IX

СООБЩЕНІЯ

И

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ

Императорскомъ Харьковскомъ Университетѣ.

1883 ГОДА.

II.

ХАРЬКОВЪ.

Въ Университетской Типографіи.

1884.

Напечатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Харьковскаго Университета.

Ректоръ *Г. Цѣхановецкій.*

СОДЕРЖАНІЕ.

ПРОТОКОЛЪ

ГОДИЧНАГО СОБРАНІЯ ХАРЬКОВСКАГО МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА,

16 октября 1883 года.

Присутствовали: Д. М. Деларю, Е. И. Бейеръ, К. А. Андреевъ, А. В. Маевскій, А. А. Клюшниковъ, Г. В. Левицкій, И. К. Шейдтъ, Н. А. Черпай, И. Д. Линицкій, М. А. Тихомандрицкій, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Деларю.

Предметы занятій:

1. Г. секретарь прочиталъ отчетъ о состояніи и дѣятельности общества за истекшій академическій (1882—83) годъ.

2. *А. П. Грузинцевъ* просилъ общество освободить его отъ обязанностей секретаря за неимѣніемъ имъ достаточно свободнаго времени.

3. Произведены были выборы членовъ распорядительнаго комитета общества. Большинствомъ голосовъ выбраны: а) предсѣдателемъ бывшій профессоръ харьковскаго университета *Е. И. Бейеръ*, б) товарищами предсѣдателя професоръ *Д. М. Деларю* и профессоръ *К. А. Андреевъ*, в) секретаремъ доцентъ

М. А. Тихомандрицкій. Библіотекаремъ общества просили остаться *А. А. Клюшникова,* на что послѣдній изъявилъ свое согласіе.

4. Былъ возбужденъ вопросъ о назначеніи постояннаго времени для засѣданій. Постановлено: собираться въ первую пятницу послѣ 15-го числа каждаго мѣсяца, въ $6^1/_2$ часовъ вечера.

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ОТЧЕТА

о дѣятельности математическаго общества, состоящаго при Императорскомъ харьковскомъ университетѣ,

за 1882—83 годъ.

Съ настоящаго дня математическое общество вступаетъ въ пятый годъ своего существованія; прошло уже четыре года, когда мы собрались здѣсь въ первый разъ для прочтенія только что утвержденнаго Устава общества и для выбора членовъ распорядительнаго комитета; эти четыре года наше общество работало въ направленіи, намѣченномъ Уставомъ, по-немногу развивалось, увеличиваясь съ каждымъ годомъ въ своемъ личномъ составѣ и завязывая сношенія и обмѣнъ своими изданіями съ новыми корреспондентами и учеными обществами; число и разнообразіе сообщеній, прочитываемыхъ на засѣданіяхъ общества, постепенно увеличивалось, привлекались новые работники; однимъ словомъ—общество жило, хотя можетъ быть и скромною, но полезною дѣятельностію.

Въ истекшемъ академическомъ году наше общество пополнилось тремя новыми членами, изъ коихъ одинъ—безъ избранія, на основаніи § 3 Устава общества, а два другіе выбраны въ засѣданіи 15 ноября 1882 г.; число корреспондентовъ увеличилось четырьмя, а именно: 1) математическое общество студентовъ физико-математическаго факультета с.-петербургскаго университета; 2) физико-математическая секція казанскаго общества естествоиспытателей; 3) московское математическое общество, и 4) математическая секція новороссійскаго общества естествоиспытателей въ Одессѣ.

Такимъ образомъ въ истекшемъ году членовъ общества было 29 и корреспондентовъ, какъ ученыхъ обществъ, такъ и отдѣльныхъ лицъ, съ коими общество обмѣнивалось своими изданіями, 20.

Составъ распорядительнаго комитета въ истекшемъ году оставался прежній, т. е. предсѣдателемъ академикъ *В. Г. Имшенецкій*, товарищами предсѣдателя профес. *Д. М. Деларю* и профес. *К. А. Андреевъ* и секретаремъ преподаватель 1-й гимназіи *А. П. Грузинцевъ;* библіотекой общества по прежнему завѣдывалъ помощникъ университетскаго библіотекаря *А. А. Клюшниковъ.*

Засѣданій общество имѣло 7, на которыхъ было прочитано 16 сообщеній какъ членами общества, такъ и посторонними лицами или отъ ихъ имени.

Засѣданія общества по-прежнему посѣщались гг. студентами математическаго факультета, изъ коихъ нѣкоторые принимали болѣе дѣятельное участіе въ дѣлахъ общества. Общество продолжало обмѣниваться своими изданіями съ разными лицами и другими учеными обществами; въ истекшемъ году «Сообщенія харьковскаго математическаго общества» были разосланы 23 лицамъ и обществамъ. Въ истекшемъ году вышли двѣ книжки Сообщеній нашего общества, такъ что всего книжекъ Сообщеній вышло уже 7.

По примѣру прошлаго года общество выписывало на средства, доставляемыя ежегодною добровольною подпиской членовъ, слѣдующіе журналы:

1) Mathésis, издаваемый гг. Мансіономъ и Нейберомъ.

2) Journal des mathématiques élémentaires и —

3) Journal des mathématiques spéciales, изд. г. Бурже.

Протоколъ засѣданія 21 октября.

Присутствовали: Д. М. Деларю, М. Ѳ. Ковальскій, К. А. Андреевъ, Г. В. Левицкій, А. А. Клюшниковъ, А. П. Грузинцевъ, И. Д. Линицкій, И. К. Шейдтъ, М. А. Тихомандрицкій и гг. студенты физико-математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. Г. предсѣдательствовавшій доложилъ собранію о согласіи математическаго отдѣла новороссійскаго общества естествоиспытателей вступить въ обмѣнъ изданіями съ нашимъ обществомъ, и о вновь полученныхъ книгахъ, а именно:

1) Кіевскія университетскія извѣстія за 1883 г. №№ 4, 5, 6, 7, 8 и 9.

2) Bulletin de la société Impériale des naturalistes de Moscou. № 4, 1882 г., и № 1, 1883 г.

3) Nouveaux mémoires de la société Impériale des naturalistes de Moscou. T. XIV, livraison 4.

4) *Imchenetsky*, Sur le multiplicateur des équations différentielles linéaires du 2 ordre (два экземпляра).

5) *Emil Weyer*, Ueber eindeutige Beziehungen auf einer allgemeiner ebenen Curve 3. Ordnung.

6) *М. Тихомандрицкій*, О гипергеометрическихъ рядахъ. 1876 г.

2. *М. А. Тихомандрицкій* прочелъ извлеченіе изъ представленной имъ обществу замѣтки о введеніи Θ-функцій въ теорію эллиптическихъ функцій.

3. *К. А. Андреевъ* доложилъ записку г. Новикова — «Объ особыхъ случаяхъ наибольшихъ и наименьшихъ величинъ функцій нѣсколькихъ перемѣнныхъ».

Замѣчанія были дѣлаемы М. Ѳ. Ковальскимъ и Д. М. Деларю.

4. *Д. М. Деларю* прочелъ первую часть записки Е. И. Бейера — «О теоремѣ Фермата».

Въ преніяхъ принимали участіе: М. Ѳ. Ковальскій, К. А. Андреевъ и А. П. Грузинцевъ.

Протоколъ засѣданія 18 ноября.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. Ѳ. Ковальскій, М. С. Косенко, Н. В. Проскурниковъ, И. Д. Линицкій, А. В. Маевскій, А. А. Клюшниковъ, М. А. Тихомандрицкій и гг. студенты физико-математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. Г. предсѣдательствовавшій доложилъ собранію о вновь полученныхъ обществомъ книгахъ, а именно:

1) Записки математическаго отдѣленія новороссійскаго общества естествоиспытателей. Томы I, II, III и IV.
2) Mathésis, T. III. Septembre 1883 г.
3) Bulletin de la société mathématique de France. T. XI, № 4.
4) *Emil Weyer*, Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf den Curven vom Geschlechte Eins.
5) Bulletin de la société Imperiale des naturalistes de Moscou. 1883, № 2.

2. Произведена баллотировка въ члены общества Николая Дмитріевича Пильчикова. Выбранъ.

3. Г. предсѣдательствовавшій прочелъ задачу, предложенную г-мъ П. Аршауловымъ, директоромъ гельсингфорской гимназіи:

«Сосудъ наполненъ дробью, состоящей изъ шариковъ равнаго діаметра, такъ что каждый шарикъ касается всѣхъ съ нимъ смежныхъ. Найдти отношеніе объема дроби къ объему сосуда, предполагая, что объемъ каждаго шарика весьма малая величина относительно объема сосуда». Отв. 0,740.

4. *К. А. Андреевъ* доложилъ замѣтку К. А. Поссе подъ заглавіемъ — «Доказательство одного предложенія, относящагося къ кратнымъ опредѣленнымъ интеграламъ».

5. *М. А. Тихомандрицкій* прочелъ свою статью подъ заглавіемъ — «Выводъ основныхъ предложеній теоріи эллиптическихъ интеграловъ независимо отъ канонической формы подрадикальной функціи».

Поступили двѣ рукописи г. Флорова:

1) «Объ уравненіяхъ Риккати» и —

2) «Замѣтка объ уравненіи $\frac{d^2y}{dx^2} - (ae^x + 2)\frac{dy}{dx} + y = 0$».

Собраніе закончилось бесѣдою по поводу задачи г. Аршаулова, въ которой принимали участіе почти всѣ члены общества и нѣкоторые изъ посѣтителей.

ВЫВОДЪ ОСНОВНЫХЪ ПРЕДЛОЖЕНІЙ

ТЕОРІИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ НЕЗАВИСИМО ОТЪ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ПОДРАДИКАЛЬНОЙ ФУНКЦІИ.

М. Тихомандрицкаго.

Когда, въ іюнѣ сего года, я послалъ въ редакцію Mathematische Annalen свою замѣтку «Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale», въ которой я указалъ — какимъ образомъ интегрированіе (выполненное уже Сомовымъ) извѣстнаго уравненія, которое можетъ быть принято за выраженіе теоремы сложенія интеграловъ 2-го рода, послѣ очень простого преобразованія приводитъ само собою какъ къ Θ-функціямъ Якоби, такъ и къ $\mathrm{Al}(u)$ Вейерштрасса, смотря по принятому типу интеграловъ 2-го рода, то проф. Клейнъ обратилъ мое вниманіе на то обстоятельство, что въ настоящее время ак. Вейерштрассъ вмѣсто $\mathrm{Al}(u)$ разсматриваетъ другую функцію $\sigma(u)$, опредѣляемую уравненіемъ:

$$\int\frac{z\,dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)},$$

и что по этому было бы интересно принять и эти функціи въ разсмотрѣніе.

Такъ какъ, очевидно, вся разница между этимъ уравненіемъ и опредѣляющимъ $\Theta(u)$

$$Z(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$$

заключается главнымъ образомъ въ формѣ подрадикальной функціи, принятой за каноническую, то я поставилъ себѣ задачей достигнуть, если можно, полученнаго мною результата, изложеннаго въ упомянутой замѣткѣ (Math. Ann. Bd. XXII), равно какъ и въ «Замѣткѣ о введеніи Θ-функцій въ теорію эллиптическихъ интеграловъ», помѣщенной въ I-й книжкѣ «Сообщеній» математическаго общества при харьковскомъ университетѣ за 1883 годъ, не приводя подрадикальную функцію ни къ какому каноническому виду, предполагая ее, однако, третьей степени, что, какъ извѣстно, не уменьшаетъ общности. Такъ какъ для этого понадобилось, прежде всего, установить типы интеграловъ каждаго изъ трехъ родовъ, то я обратился съ этою цѣлью къ формулѣ приведенія эллиптическихъ интеграловъ, и мнѣ удалось замѣтить при этомъ, что то дифференціальное тождество, интегрированіе котораго и даетъ эту формулу приведенія, для одного частнаго случая ($m = -1$), послѣ легко усматриваемаго преобразованія, можетъ быть приведено съ помощію нѣкоторой простой подстановки къ такому виду, что —

1) послѣ кратнаго интегрированія — по двумъ независимымъ перемѣннымъ, сразу приводитъ къ теоремѣ о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ интегралахъ третьяго рода, которые при этомъ само-собою появляются въ формѣ, соотвѣтствующей принятой для нихъ Якоби;

2) послѣ однократнаго интегрированія по тѣмъ-же перемѣннымъ, но уже связаннымъ теперь тѣмъ дифференціальнымъ уравненіемъ, интегрированіе котораго доставляетъ теорему сложенія интеграловъ перваго рода, — тотчасъ даетъ и теорему сложенія интеграловъ 2-го рода.

