ГЛАВА II.

Изслѣдованіе установившихся движеній.

О линейныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ съ постоянными коэффиціентами.

17. Разсмотримъ систему линейныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \dots + p_{sn}x_n \qquad (s=1, 2, \dots, n) \qquad (1)$$

съ постоянными коэффиціентами $p_{s\sigma}$.

Интегрированіе этой системы зависитъ отъ рѣшенія алгебраическаго уравненія

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\varkappa & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\varkappa & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn}-\varkappa \end{vmatrix} = 0$$

$n^{\text{ой}}$ степени относительно неизвѣстной $\varkappa$.

Мы будемъ называть это уравненіе *опредѣляющимъ*, а опредѣлитель, представляющій первую его часть,—*основнымъ*. Разсматривая послѣдній, какъ функцію величины $\varkappa$, будемъ означать его черезъ $D(\varkappa)$.

Каждому корню $\varkappa$ опредѣляющаго уравненія соотвѣтствуетъ рѣшеніе системы (1) вида

$$x_1 = K_1 e^{\varkappa t}, \quad x_2 = K_2 e^{\varkappa t}, \quad \dots, \quad x_n = K_n e^{\varkappa t}, \qquad (2)$$

гдѣ K_s суть постоянныя, между которыми по крайней мѣрѣ нѣкоторыя отличны отъ нуля; и когда опредѣляющее уравненіе не имѣетъ кратныхъ корней, то разсматривая всѣ его корни, получимъ n рѣшеній вида (2), которыя будутъ независимыми.

Въ случаѣ существованія кратныхъ корней, система уравненій (1) вообще будетъ допускать рѣшенія слѣдующаго типа:

$$x_1 = f_1(t)\,e^{\varkappa t}, \quad x_2 = f_2(t)\,e^{\varkappa t}, \; \ldots\; , \; x_n = f_n(t)\,e^{\varkappa t},$$

гдѣ $f_s(t)$ суть цѣлыя функціи t, степени которыхъ не выше числа, на единицу меньшаго кратности корня $\varkappa$.

Если рѣшенія типа (2) разсматривать, какъ заключающіяся въ этомъ послѣднемъ, то всякому μ-кратному корню $\varkappa$ будетъ соотвѣтствовать μ независимыхъ рѣшеній такого вида.

При томъ, если въ числѣ этихъ рѣшеній находится такое, въ которомъ степени по крайней мѣрѣ нѣкоторыхъ изъ функцій $f_s(t)$ достигаютъ своего высшаго предѣла $\mu - 1$, то исходя изъ этого рѣшенія, можемъ получить всѣ μ независимыхъ рѣшеній, соотвѣтствующихъ корню $\varkappa$, замѣною функцій $f_s(t)$ ихъ производными $f_s^{(r)}(t)$ по t отъ нулевого до $\mu - 1^{\text{аго}}$ порядка включительно. Такимъ образомъ получимъ μ слѣдующихъ независимыхъ рѣшеній:

$$\begin{array}{llll}
f_1(t)e^{\varkappa t}, & f_2(t)e^{\varkappa t}, & \ldots\; , & f_n(t)e^{\varkappa t}, \\
f_1'(t)e^{\varkappa t}, & f_2'(t)e^{\varkappa t}, & \ldots\; , & f_n'(t)e^{\varkappa t}, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots, \\
f_1^{(\mu-1)}(t)e^{\varkappa t}, & f_2^{(\mu-1)}(t)e^{\varkappa t}, & \ldots\; , & f_n^{(\mu-1)}(t)e^{\varkappa t}.
\end{array}$$

Мы будемъ говорить, что въ этомъ случаѣ корню $\varkappa$ соотвѣтствуетъ одна группа рѣшеній.

Случай этотъ представится всякій разъ, когда разсматриваемый корень $\varkappa$ не обращаетъ въ нуль по крайней мѣрѣ одного изъ первыхъ миноровъ основного опредѣлителя.

Можетъ случиться, что μ-кратный корень $\varkappa$ обращаетъ въ нуль всѣ миноры этого опредѣлителя до порядка $k - 1$ включительно, не обращая въ нуль по крайней мѣрѣ одного изъ миноровъ $k^{\text{аго}}$ порядка.

Тогда корню этому будетъ соотвѣтствовать k группъ независимыхъ рѣшеній, составленныхъ подобно предыдущей.

Высшимъ предѣломъ для числа k служитъ число μ. Этотъ высшій предѣлъ можетъ достигаться, и тогда всѣ рѣшенія, соотвѣтствующія корню $\varkappa$, будутъ типа (2).

Всѣ эти теоремы можно считать настолько хорошо всѣмъ извѣстными, что было бы излишнимъ приводить ихъ доказательства, которыя при томъ не представляютъ ни малѣйшихъ затрудненій.

Замѣтимъ, что если $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ суть всѣ корни опредѣляющаго уравненія, то вещественныя части величинъ

$$-\varkappa_1, \; -\varkappa_2, \ldots, \; -\varkappa_n$$

представятъ для уравненій (1) то, что мы назвали характеристичными числами системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

18. Для системы уравненій (1) можно найти n независимыхъ интеграловъ вида

$$y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n ,$$

гдѣ y_s суть нѣкоторыя функціи t.

Функціи эти будутъ удовлетворять системѣ уравненій

$$\frac{dy_s}{dt} + p_{1s} y_1 + p_{2s} y_2 + \cdots + p_{ns} y_n = 0 , \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \qquad (3)$$

присоединенной къ (1), и если

$$\begin{array}{l} y_{11}, \quad y_{21}, \quad \ldots, \quad y_{n1}, \\ y_{12}, \quad y_{22}, \quad \ldots, \quad y_{n2}, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{1n}, \quad y_{2n}, \quad \ldots, \quad y_{nn} \end{array}$$

есть какая-либо система n независимыхъ рѣшеній присоединенной системы, то n функцій

$$\begin{array}{l} y_{11} x_1 + y_{21} x_2 + \cdots + y_{n1} x_n , \\ y_{12} x_1 + y_{22} x_2 + \cdots + y_{n2} x_n , \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{1n} x_1 + y_{2n} x_2 + \cdots + y_{nn} x_n \end{array}$$

будутъ независимыми интегралами системы (1).

