III.

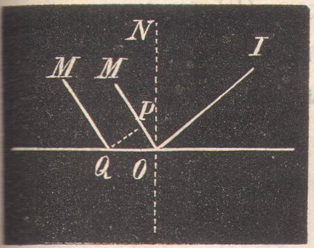
Вычисленіе хода лучей въ двоякопреломляющемъ кристаллѣ.

А. П. Грузинцева.

Изучая теорію явленій двойного преломленія, я не нашелъ общаго аналитическаго рѣшенія задачи о ходѣ лучей въ двоякопреломляющемъ кристаллѣ даже въ самыхъ полныхъ трактатахъ по физической оптикѣ (какъ-то у Billet, Beer, Verdet); только у Lamé въ его извѣстныхъ «Leçons sur l'élasticité des corps solides» помѣщено рѣшеніе этой задачи, но въ формѣ не вполнѣ совершенной и оконченной.

Въ трактатахъ по физической оптикѣ даются лишь геометрическія построенія для опредѣленія хода лучей въ кристаллѣ и по выходѣ ихъ изъ него, и только для одноосныхъ кристалловъ дано у Billet (Traité d'optique physique. Vol. I, page 283 et suiv.) аналитическое рѣшеніе задачи; а между тѣмъ само собой ясно, что рѣшеніе такой важной задачи построеніемъ совершенно не достаточно, и необходимо поэтому имѣть ея аналитическое рѣшеніе. Можетъ-быть, большая сложность, которая встрѣчается при рѣшеніи этой задачи, не позволила упомянутымъ авторамъ привести ея рѣшеніе, но, идя извѣстнымъ путемъ, можно избѣжать слишкомъ большой сложности и дать формулы достаточно простыя для употребленія. Кромѣ того важно имѣть общія формулы для изслѣдованія хода лучей въ кристаллѣ. Имѣя общія формулы, намъ не придется прибѣгать каждый разъ въ частныхъ случаяхъ къ особымъ вычисленіямъ, а стоитъ только воспользоваться уже разъ найденными результатами. Обдумывая этотъ вопросъ, я напалъ на пріемъ, который не только рѣшаетъ вопросъ о вычисленіи хода лучей въ кристаллахъ, но можетъ быть употребленъ безъ новыхъ соображеній для опредѣленія другихъ обстоятельствъ при изученіи явленій двойного преломленія, какъ напримѣръ при явленіяхъ интерференціи въ кристаллахъ. Этотъ пріемъ и будетъ служить предметомъ настоящей замѣтки, причемъ основаніемъ рѣшенія будетъ обобщенное построеніе Гюйгенса.

Пусть данъ двоякопреломляющій кристаллъ и плоскость паденія луча, идущаго сначала въ изотропной срединѣ, пересѣкаетъ верхній фасъ кристалла по прямой OQ, причемъ точка O есть точка паденія луча на кристаллъ. Пусть падающая плоская волна, проходящая черезъ O, будетъ M, JO будетъ направленіе падающаго луча перпендикулярнаго къ ней, ON нормалъ къ фасу кристалла, идущій къ верху въ изотропную средину. Черезъ единицу времени плоская волна будетъ въ M_1 и разстояніе по перпендикуляру QP (точка Q лежитъ на фасѣ кристалла и волнѣ M_1, а P есть подошва перпендикуляра, опущеннаго изъ Q на плоскость волны M) будетъ равно v, скорости свѣта въ верхней изотропной срединѣ.



Пусть далѣе M_1 пересѣкаетъ фасъ кристалла по прямой AB. Въ то время, какъ въ изотропной срединѣ свѣтовыя колебанія распространятся до поверхности шара радіуса v — шара, къ которому M_1 будетъ касательной плоскостью, въ кристаллѣ эти колебанія распространятся до поверхности волны. *Чтобы найдти направленіе преломленныхъ лучей, надо провести черезъ AB плоскости касательныя къ поверхности волны внутри кристалла, тогда прямыя, соединяющія O съ точками касанія, и будутъ искомыми преломленными лучами.*

Это правило и есть извѣстное обобщеніе построенія Гюйгенса, данное имъ для одноосьныхъ кристалловъ.

Такъ-какъ поверхность волны 4-го порядка имѣетъ двѣ полости, то вообще будутъ 4-е касательныя плоскости — по двѣ, симметрично расположенныхъ около начала O; для насъ необходимо взять тѣ двѣ внутри кристалла, которыя будутъ касаться (внутренней и внѣшней) полостей. Такимъ образомъ *получимъ два преломленныхъ луча.* Положимъ, что ABT_1 и ABT_2 будутъ двѣ сказанныя касательныя плоскости, R_1, R_2 точки касанія, тогда OR_1 и OR_2 будутъ оба преломленные луча; положимъ, далѣе, что OS_1 и OS_2 будутъ перпендикуляры, опущенные изъ O на обѣ касательныя плоскости, тогда OS_1 будетъ скорость ω_1 перваго луча, а OS_2 будетъ скоростью ω_2 второго луча.

Задача наша будетъ состоять въ вычисленіи величины и направленія этихъ прямыхъ OP_1, OP_2, OS_1 и OS_2 по данному падающему лучу.

Положимъ, что

$$A,\ B,\ C$$

будутъ косинусы направленія падающаго луча;

$$A_1,\ B_1,\ C_1$$

косинусы направленія нормала къ тому фасу кристалла, на который падаетъ лучъ, возстановленнаго изъ точки паденія O,

$$A_{\prime\prime},\ B_{\prime\prime},\ C_{\prime\prime}$$

косинусы направленія нормала къ плоскости паденія луча. При этомъ за начало координатъ принята точка паденія O, и за координатныя оси — оси упругости кристалла. Тогда, называя перемѣнныя координаты какой-нибудь точки буквами x, y, z, будемъ имѣть:

$$Ax + By + Cz = o \tag{1}$$

уравненіе падающей волны M;

$$A_1x + B_1y + C_1z = o \tag{2}$$

уравненіе фаса кристалла, на который падаетъ лучъ;

$$A_{,,}x + B_{,,}y + C_{,,}z = o \tag{3}$$

уравненіе плоскости паденія, причемъ $A_{,,}$, $B_{,,}$, $C_{,,}$ связаны съ A, A_1 и пр. соотношеніями:

$$\left.\begin{aligned} A_{,,}sn\,i &= CB_1 - C_1B; \\ B_{,,}sn\,i &= AC_1 - A_1C; \\ C_{,,}sn\,i &= BA_1 - AB_1, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

гдѣ i есть уголъ паденія, опредѣляемый равенствомъ:

$$cs\,i = AA_1 + BB_1 + CC_1. \tag{5}$$

Далѣе уравненіе плоскости M_1 будетъ:

$$Ax + By + Cz - v = o. \tag{6}$$

Замѣтивъ всѣ эти соотношенія необходимыя намъ ниже, выразимъ аналитически требованіе, чтобы плоскость, касательная къ поверхности волны въ кристаллѣ, проходила черезъ прямую пересѣченія плоскостей (2) и (6).

Уравненія плоскости, проходящей черезъ прямую пересѣченія плоскостей (2) и (6), т. е. плоскости верхняго фаса кристалла и плоскости падающей волны M_1, по извѣстному правилу геометріи можно написать такъ:

$$Ax + By + Cz - v + k(A_1x + B_1y + C_1z) = o; \tag{7}$$

Здѣсь k неопредѣленный множитель и найдется изъ того условія, чтобы уравненіе (7) давало уравненіе касательной къ волнѣ плоскости. Если назовемъ

$$m, n, p$$

косинусы направленія одной изъ прямыхъ OS, тогда уравненіе касательной плоскости будетъ:

$$mx + ny + pz - \omega = o, \qquad (8)$$

гдѣ ω скорость свѣта вдоль OS.

Уравненіе (7) и (8) должны давать одну и ту-же плоскость, для чего нужно, какъ извѣстно, чтобы коеффиціенты при x, y, z въ обоихъ уравненіяхъ были пропорціональны между собой, т. е. имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} A + kA_1 &= \mu m; \\ B + kB_1 &= \mu n; \\ C + kC_1 &= \mu p; \\ v &= \mu.\omega. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Здѣсь количество μ есть коеффиціентъ пропорціональности и его физическое значеніе, именно

$$\mu = \frac{v}{\omega}; \qquad (10)$$

ясно: это есть не что иное, какъ показатель преломленія свѣта при переходѣ его изъ верхней изотропной средины въ нижнюю двоякопреломляющую.

Количество k, введенное вышенаписанными формулами, и есть то, къ опредѣленію котораго сведется весь предложенный вопросъ; кромѣ этой роли онъ имѣетъ еще другую: эта, какъ можно убѣдиться простымъ вычисленіемъ, величина можетъ дать разность хода лучей въ двоякопреломляющей пластинкѣ, именно—разность двухъ корней k пропорціональна разности хода обоихъ лучей—что необходимо при изученіи явленій интерференціи въ кристаллахъ.

Прежде чѣмъ показать способъ опредѣленія количества k, а по нему и всѣхъ остальныхъ неизвѣстныхъ количествъ, считаю нужнымъ сдѣлать небольшое отступленіе. Уравненія (9) даютъ извѣстные законы распространенія свѣта въ двояко-преломляющихъ кристаллахъ очень просто и легко.

Умножая уравненія (9) по порядку на $A_{\prime\prime}$, $B_{\prime\prime}$, $C_{\prime\prime}$ по сложеніи результатовъ при помощи равенствъ (4), имѣемъ:

$$A_{\prime\prime}m + B_{\prime\prime}n + C_{\prime\prime}p = o. \tag{11}$$

Это равенство показываетъ, что *плоскости, касательныя къ поверхности волны въ кристаллѣ, перпендикулярны къ плоскости паденія.* Затѣмъ умножая первое равенство въ системѣ (9) на B_1, второе на $-C_1$, по сложеніи результатовъ находимъ:

$$\left.\begin{array}{l} \omega.\, A_{\prime\prime}\, \mathrm{sn}\, i - (pB_1 - nC_1).v = o; \\ \omega.\, B_{\prime\prime}.\mathrm{sn}\, i - (mC_1 - pA_1).v = o; \\ \omega.\, C_{\prime\prime}.\, \mathrm{sn}\, i - (nA_1 - mB_1).v = o; \end{array}\right\} \text{подобнымъ образомъ:} \tag{12}$$

Называя теперь σ уголъ между нормаломъ къ фасу кристалла и направленіемъ OS, имѣемъ:

$$\mathrm{cs}\sigma = mA_1 + nB_1 + pC_1.$$

Перенося вторые члены въ равенствахъ (12) вправо и складывая ихъ квадраты, находимъ по извлеченіи квадратнаго корня:

$$\frac{\mathrm{sn}\, i}{\mathrm{sn}\sigma} = \frac{v}{\omega} = \mu, \tag{13}$$

соотношеніе извѣстное и отвѣчающее закону Декарта для просто преломляющихъ срединъ.