Выводу этого замѣчательнаго тождества съ его первымъ, изъ указанныхъ, слѣдствіемъ посвящается § 1 этой статьи; во 2-мъ я позволилъ себѣ помѣстить, ради его элементарнаго характера, выводъ теоремы сложенія интеграловъ перваго рода, который я нигдѣ не встрѣчалъ; въ 3-мъ и послѣднемъ я вывожу съ помощію вышеупомянутаго тождества теорему сложенія интеграловъ 2-го рода, изъ которой за-тѣмъ получаю по способу, тождественному съ изложеннымъ въ вышеупомянутыхъ замѣткахъ моихъ, двѣ формулы, изъ которыхъ одна выражаетъ логариѳмъ нѣкоторой раціональной функціи чрезъ интегралы отъ интеграловъ 2-го рода, а другая чрезъ тѣ-же интегралы выражаетъ интегралъ 3-го рода. Первая изъ этихъ формулъ по переходѣ отъ логариѳма къ числу и приводитъ къ функціямъ, которыя Эрмитъ называетъ intermédiaires и которыхъ Якобіевская $\Theta(u)$ и Вейерштрассовскія суть частные случаи.

1.

Пусть

$$R(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3).$$

Чрезъ дифференцированіе $(x-a)^m \sqrt{R(x)}$ получаемъ такое тождество

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big((x-a)^m \sqrt{R(x)}\Big) = \frac{(x-a)^{m-1}}{2\sqrt{R(x)}}\Big(2mR(x) + (x-a)R'(x)\Big);$$

разлагая второй множитель второй части по строкѣ Тэйлора, помня, что $R(x)$ полиномъ третьей степени, мы даемъ ему такой видъ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big((x-a)^m \sqrt{R(x)}\Big) = \frac{(x-a)^{m-1}}{2\sqrt{R(x)}}\Big\{2mR(a) +$$

$$(2m+1)R'(a)(x-a) + (2m+2)\frac{R''(a)}{1.\,2}(x-a)^2 +$$

$$+ (2m+3)\frac{R'''(a)}{1.\,2.\,3}(x-a)^3\Big\}. \qquad (1)$$

Интегрируя это тождество по x отъ $x=a_1$, мы получимъ формулу приведенія эллиптическихъ интеграловъ:

$$(x-a)^m\sqrt{R(x)}=2mR(a)\,X_m+(2m+1)\,R'(a)\,X_{m+1}+$$
$$+(2m+2)\frac{R''(a)}{1.\,2.}\,X_{m+2}+(2m+3)\frac{R'''(a)}{1.\,2.\,3}\,X_{m+3} \qquad (2)$$

гдѣ

$$X_p=\int_{a_1}^{x}\frac{(x-a)^{p-1}dx}{2\sqrt{R(x)}},$$

которая показываетъ: 1) что всѣ интегралы, въ которыхъ $p>1$, приводятся къ двумъ такимъ:

$$\left.\begin{aligned} X_1&=\int_{a_1}^{x}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},\\ X_2&=\int_{a_1}^{x}\frac{(x-a)\,dx}{2\sqrt{R(x)}},\end{aligned}\right| \qquad (3)$$

перваго и второго рода, — такъ какъ для $m=0$ интегралъ съ первою отрицательною степенью $x-a$:

$$X_0=\int_{a_1}^{x}\frac{dx}{(x-a)\,2\sqrt{R(x)}}, \qquad (4)$$

— интегралъ третьяго рода, уходитъ изъ уравненія (2); и 2) что интегралы, въ которыхъ $p<0$, выражаются чрезъ тѣ-же интегралы (3) съ присоединеніемъ къ нимъ еще интеграла (4). Въ случаѣ $R(a)=0$, когда слѣд. a равно которому-нибудь изъ a_1, a_2, a_3, всѣ интегралы сведутся къ интеграламъ первыхъ двухъ родовъ.

Для $m=-1$ дифференціальное тождество (1) по умноженіи на $2\sqrt{R(x)}$ обращается въ такое

$$2\sqrt{R(x)}\,\frac{\partial}{dx}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a}\right)=-2\frac{R(a)}{(x-a)^2}-\frac{R'(a)}{x-a}+(x-a), \qquad (5)$$

(такъ какъ $\frac{R'''(a)}{1.\,2.\,3}=1$), и очевидно можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$2\sqrt{R(x)}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a}\right)=-2\sqrt{R(a)}\,\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{R(a)}}{x-a}\right)+x-a,$$

или еще такъ:

$$2\sqrt{R(x)}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a}\right)-(x-b)=$$

$$=2\sqrt{R(a)}\,\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{R(a)}}{a-x}\right)-(a-b)\,, \qquad (6)$$

гдѣ b произвольная постоянная величина. Видъ этой формулы, ея симметричность относительно x и a, наводитъ на мысль о возможности получить теорему о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ интегралахъ 3-го рода по умноженіи обѣихъ частей на $\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{da}{2\sqrt{R(a)}}$ и интегрированіи по обѣимъ перемѣннымъ.

Мысль эта была высказана Якоби въ письмѣ къ Эрмиту отъ 6 августа 1845 г. (Jacobi's Werke, Bd. II, p. 117), изъ котораго видно, что онъ примѣнялъ этотъ пріемъ и къ ультраэллиптическимъ интеграламъ. Но при этомъ, какъ то замѣтилъ и Якоби, пути интегрированія должны быть такъ выбраны, чтобы онѣ не пересѣкались, ибо для $x=a$ интегрируемыя функціи обращаются въ безконечность; а отъ этого самое предложеніе получается не въ обычной формѣ. Можно однако, чрезъ перемѣну независимой перемѣнной a на другую y, привести тождество (6) къ другому, симметричному относительно x и y, въ которомъ можно будетъ мѣнять порядокъ интегрированія по x и y, начиная его отъ одинаковаго значенія для обоихъ, именно a_1. Для этого стоитъ только принять

$$a-a_1=\frac{R'(a_1)}{y-a_1}\,. \qquad (7)$$

Тогда будемъ имѣть:

$$da = -\frac{R'(a_1)}{(y-a_1)^2}\,dy;$$

$$R(a) = \frac{R'(a_1)}{(y-a_1)^2}\sqrt{R(y)},$$

и слѣд.:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{\sqrt{R(a)}} &= -\frac{dy}{\sqrt{R(y)}}; \\ \frac{\sqrt{R(a)}}{a-a_1} &= \frac{\sqrt{R(y)}}{y-a_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Такъ какъ для $a = a_1, = a_2, = a_3$, y соотвѣтственно $= \infty$, $= a_3, = a_2$, то отсюда тотчасъ слѣдуетъ, замѣтимъ мимоходомъ, что

$$\int_{a_1}^{a_2}\frac{da}{2\sqrt{R(a)}} = \int_{a_3}^{\infty}\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}},$$

чрезъ что періоды интеграловъ перваго рода сводятся къ слѣдующимъ двумъ:

$$\int_{a_1}^{a_2}\frac{da}{2\sqrt{R(a)}} \text{ и } \int_{a_2}^{a_3}\frac{da}{2\sqrt{R(a)}}.$$

Съ помощію уравненія (8) мы найдемъ теперь:

$$\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a} = \frac{\sqrt{R(x)}}{x-a_1-(a-a_1)} = \frac{(y-a_1)\sqrt{R(x)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)};$$

$$\frac{\sqrt{R(a)}}{a-x} = \frac{\dfrac{\sqrt{R(a)}}{a-a_1}}{1-\dfrac{x-a}{a-a_1}} = \frac{+\dfrac{\sqrt{R(y)}}{y-a_1}R'(a_1)}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)};$$

за-тѣмъ:

$$2\sqrt{R(a)}\,\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{R(a)}}{a-x}\right)=2\sqrt{R(a)}\,\frac{\partial y}{\partial a}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\sqrt{R(y)}}{y-a_1}R'(a_1)}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\right)=$$

$$=-2\sqrt{R(y)}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\sqrt{R(y)}}{y-a_1}R'(a_1)}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\right).$$

Чрезъ это, уравненіе (6) приметъ такой видъ:

$$2\sqrt{R(x)}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(y-a_1)\sqrt{R(x)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\right)+(x-b)=$$

$$=2\sqrt{R(y)}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\sqrt{R(y)}}{y-a_1}R'(y)}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\right)+\frac{R'(a)}{y-a_1}-(b-a_1); \tag{9}$$

но изъ (5) для $a=a_1$ имѣемъ:

$$2\sqrt{R(x)}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a_1}\right)=-\frac{R'(a_1)}{x-a_1}+x-a_1;$$

перенося все на-право и перемѣняя x на y, будемъ имѣть:

$$0=-2\sqrt{R(y)}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{R(y)}}{y-a_1}\right)-\frac{R'(a_1)}{y-a_1}+y-a_1;$$

придавая это къ (9), послѣ нѣкоторыхъ упрощеній получимъ слѣдующее замѣчательное тождество:

$$2\sqrt{R(x)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(y-a_1)\sqrt{R(x)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\right)+\frac{x-b}{2\sqrt{R(x)}}\right\}=$$

$$=2\sqrt{R(a)}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(x-a_1)\sqrt{R(y)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\right)+\frac{y-b}{2\sqrt{R(y)}}\right\}. \tag{10}$$

Если помножить обѣ части его на $\frac{\partial x}{2\sqrt{R(x)}} \cdot \frac{\partial y}{2\sqrt{R(y)}}$ и проинтегрировать отъ a_1 по x и y, то получимъ по перенесеніи членовъ изъ одной части въ другую слѣдующее равенство:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{a_1}^{x} \frac{(x-a_1)\sqrt{R(y)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} - \\ &-\int_{a_1}^{y} \frac{(y-a_1)\sqrt{R(x)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)} \cdot \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = \\ &\qquad = \int_{a_1}^{y} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} \cdot \int_{a_1}^{x} \frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}} - \\ &\qquad -\int_{a_1}^{y} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} \cdot \int_{a_1}^{y} \frac{(y-b)\,dy}{2\sqrt{R(y)}}, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

которое и выражаетъ теорему о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ интегралахъ третьяго рода, которые притомъ здѣсь являются въ формѣ, соотвѣтствующей принятой для нихъ Якоби, а интегралы второго рода—въ самомъ общемъ ихъ видѣ, благодаря произвольности b.

2.

Это-же самое тождество (10) приведетъ насъ къ теоремѣ сложенія эллиптическихъ интеграловъ 2-го рода, если связать перемѣнныя x и y уравненіемъ:

$$\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} \pm \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = 0, \qquad (12)$$

котораго интегралъ въ трансцендентной формѣ есть

$$\int_{a_1}^{x} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} \pm \int_{a_1}^{x} \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = \int_{a_1}^{\pm x_0} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} \qquad (13)$$

(гдѣ $\overset{\pm}{x}_0$ есть значеніе x для $y=a_1$ смотря по знаку второго члена въ первой части [12]); а въ алгебраической легко получается слѣдующимъ образомъ.

