Communications et procès-verbaux de la société mathématique de Kharkow. Année 1886, 1-re livraison (XV du commencement de l'édition).

СООБЩЕНІЯ

И

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ

ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ

1886 ГОДА.

1.

ХАРЬКОВЪ.
Въ Университетской Типографіи.
1886.

Отдѣльные оттиски изъ «Записокъ Императорскаго Харьковскаго Университета».

СОДЕРЖАНІЕ.

Протоколы засѣданій:

Стран.

14-го февраля 1886 года . . . . 1—2.

21-го марта — — . . . . 15—16.

Сообщенія:

1. *П. С. Флорова*, Приложеніе основныхъ формулъ теорій междупредѣльнаго дифференцированія къ суммованію безконечныхъ рядовъ. . . . . . . 3—14.

2. *А. П. Грузинцева*, О теоріи дисперсіи Фойхта. 17—30.

3. *П. С. Флорова*, Замѣтка о частныхъ интегралахъ одного линейнаго дифференціальнаго уравненія . . . . 31—32.

4. *М. А. Тихомандрицкаго*, Къ теоріи радіуса кривизны . . . . 33—41.

5. *Его-же*, Разность n-го порядка логариѳмической функціи . . . . 42—44.

TABLE DES MATIÈRES.

Extraits des procès-verbaux:

Стран.

Séance du 14 février 1886. . . . . 1— 2.

Séance du 21 mars — . . . . 15—16.

Communications:

1. *P. S. Floroff*, Application des formules fondamentales de la théorie de la différentiation à indice quelconque à la sommation des séries infinies . . 3—14.

2. *A. P. Grousintzeff*, Sur la théorie de la dispersion de Voïgt . . . . 17—30.

3. *P. S. Floroff*, Note sur les intégrales particulières d'une équation différentielle linéaire. . . 31—32.

4. *M. A. Tikhomandritsky*, Contribution à la théorie du rayon de courbure . . . . 33—41.

5. *Le même*, Différence d'ordre *n* d'une fonction logarithmique . . . . 42—44.

ПРОТОКОЛЪ ЗАСѢДАНІЯ

математическаго общества, состоящаго при Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ,

14 февраля 1886 года.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, Г. В. Левицкій, В. Л. Кирпичевъ, М. А. Тихомандрицкій, А. В. Гречаниновъ, А. С. Грицай, В. П. Алексѣевскій, А. М. Ляпуновъ, Н. Д. Пильчиковъ, А. В. Маевскій, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. Г. предсѣдатель сообщилъ о полученіи слѣдующихъ статей: 1) *Профес. Поссе* «О функціяхъ подобныхъ функціямъ Лежандра», — доложить эту статью принялъ на себя М. А. Тихомандрицкій; 2) *Г. Флорова* «Приложеніе основныхъ формулъ теоріи междупредѣльнаго дифференцированія къ суммованію безконечныхъ рядовъ», — ознакомить общество съ содержаніемъ этой статьи взялся В. П. Алексѣевскій.

2. М. А. Тихомандрицкій изложилъ содержаніе вышеупомянутой статьи профес. *Поссе*.

3. *А. В. Гречаниновъ* сообщилъ свою статью подъ заглавіемъ — «О треніи цапфъ о подшипники».

4. *М. А. Тихомандрицкій* предложилъ выписать журналъ «Школа математики», издаваемый г. Сениговымъ, въ С.-Петербургѣ. Постановлено: выписать.

5. Г. предсѣдатель доложилъ о полученіи слѣдующихъ изданій:

1) Кіевскія университетскія извѣстія № 12, декабрь 1885.
2) Журналъ русскаго физико-химическаго общества № 9 за 1885 г. и № 1 за 1886 г.
3) Bulletin de la société Impériale des naturalistes de Moscou. № 2, 1885.
4) Журналъ элементарной математики. Т. 2-й, № 11 (1886).
5) *Weierstrass*, Zu Lindemann's Abhandlung: «Ueber die Ludolph'sche Zahl».
6) Mathesis, Janvier, 1886.
7) Journal de mathématiques élémentaires. №№ 1 et 2, 1886.
8) Journal de mathématiques spéciales. №№ 1 et 2, 1886.

ПРИЛОЖЕНІЕ
ОСНОВНЫХЪ ФОРМУЛЪ ТЕОРІИ
МЕЖДУПРЕДѢЛЬНАГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНІЯ КЪ СУММОВАНІЮ БЕЗКОНЕЧНЫХЪ РЯДОВЪ.

П. С. Флорова.

Въ этой замѣткѣ излагаются рѣшенія трехъ задачъ, относящихся къ суммованію безконечныхъ рядовъ, изъ которыхъ одинъ дается явно, а другіе посредствомъ дифференціальныхъ уравненій. Пріемъ', помощью котораго рѣшаются эти задачи, основанъ на теоріи междупредѣльнаго дифференцированія и однажды (вторая книжка «Сообщеній» за 1885 годъ) былъ уже употребленъ нами для суммованія строки интегрирующей двучленное дифференціальное уравненіе.

Задача 1.

Выразить сумму безконечнаго ряда

$$\frac{1}{\Gamma(1)^n}+\frac{x}{\Gamma(2)^n}+\frac{x^2}{\Gamma(3)^n}+\frac{x^3}{\Gamma(4)^n}+\ldots\ldots$$

въ опредѣленныхъ интегралахъ.