Основной опредѣлитель системы уравненій (3) получается изъ основного опредѣлителя системы (1) замѣною $\varkappa$ черезъ $-\varkappa$ и умноженіемъ на $(-1)^n$. Поэтому корни опредѣляющаго уравненія системы (3) будутъ отличаться только знаками отъ корней опредѣляющаго уравненія системы (1).

Пусть

$$-\varkappa_1, \quad -\varkappa_2, \quad \ldots, \quad -\varkappa_k$$

суть всѣ корни опредѣляющаго уравненія системы (3) въ предположеніи, что каждый кратный корень повторяется столько разъ, сколько соотвѣтствуетъ ему группъ рѣшеній. Тогда каждому изъ чиселъ $-\varkappa_s$ можно будетъ поставить въ соотвѣтствіе по одной группѣ рѣшеній, предполагая всѣ эти рѣшенія независимыми.

Пусть n_s есть число рѣшеній въ группѣ, соотвѣтствующей корню $-\varkappa_s$, такъ-что

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n .$$

Принимая за величины $y_{s\sigma}$ функціи, входящія въ составъ этихъ группъ, для каждаго корня $-\varkappa_s$ найдемъ n_s слѣдующихъ интеграловъ системы уравненій (1):

$$\left. \left(z_1^{(s)} \frac{t^m}{m!} + z_2^{(s)} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \cdots + z_m^{(s)} t + z_{m+1}^{(s)} \right) e^{-\varkappa_s t}, \quad (m=0, 1, 2, \ldots, n_s - 1) \right\} \qquad (4)$$

гдѣ $z_j^{(s)}$ суть линейныя формы относительно величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ съ постоянными коэффиціентами, а $m!$ согласно общепринятому означаетъ произведеніе всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до m включительно, когда $m > 0$, и единицу, когда $m = 0$.

Всѣ n интеграловъ, которые получимъ, давая здѣсь s всѣ цѣлыя значенія отъ 1 до k включительно, при нашемъ предположеніи будутъ независимыми.

Поэтому всѣ n формъ $z_j^{(s)}$ необходимо также будутъ независимыми, и ихъ можно будетъ, слѣдовательно, принять за новыя неизвѣстныя функціи вмѣсто $x_1, x_2, \ldots, x_n$. А дѣлая это, получимъ слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_1^{(s)}}{dt} &= \varkappa_s z_1^{(s)}, \\ \frac{dz_j^{(s)}}{dt} &= \varkappa_s z_j^{(s)} - z_{j-1}^{(s)}, \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} j = 2, 3, \ldots, n_s \\ s = 1, 2, \ldots, k \end{pmatrix} \right\} \tag{5}$$

которымъ, очевидно, должны удовлетворять величины $z_j^{(s)}$ по самому своему значенію.

Отсюда заключаемъ, что при помощи линейной подстановки съ постоянными коэффиціентами система (1) всегда можетъ быть преобразована къ виду (5).

Допустимъ, что всѣ коэффиціенты $p_{s\sigma}$ въ уравненіяхъ (1) суть вещественныя числа, и что при преобразованіяхъ этихъ уравненій мы желаемъ разсматривать только такія подстановки, въ которыхъ всѣ коэффиціенты также были бы вещественными. Тогда предыдущее преобразованіе будетъ возможно только въ случаѣ, если всѣ корни опредѣляющаго уравненія системы (1) суть вещественныя числа. Въ случаѣ же существованія мнимыхъ корней простѣйшій видъ, къ которому преобразуются эти уравненія, будетъ нѣсколько инымъ.

Чтобы показать такое преобразованіе, замѣчаемъ, что при сдѣланномъ предположеніи всякому мнимому корню будетъ соотвѣтствовать сопряженный съ нимъ той же кратности, и что если найдены всѣ линейныя формы $z_j^{(s)}$ для какого либо мнимаго корня, то замѣняя въ нихъ $\sqrt{-1}$ черезъ $-\sqrt{-1}$, получимъ новыя формы, которыя можемъ принять за величины z для сопряженнаго корня.

Допустимъ поэтому, что сопряженнымъ корнямъ

$$\varkappa_1 = \lambda + \mu\sqrt{-1}, \qquad \varkappa_2 = \lambda - \mu\sqrt{-1}$$

соотвѣтствуютъ слѣдующія величины z:

$$z_j^{(1)} = u_j + v_j\sqrt{-1}, \qquad z_j^{(2)} = u_j - v_j\sqrt{-1}. \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

Тогда за новыя неизвѣстныя функціи вмѣсто $z_j^{(1)}$, $z_j^{(2)}$ можно будетъ принять величины u_j, v_j, которыя будутъ линейными формами величинъ x_s съ постоянными вещественными коэффиціентами.

Дифференціальныя уравненія, которымъ онѣ удовлетворяютъ, легко получаются изъ (5) и имѣютъ слѣдующій видъ:

$$\frac{du_1}{dt} = \lambda u_1 - \mu v_1, \qquad \frac{dv_1}{dt} = \lambda v_1 + \mu u_1,$$

$$\frac{du_j}{dt} = \lambda u_j - \mu v_j - u_{j-1}, \qquad \frac{dv_j}{dt} = \lambda v_j + \mu u_j - v_{j-1}.$$

$$(j = 2, 3, \ldots, \nu)$$

Такія группы уравненій получимъ для каждой пары мнимыхъ сопряженныхъ корней. Для корней же вещественныхъ будемъ имѣть группы вида (5).

Примѣчаніе. — По поводу указаннаго здѣсь преобразованія замѣтимъ, что, основываясь на немъ, можно доказать одно предложеніе, находящееся въ связи съ теоріей линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, начала которой были изложены въ предыдущей главѣ. А именно, (возвращаясь къ предположеніямъ параграфа 10^го^) нетрудно доказать, что *для всякой приводимой системы уравненій, въ которой всѣ коэффиціенты суть вещественныя функціи* t, *преобразованіе въ систему съ постоянными коэффиціентами можетъ быть выполнено посредствомъ подстановки* (характера, указаннаго въ параграфѣ 10^омъ^), *въ которой всѣ коэффиціенты были бы также вещественными функціями* t. *)

---

*) Докажется это слѣдующимъ образомъ.

