перемножая ихъ, получимъ интегралъ даннаго уравненія (1) въ такой формѣ:

(7) $$\prod_{i=1}^{n}(u_i-c_i)=0.$$

Здѣсь всѣ c_i можно замѣнить однимъ C, ибо общность отъ этого не уменьшится, такъ какъ каждое c_i пробѣгаетъ весь рядъ всевозможныхъ значеній; но кромѣ того, это и *должно* сдѣлать, ибо можно опредѣлить эти c, задавая значеніе $y=y_0$ для $x=x_0$: если мы сдѣлаемъ $x=x_0$, $y=y_0$ въ уравненіи (7), то мы для каждаго c_i получимъ какъ разъ тѣ значенія, которыя будутъ корнями уравненія

(8) $$\prod_{i=1}^{n}(u_i-C)=0,$$

при $x=x_0$, $y=y_0$, ибо u_i получатъ соотвѣтственно тѣже значенія, какъ и въ (7). Слѣд. (8) будетъ интеграломъ уравненія (1). Уравненіе (8) геометрически представляетъ безчисленное множество кривыхъ, составляющихъ семейство, причемъ различныя вѣтви каждой кривой, отвѣчающей опредѣленному значенію C, соединены вмѣстѣ, такъ что образуютъ одну кривую; тогда какъ въ уравненіи (7), если подъ c_i будемъ разумѣть совершенно произвольныя постоянныя, отличныя одна отъ другой, мы будемъ соединять въ одну кривую вѣтви различныхъ кривыхъ того же семейства. Опредѣляя C подъ условіемъ, чтобы при $x=x_0$, было бы $y=y_0$, мы выбираемъ изъ семейства кривыхъ (8) n вѣтвей, вообще, различныхъ кривыхъ семейства, проходящихъ чрезъ точку (x_0, y_0). Иногда впрочемъ по этому условію можетъ получиться одна и таже кривая.

Такъ если дано уравненіе:

(9) $$y'^2-\frac{a}{x}=0,$$

то рѣшая по y', будемъ имѣть два уравненія:

(10) $$y'=+\sqrt{a}\,x^{-\frac{1}{2}}; \qquad y'=-\sqrt{a}\,x^{-\frac{1}{2}};$$

помножая каждое на dx и интегрируя, получимъ:

(11) $$y=+2\sqrt{a}\sqrt{x}+C; \qquad y=-\sqrt{a}\sqrt{x}+C';$$

или

(11′) $$y-2\sqrt{a}\sqrt{x}-C=0; \qquad y+2\sqrt{a}\sqrt{x}-C'=0;$$

перемѣняя C' на C во второмъ и перемножая, получимъ уравненіе семейства параболъ:

$$(y-C)^2-4ax=0, \tag{12}$$

ось которыхъ параллельна оси Ox, а вершины лежатъ на оси Oy. Двѣ вѣтви одной параболы будутъ:

$$y-2\sqrt{a}\sqrt{x}-C=0, \qquad y+2\sqrt{a}\sqrt{x}-C=0; \tag{13}$$

тогда какъ перемножая уравненія (11′), мы получимъ:

$$(y-2\sqrt{a}\sqrt{x}-C)(y+2\sqrt{a}\sqrt{x}-C')=0, \tag{14}$$

уравненіе, которое представитъ совокупность верхней вѣтви одной параболы и нижней другой того же семейства. Если положимъ, что при $x=x_0$, $y=y_0$, то изъ уравненія (12) найдемъ два значенія для C:

$$C=y_0\pm 2\sqrt{a}\sqrt{x_0}; \tag{15}$$

отсюда слѣдуетъ, что чрезъ точку (x_0, y_0) вообще проходятъ двѣ параболы семейства (12); давая въ (12) C то, или другое изъ значеній (15) (съ + или съ —), мы будемъ имѣть уравненіе той или другой изъ этихъ параболъ, полагая же въ (14) $C=y_0-2\sqrt{a}\sqrt{x_0}$, $C'=y_0+2\sqrt{a}\sqrt{x_0}$, мы будемъ имѣть уравненіе совокупности верхней вѣтви одной параболы и нижней другой изъ проходящихъ чрезъ точку (x_0, y_0):

$$[y-y_0-2\sqrt{a}(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})].[y-y_0+2\sqrt{a}(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})]=0, \tag{16}$$

при чемъ здѣсь каждому C нужно изъ двухъ значеній приписать то, которое получится изъ соотвѣтствующаго множителя (14), давая тамъ x значеніе x_0, y значеніе y_0. Если бы мы захотѣли получить отсюда не вѣтви той и другой параболы, а цѣлыя параболы, проходящія чрезъ точку (x_0, y_0), то получили бы уравненіе 4-ой степени, представляющее ихъ совокупность, ибо пришлось бы исключать два радикала: $\sqrt{ax}$ и $\sqrt{xx_0}$; первый изъ нихъ исключится изъ уравненія (вмѣстѣ съ $\sqrt{ax_0}$) при выполненіи перемноженія, но за то войдетъ второй, который для своего исключенія потребуетъ, по перенесеніи его во вторую часть, возвышенія въ квадратъ обѣихъ частей уравненія. Результатъ, который по аналитической геометріи и слѣдовало ожидать, ибо совокупность двухъ параболъ будетъ геометрическое мѣсто 4-го порядка. Обѣ вѣтви будутъ принадлежать одной параболѣ только при $x_0=0$, $y=y_0$, ибо оба значенія для C сдѣлаются равными, и уравненіе (14) сдѣлается тождественнымъ съ уравненіемъ (12) для $C=y_0$. Итакъ, чтобы имѣть уравненіе семейства полныхъ кривыхъ, удовлетворяющихъ требованію, выраженному дифференціальнымъ уравненіемъ (1), а не совокупности отдѣльныхъ вѣтвей различныхъ кривыхъ семейства, нужно въ уравненіи (7) всѣмъ c_i дать одно и тоже значеніе, чрезъ что и получится уравненіе (8) семейства полныхъ кривыхъ, которое такимъ образомъ и будетъ интеграломъ уравненія (1).

84. На примѣрахъ легко было убѣдиться, что уравненіе перваго порядка степени высшей, чѣмъ первая, получается всякій разъ. когда въ первообразное уравненіе произвольная постоянная входитъ въ степени выше первой; не трудно убѣдиться, что, исключая C изъ уравненія (8) пред. §, мы придемъ къ уравненію (1) того же §. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ для удобства:

(1) $$U(C)=\prod_{i=1}^{n}(u_i-C)=0;$$

будемъ имѣть, дифференцируя по x:

(2) $$d\,U(C)=\sum_{i=1}^{n}\frac{U(C)}{u_i-C}du_i=0;$$

чтобы изъ (1) и (2) исключить C, мы должны по правиламъ алгебры положить въ послѣднемъ уравненіи по очереди $C=u_1$, $C=u_2,\dots C=u_n$ и перемножить разультаты; получимъ:

(3) $$\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{U(u_j)}{u_i-u_j}du_i=(-1)^n\prod_{j=1}^{n}U'(u_j)du_j=0,$$

гдѣ $U'(u_j)=U'(C)=\dfrac{dU}{dC}$ при $C=u_j$; ибо въ суммѣ (2) при $C=u_j$ останется только тотъ членъ, который содержитъ u_j-C въ знаменателѣ, и раскрывая неопредѣленность $\dfrac{0}{0}$, въ которую обращается $\dfrac{U(C)}{u_j-C}$ при $C=u_j$, мы получимъ $-U'(u_j)$ для истиннаго ея значенія. Множитель $(-1)^n$ можно отбросить, послѣ чего результатъ исключенія такъ представится:

(4) $$\prod_{j=1}^{n}U'(u_j)du_j=0;$$

но по (5) пред. § имѣемъ:

(5) $$du_j=\lambda_j.(y'-p_j)dx=0;$$

внося это въ предыдущее и отбрасывая множитель dx^n, будемъ имѣть:

(6) $$\prod_{j=1}^{n}U'(u_j).\prod_{j=1}^{n}\lambda_j.\prod_{j=1}^{n}(y'-p_j)=0.$$

Это произведеніе будетъ равно нулю, либо когда

(7) $$\prod_{j=1}^{n}(y'-p_j)=0,$$

— а это есть уравненіе (1) разложенное, по раздѣленіи на коэффиціентъ старшаго члена a_0, на множители, или когда

(8) $$\prod_{j=1}^{n}U'(u_j)=0,$$

— что, представляя результатъ исключенія C изъ уравненій

$$U(C) = 0, \quad U'(C) = 0, \tag{9}$$

есть уравненіе обертки кривыхъ семейства (1), которая, какъ увидимъ далѣе, удовлетворяетъ уравненію (7), представляя его особенное рѣшеніе; и наконецъ когда имѣетъ мѣсто уравненіе:

$$\prod_{j=1}^{n} \lambda_j = 0, \tag{10}$$

— которое доставляетъ постороннія рѣшенія; устраняя ихъ, мы можемъ сказать, что, исключая C изъ уравненія (1) и его производнаго, мы получаемъ уравненіе (1) предыдущаго §, степени n относительно y'.

Пояснимъ это на предыдущемъ примѣрѣ. Мы нашли для уравненія (9) пред. § такой интегралъ:

$$(y - C)^2 - 4ax = 0; \tag{11}$$

дифференцируя его, получимъ:

$$2(y - C)y' - 4a = 0; \tag{12}$$

отсюда перенося $-4a$ направо и возвышая въ квадратъ, получимъ:

$$4(y - C)^2 y'^2 = 16a^2; \tag{13}$$

подставляя сюда вмѣсто $(y - C)^2$ его значеніе изъ (11), будемъ имѣть:

$$16axy'^2 = 16a^2, \tag{14}$$

или, перенося все налѣво:

$$16(axy'^2 - a^2) = 0, \tag{15}$$

или

$$16ax\left(y'^2 - \frac{a}{x}\right) = 0, \tag{16}$$

это распадается на 2 уравненія:

$$y'^2 - \frac{a}{x} = 0, \tag{17}$$

которое есть уравненіе (1) пред. §, и

$$16ax = 0, \quad \text{или} \quad x = 0, \tag{18}$$

представляющее ось y, которая есть обертка нашихъ параболъ. Дѣйствительно, уравненіе этой послѣдней получится, исключая C изъ (11) и его производнаго по C, которое будетъ:

$$-2(y - C) = 0; \tag{19}$$

на основаніи его уравненіе (11) приводится къ такому:

$$-4ax = 0, \tag{20}$$

не содержащему C, и потому представляющему обертку; а это уравненіе отличается постояннымъ множителемъ -4 отъ уравненія (18).

85. Пусть дано уравненіе:

$$y'^2 - a^2y^2 = 0; \tag{1}$$

отсюда находимъ, рѣшая по y':

$$y' = +ay; \qquad y' = -ay; \tag{2}$$

интегралы этихъ уравненій будутъ:

$$\log y - ax - \log C = 0; \qquad \log y + ax - \log C = 0; \tag{3}$$

отсюда получаемъ

$$y = Ce^{ax}, \qquad y = Ce^{-ax}, \tag{4}$$

или

$$y - Ce^{ax} = 0, \qquad y - Ce^{-ax} = 0; \tag{5}$$

перемножая, получимъ интегралъ уравненія (1):

$$y^2 - C(e^{ax} + e^{-ax})y + C^2 = 0. \tag{6}$$

Этотъ способъ иногда ведетъ однако къ интегралу чрезъ мнимыя величины. Такъ если дано уравненіе:

$$y'^2 + a^2y^2 = 0, \tag{7}$$

то, рѣшая по y', вмѣсто (2) будемъ имѣть:

$$y' = +iay; \qquad y' = -iay; \tag{8}$$

гдѣ $i = \sqrt{-1}$, а потому придемъ къ уравненію, дающему интегралъ уравненія (7), въ такомъ видѣ:

$$y^2 - C(e^{iax} + e^{-iax})y + C^2 = 0, \tag{9}$$

но какъ $e^{iax} + e^{-iax} = 2\cos x$, то это уравненіе сейчасъ принимаетъ такой видъ:

$$x^2 - 2C\cos x . y + C^2 = 0. \tag{10}$$

Задача очень упрощается, когда дано дифференціальное уравненіе такого вида:

$$f(y') = 0, \tag{11}$$

гдѣ коэффиціенты полинома $f(y')$ при степеняхъ y' суть постоянныя количества; въ этомъ случаѣ мы найдемъ отсюда

$$y' = a, \tag{12}$$

гдѣ a постоянное количество, одинъ изъ корней уравненія

$$f(p) = 0; \tag{13}$$

интегрируя (12), найдемъ:

$$y = ax + C; \tag{14}$$

отсюда получимъ

$$a = \frac{y - C}{x}; \tag{15}$$

и какъ $f(a) = 0$ тождественно, то подставляя въ $f(y') = 0$ вмѣсто y' эту величину, равную y' по (12) и (15), мы получимъ интегралъ уравненія (11):

$$f\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0. \tag{16}$$

Такъ, если дано уравненіе:

$$x'^2 - 5y' + 6 = 0, \tag{17}$$

то его интегралъ будетъ:

$$\left(\frac{y - C}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{y - C}{x}\right) + 6 = 0. \tag{18}$$

86. Иногда уравненіе бываетъ нерѣшимо относительно y', но легко рѣшимо относительно x, или y. Между этого рода уравненіями простѣйшими конечно будутъ тѣ, которыя изъ послѣднихъ двухъ перемѣнныхъ содержатъ только одну. Если данное уравненіе вида

$$F(x, p) = 0, \tag{1}$$

гдѣ $p = y'$, и легко рѣшимо относительно x (мы не будемъ разсматривать случай, когда оно рѣшимо относительно p, ибо это будетъ частный случай разсмотрѣннаго въ пред. §, именно тотъ, который прямо приводится къ квадратурѣ, какъ легко видѣть), то получивъ изъ него

$$x = \vartheta(p), \tag{2}$$

мы найдемъ

$$dx = \vartheta'(p)dp, \tag{3}$$

и потомъ, помножая на это равенство то, которое опредѣляетъ p, именно

$$y' = p, \tag{4}$$

мы будемъ имѣть:

$$dy = p\vartheta'(p)dp, \tag{5}$$

откуда, интегрируя, получимъ:

$$y = \int_{p_0}^{p} p\vartheta'(p)\,dp + C; \tag{6}$$

исключая p изъ этого уравненія и даннаго (1), мы получимъ уравненіе вида:

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{7}$$

которое и будетъ искомымъ интеграломъ уравненія (1).

Напр. пусть дано уравненіе:

$$x = 1 + p^3; \tag{8}$$

отсюда получаемъ чрезъ дифференцированіе:

(9) $$dx = 3p^2 dp;$$

слѣд. по (5) будемъ имѣть:

(10) $$dy = p.3p^2 dp = 3p^3 dp;$$

интегрируя, получимъ:

(11) $$y = \frac{3}{4} p^4 + C.$$

Отсюда получаемъ $p = \left[\frac{4}{3}(y - C)\right]^{\frac{1}{4}}$, и подставляя въ (8).