Рѣшеніе. Обозначивъ эту сумму черезъ u и принявъ во вниманіе отношеніе

$$\Gamma(1+np)=(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}\, n^{np+\frac{1}{2}} \prod_{i=0}^{n-1} \Gamma\left(1+p-\frac{i}{n}\right)$$

получимъ

$$u=(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{n^{np+\frac{1}{2}}x^p}{\Gamma(1+np)}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{\Gamma\left(1+p-\frac{i}{n}\right)}{\Gamma(1+p)};$$

это равенство посредствомъ извѣстной формулы А. В. Лѣтникова

$$x^{-p}D^{-\frac{i}{n}}x^{p-\frac{i}{n}}=\Gamma\left(1+p-\frac{i}{n}\right):\Gamma(1+p),$$

гдѣ дифференцированіе начинается отъ $x=0$, легко приводится къ равенству

$$u=n^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}\prod_{i=1}^{n-1}\left(D^{-\frac{i}{n}}x^{-\frac{i}{n}}\right)\theta(x),$$

въ которомъ, обозначая черезъ λ первообразный корень уравненія $\lambda^n=1$, для краткости положено:

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{n^{np+1}x^p}{\Gamma(1+np)}=\theta(x)=\sum_{p=0}^{n-1}e^{n\lambda^p x^{\frac{1}{n}}}.$$

Употребивъ формулу А. В. Лѣтникова, выражающую переходъ отъ обобщенныхъ производныхъ къ опредѣленнымъ интеграламъ, и принявъ во вниманіе отношеніе

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=n^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

найдемъ:

$$u=(2\pi)^{1-n}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\int_0^{\alpha_{i-1}}(\alpha_{i-1}-\alpha_i)^{\frac{i}{n}-1}\alpha_i^{-\frac{i}{n}}d\alpha_i\right)\theta(\alpha_{n-1}),$$

гдѣ $\alpha_0=x$. Это и есть искомое рѣшеніе задачи; оно легко повѣряется помощью слѣдующихъ разсужденій.

Повѣрка. Если перемѣнныя, по которымъ производятся интегрированія, измѣнимъ по формулѣ:

$$\alpha_i=\alpha_{i-1}\beta_i=x\beta_1\beta_2\ldots\beta_i,$$

то будемъ имѣть

$$u=(2\pi)^{1-n}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\int_0^1(1-\beta_i)^{\frac{i}{n}-1}\beta_i^{-\frac{i}{n}}d\beta_i\right)\theta(x\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}).$$

Развернувъ функцію θ по степенямъ аргумента, получимъ:

$$u=(2\pi)^{1-n}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{n^{np+1}x^p}{\Gamma(1+np)}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\int_0^1(1-\beta_i)^{\frac{i}{n}-1}\beta_i^{p-\frac{i}{n}}d\beta_i\right).$$

Отсюда наконецъ посредствомъ формулы

$$\int_0^1(1-\beta_i)^{\frac{i}{n}-1}\beta_i^{p-\frac{i}{n}}d\beta_i=\frac{\Gamma\left(\frac{i}{n}\right)\Gamma\left(1+p-\frac{i}{n}\right)}{\Gamma(1+p)}$$

найдемъ:

$$u=\frac{1}{\Gamma(1)^n}+\frac{x}{\Gamma(2)^n}+\frac{x^2}{\Gamma(3)^n}+\frac{x^3}{\Gamma(4)^n}+\ldots.$$

Это и нужно было показать.

Задача 2.

Выразить строку опредѣляемую уравненіемъ

$$x^n \frac{d^n u}{dx^n} + \beta_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + \beta_k x^{n-k} \frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}} = x^n u$$

въ обобщенныхъ производныхъ.

Рѣшеніе. Если корни уравненія

$$[m]^n + \beta_1 [m]^{n-1} + \ldots + \beta_k [m]^{n-k} = 0,$$

которые будемъ предполагать вещественными, обозначимъ черезъ

$$0\ 1\ 2 \ldots\ldots n-k+1\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_k$$

и если положимъ

$$u = A_0 x^m + A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2} + \ldots\ldots,$$

то будемъ имѣть

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(m_p - \alpha_1)(m_p - \alpha_2)\ldots(m_p - \alpha_k)\,\Gamma(1+m_p)}{(m_p - n+1)(m_p - n+2)\ldots(m_p - n+k)\Gamma(1+m_p - n)} A_p x^{m_p - n}.$$

Равенства правыхъ частей отношеній для u можно достигнуть положеніемъ

$$m_p = np + m,$$

гдѣ m одно изъ чиселъ ряда

$$0\ 1\ 2 \ldots\ldots n-k+1\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_k,$$

и положеніемъ

$$(m+n-\alpha_1+np)\ldots(m+n-\alpha_k+np)\Gamma(1+m+n+np)A_{p+1}=$$
$$=(1+m+np)(2+m+np)\ldots(k+m+np)\Gamma(1+m+np)A_p,$$

рѣшеніе котораго относительно A_p въ связи съ окончательнымъ рѣшеніемъ предложенной задачи разсмотримъ въ слѣдующихъ случаяхъ.

