ОТДѢЛЕНІЕ III.

ИЗВЛЕЧЕНІЕ КОРНЕЙ.

а.) *Общія изслѣдованія.*

§ 68.

Въ возвышеніи дается основаніе 5, показатель 3 и требуется найти степень 5^3 или $5^3 = 125$, но если извѣстна степень 125 и показатель 3, то можно потребовать, чтобъ найдено было основаніе (5), т. е. такое число x, которое, если въ своей степени будетъ производителемъ *три* раза произвело бы 125. Отсюда видимъ, что 125 должно разложить на три равныхъ производителя. Сей способъ разложенія называется *извлеченіемъ*, и на основаніи опредѣленія его, подставивъ x, на мѣсто 5, въ выраженіе $5^3 = 125$, имѣемъ право, по § 13, написать

$$x^3 = 125 \ldots\ldots\ldots (a)$$

Это числовое выраженіе *извлеченія*, называется уравненіемъ *третьяго* вида, въ которомъ данная степень (125), принѣмаетъ названіе *радикала*, данный показатель степени (3) — *показателя корня*, а искомое основаніе или результатъ извлеченія (x) — *корня;* въ слѣдствіе чего, уравненіе

$$x^3 = 125$$

даетъ такое заключеніе: *корень* (x), *возвышенный до показателя корня* (3), *равенъ радикалу* (125); и вообще пишутъ

$$x^n = p \ldots\ldots\ldots (a)$$

Вотъ это основное уравненіе извлеченія, въ которомъ подъ начальною буквою р вообще разумѣемъ всякое чило радикала, подъ n — показателя корня, а подъ x — корень, зависящій отъ р и n.

Рѣшеніе уравненія $x^n = p$ состоитъ изъ двухъ частей: въ первой, излагается способъ вычисленія x; а во второй, какъ вычисленную величину x, представить въ общемъ результатѣ.

а). *Рѣшеніе первой части.* Для вычисленія корня x, должно взять уравненіе въ числахъ, напримѣръ, прежнѣе

$$x^3 = 125.$$

Поелику x^3 равенъ 125, то по § 26,2, будетъ

$$125 - x^3 = 0 \ldots\ldots. (\text{ѣ})$$

а по § 42, выйдетъ

$$\frac{125}{x^3} = 1, \text{ или } \frac{125}{x \cdot x \cdot x} = 1 \ldots\ldots. (c)$$

Поелику же эти два уравненія, (ѣ) и (с) вмѣстѣ, представляютъ одно существенное цѣлое — дѣленіе, посему и здѣсь должно здѣлать тѣже заключенія, какія въ дѣленіи; а имянно: этотъ способъ разложенія, позначенію, во всемъ противуположенъ способу составленія: $x^3 = 125$, какъ и должно быть; ибо умноженію числа равныхъ производителей противуположно дѣленіе, тѣмъ же числомъ равныхъ дѣлителей; въ слѣдствіе чего въ уравненіи (ѣ), разность выходитъ нуль, а въ — (с) частное — единица; ибо единица частнаго, полученная отъ дѣленія двухъ равныхъ количествъ 125 и x^3 (§ 42), соотвѣтствуетъ единичному вычитанію, тѣхъ же чиселъ, дающихъ въ разности 0. Вообще, въ уравненіи (a), число x возвышается или *возводится* въ 3-ю степень, для того, чтобъ произвести 125; въ уравненіи же (b), третяя степень x вычитается изъ 125, или иначе, 125 понимается на три степени x, для того, чтобъ уничтожить 125 — обратить въ нуль: что все равно, если, по уравненію (c) число 125 раздѣлится на третюю степень x, т. е. на произведеніе трехъ равныхъ производителей, то въ частномъ получимъ единицу.

И такъ изъ сказаннаго и уравненій (b) и (c) явсуетъ, что *искомое основаніе (x) равно такому числу, которое, будучи возвышено до показателя, и потомъ, — вычтено изъ данной степени, то сію, какъ дѣлимое, обращаетъ въ нуль,* или все тоже, *въ частномъ даетъ единицу*; посему искомое основаніе x, *есть такое число, которое, будучи вазвышено до показателя, въ величинѣ уравнивается съ своею степенью.* А потому, чтобъ изъ уравненій

$$125 - x^3 = 0, \text{ и } \frac{125}{x^3} = 1,$$

получить x, должно взять, произвольное, по соображенію, число, въ предположеніи, что оно равно x, и умножить на себя *два* раза, или здѣлать производителемъ *три* раза; и когда, по первому уравненію, разность сего произведенія съ данною степенью, выходить нуль, или по второму уравненію въ частномъ—единица, словомъ, если данная степень, и полученная чрезъ выкладку степень, равны между собою, то *пробное* число и выразитъ дѣйствительную величину x. И такъ беру число, напримѣръ, 4, и дѣлаю его производителемъ три раза, или $4.4.4=64$, которое, очевидно, неможетъ быть искомымъ основаніемъ или корнемъ, поелику неравно 125 т. е. въ разности $125-64$, недаетъ нуля, или въ частномъ $\frac{125}{64}$, производитъ число, большее единицы, въ слѣдствіе того, беру другое, напримѣръ 5, и какъ оно, въ вычитаніи $125-5^3=0$, — даетъ нуль, или въ частномъ $\frac{125}{5^3}=1$ — единицу, посему 5 и есть искомое основаніе, т. е. $x=5$.

Это заключеніе повѣряется еще и подъставкою 5, на мѣсто x, въ основное уравненіе $x^3=125$.

Что сказанно и здѣланно съ уравненіемъ $x^3=125$, выраженнымъ чрезъ числа 3 и 125, то самое можно приложить, отъ слова до слова, и ко всѣмъ протчимъ, вся разность въ частной только величинѣ тѣхъ и другихъ; сущность же дѣла для всѣхъ общая, такъ что все преличиствующее $x^3=125$, равномѣрно преличиствуетъ и уравненію $x^n=p$, вообще разсматриваемому, какъ представителю способа дѣйствій надъ всѣми возможными числами.

На основаніи сего, уравненія (b) и (c), по коимъ вычисляется x, примутъ слѣдующій общій видъ:

$$p-x^n=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(b)$$

$$\frac{p}{x^n}=1\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(c)$$

b). *Рѣшеніе второй части*, числоваго уравненія $x^3=125$, заключается въ томъ, какъ дойти до общаго выраженія корня или результата извлеченія x.