(12) $$x = 1 + \left[\frac{4}{3}(y - C)\right]^{\frac{3}{4}};$$

или

(13) $$27(x-1)^4 - 64(y-C)^3 = 0.$$

87. Если дано уравненіе такого вида:

(1) $$F(y, p) = 0,$$

и оно рѣшимо относительно p, такъ что даетъ

(2) $$p = f(y),$$

то, такъ какъ $p = \frac{dy}{dx}$, мы будемъ имѣть, отдѣляя перемѣнныя:

(3) $$dx = \frac{dy}{f(y)},$$

и интегралъ его будетъ:

(4) $$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C.$$

Это также заключается какъ частный случай, болѣе простой, въ случаѣ § 83. Если же уравненіе рѣшимо относительно y, и даетъ

(5) $$y = \varphi(p),$$

то, дифференцируя, получимъ отсюда:

(6) $$dy = \varphi'(p) dp;$$

но изъ $\frac{dy}{dx} = p$, имѣемъ

(7) $$dx = \frac{dy}{p};$$

слѣд. по (6)

(8) $$dx = \frac{1}{p} \varphi'(p) dp,$$

откуда, интегрируя, найдемъ:

(9) $$x = \int_{p_0}^{p} \frac{1}{p} \varphi'(p) dp + C.$$

Исключая p изъ этого уравненія и даннаго (1), найдемъ его интегралъ въ такомъ видѣ:

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0. \tag{10}$$

Пусть дано такое уравненіе:

$$y=p^2+2p^3; \tag{11}$$

отсюда получимъ

$$dy=2(p+3p^2)dp, \tag{12}$$

и потому изъ $dx=\frac{1}{p}dy$, получимъ:

$$x=2\int(1+3p)\,dp=2p+3p^2+C. \tag{13}$$

Остается исключить p изъ (11) и (13); которое можно и такъ представить:

$$x-C=2p+3p^2; \tag{14}$$

исключивъ, получимъ интегралъ въ такомъ видѣ:

$$36(x-C)^3+9(x-C)^2-162(x-C)y-36y-243y^2=0. \tag{15}$$

88. Можно проинтегрировать уравненіе, однородное относительно x и y, и рѣшимое относительно $u=\frac{y}{x}$. Пусть дано такое уравненіе:

$$F(x,\ y,\ p)=0, \tag{1}$$

которое однородно относительно x и y, причемъ m есть показатель измѣренія первой части его относительно этихъ величинъ; тогда мы будемъ имѣть:

$$F(x, y, p)=x^m F(1, u, p)=0. \tag{2}$$

Рѣшая это уравненіе относительно u, мы получимъ

$$u=\varphi(p); \tag{3}$$

дифференцируя его, будемъ имѣть:

$$du=\varphi'(p)dp. \tag{4}$$

Но $y=ux$; слѣд. $dy=pdx=udx+xdu$; отсюда такое уравненіе:

$$(u-p)dx+xdu=0; \tag{5}$$

подставляя сюда вмѣсто u и du ихъ выраженія изъ (3) и (4), мы дадимъ ему такой видъ:

$$(\varphi(p)-p)\,dx+x\varphi'(p)\,dp=0; \tag{6}$$

здѣсь перемѣнныя отдѣляются, и мы будемъ имѣть:

$$\frac{dx}{x}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}\,dp=0; \tag{7}$$

интегралъ этого уравненія будетъ:

$$\log x+\int_{p_0}^{p}\frac{\varphi'(p)dp}{\varphi(p)-p}=C. \tag{8}$$

Исключая p изъ этого уравненія и (1), получимъ интегралъ даннаго уравненія въ такой формѣ;

$$\Phi(x, y, C)=0. \tag{9}$$

Пусть дано уравненіе:

$$yp+nx=\sqrt{y^2+nx^2}\sqrt{1+p^2}. \tag{10}$$

Полагая $y=ux$, можно будетъ раздѣлить на x все уравненіе, которое есть однородное 1-го измѣренія, и мы будемъ имѣть такое:

$$up+n=\sqrt{u^2+n}\sqrt{1+p^2}. \tag{11}$$

Возвышая его въ квадратъ, по сокращеніи получимъ:

$$u^2-2npu+np^2=n(n-1). \tag{12}$$

Дѣля на n и придавая послѣ того по u^2 къ обѣимъ частямъ, получимъ по перенесеніи $\frac{u^2}{n}$ въ другую часть:

$$(p-u)^2=\frac{n-1}{n}(u^2+n); \tag{13}$$

это уравненіе, хотя оно 2-й степени относительно каждой перемѣнной p и u, лучше однако рѣшается относительно p, и мы получимъ:

$$p-u=\pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}\cdot\sqrt{u^2+n}; \tag{14}$$

изъ $y=ux$ слѣдуетъ, что $y'=p=xu'+u$, слѣд. $p-u=xu'$; а потому только-что полученное уравненіе (14) можетъ быть такъ представлено:

$$x\frac{du}{dx}=\pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}\cdot\sqrt{u^2+n}; \tag{15}$$

здѣсь перемѣнныя отдѣляются, и мы будемъ имѣть:

$$\frac{du}{\sqrt{u^2+n}}=\pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}\frac{dx}{x}; \tag{16}$$

интегралъ этого уравненія будетъ:

$$\log(u+\sqrt{u^2+n})=\pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}\log x+\log C, \tag{17}$$

или переходя отъ логариѳма къ числу:

$$u+\sqrt{u^2+n}=Cx^{\pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}}; \tag{18}$$

или вставляя сюда вмѣсто u его значеніе $\frac{y}{x}$ и перенося все налѣво по умноженіи всего на x:

$$y+\sqrt{y^2+nx^2}-Cx^{1\pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}}=0. \tag{19}$$

Перемножая оба уравненія, здѣсь заключающіяся, получимъ:

$$(y+\sqrt{y^2+nx^2})^2-C(x^{1+\sqrt{\frac{n-1}{n}}}+x^{1-\sqrt{\frac{n-1}{n}}})(y+\sqrt{y^2+nx^2})+C^2x^2=0, \tag{20}$$

— искомый интегралъ уравненія (10).

Другой примѣръ. Дано дифференціальное уравненіе.

$$y=xp+x\sqrt{1+p^2}; \tag{21}$$

тоже однородное перваго измѣренія относительно x и y. Раздѣляя на x, и полагая $\frac{y}{x}=u$, будемъ имѣть

$$u=p+\sqrt{1+p^2}; \tag{22}$$

отсюда, дифференцируя, находимъ

$$du=\left(1+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)dp; \tag{23}$$

но изъ (22) имѣемъ

$$u-p=\sqrt{1+p^2}; \tag{24}$$

а потому уравненіе (5) для этого примѣра обращается въ такое:

$$\sqrt{1+p^2}\,dx+x\left(1+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)dp=0; \tag{25}$$

отдѣляя перемѣнныя, будемъ имѣть:

$$\frac{dx}{x}+\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}+\frac{p}{1+p^2}\right)dp=0; \tag{26}$$

интегрируя, будемъ имѣть:

$$\log x+\log(p+\sqrt{1+p^2})+\log\sqrt{1+p^2}=\log C; \tag{27}$$

или

$$\log[x(p+\sqrt{1+p^2})\sqrt{1+p^2}]=\log C; \tag{28}$$

переходя къ числу, получимъ

$$x(p+\sqrt{1+p^2})\sqrt{1+p^2}=C, \tag{29}$$

что на основаніи уравненія (21) можно такъ представить:

$$y\sqrt{1+p^2}=C; \tag{30}$$

остается исключить p изъ этого уравненія и (21). Представивъ (21) въ такомъ видѣ по внесеніи въ него $\frac{C}{y}$ вмѣсто $\sqrt{1+p^2}$:

$$\frac{y}{x}-\frac{C}{y}=p. \tag{31}$$

и возвышая въ квадратъ, мы будемъ имѣть:

(32) $$\frac{y^2}{x^2}-2\frac{C}{x}+\frac{C^2}{y^2}=p^2;$$

но изъ (30) имѣемъ:

(33) $$p^2=\frac{C^2}{y^2}-1;$$

внося это вмѣсто p^2 въ (32) и перенося налѣво послѣ сокращенія и освобожденія отъ знаменателей, получимъ:

(34) $$x^2+y^2-2Cx=0.$$

89. Можетъ случиться, что данное уравненіе:

(1) $$F(x, y, p)=0,$$

содержащее всѣ три перемѣнныя, x, y и $p=y'$, легко рѣшается по одной изъ перемѣнныхъ x или y. Если по x, такъ что мы будемъ имѣть отсюда:

(2) $$x=f(y, p),$$

то, дифференцируя, получимъ:

(3) $$dx=\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial p}dp;$$

но какъ изъ $dy=pdx$, слѣдуетъ

(4) $$dx=\frac{dy}{p},$$

то, вычитая это изъ предыдущаго, получимъ такое уравненіе между u и p:

(5) $$\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{1}{p}\right)dy+\frac{\partial f}{\partial p}dp=0;$$

если оно изъ такихъ, которыя мы умѣемъ интегрировать, то получимъ уравненіе вида:

(6) $$\psi(y, p, C)=0;$$

исключая изъ этого и даннаго p, получимъ его интегралъ въ такомъ видѣ:

(7) $$\Phi(x, y, C)=0.$$

Пусть дано уравненіе:

(8) $$x=-yp+mp^2;$$

дифференцируя и вычитая (4), изъ результата мы получимъ:

(9) $$-\left(p+\frac{1}{p}\right)dy+(-y+2mp)\,dp=0;$$

это уравненіе сейчасъ приводится къ нормальной формѣ линейныхъ, раздѣляя на коэффиціентъ при dy и перенося члены съ (—) въ другую часть:

$$dy+\frac{p}{p^2+1}ydp=2m\frac{p^2}{p^2+1}dp; \tag{10}$$

интегралъ этого уравненія, считая p за независимую перемѣнную, будетъ:

$$y=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\Big[2m\int_0^p\frac{p^2dp}{\sqrt{p^2+1}}+C'\Big]; \tag{11}$$

съ помощью интегрированія по частямъ, найдемъ, что

$$\int_0^p\frac{p^2dp}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2}-\frac{1}{2}\log(p+\sqrt{p^2+1}); \tag{12}$$

подставляя это въ (11), будемъ имѣть, полагая $C'=mC$:

$$y=mp-\frac{m}{\sqrt{p^2+1}}[\log(p+\sqrt{p^2+1})-C]; \tag{13}$$

помножая это на p, на основаніи (8) получимъ:

$$x=\frac{mp}{\sqrt{p^2+1}}[\log(p+\sqrt{p^2+1})-C]; \tag{14}$$

остается исключить p изъ этихъ уравненій, чтобы получить интегралъ нашего уравненія (8), или изъ (8) и (14), что проще.

90. Если уравненіе (1) пред. § легче рѣшается по y, такъ что мы оттуда будемъ имѣть:

$$y=\varphi(x, p), \tag{1}$$

то можно опять получить уравненіе между двумя перемѣнными x и p. Дифференцируя (1), найдемъ:

$$dy=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial p}dp; \tag{2}$$

но какъ $dy=pdx$, то, вычитая это изъ сейчасъ полученнаго, будемъ имѣть:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-p\right)dx+\frac{\partial\varphi}{\partial p}dp=0; \tag{3}$$

если это уравненіе изъ такихъ, которыя мы умѣемъ интегрировать, то, найдя его интегралъ

$$\psi(x, p, C)=0 \tag{4}$$

и исключая отсюда *и* изъ (1) пред. § величину p, будемъ имѣть интегралъ этого уравненія въ видѣ:

$$\Phi(x, y, C)=0. \tag{5}$$

Такъ, если дано уравненіе:

$$y=ap^2+(bx+c)p+ex^2+gx+h, \tag{6}$$

то найдемъ отсюда:

$$dy=(2ap+bx+c)dp+(bp+2ex+g)dx; \tag{7}$$

и вычитая отсюда $dy=pdx$, такое:

$$(2ap+bx+c)dp+((b-1)p+2ex+g)dx=0; \tag{8}$$

это уравненіе, какъ мы знаемъ, приводится къ однороднымъ и можетъ быть проинтегрировано.

Для другого примѣра возьмемъ уравненіе:

$$y=xp+x^m f(p); \tag{9}$$

отсюда, дифференцируя, получаемъ:

$$dy=pdx+xdp+mx^{m-1}f(p)dx+x^m f'(p)dp \tag{10}$$

или, сокращая:

$$[x+x^m f'(p)]dp+mx^{m-1}f(p)dx=0, \tag{11}$$

что чрезъ раздѣленіе на коэффиціентъ dx сейчасъ приводится къ Бернулліеву уравненію:

$$dx+x\frac{f'(p)}{mf(p)}dp=-x^{2-m}\frac{1}{mf(p)}dp. \tag{12}$$

91. Къ разсмотрѣнной въ двухъ послѣднихъ §§ категоріи уравненій принадлежитъ уравненіе, линейное относительно x и y, слѣд. вида:

$$x\varphi(p)+y\psi(p)+\vartheta(p)=0; \tag{1}$$

дифференцируя его, будемъ имѣть въ виду $dy=pdx$:

$$[\varphi(p)+p\psi(p)]dx+[x\varphi'(p)+y\psi'(p)+\vartheta'(p)]dp=0, \tag{2}$$

но изъ (1) находимъ;

$$y=-\frac{\varphi(p)x+\vartheta(p)}{\psi(p)}; \tag{3}$$

внося это во (2), мы его приведемъ къ такому виду:

$$\frac{dx}{dp}+x\frac{\psi(p)\varphi'(p)-\varphi(p)\psi'(p)}{\psi(p)[\varphi(p)+p\psi(p)]}+\frac{\psi(p)\vartheta'(p)-\vartheta(p)\psi'(p)}{\psi(p)[\varphi(p)+p\psi(p)]}=0; \tag{4}$$

а это есть линейное относительно функціи x отъ p.

Пусть, напр., дано уравненіе

$$y=xp^2+p; \tag{5}$$

дифференцируя, получаемъ отсюда:

$$dy=p^2dx+(2px+1)dp, \tag{6}$$

и вычитая отсюда $dy=pdx$, слѣдующее:

$$(p^2-p)dx+(2px+1)dp=0, \tag{7}$$

а это можно такъ представить (сокращая):

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2}{p-1}x=-\frac{1}{p^2-p}; \tag{8}$$

интегрируя его, получимъ:

$$x=\frac{C-p+\log p}{(p-1)^2}; \tag{9}$$

остается исключить p изъ этого уравненія и даннаго (5): послѣднее, какъ квадратное, рѣшается относительно p, слѣд. исключеніе возможно по способу подстановленія; уравненіе получится трансцендентное:

$$x=\frac{C-\frac{-1\pm\sqrt{1+4xy}}{2x}+\log\left(\frac{-1\pm\sqrt{1+4xy}}{2x}\right)}{\left(\frac{-1\pm\sqrt{1+4xy}}{2x}-1\right)^2}.$$

2-й примѣръ. Дано уравненіе:

$$y=xp^2+p^3; \tag{10}$$

интегрированіе его приведется къ интегрированію такого уравненія:

$$(p^2-p)dx+(2xp+3p^2)dp=0, \tag{11}$$

которое такъ представится:

$$\frac{dx}{dp}+x\frac{2}{p-1}=-\frac{3p}{p-1}=-3\left(1+\frac{1}{p-1}\right); \tag{12}$$

это уравненіе линейное и будетъ имѣть алгебраическій интегралъ:

$$x=-p-\frac{1}{2}+\frac{C}{(p-1)^2}; \tag{13}$$

исключая p изъ (10) и (13), получимъ алгебраическое соотношеніе между x и y.