Случай 1. Пусть m будетъ одно изъ чиселъ ряда

$$0\ 1\ 2\ldots\ldots n-k+1;$$

при этомъ условіи интегралъ уравненія опредѣляющаго A_p легко приводится къ виду

$$A_p=\frac{\text{Const}}{\Gamma(1+m+np)}\prod_{i=1}^{k}\frac{\Gamma\left(\frac{m+i}{n}+p\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n-\alpha_i}{n}+p\right)}.$$

Такъ какъ относительно m нами сдѣлано допущеніе $m+1>0$, то выраженіе

$$\Gamma\left(\frac{m+i}{n}+p\right):\Gamma\left(\frac{m+n-\alpha_i}{n}+p\right)$$

можно замѣнить выраженіемъ

$$z^{\frac{\alpha_i-m}{n}-p}\,D_z^{\frac{\alpha_i-n+i}{n}}\,z^{\frac{m+i}{n}+p-1},$$

гдѣ дифференцированіе начинается отъ $z=0$. Сдѣлавъ эту замѣну самымъ дѣломъ и положивъ

$$\text{Const}=n,\quad z=x^n,$$

получимъ

$$A_p x^{np+m} = z\prod_{i=1}^{k}\left(z^{\frac{\alpha_i-n+i-1}{n}} D_z^{\frac{\alpha_i-n+i}{n}}\right)\frac{nz^{\frac{m+k}{n}+p-1}}{\Gamma(1+m+np)}$$

Взявъ сумму отъ обѣихъ частей этого равенства въ предѣлахъ отъ $p=0$ до $p=\infty$ и принявъ во вниманіе тождество

$$\sum_{p=0}^{n-1}\lambda^{-mp}e^{\lambda^p x}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{nx^{np+m}}{\Gamma(1+m+np)},$$

въ которомъ λ означаетъ первообразный корень уравненія $\lambda^n=1$, найдемъ:

$$u=z\prod_{i=1}^{k}\left(z^{\frac{\alpha_i-n+i-1}{n}} D_z^{\frac{\alpha_i-n+i}{n}}\right)z^{\frac{k-n}{n}}\sum_{p=0}^{n-1}\lambda^{-mp}e^{\lambda^p z^{\frac{1}{n}}}.$$

Случай 2. Если сдѣлаемъ положенія

$$m=\alpha_r \quad \alpha_i-n+i=n\delta_i$$

и если подъ δ_r будемъ разумѣть нуль или цѣлое положительное число, а подъ δ съ другими нумерами какія угодно цѣлыя числа, то изъ уравненія опредѣляющаго A_p легко найдемъ

$$A_{p-\delta_r}=\frac{[q_1]^{\delta_1}[q_2]^{\delta_2}\dots[q_k]^{\delta_k}}{\Gamma(1+n-r+np)\,\mathrm{Const}},$$

гдѣ при δ_i положительномъ

$$q_i=\frac{i-r}{n}+p,$$

а при δ_i отрицательномъ

$$q_i = \frac{i-r}{n} + p + 1.$$

Полученная формула посредствомъ отношенія

$$z^{\frac{r-i}{n} - p + \delta_i} D_z^{\delta_i} z^{\frac{i-r}{n} + p} = [q_i]^{\delta_i}$$

и допущеній

$$n\,\mathrm{Const} = 1, \quad z = x^n,$$

безъ труда преобразуется въ такую

$$A_{p-\delta_r} x^{np-n\delta_r+m} = z \prod_{i=1}^{k} \left(z^{\delta_i - \frac{1}{n}} D_z^{\delta_i} \right) \frac{n z^{\frac{k-r}{n} + p}}{\Gamma(1+n-r+np)}$$

Замѣтивъ, что $A_{p-\delta_r}$ при p равномъ любому числу ряда

$$0 \;\; 1 \;\; 2 \ldots\ldots \delta_r - 1$$

есть нуль, и взявъ сумму отъ обѣихъ частей предыдущаго равенства въ предѣлахъ отъ $p=0$ до $p=\infty$, получимъ

$$u = z \prod_{i=1}^{k} \left(z^{\delta_i - \frac{1}{n}} D_z^{\delta_i} \right) z^{\frac{k-n}{n}} \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^{rp} e^{\lambda^p z^{\frac{1}{n}}},$$

гдѣ λ по прежнему означаетъ первообразный корень уравненія $\lambda^n = 1$. При вычисленіи функціи u по этой формулѣ не должно принимать во вниманіе тѣхъ постоянныхъ произвольныхъ, которыя вводятся дѣйствіемъ $D_z^{\delta_i}$ при δ_i отрицательномъ.

Случай 3. Если предположимъ теперь

$$m = \alpha_r \quad \alpha_i - n + i = -n\delta_i$$

и если подъ δ_r условимся понимать цѣлое положительное число отличное отъ нуля, а подъ δ съ другими нумерами какія угодно цѣлыя числа, то коэффиціенты строки

$$A_0 x^m + A_1 x^{n+m} + A_2 x^{2n+m} + \ldots\ldots$$

получатъ слѣдующія значенія

$$A_{p+\delta_r} = \frac{[q_1]^{-\delta_1}[q_2]^{-\delta_2}\ldots\ldots[q_k]^{-\delta_k}}{\Gamma(1+n-r+np)\,\mathrm{Const.}}$$

$$(k-r)!\,A_{\delta_r-1} =$$

$$=(n\delta_1-r+1)(n\delta_2-r+2)\ldots(n\delta_k-r+k)(n-r)!\,A_{\delta_r}$$

$$A_{\delta_r-p} = \frac{\Gamma(r-n+np)\,\mathrm{C'onst.}}{[\rho_1]^{\delta_1}[\rho_2]^{\delta_2}\ldots[\rho_k]^{\delta_k}}\cdot\frac{(-1)^{(n+1)p}\,\delta_r!}{(p-1)!\,(\delta_r-p)!}.$$