Въ первой части рѣшенія видѣли, чтобъ изъ уравненія

$$x^3=125 \text{ или } 125=x^3$$

получить x, то 125 должно *понизить* на 3 равныя степени т. е., разложить на три равныхъ производителя и изъ нихъ взять одного; и такъ, корень x равенъ 125 *пониженному* въ 3 степени, или иначе: *пониженіе* 3-й степени изъ 125 равно корню x. Напишемъ сказанное:

пониж. 3-й *степ.* изъ 125=x..........(d).

Откуда ясно, что для уравненія результата извлеченія (d), показатель (3), въ урав. $125=x^3$ отдѣлился отъ x и перешелъ въ первую часть онаго къ 125; слѣд. стоитъ только придумать сокращенный знакъ извлеченія, который бы замѣнялъ слово: *пониженіе,* для отличія имъ радикала (125) отъ показателя корня (3), чтобъ за тѣмъ не встрѣтить никакой трудности въ составленіи общаго выраженія корня; но поелику оный уже извѣстенъ и есть ($\sqrt{}$), надъ которымъ ставятъ показатель корня (3), а подъ которымъ радикалъ (125), то, внеся оный въ выраженіе (d) получимъ общій видъ результата извлеченія въ слѣдующей формѣ:

$$\sqrt[3]{125}=x\text{...........}(d)$$

а въ частности

$$\sqrt[3]{125}=5.$$

которыя выговариваютъ такъ: корень 3-й степени изъ радикала 125 равенъ x, а въ частномъ случаѣ, какъ въ нашемъ рѣшеніи: корень 3-й степени изъ 125 равенъ

5, (гдѣ слово *корень* соотвѣтствуетъ слову *пониженіе* и выраженному знакомъ $\sqrt{\ }$). Замѣтимъ, что въ Ариѳметикѣ разсматриваются только два корня, второй и третьей степени, всѣ же прочія въ Алгебрѣ; посему, если вмѣсто показателей 2 и 3 въ уравненіи (d) внесемъ букву n, а на мѣсто радикала 125 букву p, то получимъ предыдущее выраженіе общимъ, и имянно:

$$\sqrt[n]{p}=x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(d)$$

которое даетъ возможность за однимъ разомъ говорить о извлеченіи второй и третьей степени вмѣстѣ, что подтверждается и самою общностію произношенія урав: (d) такъ: *корень данной степени изъ радикала* p *равенъ* x, разумѣя подъ симъ выраженіемъ вообще, что дѣйствіе извлеченія по уравненіямъ (b) и (c) уже свершилось, или, если свершится, то въ результатѣ дѣйствительно выйдетъ корень x, который въ частномъ случаѣ, какъ въ нашемъ рѣшеніи, равенъ 5; другими словами, что результатъ x выходитъ отъ дѣйствительнаго извлеченія корня n—ой степени изъ даннаго радикала p, по уравненіямъ же (b) и (c).

§ 69.

Общія заключенія:

1. Поелику основное уравненіе извлеченія (a) дастъ

$$x^n=p.$$

посему вставивъ вмѣсто x, результатъ его $\sqrt[n]{p}$ получимъ

$$\left(\sqrt[n]{p}\right)^n=p\ldots\ldots\ldots(e)$$

т. е. *общій результатъ корня, возвышенный до показателя корня, производитъ или равенъ радикалу* р.

11. Первая часть рѣшенія урав. (а): т. е. уравненія (b) и (с) представляютъ способъ вычисленія корня х, т. е. общій ходъ дѣйствія, что имянно должно сдѣлать съ радикаломъ р, чтобъ его приравнить нулю или единицѣ и чрезъ то дойти до числовой величины х; а вторая часть рѣшенія—уравненіе (d) показываетъ что должно сдѣлать съ р, чтобъ въ общности уравнить его корню х; въ обоихъже случаяхъ одно уравненіе имѣетъ ссылку свою на другое. Такъ чтобъ изъ основнаго

$$x^n = p$$

радикалъ р приравнить х, то по уравненію (d), изъ р извлекаю корень n—ой степени однимъ только условнымъ, общимъ изображеніемъ того, т. е. пишу

$$x = \sqrt[n]{p};$$

но какъ это извлеченіе на самомъ дѣлѣ свершилось, или должно совершиться,—указываютъ уравненія (b) и (с); и обратно, какъ вычисленную изъ того же выраженія

$$x^n = p,$$

по уравненіямъ (b) и (с), величину х изобразить въ общемъ результатѣ, — показываетъ уравненіе третье (d); словомъ, одно безъ другаго неможетъ дать полнаго опредѣленія извлеченію. Другими словами: первыя два уравненія (b) и (с), употребляются, когда желаютъ показать въ общемъ видѣ принадлежащій извлеченію способъ дѣйствія, доставляющій опредѣленный результатъ x, или на самомъ дѣлѣ вычислить оный; условимся назвать ихъ уравненіями *способа извлеченія корня; второе* же, когда требуется, въ общемъ видѣ, утвердить письменною формою дѣйствительность результата, выходящаго изъ уравненій (b) и (c)

Въ слѣдствіе такого различія, урав. способа можемъ брать отдѣльно отъ уравненія результата,—для изысканія однихъ истинъ, а урав. результата—для другихъ, не вводя въ пособіе первыя второму и обратно, хотя между тѣмъ, онѣ имѣютъ такую между собою связь, что по одному данному легко опредѣлить прочія два, какъ это увидимъ ниже.

§ 70.

На основаніи двухъ частей рѣшенія (a), составляющихъ одно существенное цѣлое — извлеченіе, слѣдуетъ, что

1. *Извлеченіе корней* есть вмѣстѣ и способъ и дѣйствіе, коими совокупно опредѣляется корень, чрезъ пониженіе радикала на столько степеней, сколько въ показателѣ корня единицъ.

2. *Радикалъ* есть число, которое понижается въ данную степень.

3. *Показатель корня* есть число, выражающее степень помноженія радикала.

4. *Корень* есть число и вмѣстѣ результатъ пониженія радикала.

Откуда наконецъ 5-е, радикалъ и корень вообще суть выраженія количествъ, а показатель корня—число *отвлеченное*.

§ 71.