Допустимъ, что система (1) (въ которой коэффиціенты $p_{s\sigma}$ предполагаемъ здѣсь нѣкоторыми вещественными функціями t) есть приводимая. Въ силу изложеннаго сейчасъ мы можемъ тогда допустить, что посредствомъ подстановки, удовлетворяющей условіямъ пар. 10, она преобразована къ виду (5). При томъ всѣ $\varkappa_s$, очевидно, можемъ предположить вещественными.

Условившись въ этомъ, дѣлаемъ

$$z_j^{(s)} = u_j^{(s)} + v_j^{(s)}\sqrt{-1},$$

разумѣя подъ $u_j^{(s)}$, $v_j^{(s)}$ линейныя формы величинъ x_σ съ коэффиціентами, представляющими вещественныя функціи t. Затѣмъ разсматриваемъ k слѣдующихъ паръ функцій:

$$u_1^{(1)},\ v_1^{(1)};\quad u_1^{(2)},\ v_1^{(2)};\quad \ldots;\quad u_1^{(k)},\ v_1^{(k)}$$

и выбирая по одной изъ каждой пары, составляемъ всевозможныя сочетанія, содержащія по k функцій каждое. По свойству функцій $z_j^{(s)}$, мы встрѣтимъ при этомъ по крайней мѣрѣ одно такое сочетаніе, изъ функцій котораго нельзя будетъ вывести никакой линейной комбинаціи съ постоянными коэффиціентами (не равными нулю одновременно), которая была бы тожественно равною нулю, или въ которой всѣ коэффиціенты при величинахъ x_σ были бы исчезающими функціями t. Чтобы остановиться на чемъ-либо опредѣленномъ, допустимъ, что это условіе выполняется для слѣдующаго сочетанія:

$$u_1^{(1)},\ u_1^{(2)},\ \ldots,\ u_1^{(k)}.$$

Мы замѣчаемъ теперь, что при нашихъ предположеніяхъ, изъ всякаго интеграла (4) системы (1) получается интегралъ той же системы, если всѣ $z_j^{(s)}$ замѣнить въ немъ величинами $u_j^{(s)}$. А при сдѣланномъ сейчасъ допущеніи всѣ эти интегралы будутъ независимыми. Дѣйствительно, если бы они не были такими, то изъ нихъ можно было бы вывести линейную комбинацію съ постоянными коэффиціентами (не равными нулю одновременно), которая была бы тожественно равною нулю. Но комбинація эта представится подъ видомъ суммы произведеній величинъ $t^\mu e^{-\varkappa_s t}$ на нѣкоторыя линейныя комбинаціи формъ $u_j^{(s)}$, и если черезъ $\varkappa$ означимъ наименьшее изъ чиселъ $\varkappa_s$, соотвѣтствующихъ тѣмъ изъ разсматриваемыхъ интеграловъ,

19. Разсмотримъ слѣдующую задачу:

Дано уравненіе съ частными производными

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\cdots+p_{sn}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_s}=\varkappa V, \tag{6}$$

въ которомъ $\varkappa$ означаетъ нѣкоторую постоянную. Требуется найти всѣ значенія послѣдней, при которыхъ уравненію этому можно удовлетворить (не равными нулю тожественно) цѣлыми однородными функціями V данной степени m величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Легко составить алгебраическое уравненіе, которому должны удовлетворять искомыя величины $\varkappa$.

Функція V заключаетъ въ себѣ

$$N=\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m}=\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

коэффиціентовъ.

Таково же будетъ и число уравненій, линейныхъ и однородныхъ относительно послѣднихъ, которыя получимъ, приравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ произведеніяхъ вида

$$x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$$

въ обѣихъ частяхъ уравненія (6).

Исключая изъ этихъ уравненій коэффиціенты функціи V, и получимъ названное алгебраическое уравненіе, которое будетъ слѣдующаго вида:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varkappa & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22}-\varkappa & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN}-\varkappa \end{vmatrix}=0,$$

гдѣ a_{ij} суть извѣстныя линейныя формы коэффиціентовъ $p_{s\sigma}$.

для которыхъ коэффиціенты въ комбинаціи не суть нули, а черезъ m наибольшій изъ показателей степеней t, соотвѣтствующихъ тѣмъ изъ этихъ послѣднихъ интеграловъ, для которыхъ $\varkappa_s=\varkappa$, то должны будемъ заключить, что для тожественнаго равенства нулю нашей комбинаціи необходимо, чтобы въ ней выраженіе, умноженное на $t^m e^{-\varkappa t}$, или было также тожественно равнымъ нулю, или представляло такую форму величинъ x_σ, въ которой всѣ коэффиціенты были бы исчезающими функціями t. Но ни то, ни другое невозможно, ибо названное выраженіе необходимо будетъ линейною комбинаціей формъ $u_1^{(s)}$. Если же наши интегралы суть независимые, то функціональный опредѣлитель величинъ $u_j^{(s)}$ въ отношеніи величинъ x_σ навѣрно не будетъ тожественно равнымъ нулю. Но тогда онъ будетъ необходимо таковъ, что величина, обратная ему, представитъ ограниченную функцію t, ибо опредѣлитель этотъ можетъ отличаться только постояннымъ множителемъ отъ функціональнаго опредѣлителя величинъ $z_j^{(s)}$.

Такимъ образомъ подстановка, посредствомъ которой вмѣсто перемѣнныхъ x_σ вводятся перемѣнныя $u_j^{(s)}$, будетъ удовлетворять всѣмъ условіямъ подстановокъ пар. 10. При томъ она обладаетъ вещественными коэффиціентами, а система (1) преобразовывается при помощи нея въ систему уравненій съ постоянными коэффиціентами.

Уравненіе это будетъ, слѣдовательно, $N^{\text{ой}}$ степени.