Замѣтимъ здѣсь одно обстоятельство. Такъ-какъ обыкновенно свѣтъ проходитъ изъ средины менѣе плотной въ болѣе плотную, то вообще

$$v > \omega,$$

а слѣдовательно по (13):

$$i > \sigma.$$

Опредѣлимъ теперь k. Складывая квадраты первыхъ 3-хъ равенствъ въ системѣ (9) и положивъ для простоты

$$v = 1,$$

находимъ:

$$\omega^2 = \frac{1}{1 + k^2 + 2k \cos i},$$

или, какъ намъ удобнѣе:

$$\frac{1}{\omega^2} = 1 + k^2 + 2k \cos i. \tag{14}$$

Подставимъ теперь одно значеніе $\frac{1}{\omega^2}$ изъ этого равенства, а m, n, p изъ (9) и μ изъ (10) въ уравненіе Френеля для скоростей волнъ, написанное въ видѣ:

$$\omega^4 - \omega^2 Sm^2(b^2 + c^2) + Sm^2 b^2 c^2 = o,$$

причемъ здѣсь a, b, c суть скорости распространенія свѣта вдоль осей упругости, а знакомъ S* обозначена сумма трехъ членовъ подобныхъ первому, написанному подъ нимъ — или, лучше въ видѣ:

$$1 - \frac{1}{\omega^2} \cdot Sm^2(b^2 + c^2) + \frac{1}{\omega^4} Sm^2 b^2 c^2 = 0,$$

составивъ предварительно слѣдующія выраженія:

---

* Это обозначеніе принадлежитъ, кажется, Lamé. См. его Leçons sur l'élasticité etc.

$$\frac{Sm^2(b^2+c^2)}{\omega^2}=S(b^2+c^2)A^2+k^2S(b^2+c^2)A_1{}^2+2kS(b^2+c^2)AA_1;$$

$$\frac{Sm^2b^2c^2}{\omega^2}=Sb^2c^2A^2+k^2Sb^2c^2A_1{}^2+2kSb^2c^2AA_1\,,$$

и умноживъ последнее на $\frac{1}{\omega^2}$ (14)

$$\frac{Sm^2b^2c^2}{\omega^4}=Sb^2c^2A^2+k^2Sb^2c^2A^2+2kSb^2c^2AA+k^2Sb^2c^2A^2+$$

$$+k^4Sb^2c^2A_1{}^2+2k^3Sb^2c^2AA_1+2k\mathrm{cs}i\,.\,Sb^2c^2A^2+2k^3\mathrm{cs}iSb^2c^2A_1{}^2$$
$$+4k^2\mathrm{cs}\,iSb^2c^2AA_1\,,—$$

после подстановокъ въ уравненіе Френеля находимъ уравненіе для определенія k:

$$Tk^4+T_1k^3+T_{\mathrm{II}}k^2+T_{\mathrm{III}}k+T_{\mathrm{IV}}=0. \qquad (15)$$

Здесь положено:

$$T=Sb^2c^2A_1{}^2;\ T_1=2\mathrm{cs}i\,.\,Sb^2c^2A_1{}^2+Sb^2c^2AA_1,$$

$$T_{\prime\prime}=Sb^2c^2A_1{}^2+Sb^2c^2A^2+4\mathrm{cs}i\,.\,Sb^2c^2AA_1-S(b^2+c^2)A_1{}^2;$$

$$T_{\prime\prime\prime}=2\mathrm{cs}i\,Sb^2c^2A^2+2Sb^2c^2AA_1-2S(b^2+c^2)AA_1;\ T_{\mathrm{IV}}=Sb^2c^2A^2$$
$$-S(b^2+c^2)A^2+1.$$

Уравненіе (15) 4-ой степени и даетъ четыре корня для k; изъ нихъ, ясно, два относятся къ той части волны, которая находится внутри кристалла, а два другихъ къ той, которая будетъ вне кристалла.

Заметимъ здесь одно соотношеніе для z и σ. Изъ уравненій (9) по умноженіи ихъ A_1, B_1, C_1 и по сложеніи результатовъ, находимъ:

$$k=\mu\ \mathrm{cs}\,\sigma-\mathrm{cs}\,i\,,$$

а при помощи равенства (13):

$$\kappa = \frac{\operatorname{sn}(i-\sigma)}{\operatorname{sn}\sigma}. \qquad (16)$$

Это соотношеніе очень простое и въ то-же время полезное при вычисленіи разности хода лучей въ кристаллѣ, изъ него находимъ:

$$tg\,\sigma = \frac{\operatorname{sn} i}{k + \operatorname{cs} i}. \qquad (17)$$

Теперь рѣшеніе вопроса состоитъ въ слѣдующемъ. Сначала рѣшаемъ уравненіе (15) относительно k; затѣмъ беремъ тѣ два корня k, которые даютъ по (17) для σ дугу меньшую i. Зная такимъ образомъ два корня k_1 и k_2, находимъ по (17) два значенія σ : σ_1 и σ_2. Потомъ по формулѣ (13) опредѣляемъ:

$$\omega = \frac{\operatorname{sn}\sigma_1}{\operatorname{sn} i}, \omega = \frac{\operatorname{sn}\sigma_2}{\operatorname{sn} i}$$

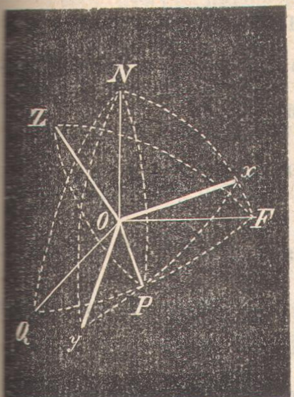
и

$$\mu_1 = \frac{1}{\omega_1}, \mu_2 = \frac{1}{\omega_2};$$

и наконецъ по формуламъ (9) находимъ m, n, p, для болѣе удобнаго опредѣленія которыхъ ниже сообщены логариѳмическія формулы.

Для рѣшенія и изслѣдованія уравненія (15) полезно преобразовать его коеффиціенты, именно полезно выразить эти коеффиціенты въ функціи угловъ, опредѣляющихъ положеніе фаса кристалла въ отношеніи осей кристалла.

Пусть фасъ кристалла пересѣкается плоскостью xy по прямой OP и пусть OF будетъ слѣдъ плоскости паденія на фасѣ. Примемъ слѣдъ плоскости паденіе OF, перпендикуляръ къ плоскости паденія OQ и нормалъ къ фасу ON за новыя координатныя оси x^1, y^1, z^1; тогда, называя A^1, B^1, C^1 косинусы направленія оси x^1, $A_{\prime\prime}$, $B_{\prime\prime}$, $C_{\prime\prime}$ оси $y_{\prime}$ и $A_{\prime}$, $B_{\prime}$, $C_{\prime}$ оси z^1, имѣемъ;



$$\left.\begin{aligned} A^1 . \mathrm{sn}\, i &= A - A_1 . \mathrm{cs}\, i \\ B^1 . \mathrm{sn}\, i &= B - B_1 . \mathrm{cs}\, i \\ C^1 . \mathrm{sn}\, i &= C - C_1 . \mathrm{cs}\, i \end{aligned}\right\} ; \quad (18);$$

ибо направленіе A^1, B^1, C^1 перпендикулярно къ направленіямъ ON и OQ, а это послѣднее перпендикул. къ ON и лучу OJ.

Называя теперь φ и ψ углы OP съ осями x^1 и x, а θ уголъ между нормаломъ ON и осью z, по формуламъ Эйлера имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A - A_1 \mathrm{cs}\, i}{\mathrm{sn}\, i} &= \mathrm{cs}\varphi . \mathrm{cs}\psi - \mathrm{sn}\varphi . \mathrm{sn}\psi . \mathrm{cs}\theta \quad (\text{изъ } \Delta\, x P F) \\ \frac{B - B_1 \mathrm{cs}\, i}{\mathrm{sn}\, i} &= \mathrm{cs}\varphi . \mathrm{sn}\psi + \mathrm{sn}\varphi . \mathrm{cs}\psi . \mathrm{cs}\,\theta \quad (\text{изъ } \Delta\, y P F) \\ \frac{C - C_1 \mathrm{cs}\, i}{\mathrm{sn}\, i} &= \mathrm{sn}\,\varphi . \mathrm{sn}\,\theta \quad (\text{изъ } \Delta\, z P F) \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Также:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \mathrm{sn}\,\psi . \mathrm{sn}\theta ; \quad (\text{изъ } \Delta\, x P N) \\ B_1 &= \mathrm{cs}\,\psi . \mathrm{sn}\theta ; \quad (\text{изъ } \Delta\, y P N) \\ C_1 &= \mathrm{cs}\,\theta . \quad , (\text{изъ } \Delta\, z P N) \end{aligned}\right\} ; \quad (20)$$

Полагая въ формулахъ (19):

$tg\,\varphi . \mathrm{cs}\theta = ctg\,\mu$, гдѣ μ вспомогательный уголъ, находимъ: (21)

$$\left.\begin{aligned} A - A_1 . \mathrm{cs}\, i &= \mathrm{sn}\, i . \mathrm{os}\,\varphi . \frac{\mathrm{sn}\,(\mu - \psi)}{\mathrm{sn}\,\mu} \\ B - B_1 . \mathrm{cs}\, i &= \mathrm{sn}\, i . \mathrm{cs}\,\varphi . \frac{\mathrm{cs}\,(\mu - \psi)}{\mathrm{sn}\,\mu} \\ C - C_1 . \mathrm{cs}\, i &= \mathrm{sn}\, i . \mathrm{sn}\,\varphi . \mathrm{sn}\,\theta, \text{ и также:} \end{aligned}\right\} ; \quad (22)$$

$$\left.\begin{aligned} A^1 . \mathrm{sn}\,\mu &= \mathrm{cs}\,\varphi . \mathrm{sn}\,(\mu - \psi) \\ B^1 . \mathrm{sn}\,\mu &= \mathrm{cs}\,\varphi . \mathrm{cs}\,(\mu - \psi) \\ C^1 &= \mathrm{sn}\,\varphi . \mathrm{sn}\,\theta \;. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

При помощи приведенныхъ формулъ можно преобразовать коеффиціенты T_1 T_{11} . . . Замѣтимъ, что въ нихъ входятъ слѣдующія количества, которыя мы означимъ такъ:

$$P = Sb^2c^2A^2 \text{ ; } P_1 = Sb^2c^2A^2 \text{ ; } P' = Sb^2c^2AA_1 \text{ ;}$$

$$S = S(b^2 + c^2)A^2 \text{ ; } S_1 = S(b^2 + c^2)A_1{}^2, \ S' = S(b^2 + c^2)AA_1.$$

Умножимъ равенства (18) по порядку на Ab^2c^2, Ba^2c^2, Ca^2b^2 и сложимъ результаты, получимъ:

$P - \operatorname{cs} i \,.\, P' = \alpha$, гдѣ α означаемъ вторую часть равенства, не вычисляя ее.

Далѣе умножимъ уравненіе (18) по порядку на $A_1b^2c^2$, $B_1a^2c^2$, $C_1a^2b^2$ и сложимъ результаты, тогда получимъ:

$$P' - \operatorname{cs} i.\ P_1 = \beta, \text{ значеніе } \beta \text{ ясно.} \qquad (25)$$

За-тѣмъ возводимъ уравненія (18) въ квадратъ, умножая по порядку на b^2c^2, a^2c^2, a^2b^2 и складывая, находимъ:

$P + \operatorname{cs}^2 i . P_1 - 2 \operatorname{cs} i . P' = \gamma$, причемъ значеніе γ понятно. (26)

Далѣе перенесемъ вторыя части въ первыхъ частяхъ уравненій (18) во вторыя ихъ части, возводимъ въ квадраты и, умножая по порядку на b^2c^2, a^2c^2, a^2b^2, по сложеніи результатовъ получимъ:

$$P = \operatorname{cs}^2 i.\ P_1 + \delta, \text{ или}$$

$$P - \operatorname{cs}^2 i.\ P_1 = \delta. \qquad (27)$$

Эти равенства (24) — (27) послужатъ намъ для опредѣленія количествъ P, P_1, P' въ функціи одного изъ нихъ и для преобразованія коеффиціентовъ уравненія (15).

Совершенно такимъ-же образомъ находимъ:

$S - \operatorname{cs} i.\ S' = a;$ (28) $\qquad S' - \operatorname{cs} i.\ S_1 = b.$ (29)

$S + \operatorname{cs}^2 i.\ S_1 - 2 \operatorname{cs} i.\ S' = c;$ (30) $\qquad S - \operatorname{cs}^2 i.\ S_1 = d$ (31)

Роль этихъ равенствъ такая-же, какъ и предъидущихъ.

Опредѣлимъ теперь при помощи простого вычисленія количества α, β, γ и δ. Замѣчая, что A, B, C суть линейныя функціи $\operatorname{sn} i$ и $\operatorname{cs} i$, можно представить α, β, γ, δ въ видѣ:

$$\alpha = M.\operatorname{sn}^2 i + N.\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i;\ \beta = N'.\operatorname{sn} i;\ \gamma = M'.\operatorname{sn}^2 i;$$
$$\delta = M''.\operatorname{sn}^2 i + Q.\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i,$$

гдѣ M, N,... суть нѣкоторыя функціи θ, φ и ψ, ихъ вычислимъ ниже; при этомъ замѣчу, что одинаковыми буквами означены количества, которыя, какъ докажемъ, равны.

Также найдемъ:

$$a = F.\operatorname{sn}^2 i + G.\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i;\ b = G'.\operatorname{sn} i;\ c = F'.\operatorname{sn}^2 i;$$
$$d = F''.\operatorname{sn}^2 i + H.\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i.$$

Всѣхъ введенныхъ коеффиціентовъ 12, но, какъ сейчасъ увидимъ, различныхъ между ними только 4.

Дѣйствительно, исключая изъ уравненій (24) — (27) количества P, P_1, P', находимъ:

$$\alpha - \gamma = \beta.\operatorname{cs} i,\ \delta = \alpha + \beta.\operatorname{cs} i = 2\alpha - \gamma, \text{ также:}$$
$$a - c = b.\operatorname{cs} i,\ d = a + b.\operatorname{cs} i = 2a - c.$$

Подставимъ сюда значеніе α, a..., по сравненіи коеффиціентовъ при $\operatorname{sn} i$, $\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i$, $\operatorname{sn}^2 i$, находимъ:

$$M = M' = M'';\ N = N';\ Q = 2N,$$

$$F = F' = F'';\ G = G';\ H = 2G.$$

И такъ:

$$\alpha = M\operatorname{sn}^2 i. + N.\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i;\ \beta = N\operatorname{sn} i;\ \gamma = M.\operatorname{sn}^2 i,$$
$$\delta = M\operatorname{sn}^2 i + 2N\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i;$$

$$a = F.\operatorname{sn}^2 i + G.\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i;\ b = G.\operatorname{sn} i;\ c = F.\operatorname{sn}^2 i;$$
$$d = F\operatorname{sn}^2 i + 2G\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i.$$

Теперь остается только вычислить M, N, F, G.