Частныя заключенія:

I. И такъ *уравненій корня*, кои составляютъ одно существенное цѣлое—извлеченіе корней, три вида:

$$p-x^n=0..........(b)$$

$$\frac{p}{x^n}=1..............(c)$$

$$\sqrt[n]{p}=x...............(d)$$

и основаніемъ ихъ служитъ *четвертое*

$$x^n=p..........(a)$$

кои въ частномъ случаѣ, какъ въ нашемъ рѣшеніи, имѣютъ видъ

$$125-x^3=0$$

$$\frac{125}{x^3}=1$$

$$\sqrt[3]{125}=x$$

$$125=x^3$$

и, изъ коихъ послѣднее не все тоже, что $5^3=125$, хотя оба связаны однѣмъ и тѣмъ же равенствомъ и дѣйствіемъ. Ибо, это есть тожество и принадлежитъ къ выкладкѣ степени 125, поданнымъ 5 и 3, въ то время, какъ уравненіе $x^3=125$—къ способу изысканія основанія x.

II. Первыя два уравненія (b) и (c) выведены вслѣдствіе извѣстныхъ правилъ возвышенія и дѣленія, изъ урав. (a); уравненіе же результата (d), хотя также *послѣдовательно* выведено изъ основнаго (a), но только съ помощію вспомогательнаго условія, принять имянно такое, а недругое изображеніе общаго результата извлеченія корня, въ противуположность уравненію степени (a). Какъ бы нибыло, а существенная противуположность въ уравненіяхъ

$$\overset{n}{x}=p$$

и

$$\sqrt[n]{p}=x$$

какъ видѣли выше, дѣйствительно находится; въ первомъ x возвышено до n, для того, чтобъ произвести радикалъ p; словомъ, x съ n состоятъ въ извѣстной связи и въ одной части уравненія, во второмъ же на оборотъ, *n* отъ x раздѣлено противуположною частію, гдѣ n уже показываетъ не число равныхъ производителей x, но число равныхъ дѣлителей x. x. x; содержащихся въ радикалѣ p (что выражаетъ знакъ ($\sqrt[n]{\ }$), которыя въ частномъ производятъ единицу, а въ разности нуль.

§ 71.

Пользуясь различіемъ, покоему уравненіе результата извлеченія (d) противуполагается основному (a), легко первое *превратить* во второе, а имянно стоитъ только въ уравненіи

$$\sqrt[n]{p}=x,$$

(въ слѣдствіе противуположности онаго,—урав. (a),) x возвысить въ n—ю степень, а радикалъ p оставить безъ перемѣны, уничтоживъ только знакъ $\sqrt[n]{\ }$ и чрезъ то получается уравненіе (а):

$$x^n = p.$$

ибо p, противъ x въ n степеней больше, слѣд., чтобъ x уравнить съ p, то, очевидно, x должно возвысить въ n—ую степень. *Съ другой стороны* потому, что равенство уравненія

$$x = \sqrt[n]{p}$$

нетеряется, если обѣ части его возвысимъ въ n—ую степень (§. 6, 4); и такъ

$$(x)^n = (\sqrt[n]{p})^n$$

а по (§ 69, 1.) имѣемъ

$$p = (\sqrt[n]{p})^n$$

сравнивая же эти два уравненія находимъ, что въ нихъ вторыя части равны между собою, слѣд. не обходимо должны быть и первыя равны; и такъ опять изъ урав. $x = \sqrt[n]{p}$ получаемъ

$$x^n = p.$$

Съ третей стороны потому, что радикалъ равенъ корню возвышенному до показателя корня, слѣд. въ уравненіи

$$x = \sqrt[n]{p}$$

x возвышаю въ n—ую степень и приравниваю его радикалу p, т. е.

$$x^n = p.$$

Такимъ же образомъ, если изъ уравненія способа

$$p - x^n = 0$$

требуется составить общій результатъ извлеченія, то во первыхъ x^n переношу изъ первой части во вторую съ противнымъ знакомъ (§ 23,) т. е. съ $+$, и чрезъ то получаю основное уравненіе $p = +x^n$ или $x^n = p$, гдѣ $+$ подразумѣвается; откуда x нетрудно изобразить: $x = \sqrt[n]{p}$. Обратно, если по общему результату извлеченія, требуется выразить уравненіе способа, то во первыхъ x возвышаю въ n—ую степень, а въ радикалѣ p уничтожаю знакъ $\sqrt[n]{}$ и чрезъ то опять дохожу къ начальному уравненію $x^n = p$; откуда уравненіе способа по извѣстному будетъ

$$p - x^n = 0 \text{ или } \frac{p}{x^n} = 1.$$

Вообще основное уравненіе $x^n = p$ есть *предѣлъ* всѣхъ преобразованій производныхъ (b), (c) и (d), кои пройти его ни какъ немогутъ.

§ 72.

И такъ выведенныя *три* уравненія

$$(к)^n = p \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

$$p - к^n = 0 \ldots\ldots\ldots (b)$$

$$\sqrt[n]{p} = к \ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

(гдѣ подъ к разумѣемъ корень) составляютъ вообще основанiе для всей Математики, гдѣ только входитъ способъ извлеченiя количествъ. Такъ, если дано будетъ числовое уравненiе

$$\sqrt[3]{x}=9,$$

то отсюда x, какъ радикалъ, по уравненiю (а) получимъ

$$x=9^3=729$$

2. Когда же дано

$$36-x^2=0,$$

то по предыдущему § будетъ

$$36=+x^2 \text{или}$$

$$x^2=36,$$

и

$$x=\sqrt[2]{36}=6.$$

3. Такимъ же образомъ, если отдѣльно данъ показатель корня (3), радикалъ x и корень 5, то по первому можно составить и равенство послѣднихъ; такъ, чтобъ x приравнить 5-ти должно изъ x извлечь корень 3-й степени, или 5 возвысить въ 3-ью степень; и такъ $\sqrt[3]{x},=5$ или $x=5^3$. Если же показатель корня будетъ x, радикалъ 3125, а корень 5, то, дабы x приравнить 5 должно изъ 3125 извлечь корень x—той степени, или 5 возвысить до x, т. е. $\sqrt[x]{3125}=5$, или $\overset{x}{5}=3125$. Какъ ниясенъ теперь ходъ сихъ преобразованiй, но при изложенiяхъ обыкновенныхъ Ариѳметикъ они всегда оставались неудобно-понятными.