Въ первомъ изъ этихъ равенствъ p измѣняется отъ нуля до ∞, въ послѣднемъ отъ единицы до δ_r; кромѣ того при δ_i положительномъ

$$q_i = \frac{i-r}{n} + p + 1$$

$$\rho_i = \frac{\delta_r - p + 1}{(i-r)!\,(r-i)!} + \frac{r-i}{n} + p - 1,$$

а при δ_i отрицательномъ

$$q_i = \frac{i-r}{n} + p$$

$$\rho_i = \frac{r-i}{n} + p.$$

Связь между постоянными Const и C'onst, изъ которыхъ одно произвольно, выражается отношеніемъ

$$\mathrm{Const.}\ \mathrm{C'onst} = n(-1)^{n+r+\delta_r+\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_k}.$$

Если воспользуемся формулой

$$z^{\frac{r-i}{n}-p-\delta_i} D_z^{-\delta_i} z^{\frac{i-r}{n}+p} = [q_i]^{-\delta_i}$$

и если сдѣлаемъ положенія

$$n\text{Const} = 1, \quad z = x^n,$$

то получимъ

$$u = z^{1-\delta_r-\frac{r}{n}} (A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_{\delta_r - 1} z^{\delta_r - 1}) +$$

$$+ z \prod_{i=1}^{k} \left(z^{-\delta_i - \frac{1}{n}} D_z^{-\delta_i} \right) z^{\frac{k-n}{n}} \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^{rp} e^{\lambda^p z^{\frac{1}{n}}}.$$

Понятно, что функцію u можно вычислить и помощью отношенія

$$u = z \prod_{i=1}^{k} \left(z^{-\delta_i - \frac{1}{n}} D_z^{-\delta_i} \right) z^{\frac{k-n}{n}} \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^{rp} e^{\lambda^p z^{\frac{1}{n}}},$$

если условиться при этомъ вычисленіи—тѣ постоянныя произвольныя, которыя вводятся дѣйствіемъ $D_z^{-\delta_r}$, принимать во вниманіе, а тѣ, которыя вводятся дѣйствіемъ $D_z^{-\delta_i}$ при i отличномъ отъ r (буде δ_i положительное число), опускать.

Примѣчаніе 1. Сходимость разсмотрѣнныхъ нами строкъ весьма легко усматривается изъ тѣхъ значеній A_p, которыя мы нашли для этого коэффиціента; вотъ причина, по которой мы обошли молчаніемъ вопросъ о сходимости.

Примѣчаніе 2. Изложенный выше анализъ показываетъ, что если имѣетъ мѣсто отношеніе

$$\alpha_i - n + i = n\delta_i,$$

гдѣ δ_i какое угодно цѣлое число, и если условиться принимать во вниманіе всѣ постоянныя произвольныя вводимыя дѣйствіями $D_z^{\delta_i}$, то полный интегралъ уравненія для u можно представить въ видѣ:

$$u = z \prod_{i=1}^{k} \left(z^{\delta_i - \frac{1}{n}} D_z^{\delta_i} \right) z^{\frac{k-n}{n}} e^{\lambda z^{\frac{1}{n}}},$$

гдѣ λ любой корень уравненія $\lambda^n = 1$, а $z = x^n$.

Мысль, которую мы сейчасъ высказали, можно формулировать еще слѣдующимъ образомъ.

Если корни уравненія

$$[m]^n + \beta_i [m]^{n-1} + \ldots + \beta_k [m]^{n-k} = 0$$

по модулю n соотвѣтственно сравнимы съ числами ряда

$$0 \; 1 \; 2 \ldots . n-1,$$

то полный интегралъ уравненія

$$x^n \frac{d^n u}{dx^n} + \beta_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots \beta_k x^{n-k} \frac{d^{n-k} u}{dx^{n-k}} = x^n u$$

выражается конечною формой.

Для примѣра разсмотримъ уравненіе:

$$\frac{d^n u}{dx^n} - \frac{n(r+k)}{x} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \frac{nr(nk+1)}{x^2} \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} = u.$$

Если r и k цѣлыя числа, то интегралъ его, безъ сомнѣнія, будетъ

$$u = z^{k + \frac{n-1}{n}} D_z^{k} z^{r - \frac{1}{n}} D_r^{r} z^{\frac{2-n}{n}} e^{\lambda z^{\frac{1}{n}}}.$$

Примѣчаніе 3. Дифференціальное уравненіе

$$x^n\frac{d^nu}{dx^n}+\beta_1 x^{n-1}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\ldots+\beta_k x^{n-k}\frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}}=x^nu$$

въ интегрируемыхъ случаяхъ было предметомъ изслѣдованій В. П. Алексѣевскаго (третья книжка «Сообщеній» за 1884 годъ). Мы рѣшились вновь говорить объ этомъ уравненіи потому, что употребленный нами способъ его интегрированія не только раскрылъ простѣйшую форму его интеграловъ въ интегрируемыхъ случаяхъ, но и оказался годнымъ для вычисленія $n-k$ частныхъ его рѣшеній въ неинтегрируемыхъ случаяхъ.

Задача 3.