Сначала вычислимъ G и N. Значенія ихъ при помощи (25), (29) и (23) будутъ:

$$N = Sb^2c^2A_1A'; \; G = S(b^2+c^2)A_1A'$$

и подставляя сюда значеніе A', $A_1\ldots$ изъ равенствъ (23) и (20), находимъ послѣ легкаго преобразованія:

$$N = -\frac{c^2 \operatorname{sn}\theta . \operatorname{cs}\varphi}{\operatorname{sn}\mu}\Big\{b^2\operatorname{cs}\mu + a^2\lambda^2\operatorname{cs}\psi . \operatorname{cs}(\mu-\psi)\Big\} +$$
$$+ a^2b^2\operatorname{sn}\theta . \operatorname{sn}\theta . \operatorname{sn}\varphi, \qquad (32)$$

гдѣ
$$\lambda^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2},$$

$$G = -\frac{c^2\operatorname{sn}\theta . \operatorname{cs}\varphi . \operatorname{cs}\mu}{\operatorname{sn}\mu} - \frac{\operatorname{sn}\theta . \operatorname{cs}\varphi}{\operatorname{sn}\mu}\Big\}b^2\operatorname{cs}\mu + a^2\lambda^2\operatorname{cs}\psi\operatorname{cs}(\mu-\psi)\Big\} +$$
$$(a^2+b^2)\operatorname{sn}\theta . \operatorname{cs}\theta\operatorname{sn}\varphi. \qquad (33)$$

За-тѣмъ по формуламъ (26) и (30) при помощи (23) находимъ:

$$M = \frac{c^2\operatorname{cs}^2\varphi}{\operatorname{sn}^2\mu}\Big\{b^2 + a^2\lambda^2\operatorname{cs}^2(\mu-\psi\Big\} + a^2b^2\operatorname{sn}^2\theta . \operatorname{sn}^2\varphi; \qquad (34)$$

$$F = \frac{c^2\operatorname{cs}^2\varphi}{\operatorname{sn}^2\mu} + \frac{\operatorname{cs}^2\varphi}{\operatorname{sn}^2\mu}\Big\{b^2 + a^2\lambda^2\operatorname{cs}^2(\mu-\psi)\Big\} +$$
$$+ (a^2+b^2)\operatorname{sn}^2\theta . \operatorname{sn}^2\varphi. \qquad (35)$$

Видимъ, что коеффиціенты M, N, F, G зависятъ только отъ θ, φ и ψ, т. е. отъ положенія фаса кристалла, на которой падаютъ лучи, въ отношеніи осей упругости кристалла.

Теперь можно преобразовать коеффиціенты T_1 $T_{11},\ldots$

Опредѣлимъ P, P', S, S' въ функціи P_1 и S_1, находимъ:

$$P' = \beta + \operatorname{cs} i . P_1; \; P = \delta + \operatorname{cs}^2 i . P_1;$$

$S' = b + \operatorname{cs} i . S_1$; $S = d + \operatorname{cs}^2 i . S_1$, при этомъ количества P_1 и S_1 имѣютъ слѣдующія значенія:

$$P_1 = c^2 \operatorname{sn}^2\theta \{ b^2 + a^2\lambda^2 \operatorname{cs}^2\psi \} + a^2 b^2 \operatorname{cs}^2\theta; \tag{36}$$

$$S_1 = c^2 \operatorname{sn}^2\theta + \operatorname{sn}^2\theta \{ b^2 + a^2\lambda^2 \operatorname{cs}^2\psi \} + (a^2 + b^2).\operatorname{cs}^2\theta. \tag{37}$$

И такъ имѣемъ:

$T = P_1$; $T_1 = 2\beta + 4\operatorname{cs} i.P_1$; $T_{11} = P_1 - S_1 + 5\operatorname{cs}^2 i.P_1 + 4\beta \operatorname{cs} i + \delta$, или, при помощи соотношеніи между α, β и δ:

$T_{11} = P_1 - S_1 + 5\operatorname{cs}^2 i.P_1 + 5\beta \operatorname{cs} i + \alpha$;

$T_{111} = 2\operatorname{cs} i.P_1 + 2\operatorname{cs}^2 i.P_1 - 2\operatorname{cs} i.S_1 + 2\beta - 2b + 2\delta.\operatorname{cs} i$;

$T_{1v} = 1 + \delta - d + (P_1 - S_1)\operatorname{cs}^2 i$.

Для изслѣдованія уравненія (15) полезно его преобразовать.

Положимъ:

$$k = l - \operatorname{cs} i \tag{38}$$

подставляя это значеніе k въ уравненіи (15), находимъ окончательно:

$$P_1 l^4 + 2\operatorname{sn} i.N.l^3 + \{(M + P_1)\operatorname{sn}^2 i - S_1\} l^2 + 2\operatorname{sn} i \{(N - G)\operatorname{sn}^2 i - G.\operatorname{cs}^2 i\} l + 1 + \operatorname{sn}^4 i.(M - F) - \operatorname{sn}^2 i.\operatorname{cs}^2 i.F = 0. \tag{39}$$

Замѣтимъ, что введя l въ формулу (17), находимъ:

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\operatorname{sn} i}{l}. \tag{40}$$

Займемся теперь изслѣдованіемъ полученнаго уравненія (39).

Разберемъ случаи, имѣющіе большое значеніе въ физической оптикѣ.

Посмотримъ, при какихъ условіяхъ уравненіе (39) превращается въ биквадратное. Чтобы это уравненіе обращалось въ биквадратное, необходимо равенство нулю коэффиціентовъ при l^3 и l.

И такъ имѣемъ:

$$\operatorname{sn} i.N = 0;\ \operatorname{sn} i.\{(N - G).\operatorname{sn}^2 i - G\operatorname{cs}^2 i\} = 0. \tag{41}$$

Эти условія удовлетворяются:

1. $\operatorname{sn} i = 0$, но N и G отличны отъ нуля. Это случай нормальнаго паденія.

2. $\operatorname{sn} i$ не нуль, но $N = 0$, $G = 0$. Эти оба равенства распадаются на другія, ибо можно представить N и G въ видѣ: $N = \operatorname{sn}\theta . N_1$; $G = \operatorname{sn}\theta . G_1$ по равенствамъ (32) и (33). Слѣдовательно или a) $\operatorname{sn}\theta = 0$, N_1 и G_1 отличны отъ нуля, или b) $\operatorname{sn}\theta$ не нуль, а $N_1 = 0$, $G_1 = 0$.

Случай $\operatorname{sn}\theta = 0$ соотвѣтствуетъ тому положенію фаса, когда онъ перпендикуляренъ оси z;

Случай b) разберемъ такъ. Положимъ въ N_1 и G_1:

$$U = \frac{\operatorname{cs}\Phi}{\operatorname{sn}\mu}\left\{ b^2 \operatorname{cs}\mu + a^2\lambda^2 \operatorname{cs}\psi . \operatorname{cs}(\mu - \psi) \right\}$$, тогда условія $N_1 = 0$, $G_1 = 0$ будутъ:

$$-c^2 . U + a^2 b^2 \operatorname{cs}\theta . \operatorname{sn}\Phi = 0; \quad -c^2 \operatorname{cs}\Phi . \operatorname{ctg}\mu - U + \\ + (a^2 + b^2) . \operatorname{cs}\theta . \operatorname{sn}\Phi = 0.$$

Исключая отсюда U и вводя значеніе $\operatorname{ctg}\mu$, находимъ:

$$\operatorname{cs}\theta . \operatorname{sn}\Phi . (a^2 - c^2)(b^2 - c^2) = 0.$$

Это уравненіе даетъ въ общемъ случаѣ двуосьныхъ кристалловъ:

b_1) $\operatorname{cs}\theta = 0$, Φ не ноль. При этомъ условіи $U = 0$, т. е., или

b'_1) $\operatorname{cs}\Phi = 0$; b''_1) $\operatorname{sn}\psi = 0$; b'''_1) $\operatorname{cs}\psi = 0$.

Слѣдовательно, помня значеніе угловъ Φ и ψ, имѣемъ:

Если b'_1) лучъ падаетъ въ главномъ сѣченіи, проходящемъ черезъ ось z-овъ и эта послѣдняя лежитъ на фасѣ кристалла, или b''_1) фасъ параллеленъ плоскости xz, или если b'''_1) фасъ параллеленъ плоскости yz, то уравненіе для l превращается въ биквадратное.

c) $\operatorname{sn}\Phi = 0$, $\operatorname{cs}\theta$ не нуль, при этомъ $U = 0$ и даетъ:

c′) $\operatorname{sn}\psi=0$; c″) $\operatorname{cs}\psi=0$; слѣдовательно или c′) фасъ кристалла содержитъ ось x-овъ и плоскость паденія есть плоскость главнаго сѣченія или c″) фасъ содержитъ ось y-овъ и опять плоскость главнаго сѣченія есть плоскость паденія.

И такъ заключаемъ, что уравненіе для l обращается въ биквадратное, когда паденіе нормально, или когда фасъ кристалла параллеленъ какой-нибудь координатной плоскости, или перпендикуляренъ къ одной изъ осей упругости.

Дадимъ теперь для m, n, p логариѳмическія выраженія.

Положимъ:

$$A - A_1 \operatorname{cs} i = A_1 \operatorname{sn} i . \operatorname{ctg} h;$$

$$B - B_1 \operatorname{cs} i = B_1 \operatorname{sn} i . \operatorname{ctg} j;$$

$$C - C_1 \operatorname{cs} i = C_1 \operatorname{sn} i . \operatorname{ctg} g.$$

Подставляя A, B, C отсюда въ формулы (9), находимъ при помощи (16):

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{A_1 \operatorname{sn}(\sigma + h)}{\operatorname{sn} h}; \\ n &= \frac{B_1 \operatorname{sn}(\sigma + j)}{\operatorname{sn} j}; \\ p &= \frac{C_1 \operatorname{sn}(\sigma + g)}{\operatorname{sn} g}. \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Для опредѣленія h, j, g можно получить слѣдующія формулы при помощи (21) и (22):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg} h &= \frac{\operatorname{cs}\varphi . \operatorname{sn}(\mu - \psi)}{\operatorname{sn}\theta . \operatorname{sn}\psi . \operatorname{sn}\mu}; \\ \operatorname{ctg} j &= \frac{\operatorname{cs}\varphi . \operatorname{cs}(\mu - \psi)}{\operatorname{sn}\theta . \operatorname{cs}\psi . \operatorname{sn}\mu}; \\ \operatorname{ctg} g &= \operatorname{sn}\varphi . \operatorname{tg}\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Опредѣлимъ теперь величину и направленіе прямыхъ OR. Косинусы направленія OR и ея величина входятъ въ уравненіе поверхности волны, которое можно написать слѣдующимъ образомъ:

$$PR - Q + q = 0\ *, \tag{44}$$

гдѣ положено для краткости:

$$P = Sb^2c^2x^2,\ R = Sx^2;\ Q = Sa^2\,(b^2 + c^2\,)\,x^2,\ q = a^2b^2c^2,$$

и гдѣ x, y, z суть коордонаты конца прямой OR.

Уравненіе касательной плоскости можно написать поэтому въ видѣ:

$$X.a\{P + a^2R - a^2(b^2 + c^2)\} + Y.y.\{P + b^2R - b^2(a^2 + c^2)\}$$
$$+ Z.z.\{P + c^2R - c^2(a^2 + b^2)\} = PR - q; \tag{45}$$

Здѣсь X, Y, Z суть перемѣнные коордонаты касательной плоскости, а x, y, z — точки касанія.

Сравнивая коеффиціенты этого уравненія съ коеффиціентами уравненія (8), мы получимъ три уравненія съ тремя неизвѣстными x, y, z; для рѣшенія ихъ употребимъ пріемъ Lamé. Опредѣлимъ точку x_1, y_1, z_1 изъ уравненій:

$$\frac{a_1}{bc} = \frac{m}{\omega},\ \frac{y_1}{ac} = \frac{n}{\omega},\ \frac{z_1}{ab} = \frac{p}{\omega}. \tag{46}$$

Эта точка лежитъ на касательной къ поверхности эллипсоида:

$$\frac{x_1^{\,2}}{bc} + \frac{y_1^{\,2}}{ac} + \frac{z_1^{\,2}}{ab} = 1, \tag{47}$$

которой можно назвать эллипсоидомъ Lamé.