4. Теперь остается разрѣшить уравненіе *четвертаго* и послѣдняго вида:

$$5^x=3125$$

какъ предѣлъ всѣхъ Ариѳметическихъ исчисленій, ибо за рѣшеніемъ его болѣе новыхъ способовъ нѣтъ, а остаются только слѣдствія всего до селѣ сказаннаго. Но предложенное уравненіе само собою указываетъ, что должно сдѣлать съ 5, чтобъ изъ него получить x; и именно, 5 должно помножать на себя до тѣхъ поръ, пока произведетъ радикалъ 3125, когда число равныхъ производителей, входящихъ въ произведеніе, и покажетъ величину x; но 5.5.5.5.5=3125, слѣд.

$$x=5;$$

такъ что $\sqrt[5]{3125}=5$,

или

$$5^5=3125.$$

Изъ хода рѣшенія легко примѣтить, что оно независило отъ выведенныхъ въ извлеченіи корней общихъ результатовъ, какъ первыя три случая, а основовалось на правилахъ возвышенія степеней, впараллель съ изслѣдованіями извлеченія корней; при томъ вычисленную величину x, неможетъ выразить въ общемъ видѣ результата ни одно доселѣ извѣстное правило, то и слѣдуетъ, что уравненіе

$$5^x=3125$$

составляетъ *особенный родъ исчисленій.* И дѣйствительно, въ третьей части или практической Ариѳметикѣ оно извѣстно, подъ именемъ *логариѳмовъ*, которыя въ Алгебрѣ получаютъ обширнѣйшее развитіе, для Ариѳметики невозможное. Сдѣсь же только скажемъ, что послѣднее ариѳметическое уравненіе можетъ представиться въ общемъ видѣ такъ

$$a^x = p \ldots\ldots\ldots (f),$$

гдѣ a есть корень или иначе основаніе. Результатъ же онаго выражается чрезъ

$$lp = la^x = x, \text{ т. е.}$$

$$lp = x \ldots\ldots (h)$$

гдѣ буква l означаетъ логариѳмъ числа p или числа a^x.

Въ частномъ же случаѣ, какъ въ нашемъ рѣшеніи, показанный результатъ принимаетъ видъ:

$$l.125 = l\ 5^3 = 3$$

или

$$l.125 = 3.$$

Общее замѣчаніе. Если когда-либо случится имѣть уравненіе вида

$$x^n = p,$$

въ которомъ требуется опредѣлить корень x, то его всегда должно принимать за основное уравненіе извлеченія корней, и p за—радикаль; а если показатель n, то—за основное уравненіе логариѳмовъ.

§ 73.

И такъ, главныхъ уравненій извлеченія всего *семь*; выпишемъ ихъ для общаго свода:

$$1.\ x^{n}=p.$$

$$2.\ p-x^{n}=0$$

$$3.\ \frac{p}{x^{n}}=1$$

$$4.\ \sqrt[n]{p}=x \text{ или } x=\sqrt[n]{p}$$

$$5.\ (\sqrt[n]{p})^{n}=p \text{ или } p=(\sqrt[n]{p})^{n}$$

$$6.\ a^{x}=p$$

$$7.\ x=lp.$$

Въ заключеніе скажемъ, что основныхъ Ариѳметическихъ выраженій, изъ коихъ вытекаютъ всѣ прочія,— *одиннадцать*: три явныхъ или открытыхъ равенствъ, именуемыхъ *тожественными*:

$$5+4=9$$
$$2.\ 4=8$$
$$5^{3}=125.$$

Четыре *закрытыхъ* равенствъ или уравненій:

$$x+4=9$$
$$2.\ x=8$$
$$x^{3}=125$$
$$5^{x}=125.$$

И четыре результата уравненій:

$$x=9-4=5$$

$$x=\frac{8}{2}=4$$

$$x=\sqrt[3]{125}=5$$

$$x=l.\ 125=2.$$

изъ коихъ первыя три называются *содержаніями*, а послѣднее *логариѳмомъ*.

Ъ.) Частныя изслѣдованія.

§ 74.

Поелику весьма продолжительно, а во многихъ случаяхъ даже безуспѣшно находить корень, состоящій изъ нѣсколькихъ порядковъ единицъ, на основаніи уравненія способа извлеченія

$$p-x^{n}=0........(Ъ)$$

(гдѣ подъ n разумѣю показателя 2 или 3, смотря потребованію) чрезъ пробу умноженія произвольно избраннаго числа, предполагая его равнымъ величинѣ x, для того имѣемъ сокращеннѣйшій и точнѣйшій способъ, руководствуясь правилами (§ 13, 14, 15, 16, 17, 18, и 19), примѣненными къ сему уравненію (Ъ). Пусть напр. требуется изъ 316969 извлечь корень квадратный. Судя по числу цыѳръ квадрата искомый корень будетъ содержать три цыѳры, *сотни, десятки и единицы*, то на основаніи уравненія (Ъ) составляю

$$316969-(\textit{сот.})^2+2(\textit{сот.})\times\textit{дес.}+(\textit{дес.})^2+2\times(\textit{сот.}+$$
$$+\textit{дяс.})\times\textit{един.}+\textit{един.}^2=0.......(1)$$

гдѣ $x^2 = сот.^2 + 2.(сот.)дес. + (дес.)^2 + 2(сот. + дес.)ед. + едн)^2$; такъ что все выраженіе принимаетъ общій видъ

$$316969 - x^2 = 0$$

По выраженію (1) нетрудно уже опредѣлить цыфры сотень, десятковъ и единицъ. Въ самомъ дѣлѣ: поелику квадратъ сотень содержитъ четыре *нуля*, то и квадратъ цыфры сотень долженъ быть не больше 31, но $6^2 = 36$, слѣд. въ искомомъ корнѣ будетъ 5 сотень или 500; когда же посредствомъ вычитанія исключимъ 500^2 или $250000 = сот.^2$ изъ 316969, (§ 27, II), то въ остаткѣ найдется

$$66969 - (2 \times 500 \times дес. + дес^2) + 2 \times (500 + дес.).един. + \\ + един.^2) = 0 \ldots. (2)$$