Выразить строку опредѣляемую, уравненіемъ

$$x^k\frac{d^{n+k}u}{dx^{n+k}}=x^k\frac{d^ku}{dx^k}+\beta_1 x^{k-1}\frac{d^{k-1}u}{dx^{k-1}}+\ldots+\beta_{k-1}x\frac{du}{dx}+\beta_k u,$$

въ обобщенныхъ производныхъ.

Рѣшеніе этой задачи мы разсмотримъ лишь въ томъ частномъ случаѣ, когда корни уравненія

$$[m]^k+\beta_1[m]^{k-1}+\ldots+\beta_{k-1}m+\beta_k=0$$

вещественны и когда каждый изъ нихъ меньше k.

Если назовемъ эти корни черезъ

$$\alpha_1\ \alpha_2\ldots\ldots\alpha_k$$

и если положимъ

$$u=A_0x^m+A_1x^{m_1}+A_2x^{m_2}+\ldots,$$

то будемъ имѣть

$$x^k \frac{d^{n+k}u}{dx^{n+k}} = \sum_{p=0}^{\infty} m_p(m_p-1)\ldots(m_p-n-k+1)\,A_p x^{m_p-n}$$

$$x^k \frac{d^{n+k}u}{dx^{n+k}} = \sum_{p=0}^{\infty} (m_p-\alpha_1)(m_p-\alpha_2)\ldots(m_p-\alpha_k)\,A_p x^{m_p}.$$

Замѣтивъ, что правыя части этихъ отношеній при условіяхъ

$$m_p = p + k$$

$$A_p = \frac{\lambda^p}{\Gamma(1+p)} \prod_{i=1}^{k} \frac{\Gamma\left(\frac{p+k-\alpha_i}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+p+k+n-i}{n}\right)},$$

гдѣ λ любой корень уравненія $\lambda^n = 1$, дѣлаются равными между собою, получимъ

$$u = \prod_{i=1}^{k} \left(D_z^{\frac{i-\alpha_i-n-1}{n}} z^{\frac{i-\alpha_i-n}{n}} \right) e^{\lambda z^{\frac{1}{n}}}.$$

Таково рѣшеніе предложенной задачи; въ немъ $z = x^n$.

Изъ него же между прочимъ видно, что n интеграловъ уравненія для u выразятся конечною формой, если числа

$$\alpha_1 \ \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_k$$

по модулю n будутъ сравнимы съ числами ряда

$$1 \ 2 \ldots\ldots k.$$

Красная Слобода.
5 Февраля 1886 года.

Протоколъ засѣданія 21 марта.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, В. Л. Кирпичевъ, А. В. Гречаниновъ, А. С. Грицай, А. А. Клюшниковъ, М. А. Тихомандрицкій, М. Ѳ. Ковальскій, Н. Д. Пильчиковъ, В. П. Алексѣевскій, И. К. Шейдтъ, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. В. П. Алексѣевскій изложилъ содержаніе статьи *П. С. Флорова*—«Приложеніе основныхъ формулъ теоріи междупредѣльнаго дифференцированія къ суммованію безконечныхъ рядовъ».

2. *А. П. Грузинцевъ* прочелъ свою статью подъ заглавіемъ—«О теоріи дисперсіи Фойхта».

3. *М. А. Тихомандрицкій* изложилъ свою замѣтку—«Къ теоріи радіуса кривизны».

4. *В. П. Алексѣевскій* сообщилъ—«Элементарный выводъ формулы маятника».

5. Г. предсѣдатель доложилъ о письмѣ г. Фролова изъ гор. Архангельска, въ коемъ авторъ излагаетъ свои соображенія по поводу статьи, напечатанной въ «Математическомъ листкѣ» о томъ, какъ древніе извлекали корни.

6. Онъ-же доложилъ о книгахъ, полученныхъ харьковскимъ математическимъ обществомъ:

1) Bulletin de la société mathématique de France. T. XIV, № 1 (1886).

2) Journal de sc. math. Vol. VI, № 6.
3) American Journal of Mathematics. Vol. VIII, № 2.
4) Математическій сборникъ. Т. 12, вып. 4.
5) Журналъ русскаго физико-химическаго общества. Т. XVIII, вып. 2.
6) Журналъ элементарной математики. Т. II, № 13.
7) Кіевскія университетскія извѣстія. № 1, 1886.
8) Mathesis. Fevrier, 1886.
9) Journal de mathématiques élémentaires, Mars. 1886.
10) Journal de mathématiques spéciales, Mars, 1886.
11) Физико-математическія науки. №№ 10, 11 и 12 за 1885 г. и № 1, 1886.
12) Школа математики. №№ 1, 2, 3 и 4 (1886).

7. Г. предсѣдатель доложилъ, что профессоръ Н. Я. Сонинъ прислалъ математическому обществу слѣдующія свои сочиненія:

1) Замѣтки о выводѣ уравненій распространенія теплоты въ кристаллахъ. Варшава. 1878.
2) Объ опредѣленіи максимума и минимума свойствъ плоскихъ кривыхъ. Варшава. 1886.
3) О числовыхъ тождествахъ. Варшава. 1885.
4) Объ одномъ опредѣленномъ интегралѣ. Варш. 1885.
5) Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія. 2 статьи.
6) Обобщеніе одной формулы Абеля.
7) Recherches sur les fonctions cylindriques.
8) Объ интегрируемости выраженій, содержащихъ неопредѣленныя функціи. Статья I.
9) Обобщенія принципа послѣдняго множителя. 1875.
10) Объ интегрируемости уравненій съ частными производными 2-го порядка. 1874.