Дѣйствительно, умножая уравненіе (46) по порядку на x_1, y_1, z_1 и складывая результаты, находимъ:

$$\frac{xx_1}{bc} + \frac{yy_1}{ac} + \frac{zz_1}{ab} = 1, \tag{48}$$

---

* См. *Lamé*, Leçons sur l'élasticité des corps solides. 2-me éd. p. 245.

ибо $mx+ny+pz=\omega$.

Подставляя значеніе m, n, p изъ (46) въ уравненіе Френеля для скорости ω, найдемъ:

$$P_{>1}R_1-Q_1+q=0, \tag{49}$$

т. е. точка x_1, y_1, z_1 лежитъ на поверхности волны, причемъ $P_{>1}, R_1, Q_1$ суть значенія $P_>, Q, R$ для точки x_1, y_1, z_1.

Также изъ (46) при помощи (47) находимъ:

$$mx_1+ny_1+pz_1=\omega,$$

т. е. точка x_1, y_1, z_1 есть точка, лежащая на касательной къ поверхности волны (44). Отсюда заключаемъ, что точки (x, y, z) и (x_1, y_1, z_1) суть сопряженныя между собой, т. е. каждая есть полюсъ касательной къ волнѣ плоскости относительно эллипсоида Lamé, а слѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x}{bc}&=x_1\,.\,\frac{P_{>1}+a^2R_1-a^2(b^2+c^2)}{P_{>1}R_1-q}\,,\\
\frac{y}{ac}&=y_1\,.\,\frac{P_{>1}+b^2R_1-b^2(a^2+c^2)}{P_{>1}R_1-q}\,,\\
\frac{z}{ab}&=z_1\,.\,\frac{P_{>1}+c^2R_1-c^2(a^2+b^2)}{P_{>1}R_1-q}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Опредѣляя $P_{>1}$ и R_1, находимъ:

$$P_{>1}=q.[1+k^2+2k\operatorname{cs} i]=q\,(l^2+\operatorname{sn}^2 i); \tag{51}$$

$$R_1=P_1l^2+2N\operatorname{sn} i.l+M.\operatorname{sn}^2 i. \tag{52}$$

Составляя $P_{>1}$ R_1, надо будетъ воспользоваться уравненіемъ (39); тогда найдемъ:

$$P_{>1}R_1=q.\{S_1l^2+2G\operatorname{sn} i.l+F\operatorname{sn}^2 i.-1\}. \tag{53}$$

Подставляя все это въ формулы (50), находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{x_1}{bc}\cdot\frac{(P_1+b^2c^2).l^2+2N\,\mathrm{sn}\,i.l+(M+b^2c^2)\,\mathrm{sn}^2 i-(b^2+c^2)}{S_1 l^2+2G\,\mathrm{sn}\,i.l+F\,\mathrm{sn}^2 i-2};\\
y &= \frac{y_1}{ac}\cdot\frac{(P_1+a^2c^2).l^2+2N\,\mathrm{sn}\,i.l+(M+a^2c^2).\mathrm{sn}^2 i-(a^2+c^2)}{S_1 l^2+2G\,\mathrm{sn}\,i.l+F\,\mathrm{sn}^2 i-2};\\
z &= \frac{z_1}{ab}\cdot\frac{(P_1+a^2b^2).l^2+2N\,\mathrm{sn}\,i.l+(M+a^2c^2).\mathrm{sn}^2 i-(a^2+b^2)}{S_1 l^2+2G\,\mathrm{sn}\,i.l+F\,\mathrm{sn}^2 i-2}.
\end{aligned}\right\}\quad(54)$$

Зная отсюда x, y, z, находимъ $OR=\varrho$ по формулѣ:

$$\varrho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\qquad(55)$$

и косинусы направленія ϱ по формуламъ:

$$\mathrm{cs}\,f=\frac{x}{\varrho},\ \mathrm{cs}\,g=\frac{y}{\varrho},\ \mathrm{cs}\,h=\frac{z}{\varrho}.\qquad(56)$$

И такъ предложенный вопросъ рѣшенъ.

Для опредѣленія коордонатъ точекъ R и R_1 можно поступать еще слѣдующимъ образомъ; при опредѣленіи поверхности волны мы имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x}{\varrho^2-a^2}&=\frac{\omega m}{\omega^2-a^2};\\
\frac{y}{\varrho^2-b^2}&=\frac{\omega n}{\omega^2-b^2};\\
\frac{z}{\varrho^2-c^2}&=\frac{\omega p}{\omega^2-c^2},
\end{aligned}\right\}\qquad(44)$$

гдѣ x, y, z суть коордонаты конца прямой OR, а

$$\varrho^2=x^2+y^2+z^2,$$

т. е. ϱ есть длина OR.

Изъ этихъ уравненій, по исключеніи x, y, z, имѣемъ:

$$\varrho^4.\,S\frac{m^2\omega^2}{(\omega^2-a^2)^2}-2\varrho^2.\left\{S\frac{\omega^2m^2a^2}{(\omega^2-a^2)^2}+\frac{1}{2}\right\}+S\frac{\omega^2a^4m^2}{(\omega^2-a^2)^2}=0.\ (45)$$

Отсюда опредѣлимъ ϱ, а по (44) x, y, z. Но лучше употребить пріемъ Lamé.

—

IV.

О ПОСТРОЕНІИ ПОЛЯРЪ

ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКИХЪ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ КРИВЫХЪ ЛИНІЙ.

К. А. Андреева.

---

1. Ученіе о полярахъ есть безспорно одинъ изъ важнѣйшихъ отдѣловъ въ теоріи геометрическихъ кривыхъ линій. Настоящее изслѣдованіе есть попытка внести въ этотъ отдѣлъ небольшой вкладъ, имѣющій чисто геометрическій характеръ и состоящій въ разысканіи построеній, посредствомъ которыхъ могутъ быть находимы геометрически поляры какой-либо точки относительно кривыхъ линій на плоскости.

Если мы имѣемъ на плоскости нѣкоторую геометрическую кривую C порядка n, уравненіе которой въ однородныхъ координатахъ есть

$$f(x,\ y,\ z)=0,$$

и если кромѣ того намъ дана на плоскости точка m, которой однородныя координаты суть x', y', z', то, какъ извѣстно, кривая порядка $(n-1)$, называемая *первою полярой* точки m относительно кривой C, будетъ выражаться уравненіемъ

$$x'\frac{df(x,y,z)}{dx}+y'\frac{df(x,y,z)}{dy}+z'\frac{df(x,y,z)}{dz}=0.$$

Первую часть этого уравненія мы будемъ сокращенно обозначать чрезъ $\Delta f(x, y, z)$ или просто Δf.

Первая поляра точки m относительно первой поляры есть кривая порядка $(n-2)$. Она называется *второю полярой* точки m относительно кривой C. Уравненіе второй поляры есть $\Delta\Delta f=0$ или сокращенно $\Delta^2 f=0$.

Первая поляра точки m относительно второй поляры есть ея *третья поляра* относительно кривой C. Уравненіе третьей поляры можетъ быть представлено въ видѣ $\Delta^3 f=0$ и т. д.

Послѣдняя или $(n-1)$-ая поляра точки m относительно кривой C есть прямая линія, а потому называется также *прямолинейною полярой*. Извѣстно, что уравненіе ея $\Delta^{(n-1)} f=0$ можетъ быть получено изъ уравненія первой поляры $\Delta f=0$ посредствомъ простой замѣны въ немъ перемѣнныхъ x, y, z постоянными x', y', z', и обратно. На этомъ основаніи мы будемъ изображать это уравненіе сокращенно въ видѣ $\nabla f=0$[1].

2. Условившись въ такомъ обозначеніи, укажемъ на нѣкоторыя свойства поляръ относительно совокупности геометрическихъ кривыхъ линій, разсматриваемой какъ кривая высшаго порядка. Свойства эти послужатъ основаніемъ нашихъ дальнѣйшихъ изслѣдованій.

Если кривая C, уравненіе которой есть

$$f(x, y, z)=0,$$

состоитъ изъ совокупности двухъ кривыхъ C_1 и C_2, выражаемыхъ отдѣльно уравненіями

$$f_1(x, y, z)=0 \text{ и } f_2(x, y, z)=0,$$

то должно быть

---

[1] Объ основныхъ свойствахъ поляръ съ точки зрѣнія ихъ аналитическаго опредѣленія см. *Salmon*, «Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven», hrg. v. *Fiedler*. Leipzig, 1873, стр. 56 и сл.

$$f(x, y, z) = f_1(x, y, z) . f_2(x, y, z),$$

откуда

$$\Delta f = f_1 \Delta f_2 + f_2 . \Delta f_1$$

и, замѣняя здѣсь x, y, z послѣдовательно чрезъ x', y', z', и обратно

$$\nabla f = f_1 . \nabla f_2 + f_2 . \nabla f_1 .$$

Слѣдовательно, уравненіе первой поляры относительно совокупности кривыхъ C_1 и C_2 будетъ таково:

$$f_1 . \Delta f_2 + f_2 . \Delta f_1 = 0, \qquad (1)$$

а уравненіе прямолинейной поляры таково:

$$f_1 . \nabla f_2 + f_2 . \nabla f_1 = 0. \qquad (2)$$

Въ послѣднемъ уравненіи множители f_1 и f_2 въ обоихъ членахъ первой части суть постоянные, а множители ∇f_1 и ∇f_2 суть первыя части уравненій прямолинейныхъ поляръ относительно кривыхъ C_1 и C_2. На этомъ основаніи форма послѣдняго уравненія убѣждаетъ насъ въ справедливости слѣдующаго предложенія.

Прямолинейная поляра какой-либо точки относительно совокупности двухъ кривыхъ проходитъ чрезъ точку пересѣченія прямолинейныхъ поляръ той-же точки относительно этихъ кривыхъ въ-отдѣльности.

Если линія C_2 есть прямая и, слѣдовательно, уравненіе $f_2 = 0$ есть первой степени, то уравненіе $\nabla f_2 = 0$ тождественно съ $f_2 = 0$. Вслѣдствіе этого, какъ частный случай предыдущаго предложенія, получается слѣдующее.

Прямолинейная поляра какой-либо точки относительно совокупности кривой линіи съ прямою проходитъ чрезъ точку пересѣченія этой прямой съ прямолинейною полярой той-же точки относительно кривой линіи.

3. Заключенія, подобныя сдѣланнымъ о прямолинейныхъ полярахъ, могутъ быть выведены и для первыхъ поляръ, если будемъ исходить изъ уравненія (1).

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ уравненіи два слагаемыхъ первой части, будучи многочленами степени $(n-1)$, могутъ быть разсматриваемы какъ первыя части двухъ другихъ уравненій, изъ которыхъ одно представляетъ совокупность кривой C_1 съ первою полярой относительно кривой C_2, а другое совокупность кривой C_2 съ первою полярой относительно C_1. На этомъ основаніи мы изъ самой формы уравненія (1) усматриваемъ слѣдующее.

Первая поляра какой-либо точки относительно совокупности двухъ кривыхъ проходитъ чрезъ точки пересѣченія двухъ другихъ кривыхъ, изъ которыхъ одна есть совокупность первой изъ данныхъ кривыхъ съ первою полярой той же точки относительно второй кривой, а другая — совокупность второй изъ данныхъ кривыхъ съ первою полярой относительно первой кривой.

Въ частномъ случаѣ, когда линія C_2 есть прямая, множитель Δf_2 въ уравненіи (1) есть постоянный. Вслѣдствіе этого предыдущеее предложеніе превращается для этого случая въ слѣдующее.

Первая поляра какой-либо точки относительно совокупности кривой линіи съ прямою проходитъ чрезъ точки пересѣченія двухъ кривыхъ, изъ которыхъ одна есть данная кривая, а другая — совокупность данной прямой съ первою полярой той-же точки относительно данной кривой.

4. Положимъ, что мы имѣемъ двѣ кривыя линіи C' и C'' одного и того-же порядка n и пусть однородныя уравненія этихъ кривыхъ будутъ

$$f'(x, y, z) = 0 \text{ и } f''(x, y, z) = 0.$$

Допустимъ сверхъ того, что прямолинейныя поляры нѣкоторой точки m, которой координаты суть x', y', z', относительно этихъ кривыхъ совпадаютъ, т. е. что уравненія:

$$\nabla f' = \frac{df'}{dx'} x + \frac{df'}{dy'} y + \frac{df'}{dz'} z = 0$$

и
$$\nabla f'' = \frac{df''}{dx'} x + \frac{df''}{dy'} y + \frac{df''}{dz'} z = 0$$

представляютъ одну и ту-же прямую.