92. Частный видъ предыдущаго уравненія [(1) пред. §] составляетъ извѣстное уравненіе Клеро (Clairault):

$$y=xp+f(p). \tag{1}$$

Дифференцируя его и имѣя въ виду, что $dy=pdx$, мы получимъ отсюда:

$$[x+f'(p)]dp=0; \tag{2}$$

оно распадается на два уравненія:

$$dp=0, \tag{3}$$

и

$$x+f'(p)=0. \tag{4}$$

Первое имѣетъ своимъ интеграломъ

$$p=C; \tag{5}$$

исключая p изъ этого уравненія и (1) (по способу подстановленія), получимъ общій интегралъ уравненія (1):

$$y = Cx + f(C); \tag{6}$$

очевидно онъ представляетъ прямую линію. Исключая p изъ (4) и (1), получимъ «особенный интегралъ» этого уравненія (1), представляющій обертку семейства прямыхъ, представляемыхъ уравненіемъ (6). Дѣйствительно, эта обертка представится совокупностью уравненія (6) и его производнаго C:

$$x + f'(C) = 0, \tag{7}$$

эта же совокупность отъ совокупности (1) и (4) отличается только названіемъ исключаемаго параметра: тамъ онъ названъ p, здѣсь C.

Пусть дано уравненіе:

$$y = px + \frac{a}{p}, \tag{8}$$

гдѣ a постоянное; общій интегралъ его будетъ:

$$y = Cx + \frac{a}{C}; \tag{9}$$

— онъ представляетъ прямую линію; особенный получится, исключая p изъ (8) и слѣдующаго

$$x - \frac{a}{p^2} = 0, \tag{10}$$

[отвѣчающаго (4)]; отсюда найдемъ $p = \pm\sqrt{\frac{a}{x}}$; внося въ (8), получимъ

$$y = \pm 2\sqrt{ax}; \tag{11}$$

возвышая въ квадратъ, получимъ

$$y^2 = 4ax; \tag{12}$$

это уравненіе представляетъ параболу; слѣд. обертка семейства прямыхъ (9) есть парабола (12).

Для другого примѣра возьмемъ уравненіе:

$$y = xp + a\sqrt{1+p^2}; \tag{13}$$

общій интегралъ его представитъ семейство прямыхъ:

$$y = Cx + a\sqrt{1+C^2}; \tag{14}$$

особенный получится, исключая p изъ (13) и слѣдующаго:

$$x + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} = 0; \tag{15}$$

вставляя взятое отсюда значеніе x въ (13), получимъ:

$$y = \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}; \tag{16}$$

складывая квадратъ этого съ квадратомъ получающагося изъ (15) чрезъ перенесеніе $\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$ въ другую часть, получимъ такое:

$$x^2+y^2=a^2, \tag{17}$$

что представляетъ кругъ; этотъ кругъ есть обертка прямыхъ (14). Легко провѣрить, что это уравненіе будетъ тоже рѣшеніемъ уравненія (13).

93. Въ предыдущихъ §§ мы брали за новую вспомогательную перемѣнную p производную y' искомой функціи y, полагая $y'=p$; бываютъ однако случаи, когда вмѣсто y' приходится брать за новую вспомогательную перемѣнную какое либо выраженіе, составленное изъ производной и самой функціи. Напр. если дано уравненіе:

$$x=f(y'+ay), \tag{1}$$

то возьмемъ за вспомогательную величину:

$$z=y'+ay; \tag{2}$$

тогда будетъ

$$x=f(z), \tag{3}$$

и слѣд.

$$dx=f'(z)dz;$$

помножая на это равенство (2) *), получимъ, такъ какъ $y'dx=dy$, слѣдующее уравненіе между y и z:

$$dy+y.af'(z)dz=zf'(z)dz; \tag{4}$$

оно линейное и потому можетъ быть проинтегрировано; найдя интегралъ его, намъ останется исключить z изъ этого интеграла и (3), чтобы имѣть интегралъ даннаго дифференціальнаго уравненія (1).

Точно также, если дано уравненіе:

$$x=f\left(\frac{1}{y}y'+ay^m\right), \tag{5}$$

то беремъ за вспомогательную перемѣнную величину:

$$z=\frac{y'}{y}+ay^m; \tag{6}$$

тогда изъ (5) найдемъ:

$$x=f(z) \tag{7}$$

и слѣд.

$$dx=f'(z)dz;$$

помножая на это равенство (6), будетъ имѣть:

$$zf'(z)dz=\frac{dy}{y}+ay^m f'(z)dz, \tag{8}$$

или, умножая на y и перенося члены изъ одной части въ другую:

---

*) Накрестъ, т. е. правую одного на лѣвую часть другого равенства.

$$dy - yzf'(z)dz = -y^{m+1}af'(z)dz, \tag{9}$$

что представляетъ уравненіе Ив. Бернулли. Найдя его интегралъ, намъ останется исключить изъ него и (7) вспомогательную перемѣнную z, чтобы имѣть интегралъ даннаго дифференціальнаго уравненія (6).

Если дано уравненіе

$$ax = \frac{b(y'+h)^{\frac{1}{m-1}} - (y'+k)^{\frac{1}{m-1}}}{\left\{b(y'+h)^{\frac{m}{m-1}} - (y'+k)^{\frac{m}{m-1}}\right\}^{\frac{1}{m}}}, \tag{10}$$

то полагаемъ

$$\frac{y'+h}{y'+k} = z; \tag{11}$$

тогда будемъ имѣть отсюда

$$y' = \frac{h-kz}{z-1}, \tag{12}$$

а (10) приметъ такой видъ:

$$ax = \frac{bz^{\frac{1}{m-1}} - 1}{\left\{bz^{\frac{m}{m-1}} - 1\right\}^{\frac{1}{m}}}; \tag{13}$$

дифференцируя его, получимъ:

$$adx = \frac{b}{m-1} z^{\frac{1}{m-1}-1} \cdot \frac{z-1}{\left\{bz^{\frac{m}{m-1}} - 1\right\}^{\frac{1}{m}+1}} dz; \tag{14}$$

помножая (12) на это, получимъ:

$$ady = \frac{b}{m-1} \frac{(h-kz)z^{\frac{1}{m-1}-1}}{\left\{bz^{\frac{m}{m-1}} - 1\right\}^{\frac{1}{m}+1}} dz; \tag{15}$$

отсюда, интегрируя, получимъ:

$$a(y+C) = \frac{k - hbz^{\frac{1}{m-1}}}{\left\{bz^{\frac{m}{m-1}} - 1\right\}^{\frac{1}{m}}}. \tag{16}$$

Помножая (13) одинъ разъ на h, другой разъ на k и складывая каждый разъ съ (16), получимъ:

$$\left\{\begin{aligned} a(y+hx+C) &= \frac{k-h}{(bz^{\frac{m}{m-1}} - 1)^{\frac{1}{m}}}, \\ a(y+kx+C) &= \frac{(k-h)bz^{\frac{1}{m-1}}}{(bz^{\frac{m}{m-1}} - 1)^{\frac{1}{m}}}, \end{aligned}\right. \tag{17}$$

откуда легко исключится z по возвышеніи каждаго равенства въ степень m, послѣ раздѣленія на a, и мы получимъ такой интегралъ уравненія (10):

$$(y+kx+C)^m-b^{m-1}(y+hx+C)^m=\left(\frac{k-h}{a}\right)^m b^{m-1}. \tag{18}$$

Эти примѣры *) достаточно показываютъ, какъ слѣдуетъ поступать и въ другихъ аналогичныхъ случаяхъ, общаго же правила дать нельзя.

Примѣры для упражненій.

1) $y'^2+2\frac{y}{x}y'-1=0$; рѣшеніе:
$$x^2(x^2-3y^2)^2-2Cy(y^2-3x^2)-C^2=0.$$

2) $x^2y'^2-2xyy'+y^2-x^2y^2-x^4=0$; рѣшеніе:
$$[2y-x(e^{(x+c)}-e^{-(x+c)})][2y-x(e^{(c-x)}-e^{-(c-x)})]=0.$$

3) $x^2y'^2+3xyy'+2y^2=0$; рѣш.: $(xy-C)(x^2y-C)=0$.

4) $y'(y'+y)=x(x+y)$; рѣш. $(y-\frac{1}{2}x^2-C)(y+x-1-Ce^{-x})=0$.

5) $y'^3-(x^2+xy+y^2)y'^2+(x^3y+x^2y^2+xy^3)y'-x^3y^3=0$; рѣш.:
$$\left(y-\frac{1}{3}x^3-C\right)\left(y-Ce^{\frac{1}{2}x^2}\right)\left(y-\frac{1}{C-x}\right)=0.$$

6) $x=ay'+by'^2$: рѣш.: $y-C=\frac{1}{2}ap^2+\frac{2}{3}bp^3$, гдѣ $p=y'$.

7) $x=a:(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$; рѣш. $x^{\frac{2}{3}}+(y+C)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

8) $y\sqrt{1+y'^2}=y'$; рѣш.: $\left[x+\log\left(\frac{1+\sqrt{1+p^2}}{p}\right)+C\right]\sqrt{1+p^2}=1$; $(p=y')$.

9) $x(1+y'^2)=1$; 10) $xy'=\sqrt{1+y'^2}$; 11) $y=a\sqrt{1+y'^2}$.

12) $x^2y'^2+3xyy'+3y^2=0$; рѣшеніе:
$$x^3y^2-2Cx^{\frac{3}{2}}y\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\log x\right)+C^2=0;$$

13) $(xy'-y)^2-2xy(1+y'^2)=0$; рѣш.: $\left(x-\frac{C}{2}\right)^2+\left(y-\frac{C}{2}\right)^2=\frac{C^2}{4}$.

14) $(xy'+y)^2-2xy(1+y'^2)=0$; рѣшеніе:
$$(x-y)^2-C(x-x)\left[\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{\sqrt{2}}\right]+C^2=0.$$

15) $x^2(y-xy')=yy'^2$; рѣшеніе: $y^2+Cx^2=C^2$.

16) $ayy'^2+(2x-b)y'=y$; рѣшеніе: $y^2=C(aC-b+2x)$.

---

*) Изъ книги проф. В. П. Ермакова.

17) $y=2xy'+y^2y'^3$; рѣш. $y^2=2Cx+C^3$; (особ. рѣш. $27y^4+32x^3=0$).

18) $y=xy'^2+2y'$. 19) $y=\frac{1}{4}(x^2+y'^2)$. 20) $y=x\sqrt{1+y'^2}$.

21) $y=y'x+y'-y'^2$; $y=Cx+C-C^2$; особ. рѣш.: $(x+1)^2=4y$.

22) $y=y'x+\sqrt{b^2-a^2y'^2}$; $y=Cx+\sqrt{b^2-a^2C^2}$;

особ. рѣш.: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$.

23) $y'^2-xy'+y=0$; 24) $y-2xy'-y'^2=0$. 25) $y=xy'+a\frac{1+y'^2}{y'}$.

26) $y'=m\log x+\log(xy'-y)$; рѣшеніе:

$$y=xz-x^{-m}e^z,\quad x=e^{\frac{z}{m}}\left\{C+(m+1)e^{\frac{z}{m}}\right\}^{-\frac{1}{m+1}}.$$

27) $mx(y'+a)^2=y'^2+2ay'+b$. Рѣшеніе:

$$h\sqrt{\frac{y+C}{h}+x}-k\sqrt{\frac{y+C}{k}+x}=\frac{h-k}{m},$$ гдѣ h и k опредѣляются изъ уравненій: $h+k=a$, $h^2+hk+k^2=b$.

28) $(y-xy')\left(x-\frac{y}{y'}\right)=a^2$; 29) $(xy'-y)(xy'-2y)+x^2=0$.

30) $y'^3-6y'^2+11y'-6=0$.

ГЛАВА VI.

Объ особыхъ рѣшеніяхъ.

94. Мы видѣли въ § 92 на уравненіи Клеро примѣръ того, что данному дифференціальному уравненію иногда можетъ удовлетворять конечное уравненіе, не содержащее произвольной постоянной, и которое не можетъ быть получено изъ полнаго интеграла, давая произвольной постоянной какое-либо частное значеніе. *Такой интегралъ даннаго дифференціальнаго уравненія, который не можетъ быть полученъ изъ полнаго, давая частное значеніе произвольной постоянной, входящей въ него, называется особеннымъ рѣшеніемъ даннаго дифференціальнаго уравненія.* Изученію особенныхъ рѣшеній посвящается настоящая глава.

95. Если нельзя получить особенное рѣшеніе изъ полнаго интеграла, давая произвольной постоянной C частное значеніе, то возникаетъ вопросъ, нельзя ли его получить, вставляя вмѣсто C какую либо функцію x, зависящую отъ него прямо, или черезъ посредство y. Примѣръ уравненія Клеро даетъ основаніе предполагать, что это возможно, ибо уравненіе (7) § 92 опредѣляетъ C какъ функцію x. И дѣйствительно, это возможно.

Пусть
$$f(x, y, y')=0, \tag{1}$$
есть данное дифференціальное уравненіе, а
$$F(x, y, C)=0 \tag{2}$$
его полный интегралъ. Замѣняя C надлежащимъ образомъ подобранной функціей, это уравненіе можно превратить въ какое угодно, напр.:
$$\varphi(x, y)=0. \tag{3}$$
Дѣйствительно, если y входитъ въ это уравненіе, то, исключая его изъ этого уравненія и (2), мы получимъ соотношеніе такого вида:
$$\Phi(x, C)=0, \tag{4}$$
которое и опредѣлитъ C функціей отъ x, которую нужно подставить вмѣсто C во (2), чтобы оно давало для y ту же функцію отъ x, какъ и уравненіе (3). Если y не входитъ въ (3), то, исключая x изъ (3) и (2), получимъ соотношеніе такого вида:
$$\psi(y, C)=0, \tag{5}$$
которое опредѣлитъ C какъ функцію отъ y, которая, будучи вставлена вмѣсто C во (2), обратитъ его въ (3) для этого случая, т. е. въ функцію одного x. Если въ (3) входятъ x и y, то оба способа опредѣленія C примѣнимы. Если x не входитъ въ (3), а одинъ y, то первый способъ остается въ силѣ, тогда какъ второй теряетъ силу, ибо исключить въ такомъ случаѣ возможно только y, а не x. Но разъ уравненіе (2) чрезъ надлежащую замѣну C функціей x или y можно превратить въ какое угодно, то можно его превратить и въ то, которое представляетъ особенное рѣшеніе даннаго дифференціальнаго уравненія. Остается такимъ образомъ опредѣлить тѣ условія, которымъ должна удовлетворять такая функція.

96. Трактуя въ уравненіи (2) предыдущаго § величину C какъ постоянную, мы получимъ такое производное отъ него уравненіе:
$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0; \tag{1}$$
исключая изъ него и (2) пред. § величину C, мы и придемъ къ данному дифференціальному уравненію (1) пред. §.

Если же будемъ въ уравненіи (2) пред. § трактовать C какъ функцію x (непосредственно или чрезъ посредство y — это всё равно), то получимъ такое производное уравненіе:
$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial C}\frac{dC}{dx}=0. \tag{2}$$

Изъ (1) мы получаемъ такое значеніе для y':

$$(3)\qquad y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}};$$

изъ (2) — такое:

$$(4)\qquad y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} - \frac{\frac{\partial F}{\partial C}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\frac{dC}{dx};$$

для того, чтобы это послѣднее удовлетворяло тому же уравненію (1) пред. §, должно быть

$$(5)\qquad \frac{\frac{\partial F}{\partial C}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\frac{dC}{dx} = 0,$$

ибо тогда (4) сдѣлается по виду тождественно (3), а что мы будемъ разумѣть подъ C, постоянную, или функцію, это не вліяетъ на процессъ исключенія величины C изъ двухъ уравненій, въ которыя она входитъ, и потому, исключая C изъ (4) и (2) пред. §, при условіи (5), мы получимъ тотъ же результатъ, какъ и прежде. Условіе (5) распадается на два:

$$(6)\qquad 1)\ \frac{dC}{dx} = 0; \qquad 2)\ \frac{\frac{\partial F}{\partial C}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = 0;$$

первое даетъ $C = \text{const.}$, слѣд. возвращаетъ насъ къ полному интегралу; второе даетъ намъ ту функцію, будучи рѣшено по C, которую нужно подставить вмѣсто C, чтобы получить особенное рѣшеніе. Однако оно можетъ дать для C и значеніе постоянное; тогда полученное значеніе будетъ частнымъ интеграломъ, а не особеннымъ рѣшеніемъ.