О ТЕОРІИ ДИСПЕРСІИ ФОЙХТА.

А. П. Грузинцева.

Въ 1883 году профессоръ Фойхтъ опубликовалъ въ Анналахъ Видемана двѣ работы по теоріи дисперсіи свѣта; въ одной изъ нихъ, именно въ первой, онъ разбираетъ теорію дисперсіи, данную Кеттелеромъ, въ другой — излагаетъ свою собственную. Относительно теоріи Кеттелера онъ приходитъ къ тому же выводу, къ которому пришелъ и я за годъ ранѣе его[1], именно, что теорія Кеттелера не состоятельна; поэтому здѣсь мы не будемъ заниматься первою статьей Фойхта, а обратимъ вниманіе только на вторую, въ которой Фойхтъ излагаетъ свою собственную теорію дисперсіи для прозрачныхъ срединъ; этою послѣднею мы и займемся здѣсь.

Фойхтъ, подобно другимъ физикамъ, занимавшимся теоріей дисперсіи, принимаетъ существованіе вліянія матерьяльныхъ частицъ тѣла на эфиръ и обратно — эфира на матерію. Основныя уравненія своей теоріи онъ пишетъ сначала въ слѣдующей формѣ:

---

[1] Сообщенія харьк. мат. общ. за 1882 г., вып. I, стр. 23 и 35, или также — «О двойномъ лучепреломленіи въ связи съ свѣторазсѣяніемъ». Харьковъ. 1882.

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = X' + X + A$$

$$m\frac{d^2v}{dt^2} = Y' + Y + B$$

$$m\frac{d^2w}{dt^2} = Z' + Z + C$$

это для движенія эфирной частицы, причемъ значеніе буквъ слѣдующее: m—масса колеблющейся эфирной частицы, u, v, w—составляющія ея колебанія; X', Y', Z' составляющія внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на эфиръ; X, Y, Z составляющія упругихъ силъ эфира и наконецъ A, B, C—составляющія силы взаимодѣйствія матерьяльныхъ частицъ на эфирную.

Для матерьяльной частицы уравненія будутъ:

$$\mu\frac{d^2U}{dt^2} = \Xi' + \Xi + \mathrm{A}$$

$$\mu\frac{d^2V}{dt^2} = \mathrm{H}' + \mathrm{H} + \mathrm{B}$$

$$\mu\frac{d^2W}{dt^2} = \mathrm{Z}' + \mathrm{Z} + \Gamma.$$

Здѣсь значенія буквъ очевидны.

Фойхтъ, руководствуясь смысломъ закона дѣйствія и противодѣйствія, принимаетъ, что

$$A + \mathrm{A} = 0, \quad B + \mathrm{B} = 0, \quad C + \Gamma = 0. \qquad \text{(a)}$$

Чтобы получить рѣшеніе написанныхъ здѣсь уравненій, надо знать выраженіе всѣхъ силъ въ функціи координатъ и составляющихъ колебаній частицъ, какъ эфирныхъ такъ и матерьяльныхъ. Эти выраженія для силъ X, Ξ, ... извѣстны изъ теоріи упругости; силы X', Ξ', ... всегда можемъ предположить равными нулю, такъ что остается только вычислить силы A, B и C, ибо силы А, В и Г найдутся тогда изъ уравненій (а), и въ этомъ—центръ тяжести вопроса. Эти силы A, B и C неизвѣстны и могутъ быть найдены при современныхъ нашихъ знаніяхъ только болѣе или менѣе гипотетически. Фойхтъ опредѣляетъ ихъ такими, чтобы онѣ удовлетворяли закону сохраненія энергіи, и даетъ для каждой изъ нихъ по *8*—различныхъ выраженій, изъ которыхъ *6* имѣютъ видъ, встрѣчающійся въ другихъ физическихъ теоріяхъ; Фойхтъ ихъ и оставляетъ; изъ нихъ 4 формы необходимы, по мнѣнію Фойхта, для теоріи дисперсіи и двойного преломленія, и *2* остальныя для теоріи круговой поляризаціи; при этомъ онъ замѣчаетъ, что другихъ формъ для силъ A, B и C не можетъ существовать, съ чѣмъ однако нельзя вполнѣ согласиться, такъ какъ условію, которому должны подчиняться силы A, B и C, можно удовлетворить безчисленнымъ множествомъ рѣшеній; Фойхтъ выбралъ только простѣйшія. Но, какъ бы то ни было, всегда возможно допустить тѣ формы, которыя Фойхтъ приписываетъ силамъ A, B, ... онѣ не противорѣчатъ ни закону сохраненія энергіи, ни тѣмъ взглядамъ, коихъ вообще держатся физики относительно силъ взаимодѣйствія между частицами тѣлъ.

Затѣмъ приступая къ нахожденію окончательныхъ рѣшеній уравненій, написанныхъ выше, Фойхтъ предполагаетъ, что колебанія матерьяльныхъ частицъ настолько малы, что ими можно пренебречь въ сравненіи съ колебаніями эфирныхъ частицъ; такимъ образомъ у Фойхта остается только первая система уравненій, относящихся къ эфирнымъ колебаніямъ. Подставляя въ эти уравненія значенія силъ A, B и C, можно получить связь между показателемъ преломленія и длиной волны, т. е. формулу, выражающую законъ дисперсіи.