Въ такомъ случаѣ, означая чрезъ k нѣкоторое постоянное, будемъ имѣть, при всякомъ значеніи перемѣнныхъ x, y, z,

$$\nabla f' = k \nabla f'' \tag{3}$$

и слѣдовательно

$$\frac{df'}{dx'} = k \frac{df''}{dx'}, \quad \frac{df'}{dy'} = k \frac{df''}{dy'}, \quad \frac{df'}{dz'} = k \frac{df''}{dz'}.$$

Помножая эти равенства послѣдовательно на x', y', z' и складывая результаты, получимъ на основаніи извѣстнаго свойства однородныхъ функцій:

$$f'(x', y', z') = kf''(x', y', z'). \tag{4}$$

Возьмемъ теперь еще какую-нибудь кривую E, которой уравненіе есть $F(x, y, z) = 0$.

Уравненія прямолинейныхъ поляръ точки m относительно совокупностей кривыхъ $C'E$ и $C''E$ будутъ, какъ мы видѣли:

$$f'.\nabla F + F.\nabla f' = 0$$

$$f''.\nabla F + F.\nabla f'' = 0.$$

На основаніи равенствъ (3) и (4) убѣждаемся, что первыя части этихъ двухъ уравненій различаются только постояннымъ множителемъ k. Слѣдовательно, прямыя, выражаемыя этими уравненіями, совпадаютъ. Такимъ образомъ получаемъ предложеніе:

Если прямолинейныя поляры нѣкоторой точки относительно двухъ кривыхъ одного и того-же порядка совпадаютъ, то и прямолинейныя поляры той-же точки относительно двухъ совокупностей каждой изъ этихъ кривыхъ съ какой бы ни было третьей также совпадаютъ.

5. Пусть $f(x, y, z)=0$ и $F(x, y, z)=0$ будутъ уравненія двухъ кривыхъ одного и того-же порядка n. Положимъ, что точки пересѣченія обѣихъ этихъ кривыхъ съ прямою $z=0$ суть однѣ и тѣ-же. Въ такомъ случаѣ, означая чрез k нѣкоторое постоянное, будемъ имѣть:

$$f(x, y, 0)=kF(x, y, 0),$$

каковы бы ни были перемѣнныя x и y.

Отсюда заключаемъ, что при условіи $z=0$ должны быть справедливы слѣдующія равенства:

$$\frac{df}{dx}=k\frac{dF}{dx} \text{ и } \frac{df}{dy}=k\frac{dF}{dy}.$$

Уравненія первыхъ поляръ какой-либо точки m, которой координаты суть x', y', z', относительно разсматриваемыхъ кривыхъ таковы:

$$\Delta f=x'\frac{df}{dx}+y'\frac{df}{dy}+z'\frac{df}{dz}=0$$

$$\Delta F=x'\frac{dF}{dx}+y'\frac{dF}{dy}+z'\frac{dF}{dz}=0.$$

Изъ нихъ находимъ

$$\Delta f-k\Delta F=x'\left(\frac{df}{dx}-k\frac{dF}{dx}\right)+y'\left(\frac{df}{dy}-k\frac{dF}{dy}\right)+z\left(\frac{df}{dz}-k\frac{dF}{dz}\right).$$

Полагая здѣсь $z=0$, получимъ на основаніи предыдущихъ равенствъ:

$$\Delta f-k\Delta F=z'\left(\frac{df}{dz}-k\frac{dF}{dz}\right).$$

Если точка m сама находится на прямой $z=0$, то должно быть $z'=0$ и изъ послѣдняго равенства получимъ:

$$\Delta f(x, y, 0)=k\Delta F(x, y, 0),$$

каковы бы ни были значенія перемѣнныхъ x, y.

Это значитъ, что точки пересѣченія обѣихъ первыхъ поляръ $\Delta f=0$ и $\Delta F=0$ съ прямою $z=0$ суть однѣ и тѣ-же.

Такъ-какъ предыдущія разсужденія относятся къ самому общему виду уравненій разсматриваемыхъ кривыхъ, то сказанное о прямой $z=0$ должно быть справедливо и для всякой другой прямой на плоскости. Такимъ образомъ получаемъ слѣдующее предложеніе.

Если точки пересѣченія какой-нибудь прямой съ двумя кривыми одного и того-же порядка суть однѣ и тѣ-же, то и точки пересѣченія этой прямой съ первыми полярами какой-либо ея точки относительно этихъ двухъ кривыхъ суть однѣ и тѣ-же.

На основаніи указанной выше зависимости между послѣдовательными полярами одной и той-же точки заключаемъ, что послѣднее предложеніе должно быть справедливо не только для первыхъ поляръ, но и для всякихъ другихъ поляръ одного и того-же порядка, слѣдовательно и для прямолинейныхъ.

6. Воспользуемся предыдущими выводами для рѣшенія слѣдующихъ задачъ.

Задача 1-я. — *Найти прямолинейную поляру данной точки относительно совокупности n прямыхъ линій, разсматриваемой какъ одна кривая порядка n.*

Допустимъ, что намъ извѣстно рѣшеніе задачи для случая, когда n на единицу менѣе даннаго.

Пусть A_1, A_2, A_3,.... A_n будутъ прямыя, составляющія данную совокупность, а m точка, поляру которой требуется найдти.

Найдемъ сперва двѣ прямолинейныя поляры P_1 и P_2 точки

m относительно совокупностей $(n-1)$ прямыхъ $A_2\ A_3 \ldots\ldots A_n$ и $A_1\ A_3 \ldots\ldots A_n$.

На основаніи предложенія параграфа 2 искомая прямолинейная поляра должна проходить чрезъ точку пересѣченія прямыхъ A_1 и P_1 такъ-же какъ и чрезъ точку пересѣченія прямыхъ A_2 и P_2. Слѣдовательно, этими двумя точками она будетъ вполнѣ опредѣлена.

Такъ-какъ рѣшеніе настоящей задачи извѣстно для случая $n=2$ и въ этомъ случаѣ построеніе, представляющее это рѣшеніе, есть линейное, то заключаемъ изъ сказаннаго, что и во всѣхъ другихъ случаяхъ задача рѣшается посредствомъ вполнѣ опредѣленнаго линейнаго построенія[1].

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, между прочимъ, что если всѣ прямыя, составляющія данную совокупность, проходятъ чрезъ одну и ту-же точку, то и прямолинейная поляра какой бы ни было точки плоскости проходитъ чрезъ ту-же точку. Если же всѣ данныя прямыя совпадаютъ между собою въ одну прямую, то и прямолинейная поляра всякой точки плоскости совпадаетъ съ этою прямой.

Приведенное общее рѣшеніе разсматриваемой задачи непримѣнимо къ первому изъ названныхъ сейчасъ частныхъ случаевъ. Но этотъ частный случай весьма просто приводится къ общему помощію слѣдующаго построенія.

Чрезъ данную точку m проводимъ какую-нибудь прямую L и затѣмъ чрезъ точки пересѣченія этой прямой съ прямыми $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_n$ проводимъ прямыя $B_1, B_2, B_3 \ldots\ldots B_n$ такъ, чтобы онѣ не сходились въ одну точку. Найдя за-

---

[1] Линейнымъ построеніемъ мы называемъ такое, которое выполняется помощію только линейки, т. е. нанесенія на плоскость однѣхъ прямыхъ линій.

О полярахъ относительно кривыхъ 2-го порядка см., напр., *Chasles*, «Traité des sections coniques». — Paris, 1865, nº 98, 99, p. 76—79.—*Salmon-Fiedler*, «Analytische Geometrie der Kegelschnitte». 3-te Aufl. Leipzig, 1873, Art. 106—108, p. 135—141.

тѣмъ прямолинейную поляру Q точки m относительно совокупности послѣднихъ n прямыхъ, будемъ имѣть на основанiи предложенiя парагр. 5, что искомая прямолинейная поляра той-же точки относительно совокупности прямыхъ A_1, A_2, A_3, ... A_n есть прямая, соединяющая точку пересѣченiя прямыхъ L и Q съ точкой, въ которой сходятся всѣ прямыя A_1, A_2 ...

Такимъ-же образомъ рѣшается задача и для того еще болѣе частнаго случая, когда изъ n данныхъ прямыхъ $(n-1)$ совпадаютъ между собою[1].

7. Задача 2-я. *Предполагая, что намъ извѣстна прямолинейная поляра одной изъ точекъ плоскости относительно нѣкоторой кривой порядка $(n-1)$, найдти прямолинейную поляру той-же точки относительно совокупности этой кривой съ данною прямою, разсматриваемой какъ кривая порядка n.*

Пусть P будетъ поляра данной точки m относительно разсматриваемой кривой порядка $(n-1)$ и D данная прямая. Такъ-какъ прямая P есть въ то-же время прямолинейная поляра относительно совокупности $(n-1)$ прямыхъ, съ нею совпадающихъ, то, на основанiи предложенiя парагр. 4, искомая поляра относительно совокупности кривой съ прямою D есть въ то-же время прямолинейная поляра относительно совокупности n прямыхъ, изъ которыхъ одна есть D, а остальныя $(n-1)$ совпадаютъ съ P. Задача сводится такимъ образомъ на только что указанный частный случай предыдущей задачи.

---

[1] Замѣтимъ, что прямолинейная поляра относительно совокупности прямыхъ линiй есть то-же самое, что Poncelet, въ своемъ мемуарѣ «Théorie générale des centres de moyennes harmoniques», называетъ осью гармоническихъ срединъ (см. *Poncelet*, «Traité des propriétés projectives des figure». 2 édition, Paris, 1866, p. 41). Въ этомъ мемуарѣ дано также и геометрическое рѣшенiе настоящей задачи или, вѣрнѣе сказать, задачи взаимной съ настоящею (ibid. p. 34, 35, n° 33—36).

8. Задача 3-я. *Предполагая, что намъ извѣстна прямолинейная поляра одной изъ точекъ плоскости относительно нѣкоторой кривой порядка $(n-1)$, а также прямолинейная поляра той-же точки относительно совокупности этой кривой съ неизвѣстною прямою, найдти эту прямую.*

Пусть m будетъ данная точка, P ея поляра относительно кривой и Q ея поляра относительно совокупности кривой съ неизвѣстною прямою X. Послѣдняя должна проходить чрезъ точку пересѣченія прямыхъ P и Q. Проведя чрезъ эту точку три произвольныя прямыя D_1, D_2, D_3, мы можемъ найдти, какъ показано въ предыдущемъ параграфѣ, прямолинейныя поляры Q_1, Q_2, Q_3 точки m относительно совокупностей каждой изъ этихъ прямыхъ съ кривою. Такъ-какъ эти три совокупности, а также совокупность искомой прямой X съ кривою составляютъ пучекъ четырехъ кривыхъ порядка n, то поляры точки m относительно ихъ должны составлять также пучекъ и притомъ проективно соотвѣтственный съ первымъ. Отсюда слѣдуетъ, что искомая прямая X опредѣлится весьма простымъ линейнымъ построеніемъ изъ условія:

$$(X D_1 D_2 D_3) = (Q Q_1 Q_2 Q_3)$$ [1]

9. Между геометрическими кривыми высшихъ порядковъ особеннаго вниманія заслуживаютъ такія, которыя обладаютъ кратными точками, коихъ степень кратности единицею менѣе порядка кривой. Такова вообще кривая порядка n, имѣющая кратную точку порядка $(n-1)$. Всѣ такія кривыя принад-

[1] Это условіе есть равенство сложныхъ или ангармоническихъ отношеній. О проективномъ соотвѣтствіи пучковъ и рядовъ и о построеніи соотвѣтственныхъ элементовъ этихъ геометрическихъ формъ см. напр. изв. сочин. Steiner, «Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf project. Eigensch.» 2-е Aufl. Leipzig. 1876. p. 1—24.

лежатъ къ разряду такъ-называемыхъ уникурсальныхъ, или раціональныхъ кривыхъ, т. е. такихъ, для которыхъ разность между наибольшимъ числомъ двойныхъ точекъ, возможнымъ при данномъ порядкѣ, и числомъ двойныхъ точекъ, равнозначущимъ съ совокупностью кратныхъ точекъ, имѣющихся въ дѣйствительности, равняется нулю[1].

Причина, по которой названный частный видъ кривыхъ мы считаемъ заслуживающимъ особаго вниманія геометровъ, заключается, съ одной стороны, въ значительной простотѣ ихъ изслѣдованія, а съ другой въ томъ, что многія ихъ свойства находятся въ опредѣленной, болѣе или менѣе легко обнаруживаемой зависимости со свойствами кривыхъ болѣе общихъ. Вслѣдствіе этого на изученіе такого рода кривыхъ можно смотрѣть какъ на подготовительное къ изученію геометрическихъ кривыхъ вообще. Результаты настоящаго изслѣдованія подтвердятъ на дѣлѣ такое воззрѣніе.