Уравненіе (12) по освобожденіи отъ знаменателя и сокращеніи на 2 принимаетъ такой видъ:

$$\sqrt{R(y)}\,dx \pm \sqrt{R(x)}\,dy = 0$$

или
$$\sqrt{R(y)}\,d(x-a_1) \pm \sqrt{R(x)}\,d(y-a_1) = 0;$$

придавъ къ нему тождество

$$(x-a_1)\,d\sqrt{R(y)} \pm (y-a_1)\,d\sqrt{R(x)} =$$
$$= (x-a_1)\frac{R'(y)\,dy}{2\sqrt{R(y)}} \pm (y-a_1)\frac{R'(x)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}$$

и исключивъ затѣмъ dx съ помощію уравненія (12), получимъ такое уравненіе:

$$d\Big((x-a_1)\sqrt{R(y)} \pm (y-a_1)\sqrt{R(x)}\Big) =$$
$$= \frac{dy}{2\sqrt{R(y)}}\Big((x-a_1)R'(y) - (y-a_1)R'(x)\Big),$$

въ которомъ первая часть есть полный дифференціалъ; этотъ характеръ уравненіе сохранитъ и по раздѣленіи его на тождество:

$$(x-a_1)\sqrt{R(y)} \pm (y-a_1)\sqrt{R(x)} = \frac{(x-a_1)^2R(y)-(y-a_1)^2R(x)}{(x-a_1)\sqrt{R(y)} \mp (y-a_1)\sqrt{R(x)}},$$

послѣ чего приметъ такой видъ:

$$d\log\Big((x-a_1)\sqrt{R(y)} \pm (y-a_1)\sqrt{R(x)}\Big) =$$
$$= \frac{(x-a_1)R'(y)-(y-a_1)R'(x)}{(x-a_1)^2R(y)-(y-a_1)^2R(x)}\,d\Big(\frac{(x-a_1)(y-a_1)}{2}\Big), \quad \textbf{(14)}$$

такъ какъ по (12)

$$\left((x-a_1)\sqrt{R(y)} \mp (y-a_1)\sqrt{R(x)}\right)\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} =$$

$$= \frac{1}{2}\, d\left((x-a_1)(y-a_1)\right).$$

Опредѣлители, которыхъ частное мы видимъ во второй части (14), такъ могутъ быть вычислены:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & R'(x) \\ y-a_1 & R'(y) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x-a_1 & R'(a_1)+(x-a_1)R''(a_1)+(x-a_1)^2\dfrac{R'''(a_1)}{1.2} \\ y-a_1 & R'(a_1)+(y-a_1)R''(a_1)+(y-a_1)^2\dfrac{R'''(a_1)}{1.2} \end{vmatrix} =$$

$$=(x-y)\,[R'(a_1)-3(x-a_1)(y-a_1)] =$$

$$=(x-y)\,\{[R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)]-2(x-a_1)(y-a_1)\};$$

$$\begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & R(x) \\ (y-a_1)^2 & R(y) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (x-a_1)^2 & R'(a_1)(x-a_1)+\dfrac{R''(a_1)}{1.2}(x-a_1)^2+\dfrac{R'''(a_1)}{1.2.3.}(x-a_1)^3 \\ (y-a_1)^2 & R'(a_1)(y-a_1)+\dfrac{R''(a_1)}{1.2}(y-a_1)^2+\dfrac{R'''(a)}{1.2.3}(y-a_1)^3 \end{vmatrix} =$$

$$=(x-a_1)(y-a_1)(x-y)\,[R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)];$$

послѣ чего вторая часть уравненія (14) приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{1}{2}\frac{d(x-a_1)(y-a_1)}{(x-a_1)(y-a_1)}+\frac{-d(x-a_1)(y-a_1)}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)} =$$

$$= d\log\{\sqrt{x-a_1}\sqrt{y-a_1}\,(R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)\},$$

и само уравненіе обратится въ такое:

$$d\log\left\{\frac{(x-a_1)\sqrt{R(y)}\pm(y-a_1)\sqrt{R(x)}}{\sqrt{x-a_1}\sqrt{y-a_1}\,(R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\right\}=0,$$

что по интегрированіи даетъ слѣдующее:

$$\frac{(x-a_1)\sqrt{R(y)}\pm(y-a_1)\sqrt{R(x)}}{\sqrt{x-a_1}\sqrt{y-a_1}\,(R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}=C. \qquad (15)$$

Постоянное C опредѣлится, полагая $y=a_1$, и слѣдовательно $x=\overset{\pm}{x}_0$; сдѣлавъ это получимъ:

$$C=\frac{\sqrt{\overset{\pm}{x}_0-a_1}}{\sqrt{R'(a_1)}};$$

внося это въ (15), мы будемъ имѣть:

$$\frac{(x-a_1)\sqrt{R(y)}\pm(y-a_1)\sqrt{R(y)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{R'(a_1)}}\sqrt{x-a_1}\sqrt{y-a_1}\sqrt{\overset{\pm}{x}_0-a_1}\,, \qquad (16)$$

интегралъ уравненія (12) въ алгебраической формѣ, гдѣ $\overset{\pm}{x}_0$ есть произвольная постоянная.

3.

Написавъ теперь уравненіе (12) въ такомъ видѣ:

$$\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=\mp\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}}$$

помножимъ его на уравненіе (10) и проинтегрируемъ результатъ по y отъ $y=a_1$, и стало быть по x отъ $x=\overset{\pm}{x}_0$; мы получимъ тогда:

$$\frac{(y-a_1)\sqrt{R(x)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}+\int_{\overset{\pm}{x}_0}^{x}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(y)}}=$$

$$=\frac{\mp(x-a_1)\sqrt{R(y)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\mp\int_{a_1}^{y}\frac{(y-b)\,dy}{2\sqrt{R(x)}}$$

или

$$\left.\begin{aligned}\int_{a_1}^{x}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\pm\int_{a_1}^{y}\frac{(y-b)\,dy}{2\sqrt{R(y)}}-\int_{a_1}^{\overset{\pm}{x}_0}\frac{(x-b\,dx}{2\sqrt{R(x)}}=\\ =\mp\frac{(x-a_1)\sqrt{R(y)}\pm(y-a_1)\sqrt{R(x)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

что на основаніи (16) приметъ обычную форму уравненія, выражающаго теорему сложенія интеграловъ 2-го рода:

$$\int_{a_1}^{x}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\pm\int_{a_1}^{y}\frac{(y-b\,dy}{2\sqrt{R(y)}}-\int_{a_1}^{\overset{\pm}{x}_0}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}=$$

$$=\mp\frac{1}{\sqrt{R'(a_1)}}\sqrt{x-a_1}\sqrt{y-a_1}\sqrt{\overset{\pm}{x}_0-a_1}. \qquad (18)$$

Сложивъ теперь оба уравненія, заключающіяся въ (17), и вычтя одно изъ другого, получимъ такія два:

$$2\int_{a_1}^{x}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}-\int_{a_1}^{\overset{+}{x}_0}\frac{(x-b\,dx}{2\sqrt{R(x)}}-\int_{a_1}^{\bar{x}_0}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}=$$

$$=\frac{-(y-a_1)\,2\sqrt{R(x)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)} \qquad (19)$$

$$-2\int_{a_1}^{y}\frac{(y-b)\,dy}{2\sqrt{R(y)}}+\int_{a_1}^{\overset{+}{x}_0}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}-\int_{a_1}^{\bar{x}}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}=$$

$$=\frac{\pm(x-a_1)\,2\sqrt{R(y)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}. \qquad (20)$$

Помноживъ эти уравненія на $\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}$ и интегрируя отъ $x=a_1$, получимъ слѣдующія два уравненія:

$$\left.\begin{aligned}\log\left(1-\frac{(x-a_1)(y-a_1)}{R'(a_1)}\right)=2\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{x}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}-\\-\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{\overset{+}{x}_0}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}-\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{\bar{x}_0}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}\end{aligned}\right\}(21)$$

$$\left.\begin{aligned}\int_{a_1}^{x}\frac{(x-a_1)\sqrt{R(y)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=\\=-\int_{a_1}^{y}\frac{(y-b)\,dy}{2\sqrt{R(y)}}\cdot\int_{a_1}^{x}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}+\\+\frac{1}{2}\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{\overset{+}{x}_0}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}-\frac{1}{2}\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{\bar{x}_0}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}.\end{aligned}\right\}(22)$$

Послѣднее изъ этихъ уравненій выражаетъ интегралъ третьяго рода чрезъ интегралы отъ интеграловъ второго рода; первое же по переходѣ отъ логариѳма къ числу даетъ такое:

$$1-\frac{(x-a_1)(y-a_1)}{R'(a_1)}= \tag{23}$$

$$=\frac{e^{-\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{\overset{+}{x}_0}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}}\cdot e^{-\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{\bar{x}_0}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}}}{\left[e^{-\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{x}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}}\right]^2}$$

въ которомъ мы встрѣчаемъ трансцендентную

$$e^{-\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{x}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}}, \tag{24}$$

чрезъ которую могутъ быть выражены интегралы второго и третьяго рода и $\sqrt{x-a_1}$, $\sqrt{x-a_2}$, $\sqrt{x-a_3}$, если за независимую перемѣнную взять интегралъ перваго рода, для чего слѣдуетъ положить

$$\int_{a_1}^{x}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=u\,. \tag{25}$$

Тогда x будетъ нѣкоторая функція u, которую такъ означимъ:

$$x=\varphi(u)\,. \tag{26}$$

Это будетъ четная функція u, въ чемъ легко убѣдиться преобразуя интегралъ (25) съ помощію подстановки:

$$\sqrt{x-a_1}=z\,.$$

Интегралъ второго рода будетъ тоже функція отъ u, для которой введемъ такое знакоположеніе:

$$-\int_{a_1}^{x}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}=Z(u)\,; \tag{27}$$

это будетъ нечетная функція отъ u, ибо ея производная по u будетъ четная, такъ-какъ изъ (27) и (26) получаемъ:

$$\frac{dZ(u)}{du}=-(x-b)\,,$$

а $(x-b)$ четная функція u, ибо таково x.

Трансцендентная (24) тоже будетъ функція отъ u:

$$e^{-\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{x}\frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}}=e^{\int_0^u Z(u)\,du}\,; \tag{28}$$

она обращается въ 1 для $u=0$. Вмѣсто нея мы введемъ функцію, отличающуюся отъ нея постояннымъ множителемъ, положивъ:

$$e^{\int_0^u Z(u)\,du} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}. \tag{29}$$

Отсюда слѣдуетъ, во-первыхъ, что

$$\int_0^u Z(u)\,du = \log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}; \tag{30}$$

далѣе

$$-\int_{a_1}^{x} \frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}} = Z(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(0)} = \frac{d\log\Theta(u)}{du}; \tag{31}$$

такимъ образомъ интегралъ втораго рода уже выраженъ чрезъ функцію $\Theta(u)$ и ея производную. Чтобы сдѣлать то-же для интеграла третьяго рода и $1 - \frac{(x-a_1)(y-a_1)}{R'(a_1)}$, мы замѣтимъ, что изъ (13) слѣдуетъ, что

$$\overset{\pm}{x}_0 = \varphi(u \pm v), \tag{32}$$

а потому

$$-\int_{a_1}^{\overset{\pm}{x}_0} \frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}} = Z(u \pm v),$$

и далѣе

$$-\int_{a_1}^{x}\int_{a_1}^{\overset{\pm}{x}_0} \frac{(x-b)\,dx}{2\sqrt{R(x)}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \int_0^u Z(u \pm v)\,du =$$

$$= \int_0^{u\pm v} Z(w)\,dw - \int_0^{\pm v} Z(w)\,dw =$$

$$= \int_0^{u\pm v} Z(w)\,dw - \int_0^{v} Z(w)\,dw.$$

Внося это въ (23), получимъ:

$$1-\frac{(x-a_1)(y-a_1)}{R'(a_1)}=\frac{e^{\int_0^{u+v}Z(w)\,dw}\cdot e^{\int_0^{u-v}Z(w)\,dw}}{\left[e^{\int_0^{u}Z(w)\,dw}\right]^2\cdot\left[e^{\int_0^{v}Z(w)\,dw}\right]^2},\tag{33}$$

или на основаніи (29):

$$1-\frac{(x-a_1)(y-a_1)}{R'(a_1)}=\frac{[\Theta(0)]^2\,\Theta(u+v)\,.\,\Theta(u-v)}{\Theta^2(u)\,.\,\Theta^2(v)};\tag{34}$$

внося же въ (22), получимъ:

$$\int_{a_1}^{x}\frac{(x-a_1)\sqrt{R(y)}}{R'(a_1)(x-a_1)(y-a_1)}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=Z(v)\,u-\frac{1}{2}\int_0^{u+v}Z(w)\,dw+\frac{1}{2}\int_0^{u-v}Z(w)\,dw\tag{35}$$

или на основаніи (29):

$$\int_{a_1}^{x}\frac{(x-a_1)\sqrt{R(y)}}{R'(a_1)-(x-a_1)(y-a_1)}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=$$

$$=Z(v)\,.\,u+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-v)}{\Theta(u+v)}.\tag{36}$$

Уравненіе, которое даетъ выраженіе интеграла 3-го рода чрезъ Θ-функцію.