Опредѣлитель, представляющій первую часть его, означимъ черезъ $D_m(\varkappa)$.

Разсматривая всевозможныя числа m, получимъ рядъ опредѣлителей

$$D_1(\varkappa)\,,\quad D_2(\varkappa)\,,\quad D_3(\varkappa)\,,\ \ldots\,,$$

изъ которыхъ первый не будетъ отличаться отъ того, который мы означили черезъ $D(\varkappa)$ и назвали основнымъ. Всѣ остальные можемъ назвать *производными*, такъ-что $D_m(\varkappa)$ будетъ $m-1^{\text{ымъ}}$ производнымъ опредѣлителемъ.

Зная всѣ корни опредѣляющаго уравненія, легко найти и всѣ корни уравненія $D_m(\varkappa)=0$, ибо можно доказать слѣдующее предложеніе:

Теорема. — *Если*

$$\varkappa_1\,,\quad \varkappa_2\,,\ \ldots\,,\ \varkappa_n$$

суть всѣ корни опредѣляющаго уравненія, то всѣ корни уравненія

$$D_m(\varkappa)=0$$

найдутся по формулѣ

$$\varkappa = m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_n\varkappa_n\,, \tag{7}$$

когда числамъ $m_1\,,\ m_2\,,\ \ldots\,,\ m_n$ *будемъ давать всевозможныя цѣлыя неотрицательныя значенія, удовлетворяющія соотношенію*

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m\,,$$

такъ, чтобы одна и та же система значеній не встрѣчалась болѣе одного раза.

Для доказательства предположимъ сначала коэффиціенты $p_{s\sigma}$ такими, чтобы величины $\varkappa_s$ не удовлетворяли никакому соотношенію вида

$$\mu_1\varkappa_1 + \mu_2\varkappa_2 + \ldots + \mu_n\varkappa_n = 0$$

при цѣлыхъ $\mu_1\,,\ \mu_2\,,\ \ldots\,,\ \mu_n$, для которыхъ

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n = 0\,,$$

$$|\mu_s| \leq m\,, \qquad (s=1,\,2,\,\ldots\,,\,n)$$

и между которыми по крайней мѣрѣ нѣкоторыя не равны нулю.

Тогда величины $\varkappa$, опредѣляемыя по формулѣ (7) сказаннымъ въ теоремѣ способомъ, будутъ всѣ различными. Мы предположимъ сверхъ того, что между ними не существуетъ равной нулю.

Обращаясь теперь къ доказательству и разумѣя подъ $\varkappa$ какое-либо отличное отъ нуля число, означимъ черезъ $v_1\,,\ v_2\,,\ \ldots\,,\ v_n$ независимые интегралы системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, выводимой изъ (1) положеніемъ

$$t = \frac{1}{\varkappa}\log V\,.$$

Тогда при какой угодно функціи Φ уравненіе

$$\Phi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 1, \tag{8}$$

если только оно разрѣшимо относительно V, доставитъ рѣшеніе уравненія (6).

Допустимъ, что всѣ взятые нами интегралы v_s суть линейные относительно величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Такъ какъ при нашихъ предположеніяхъ всѣ $\varkappa_s$ различны, то всѣ эти интегралы будутъ вида:

$$v_s = (\alpha_{s1}x_1 + \alpha_{s2}x_2 + \ldots + \alpha_{sn}x_n) V^{\frac{\varkappa_s}{\varkappa}},$$

гдѣ α_{sj} суть нѣкоторыя постоянныя.

Вслѣдствіе этого, если сдѣлаемъ

$$\Phi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1^{m_1} v_2^{m_2} \ldots v_n^{m_n},$$

разумѣя подъ m_s цѣлыя неотрицательныя числа, дающія въ суммѣ m, то при

$$\varkappa = m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_n\varkappa_n$$

уравненіе (8) приведетъ къ рѣшенію

$$V = \prod_{s=1}^{n} (\alpha_{s1}x_1 + \alpha_{s2}x_2 + \ldots + \alpha_{sn}x_n)^{m_s},$$

представляющему цѣлую однородную функцію $m^{\text{ой}}$ степени величинъ x_s.

Отсюда слѣдуетъ, что всѣ величины $\varkappa$ разсматриваемаго вида удовлетворяютъ уравненію

$$D_m(\varkappa) = 0.$$

Но при сдѣланномъ допущеніи число всѣхъ такихъ различныхъ $\varkappa$ равно степени N этого уравненія. Поэтому никакія другія величины $\varkappa$ ему удовлетворять не могутъ.

Чтобы убѣдиться въ справедливости теоремы вообще, достаточно теперь только замѣтить, что исключенные нами случаи можно разсматривать, какъ предѣльные для только-что разобраннаго. Особенность этихъ случаевъ будетъ состоять, поэтому, только въ томъ, что уравненіе $D_m(\varkappa) = 0$ будетъ имѣть кратные или равные нулю корни.

Примѣчаніе. — Обратимъ вниманіе на слѣдующее свойство производныхъ опредѣлителей:

Когда опредѣляющее уравненіе не имѣетъ кратныхъ корней, а также, когда въ случаѣ существованія такихъ корней каждый изъ нихъ обращаетъ въ нуль всѣ миноры основного опредѣлителя до наивысшаго возможнаго при кратности этого корня порядка, тѣмъ же свойствомъ обладаетъ и каждый кратный корень уравненія

$$D_m(\varkappa) = 0$$

по отношенію къ минорамъ опредѣлителя $D_m(\varkappa)$.

Свойство это докажется, если замѣтимъ, что при сказанномъ условіи для каждаго μ-кратнаго корня послѣдняго уравненія можно найти μ линейно независимыхъ цѣлыхъ однородныхъ функцій V степени m, удовлетворяющихъ уравненію (6).