Предположеніе Фойхта о неподвижности матерьяльныхъ частицъ[1] едва-ли можно принять, во-первыхъ, потому, что механическая теорія теплоты предполагаетъ и доказываетъ прямо противоположное, а, во-вторыхъ, предположеніе, что матерьяльныя частицы неподвижны, приводитъ къ математическому противорѣчію; дѣйствительно, если $U = V = W = 0$, тогда и $\Xi = \mathrm{H} = \mathrm{Z} = 0$, а потому и $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \Gamma = 0$, т. е., по уравненіямъ (а) и $A = B = C = 0$, слѣдовательно нѣтъ силъ взаимодѣйствія между эфиромъ и матеріей.

Такимъ образомъ основныя уравненія теоріи Фойхта едва-ли можно считать вполнѣ вѣрными съ теоретической точки зрѣнія.

Посмотримъ теперь, въ какой мѣрѣ выводы Фойхта подтверждаются данными опытами, что собственно и имѣетъ въ виду настоящая статья; такое сравненіе я считаю тѣмъ болѣе необходимымъ, что самъ авторъ не произвелъ его[2].

Для связи между показателемъ преломленія и длиной волны Фойхтъ даетъ формулу[3], которую я привожу къ виду:

$$n^2 = \frac{\lambda^2(A - B\lambda^2)}{\lambda^2 - C}, \qquad (1)$$

причемъ A, B, C суть нѣкоторые постоянные коэффиціенты, характеризующіе данную прозрачную средину; n показатель преломленія луча, λ длина волны для того-же луча въ пустотѣ (т. е. въ міровомъ эфирѣ); это количество у Фойхта обозначено буквой λ_0. Эта формула должна имѣть мѣсто для всѣхъ лучей спектра. Относительно коэффиціента B Фойхтъ замѣчаетъ, что онъ по всей вѣроятности равенъ нулю, но теорія не показываетъ это-

---

[1] Такое предположеніе было сдѣлано еще Коши, но, какъ показалъ Бріо, оно приводитъ къ противорѣчію съ опытомъ.

[2] Необходимо напомнить, что рѣчь идетъ о прозрачныхъ срединахъ, такъ какъ для срединъ, поглощающихъ свѣтъ, такое сравненіе произведено самимъ Фойхтомъ.

[3] Wied. Ann. Bd. XIX, S. 885, und Bd. XX, S. 452.

го, почему мы его пока сохранимъ.

Формулу подобную (1) предлагалъ еще Нейманъ-отецъ на своихъ лекціяхъ (въ 1858 г.), но эти лекціи изданы только въ прошломъ году[1].

Изслѣдуемъ формулу[2] (1).

Прежде всего видимъ, что n можетъ быть дважды нулемъ: во-первыхъ, когда

$$\lambda = 0$$

и, во-вторыхъ, когда

$$\lambda = \sqrt{\frac{A}{B}}.$$

Первый случай показываетъ, что для очень короткихъ волнъ показатель преломленія очень малъ, что̀ противорѣчитъ опыту.

Обратимся затѣмъ ко второму. Количество A, какъ показываетъ сравненіе формулы (1) съ данными опыта, для всѣхъ прозрачныхъ срединъ положительно; что-же касается B, то оно можетъ быть и положительнымъ и отрицательнымъ; въ первомъ случаѣ λ послѣдней формулы дѣйствительное количество, а во второмъ мнимое. Первый случай имѣетъ мѣсто, напримѣръ, для воды, а второй для флинтгласса. Вычисленныя ниже значенія A и B даютъ въ случаѣ воды:

$$\lambda = \sqrt{\frac{A}{B}} = 123^{\mu\mu},323,$$

гдѣ знакъ $\mu\mu$ есть знакъ 0,0001 миллиметра.

Такія волны должны лежать далеко въ области инфра-красныхъ лучей, но опытъ такъ далеко не шелъ, наибольшія изъ наблюденныхъ λ въ за-красномъ концѣ солнечнаго спектра дости-

---

[1] Vorlesungen über die Theorie der Elasticität etc. S. 296.

[2] Формулу Фойхта Кеттелеръ (Theoretische Optik, S. 36) ошибочно считаетъ формулой съ 4-мя постоянными коэффиціентами.

гали только до $27^{\mu\mu},0$[1]; наблюденій же n для воды въ этой области не было произведено.

Такимъ образомъ опытъ здѣсь ничего недаетъ для непосредственнаго сравненія съ формулой.

Кромѣ нулевыхъ значеній n существуютъ еще безконечныя. При

$$\lambda = \sqrt{C}$$

показатель преломленія n обращается въ безконечность. Количество C можно опредѣлить изъ опыта; ниже приведены значенія C для воды и одного сорта флинтгласса, вычисляя по нимъ λ_∞, получимъ:

для воды

$$\lambda_\infty = 0^{\mu\mu},6311$$

для флинтгласса

$$\lambda_\infty = 1^{\mu\mu},0691.$$

Такія волны лежатъ въ области ультра-фіолетовыхъ лучей, но наблюденіе такъ далеко еще не доведено; наименьшее изъ наблюденныхъ λ для ультра-фіолетовыхъ лучей есть

$$\lambda = 1^{\mu\mu},856 \text{ (крайняя изъ алюминіевыхъ линій)},$$

какъ показали наблюденія Саразена.

Такимъ образомъ и здѣсь на границѣ значеній n наблюденіе ничего не даетъ для прямой и непосредственной повѣрки теоріи.