Что касается до выраженія $\sqrt{x-a_i}$, гдѣ $i=1, 2, 3$, чрезъ Θ-функцію, то это сдѣлается съ помощію уравненія:

$$\frac{d^2\log\sqrt{x-a_i}}{du^2}=(x+a_i)-\frac{R'(a_i)}{x-a_i},$$

совершенно такъ, какъ то было мною показано въ статьѣ «О введеніи Θ-функцій въ теорію эллиптическихъ функцій», упомянутой выше, и само это уравненіе получается такимъ-же образомъ, какъ и въ случаѣ канонической формы подрадикальной функціи.

ОПРЕДѢЛЕНІЕ

НАИБОЛЬШАГО И НАИМЕНЬШАГО ЗНАЧЕНІЯ НѢКОТОРОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

А. А. Маркова.

Въ журналѣ Ліувилля за 1874-й годъ появилась небольшая замѣтка П. Л. Чебышева[1], въ которой между прочимъ упоминается о слѣдующей задачѣ.

Задача.

Дана геометрическая прямая линія AB

По линіи этой неизвѣстнымъ образомъ распредѣлена масса.

Извѣстны только вся масса, распредѣленная по AB, центръ тяжести этой массы и моментъ инерціи ея относительно центра тяжести.

Требуется опредѣлить высшій и низшій предѣлъ для массы, которая можетъ при этихъ данныхъ придтись на нѣкоторый опредѣленный отрѣзокъ AM всей прямой AB.

Не останавливаясь на изслѣдованіи вопроса, знаменитый ученый сообщаетъ прямо окончательный результатъ.

---

[1] Sur les valeurs limites des intégrales.

Какъ онъ пришелъ къ своему результату, остается неизвѣстнымъ и, на сколько я знаю, до сихъ поръ никѣмъ другимъ также не былъ указанъ путь для рѣшенія этого.

Между тѣмъ, по своеобразности своего характера, вопросъ этотъ заслуживаетъ вниманія.

Въ виду всѣхъ этихъ обстоятельствъ я надѣюсь, что настоящее мое разсужденіе, приводящее къ рѣшенію его, не будетъ лишено интереса.

Данныя.

Обозначимъ длину AB буквою l, а длину AM буквою x.

Пусть вся масса прямой AB сосредоточена въ точкахъ

$$N_1, N_2, N_3, \ldots\ldots$$

причемъ

$$AN_1 = y_1, AN_2 = y_2, AN_3 = y_3, \ldots$$

и массы, приходящіяся на эти точки, соотвѣтственно равны

$$m_1, m_2, m_3, \ldots$$

Согласно условіямъ вопроса, намъ извѣстны

$$m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots\ldots = \Sigma m = p$$

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \ldots\ldots = \Sigma my = pd$$

$$m_1(d-y_1)^2 + m_2(d-y_2)^2 + m_3(d-y_3)^2 + \ldots = \Sigma my^2 - pd^2 = k$$

Число же всѣхъ точекъ N, распредѣленіе ихъ по AB и распредѣленіе по этимъ точкамъ всей массы p остаются неопредѣленными.

Надо распорядиться этими неопредѣленными такъ, чтобы масса отрѣзка AM достигала своего наибольшаго или наименьшаго значенія.

Мы займемся сначала разысканіемъ maximum-а массы, приходящейся на AM.

Преобразованіе вопроса.

Прежде всего покажемъ, что число точекъ N, не лишенныхъ массы, можетъ быть сведено къ тремъ:

1) На отрѣзкѣ MB находятся двѣ или болѣе точекъ N.

$A \qquad M \qquad N \qquad P N' \qquad B$

Пусть будутъ N и N' какія нибудь двѣ точки на MB не лишенныя массы; въ первой сосредоточена масса m, во второй m'.

Я говорю, что, не измѣняя ни одного изъ нашихъ данныхъ, можно часть μ массы $m+m'$ перенести въ точку A, а другую часть $\nu = m + m' - \mu$ въ нѣкоторую точку P, лежащую между N и N'.

Для этой цѣли нужно удовлетворить только уравненіямъ:

$$\mu + \nu = m + m'$$

$$\nu z = my + m'y'$$

$$\nu z^2 = my^2 + m'y'^2,$$

гдѣ

$$z = AP, y = AN, y' = AN'.$$

Уравненія же эти даютъ:

$$z = \frac{my^2 + m'y'^2}{my + m'y'}, y' - z = \frac{my(y'-y)}{my+m'y'} > 0, z - y = \frac{m'y'(y'-y)}{my+m'y'} > 0$$

$$\nu = \frac{(my+m'y')^2}{my^2+m'y'^2}, \mu = m + m' - \nu =$$

$$= \frac{(m+m')(my^2+m'y'^2) - (my+m'y')^2}{my^2+m'y'^2} = \frac{mm'(y'-y)^2}{my^2+m'y'^2} > 0.$$

И такъ, дѣйствительно указанное нами преобразованіе возможно и притомъ увеличиваетъ массу отрѣзка AM.

Отсюда заключаемъ, что при maximum-ѣ массы AM на MB можетъ находиться только одна точка N, нелишенная массы.

При этомъ точку M мы причисляемъ къ AM, а не къ MB.

2) На отрѣзкѣ AM, не считая концовъ его, имѣемъ двѣ или болѣе точекъ N.

$A \quad N \quad P \quad N' \quad M \quad B$

Пусть будутъ N и N' двѣ нелишенныя массы точки на AM.

Разсуждая по прежнему, всю массу этихъ точекъ можно сосредоточить въ A и въ нѣкоторой точкѣ P на NN', причемъ всѣ наши данныя равно какъ и масса AM останутся безъ измѣненія.

Отсюда заключаемъ, что вся масса AM можетъ быть сосредоточена въ концахъ A и M и еще въ нѣкоторой точкѣ этого отрѣзка.

3) Пусть не лишены массы на AM нѣкоторая точка N и на MB нѣкоторая точка N', причемъ N не совпадаетъ ни съ A ни съ M и N' не совпадаетъ съ M.

$A \quad N \quad M \quad N' \quad B$

Я говорю, что можно сосредоточить въ A и M или всю массу N съ частью массы N' или часть массы N и всю массу N'.

Для доказательства обозначимъ массу N черезъ m, массу N' черезъ m', а разстоянія AN и AN' соотвѣтственно буквами y и y'.

За-тѣмъ опредѣлимъ два числа

$$m_0 = \frac{y'(y'-x)}{y(x-y)}m', \text{ и } m'_0 = \frac{y(x-y)}{y'(y'-x)}m.$$

При этомъ навѣрно окажется, что

$$\text{либо } m_0 \leqq m \text{ либо } m'_0 \leqq m'$$

такъ какъ

$$m_0 m'_0 = m m'.$$

Въ первомъ случаѣ не трудно убѣдиться, что вся масса m', сосредоточенная въ N, съ массою m_0, находящеюся въ N, могутъ быть размѣщены на точки A и M; а именно, на точку A придется масса

$$\frac{m_0 m'(y'-y)^2}{m_0 y^2 + m'y'^2},$$

а на точку M масса

$$\frac{(m_0 y + m'y')^2}{m_0 y^2 + m'y'^2}.$$

Точно такъ-же при

$$m'_0 \leqq m'$$

всю массу m точки N съ массою m'_0, находящеюся въ N', можно разложить на точки A и M, при чемъ на точку A придется масса

$$\frac{m m'_0 (y'-y)^2}{m y^2 + m'_0 y'^2},$$

а на M масса

$$\frac{(m y + m'_0 y')^2}{m y^2 + m'_0 y'^2}.$$

Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ указанное нами преобразованіе не измѣняетъ данныхъ и увеличиваетъ массу отрѣзка AM.

И такъ, не нарушая ни одного изъ нашихъ данныхъ и не уменьшая массы AM, можно сосредоточить всю массу AB въ концахъ A и M отрѣзка AM и еще въ нѣкоторой точкѣ N.

Въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ такое сосредоточеніе массы AB мы будемъ считать выполненнымъ.

Рѣшеніе.

Обозначимъ разстояніе AN буквою y, а массы точекъ A, M и N соотвѣтственно буквами

$$a,\ b,\ m.$$

Величины эти должны удовлетворять тремъ уравненіямъ:

$$a+b+m=p$$

$$bx+my=pd$$

$$bx^2+my^2=k+pd^2,$$

которыя однако не опредѣляютъ ихъ вполнѣ.

Остающеюся здѣсь неопредѣленностью надо воспользоваться такъ, чтобы масса AM достигала наибольшей величины.

Для этой цѣли, считая y даннымъ, рѣшимъ наши уравненія относительно a, b и m.

Такимъ образомъ получимъ:

$$b=\frac{pdy-(k+pd^2)}{x(y-x)}=\frac{(k+pd^2)-pdy}{x(x-y)}$$

$$m=\frac{(k+pd^2)-pdx}{y(y-x)}=\frac{pdx-(k+pd^2)}{y(x-y)}$$

$$a=\frac{pxy+k+pd^2-pdx-pdy}{xy}.$$

По самому существу вопроса

$$a,\ b \text{ и } m$$

должны быть числами положительными.

Поэтому

$$y < x \text{ при } pdx - (k + pd^2) > 0$$

и

$$y > x \text{ при } pdx - (k + pd^2) < 0;$$

если же

$$pdx - (k + pd^2) = 0,$$

то вся масса AB можетъ быть сосредоточена въ точкахъ A и M.

Отсюда нетрудно заключить, что при

$$x \geqq d + \frac{k}{pd}$$

высшій предѣлъ для массы AM равняется массѣ p всей прямой AB.

Если же

$$x < d + \frac{k}{pd},$$

то на отрѣзкѣ AM расположена только масса

$$a + b = p - m = p - \frac{(k + pd^2) - pdx}{y(y-x)};$$

чѣмъ больше y, тѣмъ масса эта больше.

Что-же касается y, то эта величина ограничивается только двумя неравенствами.

$$y \leqq l$$

$$a = \frac{pxy + k + pd^2 - pdx - pdy}{xy} \geqq 0.$$

Если теперь

$$pxl + k + pd^2 - pdx - pdl \geqq 0, \text{ т. е. } x \geqq d - \frac{k}{p(l-d)},$$

то наибольшее возможное значеніе

$$a+b=p-\frac{(k+pd^2)-pdx}{y(y-x)}$$

соотвѣтствуетъ $y=l$ и равняется

$$p-\frac{(k+pd^2)-pdx}{l(l-x)}=\frac{p(l-d)(l+d-x)-k}{l(l-x)}.$$

Если-же

$$pxl+k+pd^2-pdx-pdl<0, \text{ т. е. } x<d-\frac{k}{p(l-d)},$$

то наибольшее возможное значеніе $a+b$ соотвѣтствуетъ тому значенію y, при которомъ

$$pxy+k+pd^2-pdx-pdy$$

обращается въ нуль, т. е.

$$y=\frac{k+pd^2-pdx}{p(d-x)}.$$

Подставляя это значеніе y въ нашу формулу

$$a+b=p-\frac{(k+pd^2)-pdx}{y(y-x)},$$

получаемъ для высшаго предѣла массы AM такое выраженіе

$$p-\frac{(k+pd^2)-pdx}{\frac{k+pd^2-pdx}{p(d-x)}\cdot\frac{k+p(d-x)^2}{p(d-x)}}=p-\frac{p^2(d-x)^2}{k+p(d-x)^2}=\frac{kp}{k+p(d-x)^2}$$

И такъ

при $x \geqq d+\frac{k}{pd}$ высшій предѣлъ для массы AM равенъ p

при $d+\frac{k}{pd}>x \geqq d-\frac{k}{p(l-d)}$ » » » » $\frac{p(l-d)(l+d-x)-k}{l(l-x)}$

при $d-\frac{k}{p(l-d)}>x$ » » » » $\frac{kp}{k+p(d-x)^2}$.