20. Мы можемъ доказать теперь слѣдующія предложенія:

Теорема I. — *Когда корни $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ опредѣляющаго уравненія таковы, что при данномъ цѣломъ положительномъ m для нихъ невозможны никакія соотношенія вида*

$$m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_n\varkappa_n = 0,$$

въ которыхъ всѣ m_s были бы цѣлыми неотрицательными числами, дающими въ суммѣ m, то всегда можно найти и при томъ только одну цѣлую однородную функцію V степени m величинъ x_s, удовлетворяющую уравненію

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_s} = U \tag{9}$$

при произвольно заданной цѣлой однородной функціи U величинъ x_s той-же степени m.

Въ самомъ дѣлѣ, для опредѣленія коэффиціентовъ искомой функціи V мы получаемъ систему линейныхъ уравненій, число которыхъ равно числу этихъ коэффиціентовъ. При томъ опредѣлитель этой системы есть $D_m(0)$ и слѣд. при означенномъ въ теоремѣ условіи не равенъ нулю.

Примѣчаніе. — Условіе, разсматриваемое въ теоремѣ, будетъ напр. выполнено и при томъ для всякаго m, когда вещественныя части всѣхъ величинъ $\varkappa_s$ отличны отъ нуля и имѣютъ одинаковые знаки.

Въ двухъ слѣдующихъ теоремахъ величины x_s будемъ предполагать вещественными, будемъ ли ихъ разсматривать, какъ независимыя перемѣнныя, или какъ функціи t, удовлетворяющія уравненіямъ (1). Послѣднее возможно вслѣдствіе предположенной уже нами вещественности коэффиціентовъ $p_{s\sigma}$.

Теорема II. — *Когда вещественныя части всѣхъ корней $\varkappa_s$ отрицательны, и когда въ уравненіи (9) функція U есть знакоопредѣленная форма какой-либо четной степени m, то удовлетворяющая этому уравненію форма $m^{ой}$ степени V будетъ также знакоопредѣленною и при томъ противоположною по знаку съ U.*

Для доказательства замѣчаемъ, что разсматривая величины x_s какъ функціи t, удовлетворяющія уравненіямъ (1), можемъ представить уравненіе (9) подъ слѣдующимъ видомъ:

$$\frac{dV}{dt} = U.$$

Отсюда заключаемъ, что для всякаго рѣшенія системы уравненій (1), отличнаго отъ $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, функція V дѣлается такою функціей перемѣннаго t, которая при возрастаніи послѣдняго измѣняется постоянно въ одномъ и томъ-же смыслѣ, а именно: возрастаетъ, если U положительна, и убываетъ, если U отрицательна. Но при сдѣланномъ предположенiи относительно величинъ $\varkappa_s$ всякiя функцiи x_s, удовлетворяющiя уравненiямъ (1), необходимо таковы, что съ безпредѣльнымъ возрастанiемъ t стремятся къ нулю. Поэтому такою-же должна дѣлаться и функцiя V для всякаго рѣшенiя системы (1). А это въ силу сейчасъ замѣченнаго возможно только при условiи, чтобы для всякаго рѣшенiя, отличнаго отъ $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, функцiя V обращалась въ такую функцiю t, которая ни при какихъ значенiяхъ послѣдняго не могла бы прiобрѣтать знака функцiи U или дѣлаться нулемъ. Условiе-же это, очевидно, равносильно тому, чтобы никакимъ выборомъ величинъ x_s функцiю V нельзя было сдѣлать величиною одинаковаго знака съ U или обратить въ нуль, не предполагая $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Теорема III. — *Если между корнями $\varkappa_s$ находятся такiе, вещественныя части которыхъ положительны, и если при данномъ четномъ m корни эти удовлетворяютъ условiю теоремы I, то всякiй разъ, когда въ уравненiи (9) U есть знакоопредѣленная форма $m^{\text{ой}}$ степени, удовлетворяющая этому уравненiю форма той-же степени V навѣрно не будетъ знакопостоянной противоположнаго знака съ U.*

Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая величины x_s какъ функцiи t, удовлетворяющiя уравненiямъ (1), представимъ уравненiе (9) подъ видомъ

$$\frac{dV}{dt} = U.$$

Отсюда заключаемъ, что если надлежащимъ выборомъ величинъ x_s, не равныхъ одновременно нулю, функцiю V можно сдѣлать нулемъ, то ее можно также сдѣлать и величиною одинаковаго знака съ U. Поэтому, если-бы функцiя V не могла получать значенiй одинаковаго знака съ U, то она необходимо была бы знакоопредѣленною. А тогда мы имѣли бы дѣло съ нѣкоторымъ частнымъ случаемъ условiй теоремы I параграфа $16^{\text{аго}}$, и заключили бы, что для *всякихъ* функцiй x_s, удовлетворяющихъ уравненiямъ (1), существуютъ нѣкоторые высшiе предѣлы, которыхъ ихъ числовыя значенiя не могутъ превзойти, когда t возрастаетъ, начиная отъ какого-либо значенiя. Но это заключенiе было бы несогласно съ предположенiемъ, что между величинами $\varkappa_s$ находятся такiя, вещественныя части которыхъ положительны, ибо при этомъ предположенiи всегда найдутся рѣшенiя системы (1), въ которыхъ по крайней мѣрѣ нѣкоторыя изъ функцiй x_s будутъ неограниченными.

Поэтому функцiя V необходимо такова, что надлежащимъ выборомъ величинъ x_s ей всегда можно придать знакъ функцiи U.

Примѣчанiе. — Для того, чтобы условiе теоремы I могло быть выполнено при какомъ-либо m, опредѣляющее уравненiе не должно имѣть равныхъ нулю корней. При томъ для возможности выполненiя этого условiя при какомъ-либо четномъ m между корнями опредѣляющаго уравненiя не должно быть ни одной пары такихъ, сумма которыхъ была бы нулемъ.

21. Разсмотримъ каноническую систему линейныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\left.\frac{dx_s}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y_s},\qquad \frac{dy_s}{dt}=\frac{\partial H}{\partial x_s},\quad (s=1,\,2,\,\ldots,\,k)\right\}\tag{10}$$

гдѣ H есть нѣкоторая квадратичная форма перемѣнныхъ

$$x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k,\quad y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_k$$

съ постоянными коэффиціентами.