но чтобы опредѣлить цыфру десятковъ, надобно изъ уравненія (2) взять членъ

$$2 \times 500 \times дес.$$

надъ коимъ разсуждаю: въ сотняхъ содержится два *нуля*, въ десяткахъ *одинъ*, слѣд. въ ихъ произведеніи—три *нуля*, и удвоенное произведеніе цыфры сотень на цыфру десятковъ недолжно привышать 66, посему цыфра десятковъ есть 6; ибо $2.500\ 6 = 60000$. По опредѣленіи цыфры десятковъ, квадратъ оныхъ дѣлается также извѣстнымъ: $6^2 = 3600$; почему и придаемъ его къ удвоенному произведенію, и въ суммѣ получаемъ

$$63600 = 2 \times 500 \times дес. + дес^2.$$

что исключивъ изъ 66969 въ остаткѣ будетъ

$$3369 - 2 \times (500 + 60) \times един. \times един.)^2 = 0$$

Здѣсь остается опредѣлить единицы, ибо десятки и сотни извѣстны. Беремъ $2\times5600\times$*еди.*, но какъ удвоенное произведеніе сотень и десятковъ на единицы не должно быть больше 33, и потому за цыфру единицъ должно взять 3: ибо $2.560.3=3360$; слѣд. *един.*$=9^2$ и въ суммѣ выходитъ 3369, число равное остатку радикальнаго числа. Слѣд. разность между ими нуль. И такъ, $500+60+3=563$ есть точный квадратный корень числа 366969. Всѣ сіи изысканія разлагаются въ такомъ видѣ:

$$\begin{array}{rl}
\sqrt{316969}=500 & \\
60 & \\
3 & \\
500^2=250000 & \overline{563} \\
\hline
66969 & \\
63600 & \\
\hline
2.500.60+60^2=3369 & \\
2.560.3+3^2=3360 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Вотъ еще *примѣръ:* извлечь квадратный корень изъ 1111088889. По числу цыфръ сего квадрата, заключаю, что корень его состоитъ *изъ десятковъ тысячь, тысячь, сотень десятковъ и единицъ*; по сему

$$1111088889-\left\{\begin{array}{l}
\text{двс. ты.}^2+2.\ \text{дес. тыс.}\times\text{тыс.}+\text{тыс.}^2 \\
+2\times(\text{дес. т.}+\text{тыс:})\times\text{сот.}+\text{сот.}^2 \\
+2\times(\text{дес. т.}+\text{тыс.}+\text{сот.})\times\text{дес.}+\text{дес.}^2 \\
+2+(\text{дес. т.}+\text{т.}+\text{сот.}+\text{де.})\times\text{ед.}+\text{ед.}^2
\end{array}\right\}=0$$

Руководствуясь симъ выраженіемъ и изъясненнымъ рѣшеніемъ предыдущаго *примѣра* не трудно опредѣлить цыфры и сего корня, начиная съ высшихъ такимъ образомъ:

$$\begin{array}{rl}
\sqrt{1111088889} = & 30000\\
 & 3000\\
300000^2=900000000 & 300\\
\overline{211088889} & 30\\
 & 3\\
2.30000.3000+3000^2=189000000 & \overline{33333.}\\
\overline{22088889} & \\
2.33000.300+300^2=19890000 & \\
\overline{199989} & \\
2.33330.3+3^2=199989 & \\
\overline{0} &
\end{array}$$

Если изъ даннаго числа точнаго корня извлечь нельзя, то посредствомъ изложеннаго способа, находимъ число, между которыми сей корень находится. Вотъ примѣры:

$$\begin{array}{rl}
\sqrt{1111111} = & 1000\\
1000000 & 50\\
\overline{111111} & 4\\
102500 & \overline{1054}\\
\overline{8611} & \\
8416 & \\
\overline{195.} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\sqrt{123456789} = & 10000\\
100000000 & 1000\\
\overline{23456789} & 100\\
21000000 & 10\\
 & 1\\
\overline{2456789} & \overline{11111}
\end{array}$$

Въ первомъ примѣрѣ искомый корень содержится между 1054 и 1055; а во второмъ между 11111 и 11112. Въ семъ случаѣ довольствуются приближеніемъ въ цѣлыхъ только числахъ. И такъ

$$1111111=(1054)^2+195$$

и

$$123456789=(11111)^2+24568.$$

Вообще *неполный радикалъ равенъ неточному корню возвышенному до показателя корня и плюсъ остатокъ;* т. е.

$$н.\ р = (н\ к)^{п} + ост.$$

Но полученный остатокъ во второмъ примѣрѣ заставляетъ думать, что мы слишкомъ уже уменьшили послѣднюю цыфру корня; ибо корень 11111<*ост.* 24568. Но чтобы разрѣшить это сомнѣніе, то замѣтимъ, что *остатокъ недолженъ превосходить удвоеннаго произведенія найденнаго уже корня на послѣдующую цыфру его и квадрата оной;* а какъ сказанное равно 222221, что больше остатка 24,568, посему въ вычисленіи несдѣлано ошибки, не смотря, что корень меньше остатка.

Общее замѣч. При извлеченіи нельзя опредѣлять прежде высшихъ цыѳръ корня, его единицъ; ибо квадратъ оныхъ даетъ вообще десятки, которые сложены вмѣстѣ съ удвоеннымъ произведеніемъ десятковъ на единицы корня, почему и не возможно знать въ какой части корня находится квадратъ единицъ.

§ 75.

Изъясненныя правила, для извлеченія корней изъ квадратовъ, напослѣдокъ дополняются практическими замѣчаніями: получивши навыкъ въ извлеченіяхъ, можно опускать нули и тогда къ остатку должно сносить каждый слѣдующій классъ, состоящій въ двухъ цыѳрахъ, для опредѣленія цыѳры корня. По сей же причинѣ, производя извлеченіе безъ нулей, нельзя задаваться болѣе 9.