Подобными же разсужденіями можно было бы опредѣлить и низшій предѣлъ для массы AM; но такой предѣлъ можно найдти гораздо проще, такъ какъ онъ соотвѣтствуетъ maximum-у массы MB.

Слѣдовательно, все сводится къ опредѣленію высшаго предѣла массы MB.

И на основаніи предыдущаго заключаемъ, что*

при $l-x \geqq l-d+\dfrac{k}{p(l-d)}$ высшій предѣлъ массы MB равняется p

при $l-d+\dfrac{k}{p(l-d)} > l-x \geqq l-d-\dfrac{k}{pd}$

высшій предѣлъ для массы MB равенъ $p-\dfrac{k+p(l-d)(x-d)}{lx}$

и наконецъ при $l-d-\dfrac{k}{pd} > l-x$

высшій предѣлъ для массы MB равенъ $p-\dfrac{p^2(d-x)^2}{k+p(d-x)^2}$.

Итакъ,

при $x > d+\dfrac{k}{pd}$ низшій предѣлъ для массы AM равенъ $\dfrac{p^2(d-x)^2}{k+p(d-x)^2}$

при $d+\dfrac{k}{dp} \geqq x > d-\dfrac{k}{p(l-d)}$ » » » » » $\dfrac{k+p(l-d)(x-d)}{lx}$

и при $d-\dfrac{k}{p(l-d)} \geqq x$ » » » » » нулю.

Всѣ эти результаты мы находимъ и въ замѣткѣ П. Л. Чебышева.

Замѣтимъ здѣсь кстати, что всѣ неравенства для x можно писать и съ двумя знаками, такъ какъ при $x=d+\dfrac{k}{pd}$

---

* Надо замѣнить x на $l-x$ и d на $l-d$.

$$p = \frac{p(l-d)(l+d-x)-k}{l(l-x)} \quad \text{и} \quad \frac{p^2(d-x)^2}{k+p(d-x)^2} = \frac{k+p(l-d)(x-d)}{lx}$$

а при $x = d - \dfrac{k}{p(l-d)}$

$$\frac{p(l-d)(l+d-x)-k}{l(l-x)} = \frac{kp}{k+p(d-x)^2} \quad \text{и} \quad \frac{k+p(l-d)(x-d)}{lx} = 0.$$

С. Петербургъ.

1883.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

НѢКОТОРЫХЪ НЕРАВЕНСТВЪ П. Л. ЧЕБЫШЕВА.

(Съ таблицею чертежей).

А. А. Маркова.

Въ небольшой замѣткѣ «Sur les valeurs limites des intégrales», помѣщенной въ журналѣ Ліувилля за 1874 годъ, П. Л. Чебышевъ высказалъ между прочимъ слѣдующую теорему.

Теорема.

Пусть $f(z)$ какая нибудь функція отъ z, а $\dfrac{\Phi(x)}{\psi(x)}$ одна изъ дробей, подходящихъ къ

$$\int_a^b \frac{f(z)}{x-z}\,dz,$$

при томъ $f(z)$ въ предѣлахъ интегрированія, т. е. отъ $z=a$ до $z=b$ сохраняетъ постоянно знакъ $+$.

Пусть далѣе

$$\psi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)\ldots(x-x_l)\ldots(x-x_n),$$

гдѣ

$$a<x_1<x_2<\ldots\ldots<x_k<\ldots\ldots<x_l<\ldots\ldots<x_n<b.$$

Въ такомъ случаѣ должны имѣть мѣсто слѣдующія неравенства:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{l+1}} f(z)\,dz > \frac{\varphi(x_k)}{\psi'(x_k)} + \frac{\varphi(x_{k+1})}{\psi'(x_{k+1})} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\varphi(x_{l-1})}{\psi'(x_{l-1})} + \frac{\varphi(x_l)}{\psi'(x_l)} > \int_{x_k}^{x_l} f(z)\,dz.$$

Прошло почти десять лѣтъ и однако доказательства этихъ неравенствъ мы нигдѣ не встрѣчаемъ.

Только отчасти путь къ доказательству намѣченъ самимъ П. Л. Чебышевымъ.

Послѣ нѣсколькихъ безплодныхъ попытокъ мнѣ удалось наконецъ найдти весьма простое доказательство выше указанныхъ неравенствъ вмѣстѣ съ нижеслѣдующими:

$$\int_a^{x_{k-1}} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})} < \int_a^{x_k} f(z)\,dz$$

и

$$\int_{x_{l+1}}^{b} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_{l+1})}{\psi'(x_{l+1})} + \frac{\varphi(x_{l+2})}{\psi'(x_{l+2})} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)} < \int_{x_l}^{b} f(z)\,dz.$$

Это доказательство составляетъ предметъ настоящей замѣтки.

Основныя формулы.

Прежде всего вспомнимъ, что

$$\varphi(x) = \int_a^b \frac{\psi(x)-\psi(z)}{x-z} f(z)\,dz\,,\ \varphi(x_i) = \int_a^b \frac{\psi(z)}{z-x_i} f(z)\,dz$$

и

$$\frac{\varphi(x_i)}{\psi'(x_i)} = \int_a^b \frac{\psi(z)}{(z-x_i)\psi'(x_i)} f(z)\,dz.$$

Далѣе, если $\Phi(z)$ цѣлая функція отъ z не выше какъ $2n-1$-ой степени, то

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+\psi(z)\,.\,\theta(z),$$

гдѣ

$$\Phi_0(z)=\Phi(x_1)\frac{\psi(z)}{(z-x_1)\psi'(x_1)}+$$

$$+\Phi(x_2)\frac{\psi(z)}{(z-x_2)\psi'(x_2)}+\ldots+\Phi(x_n)\frac{\psi(z)}{(z-x_n)\psi'(x_n)},$$

а $\theta(z)$ означаетъ нѣкоторую цѣлую функцію отъ z $n-1$-ой или низшей степени.

Вмѣстѣ съ тѣмъ

$$\int_a^b \Phi(z)f(z)dz=\Phi(x_1)\frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)}+$$

$$+\Phi(x_2)\frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)}+\ldots+\Phi(x_n)\frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Въ частности

$$\int_a^b f(z)\,dz=\frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)}+\frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)}+\ldots+\frac{\varphi(x_{n-1})}{\psi'(x_{n-1})}+\frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Приведеніе всѣхъ неравенствъ къ двумъ.

Нетрудно видѣть, что всѣ указанныя нами неравенства могутъ быть выведены изъ двухъ:

$$\int_a^{x_{k-1}} f(z)\,dz<\frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)}+\frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)}+\ldots+\frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})},$$

$$\int_{x_{l+1}}^b f(z)\,dz<\frac{\varphi(x_{l+1})}{\psi'(x_{l+1})}+\frac{\varphi(x_{l+2})}{\psi'(x_{l+2})}+\ldots+\frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Дѣйствительно, замѣняя здѣсь $k-1$ на l, а $l+1$ на k, получимъ:

$$\int_a^{x_l} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_l)}{\psi'(x_l)},$$

$$\int_{x_k}^{b} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_k)}{\psi'(x_k)} + \frac{\varphi(x_{k+1})}{\psi'(x_{k+1})} + \ldots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Отсюда затѣмъ, принимая во вниманіе равенство

$$\int_a^b f(z)\,dz = \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_{n-1})}{\psi'(x_{n-1})} + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)},$$

выводимъ послѣдовательно

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{l+1}} f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz - \int_a^{x_{k-1}} f(z)\,dz - \int_{x_{l+1}}^{b} f(z)\,dz$$

$$> \frac{\varphi(x_k)}{\psi'(x_k)} + \frac{\varphi(x_{k+1})}{\psi'(x_{k+1})} + \ldots + \frac{\varphi(x_l)}{\psi'(x_l)},$$

$$\int_{x_l}^{b} f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz - \int_a^{x_l} f(z)\,dz$$

$$> \frac{\varphi(x_{l+1})}{\psi'(x_{l+1})} + \frac{\varphi(x_{l+2})}{\psi'(x_{l+2})} + \ldots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)},$$

$$\int_a^{x_k} f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz - \int_{x_k}^{b} f(z)\,dz$$

$$> \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})}$$

и наконецъ

$$\int_{x_k}^{x_l} f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz - \int_a^{x_k} f(z)\,dz - \int_{x_l}^{b} f(z)\,dz$$

$$< \frac{\varphi(x_k)}{\psi'(x_k)} + \frac{\varphi(x_{k+1})}{\psi'(x_{k+1})} + \ldots + \frac{\varphi(x_l)}{\psi'(x_l)}.$$

Простѣйшіе частные случаи.

Изъ равенства

$$\int_a^b f(z)\,dz = \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}$$

непосредственно слѣдуютъ неравенства

$$\int_a^{x_n} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}$$

и

$$\int_{x_1}^b f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Эти простѣйшіе частные случаи изъ всѣхъ дальнѣйшихъ нашихъ разсужденій мы исключимъ.

Доказательство неравенства

$$\int_a^{x_{k-1}} f(z)\,dz < \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})}.$$

Пусть

$$\Phi_0(z) = \frac{\psi(z)}{(z-x_1)\psi'(x_1)} + \frac{\psi(z)}{(z-x_2)\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\psi(z)}{(z-x_{k-1})\psi'(x_{k-1})}$$

и

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \psi(z)\,.\,\theta(z),$$

гдѣ $\theta(z)$ нѣкоторая цѣлая функція $n-2$-ой степени отъ z.

Тогда по замѣченному

$$\int_a^b \Phi(z) f(z)\,dz = \frac{\varphi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\varphi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\varphi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})}.$$

Подберемъ теперь $\theta(z)$ такъ, чтобы производная

$$\Phi'(z) = \Phi'_0(z) + \psi'(z).\theta(z) + \psi(z).\theta'(z)$$

обращалась въ нуль при

$$z = x_1, x_2, \ldots, x_{k-2}, x_k, x_{k+1}, \ldots x_n.$$

Требованіе наше сводится къ $n-1$ уравненіямъ слѣдующаго вида

$$\theta(x_i) = -\frac{\Phi'_0(x_i)}{\psi'(x_i)}$$

гдѣ i надо полагать послѣдовательно равнымъ

$$1, 2, 3, \ldots, k-2, k, k+1, \ldots, n.$$

И не трудно видѣть, что послѣднія уравненія вполнѣ опредѣляютъ цѣлую функцію $\theta(z)$ $n-2$-й степени. А именно,

$$\theta(z) = -\sum \frac{\Phi'_0(x_i).\psi(z).(x_i - x_{k-1})}{\{\psi'(x_i)\}^2 (z - x_i)(z - x_{k-1})}, [i = 1, 2, 3, \ldots, n]$$

Подобравъ такимъ образомъ $\theta(z)$, мы можемъ сказать, что

$$\Phi'(z)$$

обращается въ нуль

$$n-1 \text{ разъ}$$

при

$$z = x_1, x_2, \ldots, x_{k-2}, x_k, x_{k+1}, \ldots x_n$$

и еще

$$n-2 \text{ разъ}$$

при нѣкоторыхъ значеніяхъ z въ промежуткахъ

от x_1 до x_2, отъ x_2 до x_3, ..., отъ x_{k-2} до x_{k-1},

отъ x_k до x_{k+1}, отъ x_{k+2} до x_{k+3}, ..., отъ x_{n-1} до x_n,

въ каждомъ промежуткѣ по разу; такъ-какъ

$$\Phi(x_1)=\Phi(x_2)=\ldots\ldots=\Phi(x_{k-2})=\Phi(x_{k-1})=1$$

и

$$\Phi(x_k)=\Phi(x_{k+1})=\Phi(x_{k+2})=\ldots=\Phi(x_{n-1})=\Phi(x_n)=0.$$

Степень цѣлой функціи $\Phi'(z)$ равна $2n-3$.

Слѣдовательно, всѣ нули ея нами пересчитаны. Ни одинъ изъ нихъ не лежитъ въ промежуткѣ

от x_{k-1} до x_k

и не совпадаетъ съ x_{k-1}.