Если положимъ вообще

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}=A_{ij},\qquad \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_j}=B_{ij},\qquad \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial y_j}=C_{ij},$$

то основной опредѣлитель, соотвѣтствующій этой системѣ, будетъ отличаться только множителемъ $(-1)^k$ отъ опредѣлителя

$$\begin{vmatrix}
C_{11}+\varkappa & C_{21} & \ldots & C_{k1} & B_{11} & B_{21} & \ldots & B_{k1}\\
C_{12} & C_{22}+\varkappa & \ldots & C_{k2} & B_{12} & B_{22} & \ldots & B_{k2}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
C_{1k} & C_{2k} & \ldots & C_{kk}+\varkappa & B_{1k} & B_{2k} & \ldots & B_{kk}\\
A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{k1} & C_{11}-\varkappa & C_{12} & \ldots & C_{1k}\\
A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{k2} & C_{21} & C_{22}-\varkappa & \ldots & C_{2k}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
A_{1k} & A_{2k} & \ldots & A_{kk} & C_{k1} & C_{k2} & \ldots & C_{kk}-\varkappa
\end{vmatrix}$$

Но въ силу соотношеній

$$A_{ij}=A_{ji},\qquad B_{ij}=B_{ji}$$

этотъ послѣдній опредѣлитель не мѣняетъ своей величины отъ замѣны $\varkappa$ черезъ $-\varkappa$. Чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ только послѣ сказанной замѣны строки сдѣлать столбцами, а затѣмъ произвести надлежащія перестановки какъ строкъ, такъ и столбцовъ.

Поэтому опредѣляющее уравненіе системы (10) содержитъ только четныя степени $\varkappa$, и слѣдовательно всякому его корню $\varkappa$ соотвѣтствуетъ корень $-\varkappa$.

Такимъ образомъ для канонической системы уравненій мы встрѣчаемся съ тѣмъ особеннымъ случаемъ, когда условіе теоремы I предыдущаго параграфа не выполняется ни при какомъ четномъ m.

Можно замѣтить, что когда H есть знакоопредѣленная форма перемѣнныхъ x_s, y_s, всѣ корни опредѣляющаго уравненія системы (10) суть чисто мнимые (т. е. имѣютъ равныя нулю вещественныя части и не равные нулю коэффиціенты при $\sqrt{-1}$), и при томъ каждый кратный корень какой-либо кратности μ обращаетъ въ нуль всѣ миноры основного опредѣлителя до порядка $\mu - 1$ включительно.

Это предложенiе Routh доказываетъ алгебраически *). Но оно, очевидно, представляетъ непосредственное слѣдствiе того обстоятельства, что H есть одинъ изъ интеграловъ системы (10).

Въ случаѣ, когда H есть сумма двухъ квадратичныхъ формъ: X перемѣнныхъ x_s и Y перемѣнныхъ y_s, и когда по крайней мѣрѣ одна изъ формъ X или Y знакоопредѣленна, уравненiя (10) обладаютъ всѣми свойствами линейныхъ дифференцiальныхъ уравненiй, которыми въ первомъ приближенiи опредѣляются малыя колебанiя матерьяльной системы около положенiя равновѣсiя при существованiи силовой функцiи. Поэтому, основываясь на извѣстныхъ теоремахъ теорiи малыхъ колебанiй, можемъ утверждать, что въ этомъ случаѣ опредѣляющее уравненiе будетъ имѣть только корни, квадраты которыхъ вещественны, и что корни эти могутъ быть всѣ чисто мнимыми только при условiи, если функцiя H знакоопредѣленна.

Когда H не представляется подъ видомъ $X+Y$ при указанномъ сейчасъ значенiи величинъ X и Y, всѣ корни могутъ быть чисто мнимыми и при отсутствiи послѣдняго условiя.

Предположимъ вообще функцiю H вещественною и такою, чтобы опредѣляющее уравненiе системы (10) имѣло только чисто мнимые корни. Пусть эти корни суть:

$$\lambda_1\sqrt{-1}, \quad \lambda_2\sqrt{-1}, \ldots, \lambda_k\sqrt{-1}, \quad -\lambda_1\sqrt{-1}, \quad -\lambda_2\sqrt{-1}, \ldots, -\lambda_k\sqrt{-1},$$

гдѣ всѣ λ_s означаютъ отличныя отъ нуля вещественныя числа.

Допустимъ, что всѣ эти корни различны. Тогда для системы (10) найдутся $2k$ независимыхъ интеграловъ вида

$$(u_s + iv_s)e^{-i\lambda_s t}, \qquad (u_s - iv_s)e^{i\lambda_s t}, \qquad (s=1,2,\ldots,k) \qquad \mathbf{(11)}$$

гдѣ $i=\sqrt{-1}$, а u_s и v_s суть линейныя формы перемѣнныхъ x_j, y_j съ постоянными вещественными коэффицiентами.

Пусть для какихъ-либо двухъ функцiй φ и ψ перемѣнныхъ x_j, y_j (функцiи эти могутъ содержать также и t) символъ (φ, ψ) означаетъ величину

---

*) Предложенiе это является у Routh'а въ нѣсколько иной формѣ вслѣдствiе того, что вмѣсто канонической системы уравненiй онъ разсматриваетъ слѣдующую:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x_s'} = \frac{\partial L}{\partial x_s}, \qquad \frac{dx_s}{dt} = x_s', \qquad (s=1,2,\ldots,k)$$

гдѣ L нѣкоторая квадратичная форма перемѣнныхъ x_s, x_s'. Роль функцiи H при этомъ играетъ функцiя

$$L - \sum \frac{\partial L}{\partial x_s'} x_s'.$$

См. *The advanced part of a Treatise on the Dynamics of a system of rigid bodies* (4 edition, 1884; p. 68).

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial y_j}-\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right).$$

Тогда, если φ и ψ суть интегралы системы (10), то $(\varphi,\ \psi)$, какъ извѣстно, будетъ или также интеграломъ этой системы, или нѣкоторою опредѣленною постоянною.

Но если функціи φ и ψ берутся изъ ряда интеграловъ (11), то, очевидно, возможенъ только послѣдній случай.