Этотъ способъ рѣшенія основывается на томъ замѣчаніи (§ 15), что на каждую цыѳру корня въ квадратѣ приходится по два знака, кромѣ послѣдней, которой можетъ соотвѣтствовать и одинъ знакъ. Если квадратъ=

$$56,82,14,44;$$

то корень его долженъ состоять изъ четырехъ знаковъ: тысячь, сотень, десятковъ и единицъ, почему

$$56,82,14,44-|т^2+|2т.\times с+с^2+|2\ (т+с)\ д+д^2+|2\ (т+с+д)\ ед+ед^2)=0$$

Раздѣливъ члены второй части выраженія чертами, начиная съ правой руки къ лѣвой, такъ чтобы въ каждомъ отдѣленіи ихъ заключалось по *два*, обыкновенно какъ дѣлаемъ, опредѣляя число граней квадрата, находимъ, что

$т^2$ соотвѣтствуетъ первая грань 56

2. $т\times с+с^2$ (§ 10, 111, с) . . . . *вторая* . . 82

2. $(т+с)д+д^2$ . . . . *третяя* . . . 14

2. $(т+с+д)\ ед+ед^2$ . . . . *четвертая* . . 44

Сумма=56821444

разлагая далѣе выходитъ, что

$т.^2$ соотвѣствуетъ полная грань 56

$\{$2. $т.\ с$—первая цыѳра *второй грани* т. е. 8
$с^2$—вторая цыѳра 2

$\{$2 $(т+с)\ д$ первая цыѳра *третей грани* . . 1
$д^2$—вторая цыѳра 4

$\{$2 $(т+с+д)ед$—первая—*четвертой грани*. . . 4
$ед^2$—вторія и послѣдняя цыѳра 4-й грани. . . . 4

Сумма 56821444

По сему и выводимъ, что въ *первой грани* съ лѣвой руки т. е. въ 56 содержится квадратъ тысячь; *во второй грани*: (82), въ первой цыѳрѣ 8, содержится удвоенное произведеніе тысячь на сотни, во второй цыѳрѣ 2, помѣщается квадратъ сотень; *въ третей грани*: (14) въ первой цыѳрѣ 1 находится удвоенное произведеніе тысячь, сотень на десятки, во второй цыѳрѣ 4—квадратъ десятковъ; *въ четвертой грани*: (44), въ первой цыѳрѣ влѣво 4, содержатся удвоенное произведеніе тысячь сотень, десятокъ на единицы, во второй цыѳрѣ 4, квадратъ единицъ.

И такъ, чтобъ извлечь корень квадратный изъ 56, 82,14,44

$$\sqrt{56,82,14,44}=7538$$

49
78,2
70
25
725
571,4
450
9
4509
12054,4
12048
64
120544
0

нахожу изъ класса 56 корень 7 и квадратъ его 49 вычитаю, къ остатку сношу слѣдующій классъ 82, что составитъ 782 — первой отдѣлъ радикала; а поелику въ первой съ правой стороны цыфрѣ, снесенной грани, т. е. въ 2 содержится крадратъ сотень, а въ остальныхъ двухъ 78 удвоенное произведеніе тысячь на сотни, то отдѣливъ цыфру 2 запятою, изъ 78 нахожу корень сотень, раздѣля оное на удвоенную уже найденную цыфру тысячь, т. е. на 2 *ты.*$=2.7=14$, частное $\frac{78}{14}=$ $=5+$ост. сотень, приписываю въ корнѣ послѣ 7 тысячь, а остатокъ, какой бы небылъ отношу къ отдѣльной цыфрѣ 2; и потомъ вычисляю:

$$\begin{array}{rr} 2.\ \textit{тыс.}\ \textit{сот}=2.7.5= & 70 \\ \textit{сот.}^2=5^2 & 25 \\ \hline & 725 \end{array}$$

(вступая, на основаніи разложенія, каждымъ нижнемъ произведеніемъ на одну цыфру вправо, для того, чтобъ расположить однородныя подъ однородными) сумму сихъ произведеній 725 вычитаю изъ перваго отдѣла и къ остатку 57 сношу слѣдующій классъ 14—получаю 571,4 третій отдѣлъ; число 4—квадратъ десятковъ, отмѣчаю занятою на основаніи предыдущаго, а изъ остальныхъ цыфръ 571, нахожу цыфру *десятковъ*, раздѣливъ оныя на 2(*тыс*+*сот*) $=2.75=150$, частное 3 десятка приписываю въ корнѣ послѣ 5 сотень и вто же время вычисляю:

$$\begin{array}{rr} 2.\ (\textit{тыс}+\textit{сот}).\ \textit{дес}=2.75.3= & 450 \\ \textit{дес}^2=3^2= & 9 \\ \hline & 4509 \end{array}$$

(выступая низшимъ произведеніемъ, какъ и прежде, на одинъ знакъ вправо). Наконецъ сумму сихъ произведеній 4909 вычитаю изъ втораго отдѣла и къ остатку 1205 сношу послѣдній классъ, нахожу 120544 третій и послѣдній отдѣлъ, гдѣ, отмѣтивъ крайнюю справой стороны цыфру запятою, изъ прочихъ нахожу число единицъ, раздѣливъ 12054 на удвоенное произведеніе найденныхъ трехъ цыфръ корня т. е. на $(2.\,т.+е+д)=2.753=1506$, частное 8 *единицъ* ставлю въ корнѣ и въ тоже время вычисляю:

$$
\begin{array}{rr}
2\,(т+с.+д)ед=2.(763).8= & 120\;48 \\
ед^2=8^2= & 64 \\
\hline
 & 120544
\end{array}
$$

(встрѣчая низшимъ произведеніемъ на одну цыфру вправо); сумму сихъ произведеній вычитаю изъ третьяго отдѣла, въ остаткѣ нахожу нуль, а тѣмъ и исчисленіе оканчиваю.

§ 76.

Извлеченіе квадратныхъ корней можно еще сократить слѣдующимъ: вмѣсто того, чтобъ брать квадратъ втораго числа отдѣльно и потомъ оный прикладывать къ удвоенному произведенію изъ перваго числа на второе, можно эту сумму получать вдругъ, поставивъ найденный вторый членъ послѣ удвоеннаго перваго и умноживъ потомъ на второй членъ, ибо въ семъ произведеніи непремѣнно должно заключаться и удвоенное произведеніе перваго члена на второй и квадратъ 2-го члена. Подобнымъ же образомъ надлежитъ поступать при опредѣленіи третьяго и всѣхъ слѣдующихъ членовъ; чтобъ увѣриться въ истинѣ сказаннаго, лучше рѣшить предидущій примѣръ

$$\sqrt{56,82,14,44}=7538$$

```
          49
 145 |  782
     |  725
1503 | 5714
     | 4509
15068 | 120544
      | 120544
      ------
           0
```

Еще примѣръ

$$\sqrt{4,32,64}=208$$

```
      4
408 | 3264
    | 3264
    ----
       0
```

Въ послѣднемъ рѣшеніи должно замѣтить, что, если удвоенное произведеніе перваго члена на второй т. е. (3) раздѣлимъ на удвоенный первый членъ (4), то получимъ въ частномъ нуль; слѣд., въ искомомъ корнѣ десятковъ незаключается, и по сему надлежитъ поставить въ корнѣ нуль на мѣстѣ десятокъ, и потомъ поступать какъ сказано выше. Такимъ же образомъ:

$$\sqrt{5,31,76,36}=2306$$

```
      4
 43 | 131
    | 129
460 | 27636
    | 27636
    -----
        0
```

§ 78.