Кромѣ того

$$1=\Phi(x_{k-1})>\Phi(x_k)=0.$$

По этому

$$\Phi'(x_{k-1})<0$$

$$\Phi'(x_k-\varepsilon)<0, \Phi'(x_{k+1}-\varepsilon)<0, \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots, \Phi'(x_{n-1}-\varepsilon)<0, \Phi'(x_n-\varepsilon)<0$$

$$\Phi'(x_k+\varepsilon)>0, \Phi'(x_{k+1}+\varepsilon)>0, \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots, \Phi'(x_{n-1}+\varepsilon)>0, \Phi'(x_n+h)>0$$

$$\Phi'(x_{k-2}+\varepsilon)>0, \Phi'(x_{k-3}+\varepsilon)>0, \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots, \Phi'(x_2+\varepsilon)>0, \Phi'(x_1+\varepsilon)>0$$

$$\Phi'(x_{k-2}-\varepsilon)<0, \Phi'(x_{k-3}-\varepsilon)<0, \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots, \Phi'(x_2-\varepsilon)<0, \Phi'(x_1-h)<0.$$

Здѣсь ε и h означаютъ положительныя количества: первое безконечно малое, второе произвольное.

Отсюда не трудно заключить, что

$$\Phi(z)$$

при всѣхъ значеніяхъ z не меньше нуля и сверхъ того при

$$z \leqq x_{k-1}$$

не меньше единицы.

Полагая

$$y = \Phi(z),$$

будемъ имѣть въ кривой, представленной на фиг. 1-й, схематическое изображеніе хода этой функціи.

Возвращаясь теперь къ интегралу

$$\int_a^b \Phi(z) f(z)\, dz = \frac{\Phi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\Phi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\Phi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})},$$

мы можемъ написать слѣдующія неравенства

$$\int_a^b \Phi(z) f(z)\, dz > \int_a^{x_{k-1}} \Phi(z) f(z)\, dz > \int_a^{x_{k-1}} f(z)\, dz.$$

И такъ

$$\frac{\Phi(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\Phi(x_2)}{\psi'(x_2)} + \ldots + \frac{\Phi(x_{k-1})}{\psi'(x_{k-1})} > \int_a^{x_{k-1}} f(z)\, dz,$$

ч. и т. д.

Доказательство неравенства

$$\int_{x_{l+1}}^b f(z)\, dz < \frac{\Phi(x_{l+1})}{\psi'(x_{l+1})} + \frac{\Phi(x_{l+2})}{\psi'(x_{l+2})} + \ldots + \frac{\Phi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Пусть

$$\Phi_0(z) = \frac{\psi(z)}{(z-x_{l+1})\psi'(x_{l+1})} + \frac{\psi(z)}{(z-x_{l+2})\psi'(x_{l+2})} + \dots$$

$$\dots + \frac{\psi(z)}{(z-x_n)\psi'(x_n)}$$

и

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \psi(z).\theta(z),$$

гдѣ $\theta(z)$ цѣлая функція $n-2$-ой степени отъ z.

Для опредѣленія $\theta(z)$ постановимъ $n-1$ уравненій слѣдующаго вида

$$\theta(x_i) = -\frac{\Phi'_0(x_i)}{\psi'(x_i)}.$$

гдѣ

$$i = 1, 2, 3, \dots l, l+2, l+3, \dots, n$$

такъ что

$$\theta(z) = -\sum \frac{(x_i - x_{l+1}).\Phi'_0(x_i).\psi(z)}{\{\psi'(x_i)\}^2(z-x_i)(z-x_{l+1})}, [i=1,2,3,\dots,n].$$

Въ такомъ случаѣ не трудно убѣдиться, что

$$\Phi(z)$$

при всѣхъ значеніяхъ z не меньше нуля и сверхъ того при $z \geqq x_{l+1}$, не меньше единицы.

Полагая $y = \Phi(z)$, ходъ разсматриваемой нами функціи можно изобразить кривою, представленною на фиг. 2-ой.

Подобравъ такимъ образомъ функцію $\Phi(z)$, получимъ

$$\frac{\Phi(x_{l+1})}{\psi'(x_{l+1})}+\frac{\Phi(x_{l+2})}{\psi'(x_{l+2})}+\ldots+\frac{\Phi(x_n)}{\psi'(x_n)}=$$

$$=\int_a^b\Phi(z)f(z)dz>\int_{x_{l+1}}^b f(z)dz$$

ч. и т. д.

Для доказательства обоихъ неравенствъ намъ пришлось повторить одни и тѣ же разсужденія два раза.

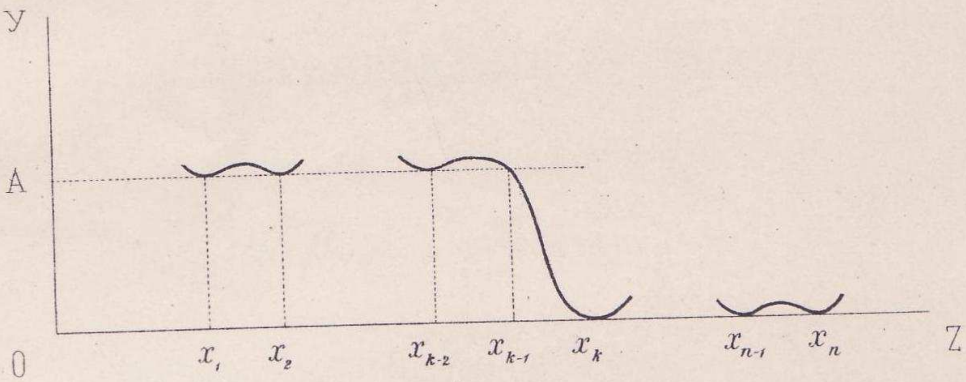
Такимъ образомъ неравенства Чебышева доказаны вполнѣ.

Въ заключеніе моей замѣтки считаю пріятнымъ долгомъ выразить живѣйшую благодарность К. А. Поссе, который обратилъ мое вниманіе на разобранный выше вопросъ и показалъ рѣшеніе его для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ.

А. Марковъ.

30-го (18) декабря
1883 года.

Фиг. 1.



Фиг. 2.

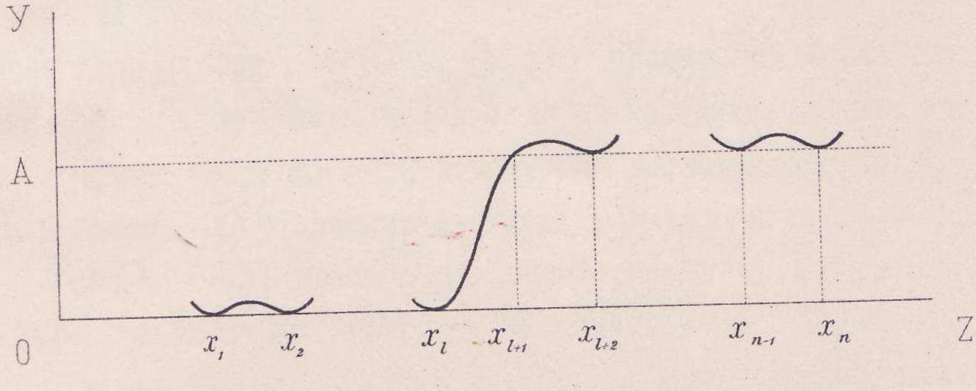


Рис. Авторъ. Лит. Беверсдорфъ, Харьковъ.

ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНІИ УРАВНЕНІЯ

$$x^2y''' + Axy'' + By' + Cx^\mu y = 0.$$

В. П. Алексѣевскаго.

---

1. Предметъ этой замѣтки составляетъ рѣшеніе слѣдующей задачи:

Найдти общій интегралъ уравненія:

$$x^2y''' + Axy'' + By' + Cx^\mu y = 0, \qquad (1)$$

въ которомъ A, B, C и μ какія угодно постоянныя, и показать въ какихъ случаяхъ интегралъ этого уравненія содержитъ конечное число членовъ.

Если $C = 0$, или $\mu = -1$, ур. (1) принимаетъ весьма извѣстную форму, интегралъ которой легко находится и состоитъ изъ конечнаго числа членовъ, поэтому въ послѣдующемъ мы будемъ принимать C отличнымъ отъ нуля, а μ отличнымъ отъ -1.

2. Уравненіе (1) можетъ быть преобразовано въ другое того же вида, въ которомъ одно изъ постоянныхъ A, B, C и μ имѣетъ данное значеніе. Дѣйствительно, сдѣлавъ замѣну независимаго перемѣннаго, именно полагая

$$x = z^p$$

получаемъ

$$z^2y''' + A_1zy'' + B_1y' + C_1z^{\mu_1}y = 0, \qquad (2)$$

гдѣ

$$A_1 = Ap - 3(p-1),\quad B_1 = Bp^2 - Ap(p-1) + (p-1)(2p-1)$$

$$C_1 = Cp^3,\quad \mu_1 = \mu p + p - 1.$$

Изъ этихъ формулъ и видно, что всегда возможно выбрать p такъ, чтобы одно изъ постоянныхъ имѣло данное значеніе. Пусть же μ_1 есть данное число, тогда

$$x = z^{\frac{\mu_1+1}{\mu+1}} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{A_1(\mu+1) - 3(\mu-\mu_1)}{\mu_1+1}, \\ B &= \frac{B_1(\mu+1)^2 - A_1(\mu+1)(\mu-\mu_1) + (\mu-\mu_1)(2\mu-\mu_1+1)}{(\mu_1+1)^2} \\ C &= C_1\frac{(\mu+1)^3}{(\mu_1+1)^3}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Отсюда слѣдуетъ, что для рѣшенія нашей задачи достаточно найдти интегралъ уравненія вида (1), въ которомъ μ есть произвольно выбранное число μ_1.

3. Пользуясь этимъ замѣчаніемъ, мы тотчасъ получаемъ простѣйшее уравненіе вида (1), интегралъ котораго выражается конечнымъ числомъ членовъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть въ уравненіи (2)

$$A_1 = 0,\ B_1 = 0,\ \mu_1 = 2,$$

и для удобства означимъ корни $-\sqrt[3]{C}$ чрезъ ν_1, ν_2, ν_3, тогда легко замѣтить, что интегралъ этого уравненія будетъ:

$$y = K_1 e^{\frac{3\nu_1}{\mu+1}z} + K_2 e^{\frac{3\nu_2}{\mu+1}z} + K_3 e^{\frac{3\nu_3}{\mu+1}z}$$

На основаніи же формулъ (3) и (4) уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$x^2y'''-(\mu-2)xy''+\frac{(\mu-2)(2\mu-1)}{9}y'+Cx^\mu y=0 \tag{5}$$

а интегралъ его:

$$y=K_1\, e^{\frac{3\nu_1}{\mu+1}x^{\frac{\mu+1}{3}}}+K_2\, e^{\frac{3\nu_2}{\mu+1}x^{\frac{\mu+1}{3}}}+K_3\, e^{\frac{3\nu_3}{\mu+1}x^{\frac{\mu+1}{3}}} \tag{6}$$

4. Уравненіе (1) можетъ быть преобразовано въ другое уравненіе того-же вида, гдѣ постоянныя A и B будутъ иныя, а C и μ тѣ-же. Дѣйствительно, полагая въ (1)

$$y=x^q u$$

находимъ:

$$x^{q+2}u'''+(3q+A)x^{q+1}u''+[3q(q-1)+2Aq+B]x^q u'+$$
$$+[q(q-1)(q-2)+Aq(q-1)+Bq]x^{q-1}u+Cx^{\mu+q}u=0.$$

Это уравненіе будетъ того-же вида какъ (1), если

$$q(q-1)(q-2)+Aq(q-1)+Bq=0, \tag{7}$$

именно

$$x^2u'''+A_2xu''+B_2u'+Cx^\mu u=0, \tag{8}$$

гдѣ

$$A_2=3q+A, \qquad B_2=3q(q-1)+2Aq+B. \tag{9}$$

Уравненіе (7) имѣетъ три корня; при $q=0$, уравненіе (8) тождественно съ (1), если остальные 2 корня уравненія (7) различны, то уравненіе (8) имѣетъ два вида, если-же эти корни равны, то уравненіе (8) имѣетъ единственный видъ.