Разсматривая въ уравненіи (2) пред. § x какъ функцію отъ y и повторяя тѣ же разсужденія, придемъ къ тому выводу, что особенныя рѣшенія могутъ получиться точно также и съ помощью такого условія:

$$(7)\qquad \frac{\frac{\partial F}{\partial C}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = 0.$$

Уравненіе (6) 2) и (7) могутъ быть представлены въ болѣе сжатой формѣ, которая къ тому же имѣетъ то преимущество, что не зависитъ отъ частнаго вида, въ которомъ представляется полный интегралъ, и позволяетъ глубже вникнуть въ смыслъ особеннаго рѣшенія, а также представляетъ удобства практическія, когда уравненіе (2) рѣшено по той или другой изъ перемѣнныхъ x и y. Разсматривая въ уравненіи

$$F(x, y, C)=0, \tag{8}$$

y какъ функцію x и C, можно его дифференцировать по C, и тогда получимъ такое производное:

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial C}+\frac{\partial F}{\partial C}=0, \tag{9}$$

откуда получимъ:

$$\frac{\partial y}{\partial C}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial C}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \tag{10}$$

такъ что условіе (6) 2) такъ представится:

$$\frac{\partial y}{\partial C}=0, \tag{11}$$

что, очевидно, не зависитъ отъ частнаго вида, въ которомъ представленъ полный интегралъ даннаго дифференціальнаго уравненія; кромѣ того, это уравненіе показываетъ, что этотъ разъ y есть величина неизмѣняющаяся, когда при томъ же значеніи x отъ одной кривой семейства переходимъ къ смежной кривой, т. е. той, для которой значеніе C безконечно мало отличается отъ его значенія для первой кривой; слѣд. y, при разсматриваемомъ значеніи x, есть ордината точки пересѣченія двухъ смежныхъ кривыхъ семейства, слѣд. ордината обертки этого семейства кривыхъ. Такъ какъ не всякое семейство кривыхъ имѣетъ обертку *), то отсюда слѣдуетъ, что не всякое дифференціальное уравненіе имѣетъ особенныя рѣшенія.

Точно также, разсматривая въ уравненіи (8) x какъ функцію отъ y и C и дифференцируя его по C, мы придемъ къ тому выводу, что уравненіе (7) можно такъ представить:

$$\frac{\partial x}{\partial C}=0. \tag{12}$$

Чтобы не пропустить ни одного особеннаго рѣшенія, необходимо разсматривать обѣ формы условій для C какъ функціи, способной превращать полный интегралъ въ особенное рѣшеніе.

Уравненія (6) 2) и (7) приводятся къ одному изъ такихъ:

$$a)\ \frac{\partial F}{\partial C}=0; \quad b)\ \frac{\partial F}{\partial x}=\infty; \quad c)\ \frac{\partial F}{\partial y}=\infty.$$

Исключая (C) изъ (8) и (a), мы получимъ уравненіе

---

*) Напр. семейство концентрическихъ круговъ не имѣетъ обертки, ибо такіе круги не пересѣкаются.

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{13}$$

въ которомъ лѣвая часть будетъ дискриминантъ по C уравненія (8) и которое представитъ геометрическое мѣсто тѣхъ точекъ плоскости, въ которыхъ C, опредѣляемое въ функціи x и y уравненіемъ (8), получаетъ равныя значенія. Это будетъ имѣть мѣсто во 1) въ точкахъ обертки кривыхъ семейства, ибо чрезъ каждую точку обертки проходятъ двѣ смежныя кривыя, т. е. тѣ, для которыхъ въ предѣлѣ C получаетъ одинаковое значеніе; во 2) кратныя точки и въ 3) точки возврата кривой, ибо чрезъ такія точки проходятъ или въ такихъ точкахъ сходятся двѣ или болѣе вѣтви одной и той же кривой, для которой слѣд. C имѣетъ то же значеніе; но только точки первой категоріи будутъ принадлежать особенному рѣшенію, точки же второй и третьей категоріи вообще не будутъ принадлежать ему, а лишь въ видѣ исключенія, когда случайно y' получитъ то же значеніе, какъ и для одной изъ кривыхъ семейства (8). Уравненіе (13) распадается вообще на три множителя: одинъ доставитъ обертку семейства (8) кривыхъ, другой геометрическое мѣсто кратныхъ точекъ, третій таковое точекъ возврата, и лишь когда случайно вѣтви послѣднихъ кривыхъ касаются вѣтвей первой кривой, y' въ точкѣ касанія получитъ то же значеніе какъ и для первой кривой; и лишь когда нѣкоторая вѣтвь которой-нибудь изъ послѣднихъ двухъ кривыхъ сольётся съ которою-нибудь вѣтвью первой кривой, она можетъ доставить особенное рѣшеніе. Въ кратныхъ точкахъ кривой и въ точкахъ возврата имѣютъ заразъ мѣсто такія уравненія:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0; \tag{14}$$

если они имѣютъ мѣсто одновременно съ уравненіемъ (a), то лѣвыя части (6) 2) и (7) могутъ и не обращаться въ нуль. Такимъ образомъ, въ этихъ уравненіяхъ постороннія рѣшенія, не удовлетворяющія данному дифференціальному уравненію, устраняются, тогда какъ въ (13) они содержатся; а потому пользованіе уравненіемъ (a) вынуждаетъ насъ дѣлать повѣрку полученнаго рѣшенія.

Переходя къ уравненіямъ (b) и (c), нужно замѣтить, что въ силу (1), вообще говоря, они должны существовать совмѣстно, но тогда y' принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{\infty}{\infty}$, какъ въ особенныхъ точкахъ, и слѣд. опять эти уравненія могутъ доставить постороннія рѣшенія, а потому требуютъ повѣрки найденнаго результата. При этомъ необходимо, чтобы эти рѣшенія не обращали бы $\frac{\partial F}{\partial C}$ въ ∞, какъ то слѣдуетъ изъ (6) 2) и (7), которыя въ такомъ случаѣ могутъ и не удовлетвориться. Уравненія (b) и (c) могутъ однако имѣть мѣсто и отдѣльно, притомъ не обращая

$\frac{\partial F}{\partial C}$ въ безконечность, и тогда они доставятъ тѣ особенныя рѣшенія, которыя сводятся къ системѣ прямыхъ, перпендикулярныхъ и соотвѣтственно параллельныхъ оси y, ибо y' будетъ $=\infty$ въ первомъ случаѣ и $=0$ во второмъ.

97. Пояснимъ изложенное примѣрами. Пусть дано дифференціальное уравненіе:

$$xdx+ydy=\sqrt{x^2+y^2-a^2}.dy. \tag{1}$$

Его интегрирующій множитель сразу виденъ; это

$$(x^2+y^2-a^2)^{-\frac{1}{2}};$$

помножая на него, будемъ имѣть:

$$\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}=dy, \tag{2}$$

слѣд., интегрируя, получимъ

$$\sqrt{x^2+y^2-a^2}=y+c; \tag{3}$$

или, возвышая въ квадратъ и перенося всё налѣво:

$$x^2-2cy-c^2-a^2=0. \tag{4}$$

Отсюда находимъ:

$$y=\frac{x^2-c^2-a^2}{2c}. \tag{5}$$

Дифференцируя его по c, послѣ упрощеній получимъ:

$$\frac{\partial y}{\partial c}=\frac{a^2-x^2-c^2}{2c^2}; \tag{6}$$

это должно приравнять нулю для полученія той функціи, которую нужно вставить въ (4) вмѣсто c, чтобы получить особенное рѣшеніе; получимъ такое уравненіе:

$$\frac{\partial y}{\partial c}=\frac{a^2-x^2-c^2}{2c^2}=0. \tag{7}$$

Дробь можетъ обратиться въ нуль, когда знаменатель ея обратится въ безконечность; но здѣсь при $c=\infty$ получается $-\frac{1}{2}$ для лѣвой части уравненія, а не нуль; слѣд. остается положить

$$a^2-x^2-c^2=0; \tag{8}$$

отсюда находимъ $c=\pm\sqrt{a^2-x^2}$, и подставляя это въ (4), получимъ послѣ легкихъ преобразованій:

$$-2\sqrt{a^2-x^2}(\sqrt{a^2-x^2}\pm y)=0. \tag{9}$$

Это уравненіе распадается на два:

(10) $$-2\sqrt{a^2-x^2}=0 \quad \text{и} \quad \sqrt{a^2-x^2}\pm y=0,$$

которыя легко приводятся: первое къ такому:

(11) $$x^2-a^2=0,$$

— оно представляетъ частное рѣшеніе, ибо получается изъ (4) при $c=0$; второе къ такому:

(12) $$x^2+y^2-a^2=0,$$

которое и будетъ особенное рѣшеніе. Что оно рѣшеніе это видно, ибо на основаніи его отдѣльно обѣ части даннаго уравненія (1) обращаются въ нуль; что оно особенное,—это слѣдуетъ изъ того, что мы его получили при $c=\pm\sqrt{a^2-x^2}$, слѣд. приравнявъ функціи, а не постоянной: какое бы постоянное значеніе мы ни давали c, никогда не появится тамъ членъ съ y^2, который мы видимъ въ уравненіи (12).

Чтобы показать примѣненіе условія $\frac{\partial x}{\partial c}=0$, которое можетъ дать рѣшенія, незаключающіяся въ числѣ тѣхъ, которыя получаются съ помощью условія $\frac{\partial y}{\partial c}=0$, мы рѣшимъ уравненіе (4) относительно x; получимъ:

(13) $$x=\pm\sqrt{2cy+c^2+a^2};$$

отсюда имѣемъ:

(14) $$\frac{\partial x}{\partial c}=\pm\frac{y+c}{\sqrt{2cy+c^2+a^2}};$$

это нужно приравнять нулю; но какъ знаменатель обращается въ ∞ лишь при $c=\infty$, когда обращается въ ∞ и числитель, причемъ для $\frac{\partial x}{\partial c}$ получается при этомъ ± 1, а не нуль, то остается приравнять нулю числитель, что доставитъ такое уравненіе для c:

(15) $$y+c=0,$$

откуда находимъ

(16) $$c=-y;$$

подставляя это въ (4), находимъ по прежнему:

(17) $$x^2+y^2-a^2=0,$$

для особеннаго рѣшенія нашего дифференціальнаго уравненія.

Обозначая чрезъ $F(x, y, c)$ первую часть уравненія (4), мы будемъ имѣть

(18) $$\frac{\partial F}{\partial c}=-2(y+c)=0,$$

что приводитъ къ (17), отличаясь отъ (15) лишь постояннымъ множителемъ. Замѣтимъ, что послѣднiй методъ полученiя особеннаго рѣшенiя ясно показываетъ, что оно представляетъ обертку параболъ, представляемыхъ уравненiемъ (4); эти параболы имѣютъ ось, параллельную оси y; положенiе вершинъ ихъ и параметръ зависятъ отъ c.

Условiя $\frac{\partial F}{\partial x}=\infty$, или $\frac{\partial F}{\partial y}=\infty$, приводясь для нашего уравненiя (4) къ такимъ на основанiи самаго уравненiя:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x=\pm 2\sqrt{2cy+c^2+a^2}=\infty; \tag{19}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-2c=\infty, \tag{20}$$

удовлетворяясь только положенiемъ $c=\infty$, даютъ частныя рѣшенiя, а не особенныя.

98. Замѣтимъ, что рѣшенiе (17) предыдущаго § обращаетъ въ безконечность интегрирующiй множитель уравненiя (1) пред. §, именно

$$(x^2+y^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Это имѣетъ мѣсто вообще, какъ показалъ Штурмъ. Дѣйствительно, если интегралъ даннаго дифференцiальнаго уравненiя

$$y'-f(x, y)=0 \tag{1}$$

представить въ видѣ

$$u-C=0, \tag{2}$$

гдѣ u функцiя x и y, то условiе $\frac{\partial F}{\partial C}:\frac{\partial F}{\partial y}=0$ обратится въ такое:

$$\frac{1}{\frac{\partial u}{\partial y}}=0; \tag{3}$$

но для уравненiя (1) интегрирующiй множитель

$$\lambda=\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{4}$$

— ибо тогда оно приведется къ du, — слѣд. по (3) для особеннаго рѣшенiя будетъ

$$\lambda=\infty, \tag{5}$$

какъ было нами замѣчено на частномъ примѣрѣ.

99. Возьмемъ еще примѣръ

$$y'^3-4xyy'+8y^2=0. \tag{1}$$

Чтобы проинтегрировать это уравненiе, рѣшимъ его по x; получимъ:

(2) $$x=\frac{y'^3+8y^2}{4yy'}=\frac{y'^2}{4y}+\frac{2y}{y'};$$

положимъ теперь $y'=\frac{1}{q}$; тогда будемъ имѣть:

(3) $$x=\frac{1}{4yq^2}+2yq.$$

Дифференцируя его по y, считая x за его функцію и замѣчая, что $q=\frac{dx}{dy}$, мы будемъ имѣть:

(4) $$q=-\frac{1}{4y^2q^2}+2q+\left(-\frac{1}{2yq^3}+2y\right)\frac{dq}{dy},$$

или, перенося все въ одну часть:

(5) $$q-\frac{1}{4y^2q^2}+2y\left(1-\frac{1}{4y^2q^3}\right)\frac{dq}{dy}=0;$$

а это можно еще такъ представить:

(6) $$\left(1-\frac{1}{4y^2q^3}\right)\left(q+2y\frac{dq}{dy}\right)=0.$$

Какъ видимъ, это уравненіе распадается на два такихъ:

(7) $$1-\frac{1}{4y^2q^3}=0, \quad \text{или} \quad 4y^2q^3=1,$$

и

(8) $$q+2y\frac{dq}{dy}=0.$$

Исключая q изъ (7) и (3), получимъ

(9) $$y=\frac{4}{27}x^3;$$

— это особенное рѣшеніе, какъ увидимъ ниже. Уравненіе (8) приводится легко къ такому виду:

(10) $$\frac{dy}{y}+2\frac{dq}{q}=0,$$

что по интегрированіи даетъ:

(11) $$\log(yq^2)=\log C',$$

и слѣд.

$$yq^2=C'.$$

Отсюда $q=\pm\sqrt{\frac{C'}{y}}$; внося это въ (3), получимъ:

(12) $$x=\frac{1}{4C'}\pm 2\sqrt{C'y},$$

и исключая радикалъ:

$$\left(x-\frac{1}{4C'}\right)^2=4C'y; \tag{13}$$

полагая здѣсь $1:4C'=C$, будемъ имѣть:

$$y=C(x-C)^2; \tag{14}$$

— это общее рѣшенiе, или полный интегралъ. Отсюда находимъ:

$$\frac{\partial y}{\partial C}=(x-C)^2-2C(x-C)=(x-C)(x-3C); \tag{15}$$

приравнивая нулю, получимъ отсюда:

$$C=x \quad \text{и} \quad C=\frac{x}{3}; \tag{16}$$

первое рѣшенiе, будучи внесено въ (14), дастъ $y=0$, что представляетъ частное рѣшенiе, ибо получается изъ (14), полагая тамъ $C=0$; другое даетъ какъ разъ уравненiе (9), которое такимъ образомъ будетъ особенное рѣшенiе, (такъ какъ ни при какомъ частномъ значенiи C въ (14) не можетъ появиться x^3). Повѣрку того, что это есть рѣшенiе, предоставляемъ читателю. Это рѣшенiе представляетъ геометрически обертку параболъ, представляемыхъ уравненiемъ (14), ибо, приведя его къ виду:

$$C(x-C)^2-y=0, \tag{17}$$

увидимъ, что вторая часть выраженiя (15), отъ приравниванiя которой нулю мы получили $C=\frac{x}{3}$, есть частная производная по C лѣвой части уравненiя (17).