За симъ приступимъ *къ извлеченію кубическихъ корней*. Пусть требуется $\sqrt[3]{21952}$? Основываясь на выводѣ §. 16, что искомый корень состоитъ изъ двухъ цыфръ пишу

$$21952-(дес)^3+3\times(дес.)^2\times(еди.)+3\times(дес.)\times(еди)^2+$$
$$+(еди^3)=0\ldots(1)$$

Но кубъ цыфры десятковъ будетъ имѣть 3 нуля, слѣд. кубъ самой цыфры корня неможетъ превышать 21; а посему эта цыфра есть 2, поелику $3^3=27$. Итакъ беру $20^3=800=дес.^3$ и вычитаю изъ выраженія (1) въ остаткѣ выходитъ

$$13953-(2\times20^2\times еди.+3\times20\times еди^2+еди)^3=0$$

А какъ $3.20^2=1200$, то за цыфру единицъ надобно взять 8 и найти $3.20^2 8+3.20.8^2+8^3=13.952$ число, которое равно радикалу почему и заключаю, что остатокъ 0; т. е.

$$21952=(28)^3$$

Показанное вычисленіе въ практикѣ представляется такъ:

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{21952}=20 \\
 & \qquad\quad\;\; 8 \\
 & \qquad\quad\;\; \overline{28} \\
20^3= & 8000 \\
 & \overline{13952} \\
2.20.^2 8+3.20.8^2+8^3= & 13952 \\
 & \overline{\quad 0 \quad}
\end{array}$$

Общее примѣчаніе. Нельзя прежде десятковъ отыскать единицы корня; ибо кубъ сей цыѳры можетъ давать десятки и сотни, которыя бывъ соединены съ другими десятками и сотнями, зависятъ—отъ прочихъ частей куба, дающихъ тысячи.

За этимъ можно уже извлечь кубичный корень и изъ 21305472000. Видѣли въ § 19, что о кубѣ всякаго числа можно разсуждать, какъ о кубѣ числа, состоящаго изъ двухъ цыѳръ; но поелику искомый корень долженъ состоять изъ четырехъ цыѳръ, по сему цыѳру *тысячь* принимаю *за первый* членъ, а сумму остальныхъ порядковъ, кои вообще составляютъ *сотни*—за *второй, и* пишу

$$21305472000-(\text{тыс.})^3+3\times(\text{ты})^2\times(\text{сот})+3\times\text{ты}\times\text{сот}^2+(\text{сот.})^3=0 \quad .\ .\ .\ .\ (1)$$

Потомъ разсуждаю: кубъ цыѳры тысячь содержитъ 9 нулей; слѣд. самая цыѳра должна быть 2; ибо $3^3=27$ больше 12. И такъ беру $2000^3=8000000000=\text{тыс.}^3$ и вычитаю изъ уравненія (1) въ остаткѣ нахожу

$$4305472000-(3.2000^2\times\text{сот}+2.2000\times\text{сот}^2+\text{сот}^3=$$
$$=0.(2)$$

Послѣ сего, чтобъ докончить извлеченіе беру членъ

$$3.2000^2\times\text{сот}.$$

и нахожу цыѳру сотень, которой произведеніе на утроенный квадратъ цыѳры тысячь долженъ имѣть при себѣ 8 нулей; слѣд. искомая цыѳра должна быть 3 сотни; ибо $3.2000.^2300=36000000000$; $3.2000.300^2=5400000000$ и $3000^3=27000000$ и сумма всѣхъ трехъ выводовъ содержитъ 41676000000, которую, вычтя изъ выраженія

(2) нахожу 138472000. Но какъ найденная часть корня 2300 показываетъ, что въ остаткѣ заключается еще кубъ десятковъ и единицъ, то, опять, принимаю за *первый* членъ число 2300, а искомыя десятки и единицы или вообще десятки—за *второй*; а какъ притомъ, кубъ перваго члена или $(2300)^3$ уже выключенъ изъ 12305472000; слѣд. остается составить только

$$138472000-(3.2300^2\times дес.+3.2300\ дес.^2\times дес^3.)=0 \quad \ldots\ldots(3.)$$

Для полученія цыфры десятковъ беру членъ

$$3.\ 2300^2\times дес.$$

и нахожу ихъ взаимное произведеніе $3.2300^2\times дес.=$ $=158700000\times дес.$; изъ чего заключаю, что искомая цыфра десятковъ есть 0; слѣд. выраженіе (3) обращается въ

$$138472000-(3.2300^2\times еди.+3\times2300\times еди.^2+еди.^3) =0\ldots\ldots(4),$$

изъ котораго опредѣляю дѣйствительную цыфру единицъ по предыдущему; и оная есть 8; ибо

$$3.2300.^2 8+3.2300.8^2+8^3=127402112.$$

что, вычтя изъ выраженія (4) получаю въ остаткѣ 11069888, почему и заключаю, что

$$12305472000=(2308)^3+11069888.$$

Сей примѣръ по предыдущему представляется такъ:

$$\begin{array}{rrr}
 & \sqrt[3]{12305472000}=2000 & \\
2000^3= & 8000000000 & 300 \\
 & 4305472000 & 8 \\
3\times2000^2\times300+3.\times2000\times300^2+300^3= & 4167000000 & 2308 \\
 & 138472000 & \\
3\times2300^2\times8+3\times2300\times8^2+8^3= & 127402112 & \\
 & 11069888 &
\end{array}$$

§ 78.

Показанное извлеченіе кубическихъ корней сокращается слѣдующими *практическими замѣчаніями*. Опытный разрѣшатель можетъ опускать нули, и тогда къ остаткамъ должно сносить по три цыфры радикала на каждую цыфру корня.