Поэтому, замѣчая, что вслѣдствіе сдѣланнаго предположенія ни одно изъ чиселъ $\lambda_s \pm \lambda_\sigma$ при s и σ различныхъ не нуль, мы должны заключить, что всѣ величины

$$(u_s+iv_s\,,\ u_\sigma+iv_\sigma)\,,\qquad (u_s+iv_s\,,\ u_\sigma-iv_\sigma)\,,\qquad (u_s-iv_s\,,\ u_\sigma-iv_\sigma)\,,$$

для которыхъ s и σ различны, суть нули. Что-же касается величинъ

$$(u_s+iv_s\,,\ u_s-iv_s)\,,\qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

то изъ нихъ навѣрно ни одна не нуль, ибо въ противномъ случаѣ интегралы (11) не были бы независимыми.

Отсюда выводимъ, что всѣ скобки $(u_s\,,u_\sigma)$, $(v_s\,,v_\sigma)$, а также, при различныхъ s и σ, и всѣ скобки $(u_s\,,v_\sigma)$ суть нули, и что всѣ $(u_s\,,v_s)$ суть отличныя отъ нуля вещественныя постоянныя. Эти постоянныя мы можемъ при томъ предположить равными 1, ибо всегда можно предположить, что каждая изъ функцій u_s и v_s заключаетъ въ себѣ подъ видомъ множителя одну и ту-же произвольную вещественную постоянную, которою можно распорядиться такъ, чтобы $(u_s\,,v_s)$ по числовой величинѣ равнялось 1; а надлежащимъ выборомъ знака числа λ_s (который оставался до сихъ поръ неопредѣленнымъ) величину $(u_s\,,v_s)$ можно сдѣлать положительною.

Такимъ образомъ, приписывая надлежащій знакъ каждому изъ чиселъ λ_s, всегда можемъ предположить интегралы (11) такими, чтобы для нихъ имѣли мѣсто равенства:

$$\left.\begin{aligned}&(u_s\,,u_\sigma)=0\,, &&(v_s\,,v_\sigma)=0\,,\\ &(u_s\,,v_s)=1\,, &&(u_s\,,v_\sigma)=0\,,\quad (\sigma \gtrless s).\end{aligned}\right\}\quad (s,\ \sigma=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

Изъ этихъ равенствъ нетрудно вывести, что, если составить частныя производныя функцій u_s, v_s по перемѣннымъ x_j, y_j, а затѣмъ, разсматривая послѣднія, какъ функціи первыхъ, составить частныя производныя функцій x_j, y_j по перемѣннымъ u_s, v_s, то получатся слѣдующія соотношенія:

$$\frac{\partial u_s}{\partial x_j}=\frac{\partial y_j}{\partial v_s}\,,\qquad \frac{\partial u_s}{\partial y_j}=-\frac{\partial x_j}{\partial v_s}\,,$$

$$(s,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial y_j}=\frac{\partial x_j}{\partial u_s}\,,\qquad \frac{\partial v_s}{\partial x_j}=-\frac{\partial y_j}{\partial u_s}\,.$$

Отсюда слѣдуетъ, что всякая каноническая система уравненій

$$\frac{dx_s}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial y_s}, \qquad \frac{dy_s}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_s}, \qquad (s=1, 2, \ldots, k)$$

(гдѣ F какая-либо функція перемѣнныхъ x_s, y_s), будучи преобразована къ перемѣннымъ u_s, v_s, приведется также къ каноническому виду:

$$\frac{du_s}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial v_s}, \qquad \frac{dv_s}{dt} = \frac{\partial F}{\partial u_s}. \qquad (s=1, 2, \ldots, k)$$

Но система (10) преобразовывается этимъ путемъ къ виду:

$$\frac{du_s}{dt} = -\lambda_s v_s, \qquad \frac{dv_s}{dt} = \lambda_s u_s. \qquad (s=1, 2, \ldots, k)$$

Поэтому функція H, преобразованная къ перемѣннымъ u_s, v_s, будетъ:

$$H = \frac{\lambda_1}{2}(u_1^2 + v_1^2) + \frac{\lambda_2}{2}(u_2^2 + v_2^2) + \cdots + \frac{\lambda_k}{2}(u_k^2 + v_k^2).$$

Предыдущій анализъ съ небольшими измѣненіями прилагается и къ случаю, когда опредѣляющее уравненіе системы (10) имѣетъ кратные корни, если только каждый кратный корень обращаетъ въ нуль всѣ миноры основного опредѣлителя до порядка, возможно наивысшаго.

Чтобы показать это, разсмотримъ два m-кратныхъ корня $\lambda\sqrt{-1}$ и $-\lambda\sqrt{-1}$.

При сказанномъ условіи этимъ корнямъ будетъ соотвѣтствовать $2m$ независимыхъ интеграловъ системы (10) слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{array}{l} U_1 e^{-i\lambda t}, \quad U_2 e^{-i\lambda t}, \ldots, U_m e^{-i\lambda t}, \\ V_1 e^{i\lambda t}, \quad V_2 e^{i\lambda t}, \ldots, V_m e^{i\lambda t}, \end{array}\right\} \qquad (12)$$

гдѣ i по прежнему означаетъ $\sqrt{-1}$, а всѣ U_s и V_s суть линейныя формы перемѣнныхъ x_j, y_j съ постоянными коэффиціентами. При томъ для каждой пары формъ U_s, V_s коэффиціенты одной получаются изъ коэффиціентовъ другой замѣною $\sqrt{-1}$ черезъ $-\sqrt{-1}$.

Присоединяя къ системѣ интеграловъ (12) такія-же системы, относящіяся къ остальнымъ корнямъ, получимъ полную систему $2k$ независимыхъ интеграловъ уравненій (10).

Составляя всевозможныя скобки изъ функцій U_s и изъ функцій V_s, очевидно, найдемъ:

$$(U_s, U_\sigma) = 0, \qquad (V_s, V_\sigma) = 0. \qquad (s, \sigma = 1, 2, \ldots, m)$$

Также найдемъ, что будутъ уничтожаться и всѣ скобки, которыя можно составить, комбинируя каждую изъ функцій U_s или V_s съ каждою изъ такихъ функцій, соотвѣтствующихъ корнямъ, отличнымъ отъ разсматриваемыхъ.