100. Возьмемъ еще примѣръ:

$$ay'=\sqrt{xy}. \tag{1}$$

Въ этомъ уравненiи перемѣнныя легко отдѣляются, и мы получаемъ:

$$a\frac{dy}{\sqrt{y}}=\sqrt{x}\,dx; \tag{2}$$

интегралъ этого уравненiя будетъ:

$$a\sqrt{y}=\frac{1}{3}\sqrt{x^3}+C, \tag{3}$$

или

$$F(x,\,y,\,C)=a\sqrt{y}-\frac{1}{3}\sqrt{x^2}-C=0.$$

Частная производная по C лѣвой части будетъ $=-1$; ее нельзя приравнять нулю; частная производная по y:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=a\frac{1}{2\sqrt{y}} \tag{4}$$

можетъ быть приравнена безконечности:

(5) $$\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}=\infty.$$

Но изъ уравненія (3) внося сюда выраженіе для $\sqrt{y}$, мы дадимъ ему такой видъ:

(6) $$\frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{1}{3}\sqrt{x^3}+C}=\infty;$$

слѣд.

(7) $$\frac{1}{3}\sqrt{x^3}+C=0,$$

откуда

(8) $$C=-\frac{1}{3}\sqrt{x^3}.$$

Внося это въ (3), получимъ $a\sqrt{y}=0$, т. е.

(9) $$y=0;$$

это представляетъ, слѣд. особенное рѣшеніе, ибо очевидно оно удовлетворяетъ (1) и получается изъ полнаго интеграла (3), приписывая C функціональное, а не постоянное значеніе. Результатъ (9) прямо слѣдуетъ изъ (5), но не какъ слѣдствіе (8), котораго однако оно требуетъ въ силу (3).

Для другого примѣра полученія особеннаго рѣшенія изъ условія $\frac{\partial F}{\partial y}=\infty$ можетъ служить уравненіе (8) § 92, именно:

(10) $$y=px+\frac{a}{p},$$

для котораго въ этомъ § мы получили такой полный интегралъ:

(11) $$y-Cx-\frac{a}{C}=0,$$

когда этотъ послѣдній представить въ видѣ, рѣшенномъ относительно C, именно

(12) $$F(x,y,C)=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4ax}}{2x}-C=0;$$

тогда особенное рѣшеніе не найдется изъ условія $\frac{\partial F}{\partial C}=0$, а изъ условія $\frac{\partial F}{\partial y}=\infty$, и будетъ $y^2-4ax=0$, согласно съ найденнымъ въ томъ §.

101. Особенныя рѣшенія могутъ быть получены и прямо изъ даннаго дифференціальнаго уравненія, если оно имѣетъ таковыя. Въ самомъ дѣлѣ, если дано уравненіе

(1) $$f(x,y,y')=0$$

и его общій интегралъ есть:

$$F(x, y, C) = 0, \tag{2}$$

то съ помощью его и его производнаго по x уравненія:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0, \tag{3}$$

можно выразить y и y' въ функціяхъ отъ x и C; подставляя эти выраженія, которыя мы означимъ чрезъ $\overline{y}$ и $\overline{y}'$, въ (1), мы будемъ имѣть тождественно:

$$f(x, \overline{y}, \overline{y}') = 0. \tag{4}$$

Это тождество можно дифференцировать какъ по x, такъ и по C. Отъ послѣдняго оно зависитъ чрезъ посредство $\overline{y}$ и $\overline{y}'$, а потому, дифференцируя по C, мы будемъ имѣть:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{y}} \frac{\partial \overline{y}}{\partial C} + \frac{\partial f}{\partial \overline{y}'} \frac{\partial \overline{y}'}{\partial C} = 0, \tag{5}$$

откуда получимъ:

$$\frac{\partial \overline{y}}{\partial C} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \overline{y}'}}{\dfrac{\partial f}{\partial \overline{y}}} \frac{\partial \overline{y}'}{\partial C}. \tag{6}$$

Условіе особеннаго рѣшенія по (11) § 96 есть: $\frac{\partial \overline{y}}{\partial C} = 0$; а потому изъ (6) будетъ слѣдовать, что для особеннаго рѣшенія должно быть:

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \overline{y}'}}{\dfrac{\partial f}{\partial \overline{y}}} \cdot \frac{\partial \overline{y}'}{\partial C} = 0. \tag{7}$$

Если $\frac{\partial \overline{y}'}{\partial C}$ не $= 0$, то это условіе приводится къ слѣдующему:

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \overline{y}'}}{\dfrac{\partial f}{\partial \overline{y}}} = 0. \tag{8}$$

Лапласъ далъ ему болѣе сжатую форму. Если помножить (6) на dC, то оно приметъ такой видъ:

$$d\overline{y} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \overline{y}'}}{\dfrac{\partial f}{\partial \overline{y}}} d\overline{y}', \tag{9}$$

откуда будемъ имѣть:

$$\frac{d\overline{y}'}{d\overline{y}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \overline{y}}}{\frac{\partial f}{\partial \overline{y}'}}; \tag{10}$$

слѣд. (8) можетъ быть замѣнено такимъ:

$$\frac{d\overline{y}'}{d\overline{y}} = \infty, \tag{11}$$

или, если положить $y' = p$ и отбросить черточки надъ y и y', ставшія теперь ненужными, такимъ:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \infty, \tag{12}$$

гдѣ мы теперь перемѣняемъ d на ∂, чтобы лучше показать, что x считается при этомъ за постоянное.

Предыдущее имѣетъ мѣсто лишь въ предположеніи, что $\frac{\partial \overline{y}'}{\partial C}$ не $= 0$; если же будетъ $\frac{\partial \overline{y}'}{\partial C} = 0$, то (7) пред. § будетъ выполнено и помимо (8); но если

$$\frac{\partial \overline{y}'}{\partial C} = 0,$$

то, такъ какъ $\frac{\partial \overline{y}'}{\partial C} = \frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial C \partial x} = \frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial x \partial C} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \overline{y}}{\partial C}\right) = 0$, это значитъ, что по подстановкѣ въ $\frac{\partial y}{\partial C}$ вмѣсто y его выраженія чрезъ x и C изъ общаго интеграла, она не будетъ содержать x; но въ такомъ случаѣ изъ условія $\frac{\partial y}{\partial C} = 0$ нельзя вывести C функціей x: изъ этого условія для C найдутся постоянныя значенія, а это доставитъ частныя рѣшенія, а не особенныя. Слѣд. послѣднія найдутся только изъ условія (8), или, что то же, изъ Лапласовскаго условія (12).

102. Чтобы не пропустить ни одного изъ особыхъ рѣшеній даннаго дифференціальнаго уравненія:

$$f(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

надобно еще разсмотрѣть его, трактуя подобно тому, какъ то было сдѣлано въ концѣ § 96, x какъ функцію отъ y. Означая чрезъ x' производную x по y, слѣд. принимая $x' = \frac{1}{y'}$, мы можемъ изъ общаго интеграла этого уравненія:

$$F(x, y, C) = 0, \tag{2}$$

и его производнаго по y, какъ по независимой перемѣнной:

$$\frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

получить выраженія x и x' чрезъ y и C; означая эти выраженія чрезъ $\bar{x}$ и $\bar{x}'$ соотвѣтственно, и внося въ (1), получимъ:

$$f\left(\bar{x}, y, \frac{1}{\bar{x}'}\right) = f_1(\bar{x}, y, \bar{x}') = 0, \tag{4}$$

— тождественно. Дифференцируя его по C, имѣя въ виду, что послѣднее входитъ въ уравненіе лишь чрезъ посредство $\bar{x}$ и $\bar{x}'$, мы будемъ имѣть:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial C} + \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}'} \frac{\partial \bar{x}'}{\partial C} = 0; \tag{5}$$

отсюда получимъ:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial C} = -\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial \bar{x}'}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial \bar{x}}} \frac{\partial \bar{x}'}{\partial C}. \tag{6}$$

По (12) § 96 условіе особеннаго рѣшенія будетъ: $\frac{\partial \bar{x}}{\partial C} = 0$; если $\frac{\partial \bar{x}'}{\partial C}$ не $= 0$, то это условіе по (6) приведётся къ такому:

$$\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial \bar{x}'}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial \bar{x}}} = 0. \tag{7}$$

Лапласъ и этому условію придалъ сжатую форму. Помножая (6) на dC, будемъ имѣть:

$$d\bar{x} = -\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial \bar{x}'}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial \bar{x}}} d\bar{x}', \tag{8}$$

откуда получимъ:

$$\frac{d\bar{x}'}{d\bar{x}} = -\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial \bar{x}}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial \bar{x}'}}. \tag{9}$$

Но $x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{p}$; потому, отбрасывая при этомъ ставшія теперь ненужными черточки надъ x и x', мы будемъ имѣть отсюда:

(10)
$$\frac{\partial\left(\frac{1}{p}\right)}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial \overline{x}'}},$$

и слѣд. (7) замѣнится такимъ:

(11)
$$\frac{\partial\left(\frac{1}{p}\right)}{\partial x}=\infty.$$

Это и есть Лапласовская формула. Условіе $\frac{\partial x}{\partial C}=0$ будетъ выполнено при $\frac{\partial \overline{x}'}{\partial C}=0$ помимо (7); но оно даетъ лишь частныя рѣшенія, въ чёмъ убѣдимся какъ въ концѣ пред. §.

103. Вернемся еще разъ къ (8) § 101. Если мы продифференцируемъ данное, дифференціальное уравненіе:

(1)
$$f(x, y, y')=0,$$

то будемъ имѣть:

(2)
$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}=0;$$

раздѣливъ его на $\frac{\partial f}{\partial y}$, получимъ такое;

(3)
$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'}{\frac{\partial f}{\partial y}}+\frac{\frac{\partial f}{\partial y'}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\cdot\frac{dy'}{dx}=0;$$

это уравненіе на основаніи (8) § 101 приведется къ такому:

(4)
$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'}{\frac{\partial f}{\partial y}}=0.$$

Такимъ образомъ, когда уравненіе (1) будетъ имѣть особенное рѣшеніе, то кромѣ него функція y со своей производной y' будутъ удовлетворятъ еще уравненію (4) и уравненію (8) § 101, всего вмѣстѣ съ (1) тремъ уравненіямъ; но изъ трехъ уравненій, можно исключить y и y', и мы получимъ условіе между коэффиціентами уравненія (1) и ихъ производными, необходимое для того, чтобы эти три уравненія были совмѣстны, и слѣд. для того, чтобы данное дифференціальное уравненіе имѣло особенныя рѣшенія. Такимъ образомъ мы видимъ, что только при выполненіи этихъ условій уравненіе (1) будемъ имѣть особенныя рѣшенія; вообще же оно не будетъ имѣть ихъ.

104. Условіе (8) § 101 будетъ выполнено, когда

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=0, \tag{1}$$

—если только эти значенія не обращаютъ $\frac{\partial f}{\partial y}$ въ нуль, а иногда и при этомъ; въ случаѣ (1) данное уравненіе, (1) пред. §, даетъ для y' нѣкоторыя значенія равныя. Пикаръ (Picard) въ III томѣ своего «Traité d'Analyse», Chap. III, p. 44, прямо опредѣляетъ особенное рѣшеніе какъ такое, для котораго данное дифференціальное уравненіе имѣетъ равные корни, и прямо замѣчаетъ, что такъ какъ для существованія равныхъ корней коэффиціенты уравненія должны удовлетворять извѣстнымъ условіямъ, то отсюда слѣдуетъ, что не всякое дифференціальное уравненіе можетъ имѣть особенное рѣшеніе. Но даже если эти условія и выполнены, то всётаки уравненіе

$$\Phi(x, y)=0, \tag{2}$$

получаемое чрезъ исключеніе y' изъ уравненій (1) предыдущаго и настоящаго §§, не будетъ вообще представлять особенное рѣшеніе уравненія (1) пред. §. Въ этомъ легко убѣдиться при помощи геометрическихъ разсматриваній.

Уравненіе (2) будетъ геометрическое мѣсто точекъ семейства кривыхъ, представляемаго полнымъ интеграломъ даннаго дифференціальнаго уравненія, въ которыхъ совпадаютъ двѣ (или болѣе) касательныхъ, т. е. геометрическое мѣсто точекъ возврата этого семейства кривыхъ; но касательная въ точкѣ (x, y) къ этому геометрическому мѣсту вообще не будетъ совпадать съ касательною къ проходящей чрезъ ту же точку кривой того же семейства, и y' изъ уравненія

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}y'=0 \tag{3}$$

будетъ вообще отличенъ отъ y', получаемаго изъ дифференціальнаго уравненія $f(x, y, y')=0$; только случайно возможно такое совпаденіе, и если оно имѣетъ мѣсто для непрерывнаго ряда точекъ, образующихъ такимъ образомъ одну изъ вѣтвей кривой (2), то тогда особенное рѣшеніе существуетъ и будетъ представлено этою вѣтвью, такъ какъ къ этой вѣтви будутъ касаться всѣ послѣдовательныя кривыя семейства, и она потому будетъ ихъ оберткою.

105. Мы видѣли въ § 103, что при условіи $\frac{\partial f}{\partial y'}=0$ будетъ выполнено и условіе

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0, \tag{1}$$

какъ то видно изъ (3). Но, какъ то слѣдуетъ изъ того же самаго уравненія (3), это условіе будетъ выполнено и тогда, когда $\frac{dy'}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}=0$, т. е. въ точкахъ перегиба кривой, и геометрическое мѣсто точекъ перегиба семейства кривыхъ, представляемыхъ полнымъ интеграломъ даннаго дифференціальнаго уравненія, получится чрезъ исключеніе y' изъ уравненія (1) и даннаго дифференціальнаго уравненія [(1) § 103]; пусть оно будетъ:

$$\Psi(x, y)=0. \tag{2}$$

Но касательная и этого геометрическаго мѣста точекъ перегиба вообще не будетъ совпадать съ касательной къ той кривой семейства, которая проходитъ чрезъ точку (x, y): это можетъ имѣть мѣсто какъ исключеніе изъ общаго правила.

Если это исключеніе имѣетъ мѣсто для цѣлаго непрерывнаго ряда точекъ, образующихъ вѣтвь кривой геометрическаго мѣста точекъ перегиба, то эта вѣтвь будетъ особеннымъ рѣшеніемъ даннаго дифференціальнаго уравненія; ибо къ ней будутъ касаться послѣдовательныя кривыя семейства, слѣд. она будетъ ихъ оберткою.