10. Рѣшимъ нѣсколько задачъ, относящихся къ указанному роду кривыхъ.

Задача 4-я. *Построить кривую порядка n по даннымъ ея одной кратной точкѣ порядка (n—1) и 2 n простымъ точкамъ.*

Задача эта была давно уже рѣшена нѣсколькими геометрами[2]. Различныя ея рѣшенія приводятъ, собственно говоря, къ одному и тому-же всегда линейному построенію и различаются только руководящими разсужденіями, употребляемыми для этой цѣли.

---

[1] См. *Salmon-Fiedler,* «Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven». Leipzig. 1873, Art. 43, 44, p. 34, 35.

[2] *Seydevitz,* «Darstellung der geometrischen Verwandtschaft». Grunert's Archiv, T. VII, 1845, p. 137.

E. de Jonquières, «Essai sur la génération des courbes géométriques». Paris, 1858, nº 58, p. 55, 56 (Extrait du tome XVI des Mémoires présentés par divers savants à l'ac. des sc.).

Ed. Weyr, «Analytische Untersuchung der quadratische Verwandtschaft». Zeit-

Мы приводимъ здѣсь наше рѣшеніе единственно въ виду той связи, которую имѣетъ настоящая задача съ слѣдующими, коихъ рѣшеніе, сколько намъ извѣстно, до сихъ поръ не было дано.

Прежде всего замѣтимъ, что подъ словами *построить кривую* слѣдуетъ понимать требованіе, найдти построеніемъ сколь угодно большое число принадлежащихъ кривой точекъ и притомъ сколь угодно близкихъ между собою. При такомъ пониманіи требованія задачи она сводится, очевидно, на отысканіе точки, въ которой кривая пересѣкается какою - либо прямою, проходящею чрезъ ея данную кратную точку.

Допустимъ, что намъ извѣстно рѣшеніе задачи для случая, когда порядокъ кривой n на единицу менѣе даннаго.

Пусть o будетъ данная кратная точка кривой и a_1, a_2, a_3, ... a_{2n} данныя ея простыя точки. Проведемъ чрезъ o произвольную прямую L и будемъ отыскивать на ней точку, въ которой она еще разъ встрѣчаетъ кривую.

Назовемъ чрезъ A_1, A_2, A_3, A_4 прямыя, соединяющія точку o съ точками a_1, a_2, a_3, a_4, и чрезъ C_2, C_3, C_4 три кривыя порядка $(n-1)$, изъ которыхъ каждая имѣетъ въ o кратную точку порядка $(n-2)$ и изъ которыхъ первая проходитъ чрезъ точки a_3, a_4, a_5 .... a_{2n}, вторая чрезъ точки a_2, a_4, a_5 .... a_{2n} и третья чрезъ точки a_2, a_3, a_5 .... a_{2n}. Этими данными кривыя эти опредѣляются вполнѣ, и по предположенію мы можемъ найдти точки l_2, l_3, l_4, въ которыхъ онѣ пересѣкаютъ прямую L. Точно такъ - же мы можемъ найдти точки k_2, k_3, k_4 пересѣченія этихъ кривыхъ съ прямою A_1.

---

schrift für Math. und Phys. T. XIV, 1869, p. 477.

Въ сочиненіи «О геометрическихъ соотвѣтствіяхъ» (Москва. 1879, стр. 65—67) нами было предложено рѣшеніе задачи: «Построить уникурсальную кривую, опредѣляемую достаточнымъ числомъ ея точекъ, въ числѣ которыхъ находятся всѣ кратныя». Настоящая задача есть только частный случай этой послѣдней.

Совокупность кривой C_2 съ прямою A_2 представляетъ кривую порядка n, имѣющую въ o кратную точку порядка $(n-1)$. Такія-же точно кривыя представляютъ совокупности кривой C_3 съ прямою A_3 и кривой C_4 съ прямою A_4. Такъ-какъ всѣ эти три кривыя, будучи порядка n, проходятъ чрезъ всѣ точки, опредѣляющія вполнѣ искомую кривую, исключая одной точки a_1, то онѣ составляютъ пучекъ, которому принадлежитъ и искомая кривая. Вслѣдствіе этого ряды точекъ, въ которыхъ двѣ прямыя L и A_1 пересѣкаются кривыми этого пучка, должны быть проективно соотвѣтственными и потому, называя чрезъ x точку, въ которой искомая кривая пересѣкаетъ прямую L, будемъ имѣть, что эта точка опредѣлится изъ условія

$$(x\ l_2\ l_3\ l_4) = (a_1\ k_2\ k_3\ k_4).$$

Изъ этого условія точка x находится посредствомъ вполнѣ опредѣленнаго линейнаго построенія.

Такъ-какъ извѣстно рѣшеніе разсматриваемой задачи для случая, когда $n = 2$, то изъ сказаннаго получается ея рѣшеніе при какомъ угодно n.

11. Задача 5-я. *Построить прямолинейную поляру данной точки m относительно кривой порядка n, имѣющей въ нѣкоторой точкѣ o кратную точку порядка $(n-1)$ и проходящей еще чрезъ данныя $2\,n$ точекъ.*

Сохраняя обозначенія предыдущаго параграфа, назовемъ сверхъ того чрезъ P_2 прямолинейную поляру точки m относительно совокупности кривой C_2 съ прямою A_2. Если допустимъ, что намъ извѣстно рѣшеніе настоящей задачи для случая, когда n на единицу менѣе даннаго, то можемъ считать извѣстною прямолинейную поляру точки m относительно кривой C_2. Зная же эту поляру, мы найдемъ линейнымъ построеніемъ и прямую P_2, какъ это показано въ параграфѣ 7.

Такимъ-же точно образомъ могутъ быть найдены и прямолинейныя поляры P_3 и P_4 точки m относительно совокупностей кривой C_3 съ прямою A_3 и кривой C_4 съ прямою A_4.

Такъ-какъ прямолинейныя поляры одной и той-же точки относительно кривыхъ, составляющихъ пучекъ, образуютъ также пучекъ проективно соотвѣтственный съ первымъ, то, называя чрезъ X искомую прямолинейную поляру, будемъ имѣть, что она опредѣляется изъ условія

$$(X\ P_2\ P_3\ P_4) = (a_1\ k_2\ k_3\ k_4).$$

На основаніи этого условія прямая X найдется посредствомъ опредѣленнаго линейнаго построенія, и такъ-какъ извѣстно таковое-же построеніе, рѣшающее задачу для случая, когда $n=2$, то она является рѣшенною, на основаніи сказаннаго, и для всякаго другого значенія n.

12. Задача 6-я. *Построить первую поляру данной точки m относительно кривой порядка n, имѣющей въ нѣкоторой точкѣ o кратную точку порядка $(n-1)$ и проходящей еще чрезъ $2n$ точекъ.*

Искомая поляра есть кривая порядка $(n-1)$, имѣющая въ o кратную точку порядка $(n-2)$[1]. Вслѣдствіе этого требованіе настоящей задачи сводится, на основаніи сказаннаго выше, на отысканіе на произвольной прямой L, исходящей изъ o, такой точки x, въ которой эта прямая встрѣчаетъ искомую поляру.

Назовемъ чрезъ M прямую, соединяющую точки o и m, и найдемъ, какъ показано въ предыдущемъ параграфѣ, прямолинейныя поляры относительно данной кривой для трехъ какихъ-нибудь точекъ x_1, x_2, x_3 прямой L. Пусть m_1, m_2, m_3 будутъ точки пересѣченія этихъ поляръ съ прямою M.

---

[1] См. Salmon-Fiedler, «Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven». Art. 62, p. 60.

Такъ-какъ первыя поляры относительно всякой кривой, для ряда точекъ, лежащихъ на прямой линіи, составляютъ пучекъ проективно соотвѣтственный съ этимъ рядомъ[1], и такъ-какъ первыя поляры точекъ m_1, m_2, m_3 должны проходить послѣдовательно чрезъ x_1, x_2, x_3, то заключаемъ, что точка x пересѣченія прямой L съ искомою полярой опредѣлится изъ условія:

$$(x\,x_1\,x_2\,x_3) = (m\,m_1\,m_2\,m_3).$$

Когда найдено достаточное число точекъ первой поляры для того, чтобы эта кривая была ими опредѣлена вполнѣ, то по тѣмъ-же правиламъ найдется вторая поляра точки m, затѣмъ третья и т. д.

Такимъ образомъ видимъ, что всѣ поляры какой бы ни было точки относительно данной кривой порядка n, имѣющей кратную точку порядка $(n-1)$, находятся посредствомъ вполнѣ опредѣленнаго линейнаго построенія.

13. Задача 7-я. *Нѣкоторая кривая порядка n имѣетъ въ точкѣ o кратную точку порядка $(n-1)$. На прямой L, проходящей чрезъ эту кратную точку, извѣстны еще двѣ точки p и p', изъ которыхъ вторая лежитъ на прямолинейной полярѣ первой относительно кривой. Требуется найдти точку, въ которой прямая L еще разъ пересѣкаетъ кривую.*

Двѣ такія точки какъ p и p', изъ которыхъ вторая принадлежитъ прямолинейной полярѣ первой и слѣдовательно первая первой полярѣ второй, мы будемъ называть *сопряженными*.

Обозначимъ чрезъ x искомую точку кривой. Чрезъ точку o проведемъ $(n-1)$ различныхъ прямыхъ A_1, A_2, ... $A_{(n-1)}$ и чрезъ точку p' какую-нибудь прямую P. Если затѣмъ по-

---

[1] Ibid. Art. 61, p. 59.

строимъ такую прямую A_n, что относительно совокупности n прямыхъ $A_1, A_2, \ldots A_n$ прямая P есть поляра точки p (какъ это показано въ параг. 8), то искомая точка x опредѣлится пересѣченіемъ прямыхъ A_n и L[1].

14. Задача 8-я. *Двѣ кривыя C_1 и C_2 порядка n имѣютъ въ данной точкѣ o общую кратную точку порядка $(n-1)$ и каждая изъ нихъ опредѣляется сверхъ того достаточнымъ числомъ $(2n)$ простыхъ точекъ. Требуется построить кривую X, принадлежащую пучку $(C_1\, C_2)$ и проходящую чрезъ данную точку a.*

Искомая кривая, очевидно, должна имѣть въ точкѣ o также кратную точку порядка $(n-1)$, а потому вопросъ сводится на отысканіе точки x, въ которой эта кривая пересѣкается еще разъ произвольною прямою L, исходящею изъ o.

Положимъ, что намъ извѣстно рѣшеніе настоящей задачи для случая, когда n на единицу менѣе даннаго.

Пусть Q_1 и Q_2 будутъ первыя поляры точки a относительно кривыхъ C_1 и C_2. Согласно сказанному въ параг. 12, мы можемъ найдти сколько угодно точекъ этихъ поляръ. Такъ-какъ первая поляра точки a относительно искомой кривой X должна проходить чрезъ эту точку[2] и принадлежать пучку $(Q_1\, Q_2)$, то по предположенію мы ее также можемъ считать извѣстною. Пусть p будетъ точка пересѣченія ея съ прямою L. Найдя построеніемъ, указаннымъ въ параг. 11, прямолинейныя поляры P_1 и P_2 точки p относительно кривыхъ C_1 и C_2, мы будемъ имѣть, что прямолинейная поляра той-же точки отно-

---

[1] Четыре точки o, p, p', x на прямой L связаны между собою условіемъ $\frac{n}{pp'} = \frac{n-1}{po} + \frac{1}{px}$ или, что все то-же, условіемъ $(x\ p'\ o\ p) = n$ и потому всякими тремя изъ нихъ опредѣляется единственное положеніе четвертой. См. мемуаръ *Poncelet*, «Théorie générale des centres de moyennes harmoniques». § II.

[2] *Salmon-Fiedler*, — указан. выше соч. Art. 64, p. 61, 62.

сительно искомой кривой X опредѣлится какъ принадлежащая пучку $(P_1\ P_2)$ и проходящая чрезъ a. Пусть p' будетъ точка пересѣченія этой прямой съ прямою L. На послѣдней мы нашли, слѣдовательно, двѣ точки p и p' сопряженныя относительно искомой кривой X. По нимъ найдется, какъ показано въ предыдущемъ параграфѣ, и точка x, въ которой L пересѣкаетъ искомую кривую.

Такъ-какъ настоящая задача рѣшается весьма просто посредствомъ линейнаго построенія въ случаѣ, когда $n=2$[1], то заключаемъ изъ сказаннаго, что тѣми-же средствами она рѣшается и для всякаго n.

Изъ сказаннаго въ параг. 11 и 12 слѣдуетъ, что вполнѣ опредѣленнымъ линейнымъ же построеніемъ можетъ быть построена и всякая поляра какой бы ни было точки плоскости относительно кривой X.