Отсюда слѣдуетъ, что для каждаго числа s, взятаго изъ ряда $1, 2, \ldots, m$, найдется въ томъ-же ряду по крайней мѣрѣ одно такое число σ, что скобки (U_s, V_σ) представятъ отличную отъ нуля постоянную. Въ самомъ дѣлѣ, если-бы всѣ скобки

$$(U_s, V_1), \qquad (U_s, V_2), \ldots, (U_s, V_m)$$

были нулями, то уничтожались бы всѣ $2k-1$ скобокъ, которыя можно вывести, комбинируя интегралъ $U_s e^{-i\lambda t}$ со всѣми остальными линейными интегралами, составляющими вмѣстѣ съ нимъ полную систему независимыхъ интеграловъ. А это, очевидно, невозможно.

Можетъ случиться, что уже между скобками вида (U_s, V_s) находятся не равныя нулю.

Допустимъ напр., что (U_1, V_1) не нуль. Тогда систему (12) можно преобразовать въ равносильную ей систему интеграловъ

$$U_1 e^{-i\lambda t}, \qquad V_1 e^{i\lambda t}, \qquad U'_\sigma e^{-i\lambda t}, \qquad V'_\sigma e^{i\lambda t} \quad (\sigma = 2, 3, \ldots, m)$$

того-же характера, для которой всѣ скобки

$$(U'_\sigma, V_1), \qquad (U_1, V'_\sigma) \quad (\sigma = 2, 3, \ldots, m)$$

будутъ нулями. Для этого должно только сдѣлать

$$U'_\sigma = U_\sigma + \alpha_\sigma U_1, \qquad V'_\sigma = V_\sigma + \beta_\sigma V_1,$$

приписывая постояннымъ α_σ, β_σ слѣдующія величины

$$\alpha_\sigma = -\frac{(U_\sigma, V_1)}{(U_1, V_1)}, \qquad \beta_\sigma = -\frac{(U_1, V_\sigma)}{(U_1, V_1)}.$$

При этомъ функція V'_σ будетъ выводиться изъ функціи U'_σ замѣною $\sqrt{-1}$ черезъ $-\sqrt{-1}$.

Допустимъ теперь, что всѣ скобки вида (U_s, V_s) суть нули.

Такъ-какъ между скобками (U_1, V_σ) навѣрно находятся отличныя отъ нуля, то пусть (U_1, V_2) не нуль. Тогда, полагая

$$U'_1 = U_1 + i(U_1, V_2)U_2, \qquad V'_1 = V_1 + i(U_2, V_1)V_2,$$

вслѣдствіе равенствъ $(U_1, V_1) = 0$, $(U_2, V_2) = 0$ найдемъ:

$$(U'_1, V'_1) = 2i(U_1, V_2)(U_2, V_1),$$

и величина эта навѣрно не будетъ нулемъ, ибо (U_2, V_1), какъ сопряженная величина съ $-(U_1, V_2)$, не нуль.

Вслѣдствіе этого, если интегралы перваго столбца таблицы (12) замѣнимъ интегралами

$$U_1' e^{-i\lambda t}, \qquad V_1' e^{i\lambda t},$$

что приведетъ къ новой системѣ $2m$ независимыхъ интеграловъ того-же характера (ибо функція V_1' выводится изъ функціи U_1' замѣною i черезъ $-i$), то придемъ къ только-что разобранному случаю.

Мы можемъ поэтому предположить, что для системы интеграловъ (12) скобки (U_1, V_1) представляютъ отличную отъ нуля постоянную, и что при томъ всѣ скобки (U_1, V_σ) и (U_σ, V_1), для которыхъ $\sigma > 1$, суть нули. А тогда предыдущія разсужденія можно будетъ приложить къ системѣ $2(m-1)$ интеграловъ, которую получимъ, вычеркивая изъ таблицы (12) интегралы перваго столбца.

Отсюда видно, что систему интеграловъ (12) всегда можно предположить такою, чтобы всѣ скобки (U_s, V_σ), для которыхъ s и σ различны, были равными нулю, и чтобы ни одна изъ величинъ (U_s, V_s) не была нулемъ.

Составивши такія системы интеграловъ для каждой пары сопряженныхъ корней, мы можемъ затѣмъ разсуждать такъ-же, какъ и въ случаѣ простыхъ корней.

Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что если опредѣляющее уравненіе системы (10) имѣетъ только чисто мнимые корни, квадраты которыхъ суть

$$-\lambda_1^2, \qquad -\lambda_2^2, \; \ldots, \; -\lambda_k^2,$$

и если при томъ, въ случаѣ кратныхъ корней, каждый изъ послѣднихъ обращаетъ въ нуль всѣ миноры основного опредѣлителя до порядка, возможно наивысшаго, то при помощи линейной подстановки съ постоянными вещественными коэффиціентами всякую каноническую систему уравненій вида

$$\frac{dx_s}{dt} = -\frac{\partial(H+F)}{\partial y_s}, \qquad \frac{dy_s}{dt} = \frac{\partial(H+F)}{\partial x_s} \qquad (s=1, 2, \ldots, k)$$

можно преобразовать въ каноническую-же слѣдующаго вида:

$$\frac{du_s}{dt} = -\lambda_s v_s - \frac{\partial F}{\partial v_s}, \qquad \frac{dv_s}{dt} = \lambda_s u_s + \frac{\partial F}{\partial u_s}, \qquad (s=1, 2, \ldots, k)$$

если только подъ каждымъ λ_s разумѣть число нѣкотораго опредѣленнаго знака.

Можно замѣтить, что подобное преобразованіе возможно и въ случаѣ, когда опредѣляющее уравненіе, кромѣ чисто мнимыхъ корней, имѣетъ также корень, равный нулю, если только означенное выше условіе выполняется для каждаго изъ кратныхъ корней, къ числу которыхъ равный нулю корень всегда будетъ принадлежать.