Такимъ образомъ мы видимъ, исходя изъ условій существованія особеннаго рѣшенія, что вообще данное дифференціальное уравненіе его не имѣетъ; если же имѣетъ, то оно можетъ быть представлено вѣтвью, общею какъ кривой (2) пред. §, такъ и кривой (2) наст. §, которая только и можетъ быть оберткою семейства кривыхъ, представляемыхъ полнымъ интеграломъ, ибо для той и другой кривой условія необходимыя, хотя и недостаточныя для существованія особеннаго рѣшенія, выполняются. Поэтому, найдя общаго наибольшаго дѣлителя $\Theta(x, y)$ функцій $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$, мы получимъ, приравнивая его нулю, уравненіе

$$\Theta(x, y)=0, \tag{3}$$

которое *можетъ* представлять обертку семейства кривыхъ, представляемыхъ полнымъ интеграломъ даннаго дифференціальнаго уравненія, а потому *можетъ* представлять его особенное рѣшеніе: непосредственная повѣрка покажетъ, представляетъ ли она его, или нѣтъ.—Эти геометрическія соображенія не зависятъ отъ того, которая изъ перемѣнныхъ принимается за независимую, а потому теперь нѣтъ надобности пересматривать этотъ вопросъ вновь, принимая y за независимую перемѣнную, а x за его функцію.

Примѣчаніе. Вопросъ объ особенныхъ рѣшеніяхъ привлекалъ вниманіе многихъ первоклассныхъ ученыхъ, какъ Эйлеръ, Лагранжъ, Лежандръ, Пуассонъ, Буль, Кэли, Клебшъ. Изъ русскихъ ученыхъ этимъ вопросомъ занимались Д. М. Деларю и А. В. Васильевъ, который въ своей брошюрѣ:

«Объ особенныхъ рѣшеніяхъ въ связи съ новыми взглядами на задачу интегрированія дифференціальныхъ уравненій перваго порядка», Казань, 1878 г., далъ прекрасное изложеніе изслѣдованій Клебша на основаніи его теоріи коннексовъ.

106. Пояснимъ изложенное нѣсколькими примѣрами. Возьмемъ наше прежнее уравненіе [(1) § 97], которое по раздѣленіи на dx приметъ такой видъ:

$$x+yy'=\sqrt{x^2+y^2-a^2}.y'; \tag{1}$$

исключая радикалъ, мы ему дадимъ такой видъ:

$$f\equiv(x+yy')^2-(x^2+y^2-a^2)y'^2=0, \tag{2}$$

или

$$f\equiv(a^2-x^2)y'^2+2xyy'+x^2=0. \tag{3}$$

Отсюда находимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=2[(a^2-x^2)y'+xy]=0; \tag{4}$$

рѣшая по y', будемъ имѣть:

$$y'=\frac{xy}{x^2-a^2}; \tag{5}$$

подставляя это въ (3), умноженное на (a^2-x^2), послѣ упрощеній получимъ:

$$-x^2(x^2+y^2-a^2)=0. \tag{6}$$

Это будетъ уравненіе $\Phi(x, y)=0$ § 104, т. е. геометрическое мѣсто точекъ возврата. Далѣе получаемъ изъ (3):

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-2xy'^2+2yy'+2x; \quad \frac{\partial f}{\partial y}=2xy'; \tag{7}$$

слѣд.

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=-2xy'^2+2yy'+2x+2xy'^2=2(x+yy')=0; \tag{8}$$

отсюда имѣемъ $y'=-\frac{x}{y}$, и, внося это во (2), получаемъ:

$$-\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2-a^2)=0. \tag{9}$$

Это есть уравненіе $\Psi(x, y)=0$ § 105, т. е. геометрическое мѣсто точекъ перегиба семейства кривыхъ, представляемыхъ полнымъ интеграломъ уравненія (1). Общій наибольшій дѣлитель первыхъ частей уравненій (6) и (9) есть

$$\Theta(x, y)=x^2(x^2+y^2-a^2)=0. \tag{10}$$

Это уравненіе распадается на два:

$$x^2=0, \tag{11}$$

представляющее пару прямыхъ, совпадающихъ съ осью AY; второе:

(12) $$x^2+y^2-a^2=0$$

представляетъ кругъ радіуса a съ центромъ въ началѣ координатъ. Но (11) не удовлетворяетъ данному уравненію, или, что то же, уравненію (3), которое по раздѣленіи на y' принимаетъ такой видъ:

(13) $$(a^2-x^2)y'+2xy+\frac{x^2}{y'}=0;$$

для (11) y остается произвольнымъ, а $y'=\infty$, ибо ось Oy перпендикулярна къ оси OX; но при этихъ значеніяхъ уравненіе (13) обращается въ невозможное:

$$a^2\infty=0;$$

слѣд. (11) не представляетъ рѣшенія нашего дифференціальнаго уравненія, и потому мы его отбрасываемъ. Второе уравненіе, т. е. (12), представляетъ рѣшеніе, и притомъ особенное, ибо, дифференцируя его, получаемъ

(14) $$x+yy'=0;$$

слѣд. оба члена уравненія (1) (или (2)) обращаются отдѣльно въ нуль, первый на основаніи (14), второй—(12); и это рѣшеніе не можетъ быть получено изъ общаго, которое, какъ мы знаемъ, есть

(15) $$x^2-2cy-c^2-a^2=0,$$

давая c какое бы то ни было постоянное значеніе; оно выводится изъ него, какъ мы раньше видѣли, полагая $c=\pm\sqrt{a^2-x^2}$, или полагая $c=-y$ [что равно одно другому по уравненію (12)].

107. Если желаемъ опредѣлить особенное рѣшеніе изъ условія Лапласа: $\frac{\partial p}{\partial y}=\infty$, гдѣ $p=y'$, то такъ какъ изъ (1) пред. § имѣемъ:

(1) $$p=y'=-\frac{x}{y-\sqrt{x^2+y^2-a^2}},$$

то будемъ имѣть:

(2) $$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{x\left(1-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}\right)}{(y-\sqrt{x^2+y^2-a^2})^2}=-\frac{x}{(y-\sqrt{x^2+y^2-a^2})\sqrt{x^2+y^2-a^2}}=\infty;$$

отсюда получатся такія два уравненія:

(3) $y-\sqrt{x^2+y^2-a^2}=0$, которое приводится къ $x^2-a^2=0$, и

(4) $$x^2+y^2-a^2=0.$$

Послѣднее и есть особенное рѣшеніе, какъ мы уже видѣли; первое же даетъ двѣ прямыя, параллельныя оси OY, которыя удовлетворяютъ нашему дифференціальному уравненію, ибо для нихъ y неопредѣленный, $y'=\infty$; поэтому представивъ уравненіе (3) пред. § въ такомъ видѣ:

$$a^2-x^2+2\frac{xy}{y'}+\frac{x^2}{y'^2}=0, \tag{5}$$

мы получимъ тождественно нуль; но это рѣшеніе не будетъ особеннымъ, ибо получается изъ общаго рѣшенія [(15) пред. §], полагая $c=0$.

Если желаемъ опредѣлить особенное рѣшеніе изъ второго Лапласовскаго условія: $\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{p}\right)}{\partial y}=\infty$, то сперва выводимъ изъ даннаго уравненія выраженіе для $\dfrac{1}{p}$:

$$\frac{1}{p}=\frac{-y+\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{x}, \tag{6}$$

и затѣмъ, дифференцируя его по x, считая y за постоянное:

$$\frac{\partial\left(\dfrac{1}{p}\right)}{\partial x}=\frac{-y^2+a^2+y\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{x^2\sqrt{x^2+y^2-a^2}}; \tag{7}$$

это нужно приравнять ∞; это выраженіе можетъ обратиться въ безконечность, когда его знаменатель обратится въ нуль, а это приводитъ къ двумъ уравненіямъ:

$$1)\quad x^2=0 \quad\text{и}\quad 2)\quad x^2+y^2-a^2=0;$$

но первое не удовлетворяетъ нашему дифференціальному уравненію, а второе есть особенный интегралъ, какъ то мы уже видѣли раньше.

108. Разсмотримъ еще уравненіе Тэйлора:

$$(1+x^2)y'^2-2xyy'+y^2-1=0. \tag{1}$$

Тэйлоръ проинтегрировалъ его слѣдующимъ образомъ: дифференцируя это уравненіе, послѣ сокращеній получимъ:

$$[(1+x^2)y'-xy]y''=0. \tag{2}$$

Это уравненіе распадается на два слѣдующія:

$$(1+x^2)y'-xy=0 \quad (3) \quad\text{и}\quad y''=0. \tag{4}$$

Послѣднее легко интегрируется, и мы получимъ:

$$y=ax+b. \tag{5}$$

Внося это въ (1), мы опредѣлимъ лишнюю произвольную постоянную b въ функціи a; послѣ упрощеній получимъ такое соотношеніе между ними:

$$a^2+b^2-1=0. \tag{6}$$

Изъ (5) имѣемъ: $b=y-ax$; внося это въ (6), будемъ имѣть полный интегралъ нашего уравненія (1):

(7) $$a^2+(y-ax)^2-1=0.$$

Для отысканія особенныхъ рѣшеній намъ нужно найти $\frac{\partial y}{\partial a}$; можно его получить и отсюда, но лучше будетъ сдѣлать это такимъ образомъ: изъ (5) имѣемъ:

(8) $$\frac{\partial y}{\partial a}=x+\frac{\partial b}{\partial a}=0,$$

а изъ (6):

(9) $$a+b\frac{\partial b}{\partial a}=0;$$

помножая (8) на b и вычитая изъ него (9), будемъ имѣть:

(10) $$bx-a=0.$$

Внося a отсюда въ (5), получимъ:

(11) $$y=b(x^2+1),$$

а въ (6), — слѣдующее:

(12) $$b^2(x^2+1)-1=0;$$

возвышая предыдущее въ квадратъ, на основаніи послѣдняго получимъ:

(13) $$y^2=x^2+1,$$

или

(14) $$y^2-x^2=1,$$

что представляетъ равнобочную гиперболу, вещественная ось которой направлена вдоль оси OY. Легко повѣрить, что это будетъ рѣшеніемъ. Отсюда чрезъ дифференцированіе получаемъ:

$$yy'=x;$$

беря отсюда $y'=\frac{x}{y}$ и внося въ данное уравненіе (1), получимъ на основаніи (13):

$$(1+x^2)\frac{x^2}{y^2}-2x^2+y^2-1=x^2-2x^2+y^2-1=-x^2+y^2-1=0$$

— на основаніи (14). Что это рѣшеніе особенное, а не частное, это видно изъ (10), которое даетъ выраженіе a чрезъ x, а не приписываетъ ему какое-либо частное постоянное значеніе.

109. Уравненіе (3) пред. § есть $\frac{\partial f}{\partial y'}=0$; а потому, исключая изъ него и (1) пред. § y', мы получимъ геометрическое мѣсто точекъ возврата, вообще говоря; но изъ (3) имѣемъ:

(1) $$y'=\frac{xy}{1+x^2};$$

подставляя это въ (1) пред. §, получимъ, такъ какъ оно на основаніи (3) приводится къ такому:

$$-xyy'+y^2-1=0, \tag{2}$$

слѣдующее:

$$-\frac{x^2y^2}{1+x^2}+y^2-1=0, \tag{3}$$

или, освобождая отъ знаменателей и упрощая:

$$y^2-x^2-1=0. \tag{4}$$

Это уравненіе тождественно съ (14) пред. §, представляющимъ, какъ мы видѣли, особенное рѣшеніе. Дѣйствительно, не трудно убѣдиться, что въ данномъ случаѣ геометрическаго мѣста точекъ перегиба не будетъ, ибо

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=2xy'^2-2yy'+(-2xy'+2y)y'=0, \tag{5}$$

т. е. равно нулю тождественно, и его, слѣд., нельзя получить. И въ самомъ дѣлѣ наше семейство кривыхъ, представляемыхъ общимъ интегралом (7) [пред. §] нашего уравненія, не имѣетъ точекъ перегиба, ибо общій интегралъ представляетъ пару параллельныхъ прямыхъ, равноудаленныхъ отъ начала координатъ, ибо это уравненіе (7) разлагается на два множителя:

$$(y-ax+\sqrt{1-a^2})\,(y-ax-\sqrt{1-a^2})=0, \tag{6}$$

(которые будутъ вещественные, пока $a^2<1$). Геометрически ясно, что такая система прямыхъ, зависящихъ отъ одного параметра a, будетъ имѣть обертку, и не будетъ имѣть точекъ возврата. Это то самое, что мы получили выше.

110. Разсмотримъ теперь, какъ можно узнать, будетъ ли данное рѣшеніе $y=\varphi(x)$ даннаго дифференціальнаго уравненія

$$y'-f(x,y)=0 \tag{1}$$

частнымъ его рѣшеніемъ или особеннымъ. Съ этою цѣлью положимъ сперва *)

$$y=\varphi(x)+z. \tag{2}$$

Эта функція обратится въ рѣшеніе нашего уравненіе (1) при $z=0$: остается изслѣдовать, будетъ ли $z=0$ частнымъ рѣшеніемъ или особеннымъ того уравненія, которое получится изъ (1) чрезъ подстановку (2). Изъ (2) имѣемъ:

$$y'=\varphi'(x)+z'; \tag{3}$$

внося это въ (1) будемъ имѣть:

$$z'-[f(x,\varphi(x)+z)-f(x,\varphi(x))]=0, \tag{4}$$

---

*) См. *Serret J. A.* Cours de calcul différentiel et intégral. T. II. Paris, 1868. § 641 p. 387.

такъ какъ $\varphi'(x)=f(x, \varphi(x))$ по предположенію, что $\varphi(x)$ есть интегралъ уравненія (1). Такъ какъ при $z=0$ каждый членъ (4) обращается въ нуль, то можно предположить, что

$$[f(x, \varphi(x)+z)-f(x, \varphi(x))]=z^{\mu}\psi(x, z), \tag{5}$$

гдѣ $\mu>0$, а $\psi(x, z)$ сохраняетъ конечное значеніе при $z=0$, и непрерывна въ предѣлахъ непрерывности функціи $f(x, y)$; тогда уравненіе (4) такъ перепишется:

$$z'-z^{\mu}\psi(x, z)=0. \tag{6}$$

Положимъ $z'=p$, и найдемъ $\frac{\partial p}{\partial z}$, чтобы изслѣдовать его вблизи $z=0$; будемъ имѣть изъ (6):

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\mu z^{\mu-1}\psi(x, z)+z^{\mu}\psi'_z(x, z); \tag{7}$$

но мы имѣемъ по извѣстной теоремѣ:

$$\psi(x, z)-\psi(x, 0)=z\psi'_z(x, \vartheta z), \tag{8}$$

гдѣ ϑ правильная дробь; перемѣняя z на ϑz въ (7), на основаніи этого будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}&\mu(\vartheta z)^{\mu-1}\psi(x, \vartheta z)+(\vartheta z)^{\mu}\psi'_z(x, \vartheta z)=\\&=z^{\mu-1}[\mu\vartheta^{\mu-1}\psi(x, \vartheta z)+\vartheta^{\mu}(\psi(x, z)-\psi(x, 0))];\end{aligned} \tag{9}$$

здѣсь первый членъ въ [ ] конечная величина, второй безконечно малая при z безконечно-маломъ; слѣд. всё выраженіе въ скобкахъ [ ] величина конечная: множитель $z^{\mu-1}$ будетъ безконечно-малымъ при $\mu>1$, и безконечно-большимъ при $\mu<1$; отсюда заключаемъ, такъ какъ при z стремящемся къ нулю и ϑz стремится къ нему, что пред. $\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=0}$ будетъ $=0$ въ первомъ случаѣ, и $=\infty$ во второмъ; отсюда же заключаемъ, что при $\mu>1$, $y=\varphi(x)$ будетъ частнымъ рѣшеніемъ уравненія (1), при $\mu<1$ — особеннымъ его рѣшеніемъ.