15. Вопросы, рѣшенные выше для кривыхъ линій порядка n, имѣющихъ кратныя точки порядка $(n-1)$, могутъ послужить намъ основаніемъ для рѣшенія подобныхъ же вопросовъ по отношенію къ самымъ общимъ кривымъ какого бы ни было порядка, а также для вывода нѣкоторыхъ заключеній болѣе или менѣе полезныхъ для геометрической теоріи этихъ кривыхъ.

Средства для установленія необходимой въ этихъ видахъ зависимости между общими геометрическими кривыми и кривыми, о которыхъ говорилось выше, усматриваются въ слѣдующемъ.

Положимъ, что намъ дана на плоскости какая-нибудь кривая S порядка n. Возьмемъ на нѣкоторой прямой L двѣ точки p и p', сопряженныя относительно S, т. е. такія, что прямолинейная поляра точки p проходитъ чрезъ p' и, слѣдовательно, первая поляра точки p' проходитъ чрезъ p. Относительное положеніе этихъ двухъ точекъ находится въ опредѣленной зави-

---

[1] *Poncelet*, «Traité des propriétés projectives des figures». 2-e éd. 1865, T I. n° 389, p. 206.

симости отъ кривой S и, перемѣщая эти точки по прямой L, мы, очевидно, получимъ на послѣдней два ряда точекъ, связанные посредствомъ кривой S такимъ соотвѣтствіемъ, что каждой точкѣ p перваго ряда соотвѣтствуетъ единственная точка p' второго и каждой точкѣ p' второго $(n-1)$ точекъ p перваго.

Если точки перваго ряда мы будемъ соединять прямыми линіями съ нѣкоторою точкой o, а точки второго ряда съ другою точкой b, то получимъ два пучка прямыхъ, лучи которыхъ будутъ связаны зависимостью такого-же точно рода. Мѣстомъ пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей этихъ пучковъ будетъ, какъ извѣстно, нѣкоторая опредѣленная кривая C порядка n, проходящая чрезъ b и имѣющая въ o кратную точку порядка $(n-1)$[1].

Если положимъ, что a есть одна изъ точекъ пересѣченія кривой S съ прямой L, то, замѣчая, что въ ней должны совпадать двѣ соотвѣтственныя точки рядовъ p и p', будемъ имѣть, что въ ней пересѣкаются соотвѣтственные лучи пучковъ o и b. Это значитъ, что a есть также точка пересѣченія кривой C съ прямою L.

Слѣдовательно, кривыя S и C имѣютъ однѣ и тѣ-же точки пересѣченія съ прямою L.

Положимъ теперь, что намъ даны три какія-нибудь кривыя S, T, U порядка n и нѣкоторая прямая L. Взявъ двѣ произвольныя точки o и b, мы будемъ имѣть, что посредствомъ данныхъ кривыхъ опредѣляются такимъ-же образомъ, какъ сказано выше, три новыя кривыя того-же порядка, проходящія чрезъ b, имѣющія въ o кратную точку порядка $(n-1)$ и пересѣкающія прямую L послѣдовательно въ тѣхъ-же точкахъ какъ и кривыя S, T, U. Пусть эти новыя кривыя будутъ послѣдовательно C, D, E.

[1] См., напр., соч. автора — «О геометрическихъ соотвѣтствіяхъ». Москва. 1879 г. стр. 37.

Не трудно убѣдиться, что, если кривыя S, T, U составляютъ пучекъ, то и кривыя C, D, E составляютъ пучекъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть k будетъ одна изъ точекъ пересѣченія кривыхъ C и D. Въ такомъ случаѣ точки p и p', въ которыхъ прямая L будетъ пересѣкаться послѣдовательно прямыми ok и bk, будутъ таковы, что прямолинейныя поляры точки p относительно двухъ кривыхъ S и T будутъ проходить чрезъ p'. Но такъ-какъ по предположенію кривыя S, T, U составляютъ пучекъ, то и прямолинейная поляра точки p относительно U должна проходить чрезъ p'. Отсюда слѣдуетъ, что прямыя op и bp' должны пересѣкаться также по кривой E.

И такъ, точка k принадлежитъ всѣмъ тремъ кривымъ C, D, E, что и доказываетъ, что кривыя эти составляютъ пучекъ.

16. Изъ сказаннаго обнаруживается непосредственно весьма простой способъ рѣшить слѣдующую задачу.

Задача 9-я.—Предполагая, что для каждой точки плоскости мы имѣемъ возможность найдти прямолинейныя поляры относительно двухъ какихъ-нибудь кривыхъ S и T порядка n, найдти прямолинейную поляру данной точки m относительно кривой U того-же порядка, принадлежащей пучку (ST) и проходящей чрезъ данную точку a.

Назовемъ чрезъ L прямую, проходящую чрезъ точки m и a, и пусть C, D, E будутъ три кривыя порядка n, изъ которыхъ каждая проходитъ чрезъ нѣкоторую произвольную точку b и имѣетъ въ нѣкоторой произвольной же точкѣ o кратную точку порядка $(n-1)$, и которыя при посредствѣ прямой L имѣютъ указанное въ предыдущемъ параграфѣ соотношеніе съ кривыми S, T, U.

Такъ-какъ для каждой точки прямой L мы можемъ по предположенію найдти прямолинейныя поляры относительно кривыхъ S и T, то это даетъ возможность при опредѣленномъ, хотя и произвольномъ, выборѣ точекъ o и b найдти сколько угодно остальныхъ точекъ кривыхъ C и D. Эти двѣ кривыя можно, слѣдовательно, считать вполнѣ опредѣленными посредствомъ ихъ общей кратной точки o и достаточнаго числа простыхъ точекъ.

Что-же касается кривой E, то и она, очевидно, будетъ вполнѣ опредѣлена тѣмъ, что должна принадлежать пучку (CD) и проходить чрезъ точку a, въ которой она пересѣкается съ прямою L и кривою U. Способомъ, указаннымъ въ параграфѣ 14, мы можемъ найдти прямолинейную поляру точки m относительно кривой E. Пусть m' будетъ точка пересѣченія этой поляры съ прямою L.

Чрезъ точку m' должна проходить и искомая поляра M точки m относительно кривой U (см. парагр. 5).

Другая точка искомой поляры есть точка μ, въ которой пересѣкаются прямолинейныя поляры точки m относительно кривыхъ S и T и чрезъ которую проходятъ прямолинейныя поляры этой точки относительно всѣхъ кривыхъ пучка (ST).

Задача является такимъ образомъ вполнѣ рѣшенною въ томъ случаѣ, когда точки m' и μ различны.

Если случится, что точки m' и μ совпадаютъ, т. е., что три точки a, m и μ лежатъ на одной прямой, то рѣшеніе задачи нѣсколько усложняется и можетъ быть достигнуто слѣдующимъ образомъ.

Замѣнимъ данную точку m какою-нибудь точкою m_1. Очевидно, что послѣдняя всегда можетъ быть выбрана такъ, чтобы точка пересѣченія ея прямолинейныхъ поляръ относительно кривыхъ S и T не лежала на прямой am_1. Въ такомъ случаѣ указаннымъ сейчасъ способомъ мы можемъ найдти прямолинейную поляру M_1 точки m_1 относительно кривой U.

Назовемъ чрезъ L_1 прямую, проходящую чрезъ точки m и m_1 и пусть m_1' будетъ точка пересѣченія этой прямой съ прямою M_1.

При посредствѣ прямой L_1 опредѣлятся, очевидно, три кривыя C_1, D_1, E_1, проходящія чрезъ точку b, имѣющія въ o общую кратную точку порядка $(n-1)$ и находящіяся съ кривыми S, T, U въ такомъ-же соотношеніи, какъ кривая C, D, E при посредствѣ прямой L.

Изъ трехъ кривыхъ C_1, D_1, E_1 двѣ первыя въ силу условій задачи могутъ быть разсматриваемы какъ опредѣленныя при помощи ихъ общей кратной точки o и достаточнаго числа простыхъ точекъ. Что же касается третьей кривой E_1, то она опредѣляется вполнѣ тѣмъ, что должна принадлежать пучку $(C_1 D_1)$ и проходить чрезъ точку k, въ которой пересѣкаются прямыя om_1 и bm_1', потому что эти двѣ прямыя суть соотвѣтственные лучи пучковъ, образующихъ кривую E_1. Вслѣдствіе этого прямолинейная поляра точки m относительно кривой E_1 можетъ быть найдена извѣстнымъ намъ способомъ. Точка пересѣченія ея съ прямою L_1 будетъ принадлежать также искомой прямолинейной полярѣ точки m относительно кривой U. Слѣдовательно, мы получимъ искомую поляру, соединивъ эту точку пересѣченія съ точкою μ.

17. Предыдущая задача даетъ намъ возможность рѣшить слѣдующую.

Задача 10-ая. *Построить прямолинейную поляру какой-нибудь точки m относительно общей кривой порядка n, опредѣленной достаточнымъ числомъ ея точекъ.*

Допустимъ, что намъ извѣстно рѣшеніе задачи для случая, когда n на единицу менѣе даннаго.

Отдѣлимъ отъ данныхъ точекъ кривой, число которыхъ, какъ извѣстно, должно быть $^1/_2 n(n+3)$[1], группу какихъ-нибудь $(n-1)$ точекъ и обозначимъ ихъ чрезъ a_1, a_2, $a_3, \dots$ a_{n-1}. Число остальныхъ точекъ, которыя обозначимъ чрезъ b_1, b_2, $b_3, \dots,$ будетъ:

[1] *Salmon-Fiedler*,—указ. выше соч. Art. 27, p. 18.

$^1/_2 n(n+3)-(n-1)={}^1/_2(n-1)(n+2)+2={}^1/_2 n'(n'+3)+2$, гдѣ $n'=n-1$.

Слѣдовательно, число точекъ группы $(ƀ)$ на двѣ болѣе числа точекъ, необходимаго и достаточнаго для опредѣленія общей кривой порядка $(n-1)$.

Пусть D будетъ прямая, проходящая чрезъ двѣ какія-нибудь точки группы $(ƀ)$, и E кривая порядка $(n-1)$, опредѣляемая остальными точками этой группы. Совокупность кривой E съ прямою D представляетъ кривую порядка n, проходящую чрезъ всѣ точки группы $(ƀ)$. Назовемъ ее чрезъ C.

Такъ-какъ по предположенію построенія прямолинейной поляры всякой точки относительно кривой E можно считать извѣстнымъ, то, на основаніи сказаннаго въ параг. 7, мы должны считать извѣстнымъ и построеніе прямолинейной поляры всякой точки относительно кривой C.

Очевидно, что такихъ кривыхъ порядка n, изъ которыхъ каждая проходитъ чрезъ всѣ точки группы $(ƀ)$ и въ то-же время состоитъ изъ совокупности кривой порядка $(n-1)$ съ прямою, существуетъ столько, сколько возможно сдѣлать сочетаній изъ точекъ этой группы по двѣ [1]. Это число есть

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(n-1)(n+2)}{2}+2\right]\left[\frac{(n-1)(n+2)}{2}+1\right]=\frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8};$$

оно всегда болѣе n.

Сказанное сейчасъ о кривой C относится къ каждой изъ такихъ кривыхъ.

Возьмемъ какія-нибудь n изъ этихъ кривыхъ и назовемъ ихъ чрезъ $C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$.

Назовемъ далѣе чрезъ $C_1', C_2', C_3', \ldots C'_{n-1}$ кривыя порядка n, принадлежащія послѣдовательно пучкамъ $(C_1\, C_n)$, $(C_2\, C_n)$, $(C_3\, C_n), \ldots (C_{n-1}\, C_n)$ и проходящія чрезъ точку a_1.

[1] Исключеніе представляетъ только случай $n=2$, въ которомъ число такихъ совокупностей есть 3, тогда какъ число сочетаній изъ 4 по 2 есть 6.

Назовемъ затѣмъ чрезъ C_1'', C_2'', C_3'',.... C''_{n-2} кривыя, принадлежащія послѣдовательно пучкамъ $(C_1'C'_{n-1})$, $(C_2'C'_{n-1})$, $(C_3'C'_{n-1})$,.... $(C'_{n-2}\,C'_{n-1})$ и проходящія чрезъ точку a_2 и т. д.

Мы будемъ имѣть такимъ образомъ n группъ кривыхъ линій:

1) C_1, C_2, C_3,.............................. C_{n-1}, C_n

2) C'_1, C'_2, C'_3,.................... C'_{n-2}, C'_{n-1}

3) C''_1, C''_2, C''_3,......... C''_{n-3}, C''_{n-2}

....

....