Этотъ способъ рѣшенія основывается на томъ замѣчаніи (§ 16), что на каждую цыфру корня въ кубѣ приходится по три знака, кромѣ послѣдней, которой можетъ отвѣтствовать три, два и одинъ знакъ. Такъ, если за кубъ примемъ число

34,576,812,314,

то корень его долженъ состоять изъ четырехъ знаковъ: тысячь, сотень, десятковъ и единицъ. Почему

$$34,576,812,314 = (т.)^3 + \mid 3.т.^2с. + 3т.с.^2 + с.^3 + \mid 3(т.+ \\ +с.).д^2 + д^3 + (т.+с.)д^2 + де^3 + \mid 3(т.+с.+д.)^2ед. + 3(т.+ \\ +с.+д.)ед.^2 + ед^3$$

раздѣливъ члены второй части выраженія вертикальными чертами, начиная съ правой руки къ лѣвой, такъ, чтобы въ каждомъ отдѣлѣ заключалось по три,—какъ обыкновенно дѣлаемъ, опредѣляя число корней куба, находимъ, что

$т^3$ соотвѣтствуетъ первая грань 34
$3.\ т.^2с + 3.т.с^2 + с^3$ вторая 576
$3.\ (т+с)^2.д + 3.(т+с)д^2 + д^3$ третья 812
$3.\ (т+с+д)^2ед + 3(т+с+д)ед^2 + ед^3$ четвертая 314

И сумма=34,576,812,314

Разлагая далѣе выходитъ, что

первой грани $\{т.^3$ соотвѣт. первая грань . . 34

второй $\left\{\begin{array}{l} 3.т.^2е. \text{ первая цыфра второй грани. . } 5 \\ 3.т.\ с.^2 \text{вторая цыфра. . . . . } 7 \\ с.^3 \text{третья цыфра. . . . . } 6 \end{array}\right.$

третьей $\left\{\begin{array}{l} 3.(т+с)^2д \text{ первая цыфра третьей грани. } 8 \\ 3.(т+с)д^2 \text{вторая цыфра. . . . . } 1 \\ д^3 \text{третья цыфра. . . . . } 2 \end{array}\right.$

четвертой $\left\{\begin{array}{l} 3.(т+с+д).^2ед. \text{ первая цыфра 4 грани } 3 \\ 3.(т+е+д)\,ед.^2 \text{вторая цыфра . . . . . } 1 \\ ед^3. \quad \text{третья цыфра. . . . . . } 4 \end{array}\right.$

И сумма четырехъ граней = 34,576,812,314

Наставникъ долженъ еще разъ повторить надъ выведенною суммою, что въ первой грани, сего радикала, съ лѣвой руки находится кубъ тысячь; во второй грани, на первомъ мѣстѣ слѣва—утроенное произведеніе квадрата тысячь на сотни; на второмъ мѣстѣ—утроенное произведеніе тысячь на квадратъ сотень; въ третьемъ мѣстѣ—кубъ сотень и. т. д.

И такъ, чтобъ извлечь корень кубичный, изъ предложеннаго числа, то

$$\sqrt[3]{34,576,812,314}=3257$$

27

27 | 75,76

54

36

8

5768

3672 | 18588,12

15360

2400

125

1560125

316875 | 2526873,14

2218125

47775

343

222290593

(30496721)

изъ класса 34, нахожу корень 3 и кубъ его 27 вычитаю изъ 34; къ остатку 7, сношу слѣдующій классъ 576, чрезъ что составится 7576 — *первый отдѣльный радикалъ* или отдѣлъ; а поелику въ снесенной первой грани, съ правой руки—въ цыфрѣ (6), содержится кубъ искомыхъ сотень, во второй (7)—утроенное произведеніе квадрата найденной уже цыфры тысячь, которая есть 3, то отдѣливъ, въ снесенной грани, для куба сотень, первыя два съ правой руки числа запятою, такъ: 75,76, нахожу изъ 76 *корень сотень*, раздѣливъ оныя наутроенный квадратъ числа 3—тысячь т. е. 3. $3^2=27$, частное $\frac{75}{27}=2+$ост. приписываю въ корнѣ послѣ 3 тысячь, и въ то же время вычисляю:

$$3.\ т.^2 с = 3.3.^2 = 54$$
$$3.\ т. с^2 = 3.2.^2 = \ 36$$
$$(сот.)^3 = 2^3 = \qquad 8$$

$$\text{Сумма} = 5768$$

выступая при этомъ, на основаніи разложенія, каждымъ нижнимъ произведеніемъ на одну цыфру въ право, для того, чтобъ расположить однородныя подъ однородными; и сумму сихъ произведеній 5768, вычитаю изъ перваго отдѣла 7576, а къ остатку 1858 сношу слѣдующій классъ 812, чрезъ что получаю 1858812—*второй* отдѣлъ, гдѣ, по предыдущему, отмѣтивъ съ правой стороны первыя двѣ цыфры запятою: такъ 18588,12 изъ прочихъ 18588, нахожу корень *десятковъ*, раздѣливъ на утроенное произведеніе квадрата найденныхъ уже двухъ цыфръ корня т. е. на $3.32^2 = 3072$; частное 5 *десятковъ* приписываю въ корнѣ послѣ 2 сотень, и въ то же время вычисляю:

$$3(т+с)^2 д = 3\ 32^2 5 = 15360$$
$$3(т+)д^2 = 3.32.5^2 = \ 2400$$
$$д^3 = 5^3 = \qquad 125$$

$$1560125$$

(выступая каждымъ нижнимъ произведеніемъ, какъ и прежде, на одинъ знакъ вправо) и наконецъ, сумму сихъ произведеній 1560125, вычтя изъ втораго отдѣла, 1858812, къ остатку 252687 сношу послѣдній классъ 314 и получаю *третій отдѣлъ*: 352687314; гдѣ по предыдущему, отмѣчаю запятою съ правой стороны двѣ первыя цыфры, а изъ остальныхъ нахожу *цыфру единицъ*, раздѣливъ оныя на

$3.(ты.+со.+д)^2=3.(325)^2=316875$, частное 7 *единицъ* приписываю въ корнѣ и въ то же время вычисляю:

$$3.\ (т+с+д).^2ед=3.(325).^27=2218125$$
$$3.\ (т+с+д)\ ед^2=3.(325).7^2=\quad 47775$$
$$(еди)^3=7^3=\qquad 343$$

Сумма=222,290,593

Сумму сихъ произведенiй, вычитая изъ всего отдѣла, въ остаткѣ нахожу 30,496,721, что меньше единицы корня, почему симъ и оканчиваю исчисленiе.

Конецъ первой части.