Напр. уравненіе

$$y=xy'+\frac{a}{y'} \tag{10}$$

имѣетъ такое рѣшеніе [см. § 92, уравненія (8) и (12)]:

$$y^2-4ax=0; \tag{11}$$

отсюда $y=\pm 2\sqrt{ax}$; изслѣдуемъ будетъ ли это частнымъ или особеннымъ рѣшеніемъ. Съ этою цѣлью положимъ:

$$y=\pm 2\sqrt{ax}+z, \tag{12}$$

и слѣд.:

$$y' = \pm\sqrt{\frac{a}{x}} + z'; \tag{13}$$

внося это въ (10), будемъ имѣть:

$$\pm 2\sqrt{ax} + z = x\left(\pm\sqrt{\frac{a}{x}} + z'\right) + \frac{a}{\pm\sqrt{\frac{a}{x}} + z'};$$

освобождая отъ знаменателя и перенося всё въ одну часть, и дѣлая затѣмъ упрощенія, мы получимъ:

$$z'^2 - \frac{z}{x}z' \mp \sqrt{\frac{a}{x^3}}\,z = 0, \tag{14}$$

откуда найдемъ:

$$z' = z^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\sqrt{\pm 4\sqrt{ax} + z} + \sqrt{z}}{2x}\right]; \tag{15}$$

слѣд. въ нашемъ случаѣ $\mu = \frac{1}{2} < 1$; слѣд. рѣшеніе (11) есть особенное рѣшеніе, что согласно съ полученнымъ въ § 92 результатомъ, что парабола (11) есть обертка семейства прямыхъ, представляемыхъ полнымъ интеграломъ уравненія (10), именно уравненіемъ:

$$y = Cx + \frac{a}{C}. \tag{16}$$

Примѣры для упражненій.

1) $y'^2 - 2y'x + 2y = 0$; особ. рѣш.: $y = \frac{1}{2}x^2$.

2) $x^2y'^2 - 2(xy - 2)y' + y^2 = 0$; особ. рѣш.: $xy = 1$.

3) $(y - xy)(ay' - b) = aby'$; особ. рѣш.: $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \pm \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$.

4) $y = (x - 1)y' - y'^2$; особ. рѣш.: $4y = (x - 1)^2$.

5) $(2y - x^2)y' = 2xy + \sqrt{y^2 - yx^2}$; особ. рѣш.: $y = x^2$.

6) $2yy' + 4y - xy'^2 = 0$; особ. рѣш.: $y(y + 4x) = 0$.

7) $y'^2 - yy' + e^x = 0$; особ. рѣш.: $y = 2e^{\frac{1}{2}x}$.

8) $y'^3 - xyy' + \frac{2x^6}{729} = 0$; особ. рѣш.: $y = \frac{1}{27}x^3$.

9) $y'^2 + 2xy' - y = 0$; особ. рѣш.: не имѣетъ; геометрич. мѣсто точекъ возврата $x^2 + y = 0$.

10) $xyy'^2+(x^2-y^2-a^2)y'-xy=0$; общ. рѣшеніе: $\frac{x^2}{c}+\frac{y^2}{c-a^2}-1=0$; веществ. обертки не имѣетъ (Forsyth-Maser).

11) $(1-y^2)y'^2-1$: общ. рѣш.: $y(1-y^2)^{\frac{1}{2}}+\arcsin y=2x+C$; особ. рѣш. нѣтъ.

12) $y'^2(1-x^2)=1-y^2$; особ. рѣш.: $x=\pm1$, $y=\pm1$; общее рѣшеніе:

$$x^2+y^2-2Cxy=1-C^2.$$

13) $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=\frac{a-b}{a+b}\frac{x-yy'}{x+yy'}$; найти интегралъ этого уравненія и узнать, будетъ-ли $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-1=0$ частнымъ или особеннымъ рѣшеніемъ.

14) $2(xy'+y)^3=yy'$; узнать будетъ-ли $y=0$ частное или особенное рѣшеніе этого уравненія.

15) $y'+(x^2-y^2-1)=0$; рѣшеніе $y=x$ будетъ частное, или особенное?

16) $y'^2-4xy'+4y=0$; рѣшеніе $y=x^2$ будетъ частное, или особенное?

ГЛАВА VII.

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій высшихъ порядковъ.

111. Переходя къ уравненіямъ высшихъ порядковъ, мы должны были бы начать съ доказательства существованія этихъ интеграловъ; но въ виду той связи, которая существуетъ между уравненіями высшаго порядка съ одной неизвѣстной функціей и системами совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка съ нѣсколькими неизвѣстными функціями, мы можемъ отложить разсмотрѣніе этого вопроса до главы, посвященной системамъ уравненій тѣмъ болѣе, что въ настоящей главѣ мы намѣрены заняться разсмотрѣніемъ лишь тѣхъ немногихъ случаевъ, когда такія уравненія удается проинтегрировать или свести къ уравненіямъ низшаго порядка.

Простѣйшимъ изъ такихъ случаевъ будетъ слѣдующій: дано

$$y^{(n)}=f(x); \tag{1}$$

отсюда послѣдовательно находимъ по понятію о первообразной и производной:

$$y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x}f(x)dx+C_1; \tag{2}$$

$$y^{(n-2)}=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}f(x)dx.dx+C_1\bar{x}+C_2; \tag{3}$$

$$y^{(n-3)}=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}f(x)dx.dx.dx+C_1\frac{\bar{x}^2}{2}+C_2\bar{x}+C_3,\text{ и т. д.} \tag{4}$$

и, наконецъ:

$$y=\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}f(x)dx.dx.dx\ldots dx+C_1\frac{\bar{x}^{n-1}}{(n-1)!}+C_2\frac{\bar{x}^{(n-2)}}{(n-2)!}+$$
$$+C_3\frac{\bar{x}^{n-3}}{(n-3)!}+\cdots+C_n, \tag{5}$$

гдѣ чрезъ C_1, C_2,... C_n обозначены, понятно, произвольныя постоянныя и гдѣ для сокращенія положено $\bar{x}=x-x_0$. Для краткости n-разъ повторенное интегрированіе по одной и той же перемѣнной обозначаютъ такъ:

$$\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}f(x)dxdxdx\ldots dx=\int_{x_0}^{x(n)}f(x)dx^n, \tag{6}$$

ставя около интеграла вверху показателемъ (въ скобкахъ) число разъ повторенія интегрированія, а дифференціалъ dx возвышая въ степень n, такъ что предыдущая формула короче такъ напишется:

$$y=\int_{x_0}^{x(n)}f(x)dx^n+C_1\frac{\bar{x}^{n-1}}{(n-1)!}+C_2\frac{\bar{x}^{(n-2)}}{(n-2)!}+C_3\frac{\bar{x}^{(n-3)}}{(n-3)!}+\cdots+C_n. \tag{7}$$

Можно входящій въ (5) n-кратный интегралъ замѣнить простымъ интеграломъ отъ нѣкоторой другой функціи, составленной изъ $f(x)$ и x. Обозначая во (2) перемѣнную интегрированія чрезъ z, мы можемъ эту формулу такъ переписать:

$$y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x}f(z)dz+C_1. \tag{8}$$

Помножая на dx и интегрируя, будемъ имѣть:

$$y^{(n-2)}=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}f(z)dz.dx+C_1\bar{x}+C_2; \tag{9}$$

но интегрируя по частямъ, дѣлая для этого $u=\int_{x_0}^{x}f(z)dz$, $dv=dx$, получимъ:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}f(z)dz.dx=\left[x\int_{x_0}^{x}f(z)dz\right]_{x_0}^{x}-\int_{x_0}^{x}xf(x)dx=$$
$$=x\int_{x_0}^{x}f(z)dz-\int_{x_0}^{x}zf(z)dz=\int_{x_0}^{x}(x-z)f(z)dz; \tag{10}$$

(ибо во второмъ членѣ интеграціонную букву можно назвать опять чрезъ z; въ первомъ же членѣ для нижняго значенія $x=x_0$, получится нуль, ибо интегралъ $\int_{x_0}^{x}f(z)dz$ тогда обратится въ нуль). Внося это въ (9), будемъ имѣть:

$$(11)\qquad y^{(n-2)}=\int_{x_0}^{x}(x-z)f(z)dz+C_1\overline{x}+C_2.$$

Для полученія $y^{(n-3)}$ нужно помножить на dx и проинтегрировать это выраженіе; но въ виду того, что x входитъ здѣсь и подъ знакомъ интеграла, нужно взять предпослѣднюю форму въ (10) для этого интеграла. Тогда будемъ имѣть съ помощью интегрированія по частямъ каждаго члена отдѣльно:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}(x-z)f(z)dz\,dx=\int_{x_0}^{x}[x\int_{x_0}^{x}f(z)\,dz-\int_{x_0}^{x}zf(z)dz]dx=$$

$$(12)\quad =\frac{x^2}{2}\int_{x_0}^{x}f(z)dz-\int_{x_0}^{x}\frac{x^2}{2}f(x)dx-x\int_{x_0}^{x}zf(z)dz+\int_{x_0}^{x}x.xf(x)dx^{*)}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(x^2-2xz+z^2)f(z)dz=\frac{1}{1.2}\int_{x_0}^{x}(x-z)^2f(z)dz;$$

и слѣд.

$$(13)\qquad y^{(n-3)}=\frac{1}{1.2}\int_{x_0}^{x}(x-z)^2f(z)dz+C_1\frac{\overline{x}^2}{1.2}+C_2\overline{x}+C_3.$$

Такъ можно итти и дальше, беря однако всякій разъ не сжатую форму, а раскрытую (см. Serret, T. II); но законъ уже виденъ и теперь, и, обобщая полученные результаты, мы можемъ написать такую формулу:

$$(14)\quad y^{(n-k)}=\frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{k-1}f(z)dz+C_1\frac{\overline{x}^{k-1}}{(k-1)!}+C_2\frac{\overline{x}^{k-2}}{(k-2)!}+\cdots+C_k.$$

Дѣйствительно, дифференцируя интегралъ по правиламъ § 3, мы будемъ имѣть такой результатъ:

$$\frac{1}{(k-1)!}\Bigg[\int_{x_0}^{x}(k-1)(x-z)^{k-2}f(z)dz+\Big[(x-z)^{k-1}f(z)\Big]_{z=x}=$$

$$=\frac{1}{(k-2)!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{k-2}f(z)dz,$$

ибо, очевидно, при $z=x$ второй членъ обращается въ нуль; а это получается изъ перваго члена второй части (14) чрезъ перемѣну k на $k-1$; для меньшихъ же значеній этого индекса вѣрность этой формулы нами допущена. Слѣд. разъ она вѣрна для порядка $n-k+1$, она будетъ вѣрна и для порядка $n-k$. Для $k=n$ $y^{(n-k)}$ обратится въ y, и мы будемъ имѣть:

$$(15)\quad y=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-1}f(z)dz+C_1\frac{\overline{x}^{n-1}}{(n-1)!}+C_2\frac{\overline{x}^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+C_n.$$

---

*) Соединяя второй и четвертый члены въ одинъ и мѣняя послѣ того x на z подъ знакомъ этого интеграла.

Изъ этой формулы легко получится строка Тэйлора съ остаточнымъ членомъ въ формѣ опредѣленнаго интеграла, ибо легко видѣть изъ формулъ (1)—(5), что, если перемѣнимъ $f(x)$ на $f^{(n)}(x)$, будетъ: $C_1=f^{(n-1)}(x_0)$, $C_2=f^{(n-2)}(x_0)$, $C_3=f^{(n-3)}(x_0)\ldots$ и, наконецъ, $C_n=f(x_0)$, такъ что изъ (15) получимъ (въ виду $\bar{x}=x-x_0$) такой результатъ:

$$f(x)=f(x_0)+f(x_0)(x-x_0)+\cdots+f^{(n-1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-1}f^{(n)}(z)dz, \tag{16}$$

а это и есть строка Тэйлора съ остаточнымъ членомъ.

112. Уравненіе вида

$$F(y'', y')=0 \tag{1}$$

приводится къ уравненію перваго порядка, полагая $y'=p$, именно:

$$F(p', p)=0;$$

найдя интегралъ его:

$$f(p, x, C)=0,$$

мы должны будемъ проинтегрировать уравненіе

$$f(y', x, C)=0,$$

куда самъ y не входитъ. Если отсюда можно получить

$$y'=\varphi(x, C),$$

то останется выполнить квадратуру:

$$y=\int_{x_0}^{x}\varphi(x, C)dx+C',$$

чтобы получить искомый интегралъ уравненія (1). Еще это уравненіе проинтегрируется, когда оно рѣшимо, или 1) по y'', или 2) по y', или 3) когда съ помощью его можно представить y' и y'' функціями новой вспомогательной перемѣнной t.

Въ первомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$y''=\varphi(y'), \tag{2}$$

или, иначе:

$$\frac{dy'}{dx}=\varphi(y'); \tag{3}$$

отсюда, отдѣляя перемѣнныя и интегрируя, получимъ:

$$x=\int_{y'_0}^{y'}\frac{dy'}{\varphi(y')}+C, \tag{4}$$

а такъ какъ $dy=y'dx$, то также будемъ имѣть:

(5) $$y=\int_{y'_0}^{y'}\frac{y'dy'}{\varphi(y')}+C';$$

по выполненіи квадратуръ, исключая y', получимъ интегралъ уравненія (2) въ такомъ видѣ:

(6) $$\Phi(x, y, C, C')=0.$$

Если уравненіе (1) рѣшимо относительно y', то полагая $y''=q$, будемъ имѣть:

(7) $$y'=\psi(q),$$

и дифференцируя:

(8) $$dy'=\psi'(q)dq;$$

съ другой стороны имѣемъ:

(9) $$dy'=y''dx=qdx;$$

слѣд.:

(10) $$qdx=\psi'(q)dq,$$

откуда получаемъ:

(11) $$dx=\frac{1}{q}\psi'(q)dq,$$

и интегрируя:

(12) $$x=\int_{q_0}^{q}\frac{1}{q}\psi'(q)dq+C.$$

Далѣе имѣемъ:

(13) $$dy=y'dx;$$

внося сюда вмѣсто y' и dx ихъ выраженія чрезъ q изъ (7) и (11), будемъ имѣть:

(14) $$dy=\frac{1}{q}\psi(q)\psi'(q)\,dq,$$

и интегрируя

(15) $$y=\int_{q_0}^{q}\frac{1}{q}\psi(q)\psi'(q)dq+C'.$$

Исключая, по выполненіи квадратуръ, изъ (12) и (15) величину q, будемъ имѣть интегралъ въ видѣ уравненія (6); если исключеніе практически не возможно или затруднительно, то интегралъ представится парою уравненій (12) и (15), выражающихъ координаты точекъ кривой, представляемой полнымъ интеграломъ даннаго дифференціальнаго уравненія, функціями параметра q. (Parameterdarstellung der Curve). [То же слѣдуетъ сказать и въ первомъ случаѣ].