$n-1$) $C_1^{(n-2)}$, $C_2^{(n-2)}$

n) $C_1^{(n-1)}$

Кривыя каждой группы проходятъ чрезъ всѣ тѣ данныя точки, чрезъ которыя проходятъ кривыя предыдущей группы, и сверхъ того еще чрезъ одну данную точку. Число кривыхъ въ каждой группѣ на единицу менѣе, чѣмъ въ предыдущей. Послѣдняя группа будетъ, слѣдовательно, включать въ себѣ единственную кривую $C_1^{(n-1)}$, проходящую чрезъ всѣ данныя точки.

Задача предыдущаго параграфа даетъ намъ средство находить построеніемъ прямолинейныя поляры всякой точки относительно кривыхъ какой-нибудь группы, когда существуетъ возможность находить прямолинейныя поляры всякой точки относительно кривыхъ предыдущей группы. Но было замѣчено, что мы можемъ предположить извѣстнымъ построеніе прямолинейныхъ поляръ относительно кривыхъ первой группы. Поэтому послѣдовательное примѣненіе построеній, указанныхъ въ предыдущемъ параграфѣ, приводитъ насъ къ нахожденію прямолинейныхъ поляръ относительно кривыхъ всѣхъ слѣдующихъ группъ и въ концѣ всего относительно кривой $C_1^{(n-1)}$.

Рѣшеніе настоящей задачи достигается извѣстнымъ линейнымъ построеніемъ въ случаѣ, когда $n=2$. Отсюда заключаемъ, что, прилагая послѣдовательно, и притомъ въ конечномъ числѣ, разсмотрѣнныя выше построенія, которыя всѣ суть также линейныя, мы рѣшимъ задачу и для всякаго n.

И такъ, *нахожденіе прямолинейной поляры какой бы ни было точки относительно всякой геометрической кривой, опредѣляемой достаточнымъ числомъ ея точекъ, достигается посредствомъ вполнѣ опредѣленнаго линейнаго построенія.*

18. Линейное построеніе, служащее для нахожденія прямолинейныхъ поляръ относительно данной кривой, можетъ служить также пособіемъ для построенія самой этой кривой.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ сказаннаго въ параграфѣ 15 слѣдуетъ, что при помощи построенія прямолинейныхъ поляръ отысканіе точекъ пересѣченія какой бы ни было общей кривой порядка n съ прямою сводится на отысканіе точекъ пересѣченія съ этою прямою нѣкоторой вполнѣ опредѣленной кривой порядка n, обладающей кратною точкой порядка $(n-1)$.

Положимъ, что требуется построить кривую C порядка n, опредѣленную достаточнымъ числомъ ея точекъ, и допустимъ для общности, что въ числѣ этихъ точекъ есть кратная точка порядка k. Обозначимъ ее чрезъ h.

Задача о построеніи кривой C должна считаться рѣшенною, если мы на всякой прямой исходящей изъ точки h, найдемъ точки пересѣченія ея съ этою кривою. Пусть L будетъ одна такая прямая.

Точками p и p' этой прямой сопряженными между собою относительно C образуются два ряда, связанные такою зависимостью, что каждой точкѣ перваго ряда соотвѣтствуетъ единственная точка второго и каждой точкѣ второго $(n-k)$ точекъ перваго. Это слѣдуетъ изъ того, что всякая первая поляра, будучи порядка $(n-1)$, должна имѣть въ h кратную точку порядка $(k-1)$ и, слѣдовательно, можетъ пересѣкать прямую L только въ $(n-k)$ перемѣнныхъ точкахъ.

Пучки прямыхъ, соединяющихъ, какъ и въ предыдущемъ, точки p и p' съ двумя какими-нибудь точками o и b, образуютъ теперь кривую V порядка $(n-k+1)$, проходящую чрезъ h и чрезъ остальныя $(n-k)$ точекъ пересѣченія C и L.

Если точки o и b взяты на одной прямой съ h, то кривая V будетъ состоять изъ совокупности прямой ob съ кривою порядка единицею низшаго. Мѣстомъ пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей пучковъ o и b будетъ, слѣдовательно, нѣкоторая кривая V' порядка $(n-k)$, которой всѣ точки пересѣченія съ прямою L суть искомыя точки кривой C.

Въ частномъ случаѣ, когда $k=n-2$ будемъ имѣть, что кривая V' есть второго порядка, и потому приходимъ къ такому заключенію.

Всякая кривая порядка n, опредѣляемая достаточнымъ числомъ ея точекъ, въ число которыхъ входитъ кратная точка порядка $(n-2)$, можетъ быть построена помощію линейки и одного даннаго всѣми точками коническаго сѣченія (которое не есть совокупность двухъ прямыхъ).

Подобнымъ-же образомъ, замѣчая, что, въ случаяхъ, когда $k=n-3$ и $k=n-4$, вопросъ о построеніи кривой сводится на отысканіе точекъ пересѣченія прямыхъ съ кривыми 3-го и 4-го порядка, убѣждаемся въ слѣдующемъ[1].

Всякая кривая порядка n, опредѣляемая достаточнымъ числомъ ея точекъ, въ число которыхъ входитъ кратная точка порядка $(n-3)$ или $(n-4)$, можетъ быть построена помощію линейки, циркуля и одного даннаго всѣми точками коническаго сѣченія (которое не есть ни кругъ, ни совокупность двухъ прямыхъ).

Сказанное даетъ намъ также построенія общихъ кривыхъ до 5-го порядка включительно по достаточному числу ихъ про-

---

[1] Соч. автора «О геометрическихъ соотвѣтствіяхъ». Москва. 1879, стр. 81—95.

стыхъ точекъ независимо отъ способа геометрическаго образованія этихъ кривыхъ.

19. Мы видѣли, какъ можно построить прямолинейную поляру данной точки относительно всякой геометрической кривой, опредѣляемой достаточнымъ числомъ ея точекъ. Къ этому же построенію можетъ быть сведено рѣшеніе той-же задачи и въ тѣхъ случаяхъ, когда мы имѣемъ для опредѣленія кривой какія-нибудь другія данныя, если только эти данныя опредѣляютъ кривую вполнѣ и единственнымъ образомъ.

Назовемъ чрезъ Δ группу геометрическихъ данныхъ, обладающую свойствомъ, что къ ней достаточно прибавить одну точку a, долженствующую принадлежать кривой C, чтобы совокупностью данныхъ (Δ, a) кривая C была опредѣлена вполнѣ и единственнымъ образомъ. Нетрудно убѣдиться, что если возьмемъ двѣ точки p и p', долженствующія быть относительно C сопряженными (т. е. такими, что прямолинейная поляра p проходитъ чрезъ p'), то и совокупностью данныхъ (Δ, p, p') кривая C будетъ опредѣлена вполнѣ и единственнымъ образомъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть требуется построить прямолинейную поляру точки m относительно кривой C, опредѣляемой данными (Δ, p, p'). Допустимъ, что намъ извѣстенъ способъ построенія прямолинейныхъ поляръ въ случаѣ, когда кривая опредѣлена данными (Δ, a). Дадимъ точкѣ a три различныя, совершенно произвольныя, положенія на плоскости a_1, a_2, a_3. Тремя группами данныхъ (Δ, a_1), (Δ, a_2) и (Δ, a_3) опредѣлятся три кривыя C_1, C_2, C_3, составляющія, очевидно, пучекъ, которому будетъ принадлежать и кривая C[1]. По предположенію прямолинейныя поляры всякой точки плоскости относительно этихъ трехъ кривыхъ могутъ быть найдены. Онѣ также должны со-

[1] Это слѣдуетъ изъ самаго понятія о пучкѣ, какъ о такой системѣ кривыхъ, въ которой каждая кривая опредѣляется одною, принадлежащею ей, точкой.

ставлять пучки. Пусть P_1, P_2, P_3 будутъ прямолинейныя поляры точки p относительно кривыхъ C_1, C_2, C_3. Въ такомъ случаѣ прямолинейная поляра той-же точки относительно кривой C будетъ прямая P, соединяющая точку общую этимъ тремъ прямымъ съ точкою p'. Построивъ затѣмъ прямолинейныя поляры M_1, M_2, M_2 точки m относительно C_1, C_2, C_3 и назвавъ чрез M искомую прямолинейную поляру той-же точки относительно кривой C, будемъ имѣть, что эта поляра опредѣлится изъ условія:

$$(M\ M_1\ M_2\ M_3)=(P\ P_1\ P_2\ P_3).$$

И такъ, условіе, что двѣ какія-нибудь точки дожны быть сопряженныя относительно кривой, равнозначуще съ условіемъ, что нѣкоторая точка должна принадлежать кривой. Кривая опредѣляется, слѣдовательно, достаточнымъ числомъ паръ сопряженныхъ относительно ея точекъ[1], и изъ сказаннаго выше видимъ, что построеніе прямолинейной поляры относительно кривой, опредѣленной такимъ образомъ, есть линейное и состоитъ изъ повторенія въ конечномъ числѣ построенія, служащаго для той же цѣли въ томъ случаѣ, когда кривая опредѣлена достаточнымъ числомъ ея точекъ.

20. Задача 11-я. *Построить k-ую поляру точки m относительно кривой порядка n опредѣленной достаточнымъ числомъ ея точекъ или достаточнымъ числомъ паръ сопряженныхъ относительно ея точекъ.*

Очевидно, что должно быть $1 < k < n$.

Искомая поляра есть кривая порядка $(n-k)$ и построеніе ея сводится на отысканіе точекъ, въ которыхъ она пересѣкается всякою прямою, проходящею чрезъ m. Пусть L будетъ

---

[1] Число это есть $\frac{1}{2}\,n\,(n+3)$, что видно также и изъ уравненія первой поляры (см. парагр. 1).

такая прямая. Назовемъ чрезъ S данную кривую и чрезъ X искомую кривую.

Согласно сказанному въ параграфѣ 15, мы можемъ найдти сколько угодно точекъ нѣкоторой кривой C порядка n, имѣющей въ произвольной точкѣ плоскости кратную точку порядка $(n-1)$ и пересѣкающей прямую L въ тѣхъ-же точкахъ какъ и кривая S. Построивъ затѣмъ, какъ показано въ параграфѣ 12-мъ, k-ую поляру Y точки m относительно C, мы будемъ имѣть, что точки пересѣченія ея съ прямой L будутъ принадлежать и искомой кривой X.

Такъ-какъ кривая Y можетъ быть разсматриваема какъ опредѣленная достаточнымъ числомъ ея точекъ, то на прямой L мы можемъ найдти линейнымъ построеніемъ сколько угодно паръ сопряженныхъ относительно ея точекъ. Эти точки будутъ также сопряженными и относительно кривой X.

Слѣдовательно, мы можемъ найдти на прямыхъ, проходящихъ чрезъ точку m, сколько угодно паръ точекъ сопряженныхъ относительно X. Искомая поляра является такимъ образомъ опредѣленною достаточнымъ числомъ паръ сопряженныхъ относительно ея точекъ и потому, согласно сказанному въ двухъ предыдущихъ параграфахъ, мы можемъ найдти для нея прямолинейную поляру каждой точки плоскости, а также опредѣлить точки пересѣченія ея съ какою угодно прямою.

Принявъ во вниманіе все выше изложенное, мы приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

Если какая-нибудь кривая порядка n опредѣлена достаточнымъ числомъ ея точекъ или достаточнымъ числомъ паръ сопряженныхъ точекъ, то относительно ея:

1. Всякая предпослѣдняя или коническая поляра можетъ быть найдена посредствомъ вполнѣ опредѣленнаго построенія, выполняемаго помощію только линейки и одного дан-

наго всѣми точками коническаго сѣченія (которое не есть совокупность двухъ прямыхъ).

2. Поляры $(n-3)$-я и $(n-4)$-я, которыя суть кривыя послѣдовательно 3-го и 4-го порядка, могутъ быть найдены посредствомъ вполнѣ опредѣленнаго построенія, выполняющагося помощію линейки, циркуля и одного коническаго сѣченія (которое не есть ни кругъ, ни совокупность двухъ прямыхъ).

Въ заключеніе замѣтимъ, что всѣ вопросы о построеніи мы разсматриваемъ въ настоящемъ изслѣдованіи съ теоретической, а не съ практической точки зрѣнія. Вслѣдствіе этого для насъ нисколько не важно, будетъ или нѣтъ выполнимо на дѣлѣ то или другое построеніе по числу составляющихъ его элементарныхъ геометрическихъ операцій. Можно сказать, что подобно тому, какъ въ алгебрѣ не имѣетъ никакого значенія число элементарныхъ дѣйствій, входящихъ въ составъ сложныхъ количественныхъ выраженій, такъ и въ *геометріи построенія*, изучаемой во всей ея общности и независимо отъ примѣненія къ какимъ-либо практическимъ цѣлямъ, не должно играть никакой роли число прямыхъ или кривыхъ линій, наносимыхъ на плоскости для выполненія извѣстнаго построенія.