5. На основаніи сказаннаго въ § 2, для рѣшенія нашей задачи, достаточно найдти случаи интегрируемости уравненія:

$$z^2y'''+azy''+by'+cy=0. \tag{10}$$

Дифференцируя это уравненіе n разъ и полагая

$$y_n = D^n y, \tag{11}$$

получаемъ

$$z^2 y'''_n + a_n z y''_n + b_n y'_n + c y_n = 0, \tag{12}$$

гдѣ

$$a_n = 2n + a, \qquad b_n = n(n-1) + na + b. \tag{13}$$

И такъ, если извѣстенъ интегралъ одного изъ уравненій (10) или (12), то легко вычислить и интегралъ другаго. Но полагая въ формулѣ (5) $\mu = 0$, мы видимъ, что уравненіе (5) принимаетъ форму уравненія (10) или (12), и такъ какъ интегралъ уравненія (5) извѣстенъ при всякомъ значеніи μ, то заключаемъ, что уравненіе (10) интегрируется конечнымъ числомъ членовъ, если

$$a = 2, \quad b = \frac{2}{9} \tag{14}$$

и интегралъ его по формулѣ (6) будетъ:

$$y_0 = K_1 e^{3\nu_1 z^{1/3}} + K_2 e^{3\nu_2 z^{1/3}} + K_3 e^{3\nu_3 z^{1/3}} \tag{15}$$

Слѣдовательно, согласно съ формулой (11), интегралъ уравненія (12) будетъ:

$$y_n = D^n y_0,$$

если только коэффиціенты его будутъ:

$$a_n = 2n + 2\,, \quad b_n = \frac{(3n+1)(3n+2)}{9}\,.$$

Точно также уравненіе (12) интегрируется, если

$$a_n = 2\,, \quad b_n = \frac{2}{9}\,,$$

слѣдовательно уравненіе (10) будетъ имѣть интеграломъ

$$y = D^{-n} y_0 ,$$

если по (13)

$$a = -2n + 2 \,,\ b = \frac{(3n-1)(3n-2)}{9}.$$

Легко замѣтить, что второй случай выводится изъ перваго чрезъ замѣну n на $-n$. Изъ всего сказаннаго заключаемъ, что уравненіе

$$z^2 y''' + 2(n+1) z y'' + \frac{(3n+1)(3n+2)}{9} y' + cy = 0 \qquad (16)$$

интегрируется, если n цѣлое положительное или отрицательное число, интегралъ его будетъ

$$y = D^n y_0 , \qquad (17)$$

гдѣ y_0 выражается формулой (15).

6. При помощи формулъ (7) и (9) уравненіе (16) преобразуется въ два слѣдующихъ:

$$z^2 u''' - (n-3) z u'' - \frac{2}{9}(3n-4) u' + cu = 0 \qquad (18)$$

$$z^2 v''' - (n-4) z v'' - \frac{4}{9}(3n-5) v' + cv = 0, \qquad (19)$$

интегралы которыхъ соотвѣтственно выражаются:

$$u = z^{n-{}^1/_3} D^n y_0 \quad (20), \quad v = z^{n-{}^2/_3} D^n y_0 . \quad (21)$$

А такъ какъ уравненія (18) и (19) того-же вида, какъ уравненіе (10), то, дифференцируя ихъ m разъ, находимъ два уравненія:

$$z^2u'''_m + (2m - n + 3)\,zu''_m +$$

$$+ \frac{(3m+2)(3m-3n+4)}{9}u'_m + cu_m = 0 \qquad (22)$$

$$z^2v'''_m + (2m - n + 4)\,zv''_m +$$

$$+ \frac{(3m+4)(3m-3n+5)}{9}v'_m + cv_m = 0, \qquad (23)$$

интегралы которыхъ будутъ:

$$u_m = D^m z^{n-{}^1\!/_3} D^n y_0 \quad (24)\ , \quad v_m = D^m z^{n-{}^2\!/_3} D^n y_0 \quad (25)$$

Уравненія (22) и (23) различны только по виду; ихъ легко представить однимъ уравненіемъ; для этого полагаемъ въ (22)

$$m - n = p_2 - 2 \quad , \quad m = p_1 - 1,$$

а въ (23) $\quad m - n = p_1 - 2 \quad , \quad m = p_2\ 2,$

и называя перемѣнное зависимое чрезъ y, получаемъ:

$$z^2y''' + (p_1 + p_2)\,zy'' + \frac{(3p_1-1)(3p_2-2)}{9}y' + cy = 0. \qquad (26)$$

Интегралъ же этого уравненія на основаніи формулъ (24) и (25) представится въ двухъ видахъ:

$$y = D^{p_1-1} z^{\frac{3(p_1-p_2)+2}{3}} D^{p_1-p_2+1} y_0 \qquad (27)$$

$$y = D^{p_2-2} z^{-\frac{3(p_1-p_2)+2}{3}} D^{-(p_1-p_2)} y_0. \qquad (28)$$

Такъ какъ въ коэффиціенты уравненія (26) входятъ два произвольныхъ числа, то заключаемъ, что это уравненіе и есть общее уравненіе вида (10), интегралъ котораго будетъ выражаться конечнымъ числомъ членовъ, если p_1 и p_2 — цѣлыя числа.

7. До сихъ поръ мы принимали n и m, а слѣдовательно p_1 и p_2 — цѣлыми числами, но легко видѣть, что это ограниченіе совершенно излишне. Мы вывели уравненіе (26) изъ уравненія (10) рядомъ дифференцированій и подстановокъ; при дифференцированіи мы пользовались формулой Лейбница, а эта послѣдняя, какъ извѣстно, справедлива, каковъ бы ни былъ указатель производной, цѣлый или дробный, положительный или отрицательный, наконецъ, вещественный или мнимый. Подстановки тоже не требовали, чтобы постоянныя, входящія въ нихъ и въ уравненіе, были цѣлыми, слѣдовательно уравненіе (26) есть общее, въ немъ числа p_1 и p_2 могутъ быть какія угодно, и, значитъ, интегралъ всякаго уравненія вида (26) или (10) можетъ быть представленъ формулами (27) или (28).

8. Зная интегралъ уравненія (10), мы найдемъ и интегралъ всякаго уравненія (1) при помощи формулъ (3) и (4), положивъ въ нихъ предварительно $\mu_1 = 0$. Теперь выведемъ нѣкоторые частные виды уравненія (1). Для этого выразимъ коэффиціенты уравненія (1) въ коэффиціентахъ уравненія (26); по формуламъ (4) находимъ:

$$A = (p_1 + p_2)(\mu + 1) - 3\mu$$

$$B = \frac{(3p_1-1)(3p_2-2)}{9}(\mu+1)^2 - (p_1+p_2)(\mu+1)\mu + \mu(2\mu+1) \quad \text{(a)}$$

$$C = c(\mu + 1)^3.$$

Пусть $A = 0$, тогда ур. (1) приметъ слѣдующую форму:

$$x^2y''' + \frac{(p_1-2p_2+2)(p_2-2p_1+1)}{(p_1+p_2-3)^2}y' -$$

$$- \frac{27c}{(p_1+p_2-3)^3}x^{-\frac{p_1+p_2}{p_1+p_2-3}}y = 0. \qquad (29)$$

Въ этомъ уравненіи коэффиціентъ при y' можетъбыть нулемъ въ двухъ случаяхъ:

$$p_1 = 2p_2 - 2 \quad , \quad p_2 = 2p_1 - 1.$$

При такихъ значеніяхъ p_1 и p_2, ур. (29) принимаетъ два слѣдующихъ вида:

$$y''' = \frac{27c}{(3p_2-5)^3} x^{-3.\frac{3p_2-4}{3p_2-5}} y,$$

$$y''' = \frac{27c}{(3p_1-4)^3} x^{-3.\frac{3(p_1-1)}{3(p_1-1)-1}} y,$$

или, полагая въ 1-омъ $p_2 = i + 2$, а во 2-омъ $p_1 - 1 = -k$,

$$y''' = \frac{27c}{(3i+1)^3} x^{-\frac{3(3i+2)}{3i+1}} y \tag{30}$$

$$y''' = -\frac{27c}{(3k+1)^3} x^{-\frac{3.3k}{3k+1}} y. \tag{31}$$

Интегралы этихъ уравненій вычислятся по формуламъ (27) и (28). Интегралъ уравненія (30):

$$y = D^{2i+1} z^{\frac{3i+2}{3}} D^{i+1} y_0 \text{ или } y = D^{i+1} z^{-\frac{3i+2}{3}} D^{-i} y_0 \tag{32}$$

гдѣ по совершеніи дѣйствій надо подставить:

$$z = x^{-\frac{3}{3i+1}}.$$

Интегралъ уравненія (31) будетъ:

$$y = D^{-k} z^{\frac{3k+2}{3}} D^{k+1} y_0, \text{ или } y = D^{-(2k+1)} z^{-\frac{3k+2}{3}} D^{-k} y_0 \qquad (33)$$

гдѣ
$$z = x^{\frac{3}{3k+1}}.$$

Въ равенствахъ (30) . . . (33) i и k суть числа какія угодно.

Теперь положимъ въ формулахъ (а) $\mu = 2$, тогда уравненія (1) будетъ:

$$x^2 y''' + 3(p_1 + p_2 - 2) xy'' +$$
$$+ (3p_1 - 3)(3p_2 - 4) y' + 27 c x^2 y = 0 \qquad (34)$$

и легко выразить интегралъ этого уравненія при помощи предыдущихъ формулъ.

9. На основаніи сказаннаго въ § 2 можно взять ур. (34) и при помощи его вывести случаи интегрируемости ур. (1), но только тѣ случаи, въ которыхъ интегралъ его выражается при помощи производныхъ съ цѣлыми указателями. Уравненіе (34) можно написать такъ:

$$z^2 y''' + \alpha z y'' + \beta y' + \gamma z^2 y = 0. \qquad (35)$$

Это уравненіе, будучи подвергнуто тѣмъ преобразованіямъ, которыя указаны Эйлеромъ и акад. Имшенецкимъ*, переходитъ въ новое уравненіе того-же вида, въ которомъ коэффиціенты α и β иные, а γ — тотъ же. Дѣйствительно, интегрируя это уравненіе и за-тѣмъ дифференцируя, находимъ:

$$[z^2 y'' + (\alpha - 2) z y' + (\beta - \alpha + 2)]' + \gamma x^2 y = 0 \qquad (36)$$

и полагая

* См. академика *Имшенецкаго*, «Распространеніе на линейныя уравненія вообще способа Эйлера, для изслѣдованія всѣхъ случаевъ интегрируемости одного частнаго вида линейныхъ уравненій втораго порядка». Спб. 1882.

$$y_1 = z^2y'' + (\alpha - 2)zy' + (\beta - \alpha + 2) \qquad (37)$$

приведемъ его къ такому виду:

$$\frac{1}{\gamma} x^{-2} y_1 + y = 0. \qquad (38)$$

Дифференцируя послѣднее два раза и за-тѣмъ исключая y изъ полученныхъ уравненій и (37) и (38), получаемъ:

$$z^2y'''_1 + (\alpha - 6)zy''_1 + (\beta - 3\alpha + 3.4)y'_1 + \gamma z^2 y_1 = 0.$$

Повторяя эту операцію n разъ, находимъ:

$$z^2y'''_n + \alpha_n zy''_n + \beta_n y'_n + \gamma z^2 y_n = 0, \qquad (39)$$

гдѣ $\alpha_n = \alpha - 6n$, $\beta_n = \beta - 3n\alpha + 3n(3n+1)$. (40)

Очевидно, что здѣсь n можетъ быть и отрицательнымъ.

На основаніи этого свойства и примѣняя подстановку, указанную въ § 4, мы и найдемъ всѣ случаи интегрируемости уравненія (35); ходъ разсужденій останется прежній; разница же будетъ только въ томъ, что тамъ, гдѣ въ предыдущемъ мы дифференцировали, здѣсь надо дѣлать преобразованіе по формуламъ (40).

10. Можно еще предложить пріемъ, отличный отъ предыдущихъ и интересный въ томъ отношеніи, что интеграція ур. (35) сводится на интегрированіе уравненія 2-го порядка, опредѣляющаго функціи Бесселя.