Въ третьемъ случаѣ изъ даннаго дифференціальнаго уравненія по предположенію можно вывести такія уравненія:

(16) $$y'=\varphi(t); \qquad y''=\psi(t);$$

дифференцируя первое изъ нихъ, будемъ имѣть:

$$dy' = \varphi'(t)dt, \tag{17}$$

а изъ второго, въ виду того, что $y'' = \frac{dy'}{dx}$, получаемъ:

$$dx = \frac{dy'}{\psi(t)}; \tag{18}$$

внося сюда вмѣсто dy' его выраженіе изъ предыдущаго, получаемъ:

$$dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt, \tag{19}$$

и интегрируя:

$$x = \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C. \tag{20}$$

Далѣе, внося въ выраженіе

$$dy = y'dx \tag{21}$$

вмѣсто y' и dx ихъ выраженія чрезъ t изъ (16) и (19), будемъ имѣть:

$$dy = \frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\psi(t)}dt, \tag{22}$$

откуда, интегрируя, получимъ:

$$y = \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C'. \tag{23}$$

Уравненія (20) и (23) представляютъ рѣшеніе нашего дифференціальнаго уравненія; исключая t, если это практически возможно, получимъ это рѣшеніе въ видѣ уравненія (6), иначе будемъ имѣть въ нихъ параметральное представленіе интеграла нашего уравненія.

113. Пояснимъ изложенное примѣрами. Пусть дано уравненіе:

$$\frac{y'(1+y'^2)}{y''} = a, \tag{1}$$

(которое опредѣляетъ кривую тѣмъ свойствомъ ея, что проэкція радіуса кривизны на ось OX есть величина постоянная). Это уравненіе легко рѣшается относительно y'':

$$y'' = \frac{1}{a}y'(1+y'^2); \tag{2}$$

мы имѣемъ, слѣд., первый случай. Полагая $y' = p$, это уравненіе такъ перепишется:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a}p(1+p^2), \tag{3}$$

откуда, отдѣляя перемѣнныя и интегрируя, получимъ:

(4) $$x=\int_{p_0}^{p}\frac{adp}{p(1+p^2)}+C_1=a\log\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}+C;$$

а y найдется изъ условія $dy=pdx$, и будетъ:

(5) $$y=a\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{1+p^2}+C_2=a.\mathrm{arctg}\,p+C'.$$

Здѣсь p легко исключается. Изъ послѣдняго имѣемъ:

(6) $$p=tg\frac{y-C'}{a};$$

потому будетъ $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=\sin\frac{y-C'}{a}$, и слѣд. (4) приметъ такой видъ:

(7) $$x-C=a\log\sin\frac{y-C'}{a},$$

или

(8) $$\sin\frac{y-C'}{a}=e^{\frac{x-C}{a}}.$$

2-й примѣръ. Дано уравненіе:

(9) $$(y'')^2=y'.$$

Полагая $y''=q$, мы будемъ имѣть отсюда:

(10) $$y'=q^2;$$

но $\frac{dy'}{dx}=y''=q$; слѣд. $dx=\frac{dy'}{q}$; а изъ (10) $dy'=2qdq$; потому

(11) $$dx=2dq,$$

и слѣд.

(12) $$x=2q+C.$$

Далѣе: $dy=y'dx=q^2.2dq=2q^2dq$; потому

(13) $$y=\frac{2}{3}q^3+C'.$$

Исключая q изъ (12) и (13), будемъ имѣть

(14) $$y=\frac{1}{12}(x-C)^3+C'.$$

3-й примѣръ. Дано уравненіе:

(15) $$y''^3-2y'^3+3y'y''=0,$$

которое, полагая $y'=p$, $y''=q$, можетъ быть такъ написано:

(16) $$q^3-2p^3+3pq=0.$$

Это уравненіе одинаково трудно рѣшается и относительно p, и относительно q; поэтому положимъ

$$q = pz, \tag{17}$$

и вставимъ это въ уравненіе (16); получимъ:

$$p^2(p(z^3-2)+3z)=0. \tag{18}$$

Это уравненіе имѣетъ одинъ двукратный корень $p=0$, который приводитъ къ рѣшенію $y=C$, очевидно неполному, ибо оно содержитъ лишь одну произвольную постоянную, и другой

$$p=\frac{3z}{2-z^3}; \tag{19}$$

внося это въ (17), получимъ:

$$q=\frac{3z^2}{2-z^3}. \tag{20}$$

Дифференцируя предыдущее, будемъ имѣть:

$$dp=\frac{6(1+z^3)}{(2-z^3)^2}dz, \tag{21}$$

и такъ какъ $q=\dfrac{dp}{dx}$, и $dy=pdx$, то

$$dx=\frac{2(1+z^3)}{z^2(2-z^3)}dz; \qquad dy=\frac{6(1+z^3)}{z(2-z^3)^2}dz; \tag{22}$$

интегрируя, получимъ (полагая $\alpha=\sqrt[3]{2}$):

$$\left.\begin{aligned} x=C-\frac{1}{z}+\frac{1}{\alpha}\log\frac{\sqrt{z^2+\alpha z+\alpha^2}}{z-\alpha}-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2z+\alpha}{\alpha\sqrt{3}}, \\ y=C'+\frac{3}{2-z^3}+\frac{1}{2}\log\frac{z^3}{z^3-2}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Здѣсь исключить z нельзя, такъ какъ оба уравненія трансцендентныя, а потому интегралъ выражается совокупностью этихъ уравненій.

114. Болѣе общимъ чѣмъ предыдущій случай будетъ такой:

$$f(y^{(n-1)}, y^{(n)})=0; \tag{1}$$

здѣсь уравненія содержатъ только двѣ послѣдовательныя производныя, но какого угодно порядка. Подобно предыдущему это уравненіе чрезъ положеніе

$$y^{(n-1)}=p, \tag{2}$$

приводится къ уравненію перваго порядка:

$$f(p, p')=0. \tag{3}$$

Если его интегралъ есть уравненіе:

$$F(x, p, C)=0, \tag{4}$$

и отсюда можно получить для p такое выраженіе:

$$p = \varphi(x, C), \tag{5}$$

то отысканіе y совершится по § 111. Если это затруднительно, но уравненіе (3) рѣшимо относительно p', такъ что мы будемъ имѣть изъ него

$$p' = \varphi(p), \tag{6}$$

то такъ какъ $p' = \dfrac{dp}{dx}$, мы получимъ отсюда

$$dx = \frac{dp}{p'} = \frac{dp}{\varphi(p)}, \tag{7}$$

и слѣд.

$$x = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varphi(p)} + C. \tag{8}$$

Далѣе имѣемъ:

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \frac{pdp}{\varphi(p)}; \quad \text{слѣд.} \quad y^{(n-2)} = \int_{p_0}^{p} \frac{pdp}{\varphi(p)} + C_1; \tag{9}$$

$$dy^{(n-3)} = y^{(n-2)}dx; \quad \text{слѣд.} \quad y^{(n-3)} = \int_{p_0}^{p} \left(\int_{p_0}^{p} \frac{pdp}{\varphi(p)} \right) \frac{dp}{\varphi(p)} + C_1 x + C_2; \tag{10}$$

$$dy^{(n-4)} = y^{(n-3)}dx; \quad \text{слѣд.}$$
$$y^{(n-4)} = \int_{p_0}^{p} \left(\int_{p_0}^{p} \left(\int_{p_0}^{p} \frac{pdp}{\varphi(p)} \right) \frac{dp}{\varphi(p)} \right) \frac{dp}{\varphi(p)} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3; \tag{11}$$

и т. д.; наконецъ дойдемъ до выраженія y чрезъ p и x; исключая p изъ него и (8), получимъ полный интегралъ.

Если уравненіе (1) рѣшимо относительно $y^{(n-1)}$ и даетъ намъ, если положимъ $y^{(n)} = q$:

$$y^{(n-1)} = \psi(q); \tag{12}$$

то дифференцируя этотъ результатъ, получимъ:

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = qdx = \psi'(q)dq, \tag{13}$$

откуда будемъ имѣть:

$$dx = \frac{1}{q}\psi'(q)dq, \tag{14}$$

интегрируя найдемъ:

$$x = \int_{q_0}^{q} \frac{1}{q}\psi'(q)dq + C. \tag{15}$$

Далѣе мы имѣемъ:

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \psi(q)\frac{1}{q}\psi'(q)dq,$$

и потому

$$y^{(n-2)}=\int_{q_0}^{q}\frac{1}{q}\psi(q)\psi'(q)\,dq+C_1; \tag{16}$$

$$dy^{(n-3)}=y^{(n-2)}dx=\left(\int_{q_0}^{q}\frac{1}{q}\psi(q)\psi'(q)\,dq+C_1\right)dx$$

и въ виду (14) отсюда, интегрируя, получимъ:

$$y^{(n-3)}=\int_{q_0}^{q}\left(\int_{q_0}^{q}\frac{1}{q}\psi(q)\psi'(q)\,dq\right)\frac{1}{q}\psi'(q)dq+C_1x+C_2 \tag{17}$$

и т. д.

Можетъ случиться, что съ помощью дифференціальнаго уравненія (1) $y^{(n-1)}$ и $y^{(n)}$ легко выражаются чрезъ нѣкоторый параметръ t, такъ что мы будемъ имѣть:

$$y^{(n)}=\varphi(t); \qquad y^{(n-1)}=\psi(t). \tag{18}$$

Тогда будетъ $dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx=\psi'(t)dt$, откуда найдемъ, дѣля на первое, изъ (18):

$$dx=\frac{\psi'(t)}{\varphi(t)}dt; \tag{19}$$

интегрируя это, получимъ:

$$x=\int_{t_0}^{t}\frac{\psi'(t)}{\varphi(t)}dt+C. \tag{20}$$

Далѣе имѣемъ:

$$dy^{(n-2)}=y^{(n-1)}dx=\frac{\psi(t)\psi'(t)}{\varphi(t)}dt; \qquad y^{(n-2)}=\int_{t_0}^{t}\frac{\psi(t)\psi'(t)}{\varphi(t)}dt+C_1; \tag{21}$$

$dy^{(n-3)}=y^{(n-2)}dx=\left(\int\frac{\psi(t)\psi'(t)}{\varphi(t)}dt+C_1\right)\frac{\psi'(t)}{\varphi(t)}dt$; слѣд. въ виду (20):

$$y^{(n-3)}=\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{\psi(t)\psi'(t)}{\varphi(t)}dt\right)\frac{\psi'(t)}{\varphi(t)}dt+C_1x+C_2 \text{ и т. д.} \tag{22}$$

Для примѣра возьмемъ уравненіе:

$$ay''y'''=\sqrt{1+y''^2}. \tag{23}$$

Полагая $y''=p$, оно приметъ такой видъ:

$$ap\frac{dp}{dx}=\sqrt{1+p^2}; \tag{24}$$

откуда найдемъ:

$$dx=a\frac{pdp}{\sqrt{1+p^2}}, \tag{25}$$

и слѣд.

$$x=a\sqrt{1+p^2}+C. \tag{26}$$

Но $dy'=pdx=\frac{ap^2dp}{\sqrt{1+p^2}}$; откуда интегрируя получаемъ:

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{ap\sqrt{1+p^2}}{2}-\frac{a}{2}\log(p+\sqrt{1+p^2})+C_1. \tag{27}$$

Помножая это на (25) и интегрируя, получимъ:

$$y=\frac{a^2p^3}{6}-\frac{a^2}{2}\sqrt{1+p^2}\log(p+\sqrt{1+p^2})+\frac{a^2p}{2}+aC_1\sqrt{1+p^2}+C_2. \tag{28}$$

Исключая p изъ (26) и (28), получимъ полный интегралъ уравненія (23).

115. Болѣе труднымъ представляется случай уравненія

$$f(y'', y)=0, \tag{1}$$

встрѣчающійся однако очень часто, особенно въ аналитической механикѣ и математической физикѣ. Это уравненіе можно проинтегрировать, когда оно рѣшимо относительно той или другой изъ входящихъ въ него величинъ. Если оно рѣшимо относительно y'', то мы будемъ имѣть изъ него

$$y''=\varphi(y). \tag{2}$$

Но $y''=\frac{dy'}{dx}$; а потому, помножая это уравненіе на dx, его можно такъ представить:

$$dy'=\varphi(y)\,dx; \tag{3}$$

помножая это уравненіе на $2y'$, будемъ имѣть:

$$2y'dy'=2\varphi(y)\,dy, \tag{4}$$

(ибо $y'dx=dy$). Здѣсь каждая часть есть полный дифференціалъ въ отдѣльности; интегрируя, будемъ имѣть:

$$y'^2=2\int_{y_0}^{y}\varphi(y)\,dy+C. \tag{5}$$

Рѣшая по y', получимъ отсюда:

$$\frac{dy}{dx}=y'=\sqrt{2\int_{y_0}^{y}\varphi(y)dy+C}\;{}^{*)}; \tag{6}$$

въ этомъ уравненіи перемѣнныя отдѣляются, и интегралъ его будетъ:

$$x=\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\sqrt{2\int_{y_0}^{y}\varphi(y)\,dy+C}}+C_1. \tag{7}$$

---

*) Для простоты мы не пишемъ двойного знака ±, подразумѣвая его въ радикалѣ.

Пусть, напр., дано уравненіе:

$$y'' - a^2y = 0; \tag{8}$$

отсюда имѣемъ:

$$\frac{dy'}{dx} = y'' = a^2y; \quad \text{и слѣд.} \quad dy' = a^2y\,dx; \tag{9}$$

помножая обѣ части на $2y'$, будемъ имѣть:

$$2y'dy' = 2a^2y\,dy; \tag{10}$$

интегрируя, получимъ:

$$y'^2 = a^2y^2 + C; \tag{11}$$

отсюда

$$\frac{dy}{dx} = y' = \sqrt{a^2y^2+C}, \quad dx = \frac{\pm dy}{\sqrt{a^2y^2+C}}, \tag{12}$$

и слѣд.

$$x = \int \frac{\pm dy}{\sqrt{a^2y^2+C}} + C', \tag{13}$$

или, помножая на a и полагая $-C'a = C_1$:

$$ax + C_1 = \pm \log(ay + \sqrt{a^2y^2+C}); \tag{14}$$

а переходя отъ логариѳма къ числу:

$$ay + \sqrt{a^2y^2+C} = e^{\pm(ax+C_1)}. \tag{15}$$

Отсюда получаемъ:

$$\frac{1}{ay+\sqrt{a^2y^2+C}} = \frac{ay-\sqrt{a^2y^2+C}}{-C} = e^{\mp(ax+C_1)}, \tag{16}$$

или

$$ay - \sqrt{a^2y^2+C} = -Ce^{\mp(ax+C_1)}; \tag{17}$$

складывая (15) и (17), найдемъ:

$$y = \frac{1}{2a}\left(e^{\pm(ax+C_1)} - Ce^{\mp(ax+C_1)}\right). \tag{18}$$

Если положимъ:

$$\frac{1}{2a}e^{\pm C_1} = C'; \qquad -\frac{1}{2a}Ce^{\mp C_1} = C'', \tag{19}$$

то послѣднія величины также представятъ двѣ произвольныя величины, какъ и C и C_1, изъ которыхъ онѣ составлены; а тогда (18) можно представить такъ:

$$y = C'e^{ax} + C''e^{-ax}, \tag{20}$$

гдѣ достаточно было удержать одинъ верхній знакъ, ибо, при произвольности C' и C'', перемѣна знаковъ у показателей на противные равно-