Для упрощенія въ (35) сдѣлаемъ

$$z = -\frac{x}{\sqrt[3]{\gamma}}, \qquad (41)$$

тогда уравненіе (35) обратится въ такое

$$x^2y''' + \alpha xy'' + \beta y' = x^2 y. \qquad (42)$$

Для разысканія случаевъ интегрируемости этого уравненія, найдемъ сначала интегралъ уравненія этого при $\beta=0$, т. е. уравненія

$$xy'''+\alpha y''=xy. \tag{43}$$

Полагая здѣсь

$$y=e^x u \tag{44}$$

находимъ:

$$xu'''+(3x+\alpha)u''+(3x+2\alpha)u'+\alpha u=0. \tag{45}$$

Дифференцируя это ур. k разъ, получаемъ:

$$xD^{k+3}u+(3x+\alpha+k)D^{k+2}u+$$
$$+[3x+2\alpha+3k]D^{k+1}u+(\alpha+3k)D^k u=0.$$

Полагая въ этомъ уравненіи

$$\alpha+3k=0$$

$$D^{k+1}u=e^{\lambda x}.\eta$$

находимъ:

$$x\eta''+[-2k+(2\lambda+3)x]\eta'+$$
$$+[-(2\lambda+3)k+(\lambda^2+3\lambda+3)x]\eta=0.$$

Выбирая λ такъ, чтобы

$$2\lambda+3=0,$$

получаемъ

$$x\eta''-2k\eta'+\frac{3}{4}x\eta=0. \tag{46}$$

Такимъ образомъ при $\alpha=-3k$, уравненіе (43) сводится на уравненіе (46), которое и служитъ опредѣленіемъ функцій Бесселя. Интегралъ (43) будетъ:

$$y=e^x D^{-(k+1)}\left[e^{-\frac{3}{2}x}\eta\right]. \tag{47}$$

Если k цѣлое, уравненіе (46) интегрируется конечнымъ числомъ членовъ; слѣдовательно, при этомъ же условіи уравненіе (43) тоже интегрируется конечнымъ числомъ членовъ. Если-же, умноживъ уравненіе (43) на x, мы подвергнемъ его преобразованіямъ по способу Эйлера и Имшенецкаго и повторимъ эту операцію n разъ, то по формуламъ (40) получимъ слѣдующее уравненіе

$$x^2 y'''_n - 3(2n+k) x y''_n + 3n(3n+3k+1) y'_n = x^2 y_n. \quad (48)$$

Ясно, что послѣ замѣны x чрезъ z по формулѣ (41) можно считать это уравненіе тождественнымъ съ (34), такъ какъ различіе между ними только въ обозначеніяхъ.

Пользуясь же формулой (38), интегралъ уравненія (48) будетъ при n положительномъ:

$$y_n = \left[D^{-1} x^2 \right]^n y, \quad (49)$$

при n отрицательномъ

$$y_{-n} = \left[x^{-2} D \right]^n y. \quad (50)$$

Символы здѣсь означаютъ повтореніе n разъ операціи, указанной въ скобкахъ, надъ y-омъ, а y опредѣляется формулой (47).

Изъ предыдущаго ясно, что первые два пріема можно приложить къ уравненіямъ болѣе высокихъ порядковъ, но аналогичныхъ съ (1), и такимъ образомъ разыскать случаи интегрируемости этихъ уравненій, а также ихъ интегралы.

ЗАМѢТКА ОБЪ УРАВНЕНІИ

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (ae^x + 2)\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

П. С. Флорова.

Это уравненіе было предложено профессоромъ Ковальскимъ[1]. Чтобы проинтегрировать его, назовемъ черезъ u и v нѣкоторыя функціи x и сдѣлаемъ подстановку $y = uv$; будемъ имѣть:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left\{ 2\frac{u'}{u} - (ae^x + 2) \right\} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{u}\left\{ u'' - (ae^x + 2)u' + u \right\} v = 0.$$

Отсюда, положивъ

$$2\frac{u'}{u} - (ae^x + 2) = w,$$

получимъ

$$\frac{d^2v}{dx^2} + w\frac{dv}{dx} + \frac{1}{4}\left\{ 2w' + w^2 - 2ae^x - (ae^x)^2 \right\} v = 0.$$

Этому уравненію можно удовлетворить допущеніями

$$2w' + w^2 = 2ae^x + (ae^x)^2$$

---

[1] См. протоколъ засѣд. 31 янв. 1883 года.

$$\frac{d^2v}{dx^2} + w\frac{dv}{dx} = 0,$$

а, значитъ, допущеніями

$$w = ae^x$$

$$v = c_1 + c_2 \int e^{-ae^x} dx$$

гдѣ c_1 и c_2 произвольныя постоянныя. Такъ какъ

$$u = e^{ae^x + x},$$

то полный интегралъ предложеннаго уравненія будетъ

$$y = e^{ae^x + x}\left(c_1 + c_2 \int e^{-ae^x} dx\right).$$

ОБЪ УСЛОВІЯХЪ

ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНІЯ

$$\frac{d^3u}{dx^3}+x^mu=0.$$

П. С. Флорова.

§ 1. Непосредственно очевидны два случая, въ которыхъ уравненіе

$$\frac{d^3u}{dx^3}+x^mu=0 \qquad (1)$$

интегрируется: это $m=0$ и $m=-3$. Въ первомъ изъ этихъ случаевъ полный его интегралъ выражается, какъ извѣстно, отношеніемъ

$$u=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}+c_3e^{r_3x};$$

во второмъ — отношеніемъ

$$u=c_1e^{\varrho_1x}+c_2e^{\varrho_2x}+c_3e^{\varrho_3x},$$

гдѣ c_1 c_2 c_3 произвольныя постоянныя, а r и ϱ корни уравненій:

$$r^3+1=0, \qquad \varrho(\varrho-1)(\varrho-2)+1=0.$$

§ 2. Для опредѣленія другихъ случаевъ интегрируемости уравненія (1) умножаемъ его на x^{-m} и потомъ дифференцируемъ; результатомъ будетъ уравненіе

$$\frac{d^3\omega}{dx^3} - \frac{m}{x}\frac{d^2\omega}{dx^2} + x^m\omega = 0,$$

въ которомъ $\omega = \dfrac{du}{dx}$. Измѣнивъ въ этомъ уравненіи перемѣнное независимое по формулѣ

$$x = \left(\frac{c+1}{a}\,\xi\right)^{\frac{1}{c+1}},$$

гдѣ a и c нѣкоторыя постоянныя, связанныя между собою отношеніемъ

$$a^{m+3} = (c+1)^{m-3c},$$

найдемъ:

$$\frac{d^3\omega}{d\xi^3} - \frac{m-3c}{(c+1)\xi}\frac{d^2\omega}{d\xi^2} + \frac{c(c-m-1)}{(c+1)^2\xi^2}\frac{d\omega}{d\xi} + \xi^{\frac{m-3c}{c+1}}\omega = 0.$$

Полагая здѣсь

$$c = m+1,$$

получимъ

$$\frac{d^3\omega}{d\xi^3} + \frac{2m+3}{(m+2)\xi}\frac{d^2\omega}{d\xi^2} + \xi^{-\frac{2m+3}{m+2}}\omega = 0.$$

Умноживъ это уравненіе на $\xi^{\frac{2m+3}{m+2}}$ и проинтегрировавъ результатъ, будемъ имѣть:

$$\frac{d^3\theta}{d\xi^3} + \xi^{-\frac{2m+3}{m+2}}\theta = 0,$$

гдѣ $\theta = \int \omega\, d\xi$.

§ 3. Если въ уравненіи (1) измѣнимъ перемѣнное независимое по формулѣ

$$x = -\frac{1}{\xi},$$

то, въ силу отношенія

$$(\alpha) \qquad \frac{d^3u}{dx^3} = \xi^4 \frac{d^3}{d\xi^3}(\xi^2 u),$$

получимъ

$$\frac{d^3}{d\xi^3}(\xi^2 u) + \xi^{-(m+4)} u = 0.$$

Отсюда, положивъ

$$\xi^2 u = v,$$

найдемъ

$$\frac{d^3 v}{d\xi^3} + \xi^{-(m+6)} v = 0.$$

§ 4. Такимъ образомъ отъ уравненія (1), модуль котораго m, можно перейдти къ уравненіямъ, модули которыхъ таковы:

$$-(m+6) \quad \text{и} \quad -\frac{2m+3}{m+2}.$$

Въ свою очередь упомянутыя сейчасъ уравненія способны обратиться въ уравненія съ слѣдующими модулями:

$$-\frac{2m+9}{m+4} \quad \text{и} \quad -\frac{4m+9}{m+2}.$$

Сказаннаго вполнѣ достаточно для того, чтобы опредѣлить всѣ случаи, въ которыхъ уравненіе (1) можетъ быть проинтегрировано помощью преобразованій, указанныхъ въ двухъ предыдущихъ параграфахъ. Въ самомъ дѣлѣ, если рядъ преобразованій, необходимыхъ для измѣненія модуля m въ $-\frac{2m+9}{m+4}$, назовемъ одною операціей, то понятно, что, по совершеніи i такихъ операцій надъ уравненіемъ (1), получимъ уравненіе съ слѣдующимъ модулемъ:

$$-\frac{(3i-1)m+9i}{im+3i+1}. \qquad (\alpha)$$

Подобнымъ образомъ отъ модуля $-\frac{4m+9}{m+2}$ перейдемъ къ такому модулю

$$-\frac{(3i+1)m+9i}{im+3i-1}. \qquad (\beta)$$

Если теперь каждое изъ уравненій, модули которыхъ (α) и (β), подвергнемъ преобразованію, указанному въ предыдущемъ параграфѣ, то измѣнимъ эти модули въ такіе:

$$-\frac{(3i+1)m+9i+6}{im+3i+1} \qquad (\gamma)$$

$$-\frac{(3i-1)m+9i-6}{im+3i-1}. \qquad (\delta)$$

Приравнявъ формулы (α), (β), (γ), (δ) сначала нулю, а потомъ -3, получимъ:

$$m=\frac{-9i}{3i-1}$$

$$m=\frac{-9i}{3i+1}$$

$$m=-\frac{9i+6}{3i+1}$$

$$m = -\frac{9i - 6}{3i - 1}$$

$$m = -3.$$

Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе (1) интегрируется во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда

$$m = -3 \pm \frac{3}{3i - 1},$$

гдѣ i какое угодно положительное или отрицательное цѣлое число. Понятно, что можно даже полагать $i = \pm \infty$, ибо положеніе это даетъ $m = -3$.

Протоколъ засѣданія 16 декабря 1883 года.

Присутствовали: Д. М. Деларю, К. А. Андреевъ, С. А. Раевскій, А. П. Грузинцевъ, Н. Д. Пильчиковъ, А. А. Клюшниковъ, Г. В. Левицкій, М. Ѳ. Ковальскій, М. А. Тихомандрицкій, П. С. Флоровъ и В. П. Алексѣевскій.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Деларю.

1. Г. предсѣдательствовавшій *Д. М. Деларю* доложилъ собранію о поступленіи въ общество двухъ рукописей *А. А. Маркова* и затѣмъ изложилъ содержаніе первой изъ нихъ «о задачѣ Чебышева».

2. *П. С. Флоровъ* сдѣлалъ сообщеніе объ уравненіи $y''' + x^m y = 0$.

3. *М. Ѳ. Ковальскій* сдѣлалъ дополненіе къ сообщенію г. Флорова.

4. *В. П. Алексѣевскій* сдѣлалъ сообщеніе объ уравненіи

$$x^2 y''' + Axy'' + By' + Cx^{\mu} y = 0.$$

5. Г. предсѣдательствовавшій доложилъ о вновь полученныхъ книгахъ, а именно:

1) Journal de Mathématiques élémentaires, 2-e série. 1883. Octobre № 10 и Novembre № 11.
2) Journal de Mathématiques spéciales, 2-e série. 1883. Oct. № 10 и Nov. № 11.
3) Mathesis, T. III. Octobre 1883.
4) Кіевскія университетскія извѣстія 1883 года № 10, октябрь.

6. *М. Ѳ. Ковальскій* сдѣлалъ сообщеніе о теоремѣ Фермата въ случаѣ четныхъ показателей.