Обратимся къ промежуточнымъ значеніямъ n.

Найдемъ наибольшія и наименьшія значенія n отличныя отъ 0 и ∞. Такъ-какъ n количество положительное, то maximum и minimum n наступаютъ одновременно съ max. и min. n^2, поэтому условіе для max. и min. n будетъ слѣдующее:

$$\frac{d(n^2)}{d\lambda} = 0.$$

---

[1] *Langley*, Wied. Ann. Bd. XXII, 1884. S. 607.

Но

$$\frac{d(n^2)}{d\lambda} = -\frac{\lambda(B\lambda^4 - 2BC\lambda^2 + AC)}{(\lambda^2 - C)^2}. \quad (2)$$

Слѣдовательно для того, чтобы $\frac{d(n^2)}{d\lambda}$ было нуль, необходимо, чтобы

$$\lambda(B\lambda^4 - 2BC\lambda^2 + AC) = 0,$$

а это даетъ:

$$B\lambda^4 - 2BC\lambda^2 + AC = 0.$$

Отсюда находимъ:

$$\lambda_m{}^2 = C \pm \sqrt{C^2 - \frac{AC}{B}},$$

обозначивъ это частное значенie λ знакомъ λ_m.

Но $\lambda_m{}^2$ количество дѣйствительное и положительное, поэтому, если

$$A > 0, \quad C > 0,$$

что имѣетъ мѣсто для всѣхъ прозрачныхъ срединъ, то если 1) $B < 0$, то передъ радикаломъ надо брать знакъ $+$, тогда

$$\lambda_m{}^2 = C + \sqrt{C^2 - \frac{AC}{B}}. \quad (3)$$

Такой случай имѣетъ мѣсто для флинтгласса.

2) $B > 0$ (что имѣетъ мѣсто для воды), но очень мало, какъ показываетъ вычисленie; тогда

$$C < \frac{A}{B}^{*}.$$

---

* Если-бы $C > \frac{A}{B}$, тогда λ_m имѣло бы два значенія; но, кажется, такихъ прозрачныхъ срединъ нѣтъ.

Въ этомъ случаѣ λ_m количество воображаемое, слѣдовательно нѣтъ ни max., ни min. n (въ физическомъ смыслѣ).

Посмотримъ теперь, будетъ ли n при $\lambda = \lambda_m$, maximum или minimum.

Возьмемъ вторую производную n^2 (изъ форм. 2) и подставимъ въ ея значеніе величину λ_m вмѣсто λ; найдемъ:

$$\frac{d^2(n^2)}{d\lambda^2} = -\frac{4B\lambda_m{}^2}{\lambda_m{}^2 - C}. \tag{4}$$

Это равенство показываетъ, что если $B < 0$, то

$$\frac{d^2(n^2)}{d\lambda^2} > 0,$$

ибо въ этомъ случаѣ

$$\lambda_m{}^2 > C \text{ (по форм. (3))}.$$

Итакъ, для тѣхъ срединъ, для которыхъ $B < 0$, показатель преломленія n при $\lambda = \lambda_m$ пріобрѣтаетъ наименьшее значеніе.

Такого результата опытъ не подтверждаетъ, даже напротивъ, для прозрачныхъ срединъ n увеличивается непрерывно при уменьшеніи λ, такъ-что въ этомъ случаѣ формула Фойхта противорѣчитъ дѣйствительности.

Это заключеніе будетъ еще рѣшительнѣе, если мы вычислимъ значеніе λ_m для какого нибудь тѣла. По вычисленнымъ значеніямъ A, B и C для флинтгласса (von Rosette) найдемъ:

$$\lambda_m = 11^{\mu\mu},19 \text{ (это лучи инфра-красные).}$$

Значитъ, для лучей, длина волны которыхъ равна $11^{\mu\mu}19$, флинтглассъ обладаетъ наименьшимъ показателемъ преломленія; найдемъ числовое значеніе этого показателя преломленія. Подставляя въ формулу (1) значеніе λ_m изъ формулы (3), получимъ:

$$n^2 = -\frac{B\lambda_m^4}{C}.$$

Подставивъ сюда числовое значеніе B, C и λ_m, найдемъ:

$$n = 1,62380,$$

а это показатель преломленія лучей, лежащихъ между фраунгоферовыми линіями D ($n = 1,61929$) и E ($n = 1,62569$).

И такъ, общее заключеніе то, что формула Фойхта

$$n^2 = \frac{\lambda^2(A - B\lambda^2)}{\lambda - C}$$

противорѣчитъ опыту въ этомъ случаѣ ($B < 0$).

Всѣ предыдущіе числовые выводы основывались на знаніи значеній коэффиціентовъ A, B и C. Займемся теперь ихъ вычисленіемъ. Вычислимъ эти коэффиціенты для одного сорта флинтгласса (von Rosette) и для воды по даннымъ λ и n, кои мы заимствуемъ у Вюльнера[1] и для ихъ опредѣленія напишемъ уравненіе (1) въ видѣ:

$$A - \lambda^2 B + \frac{n^2}{\lambda^2} C = n^2.$$

Опредѣлимъ сначала A, B и C для флинтгласса. Возьмемъ n и λ для лучей B, E и H. Найдемъ[1]:

$$A = 2,528927; \quad B = -0,0001876716; \quad C = 1,143004$$

$$\lg A = 0,4029363; \quad \lg B = 6,2733987 - 10; \quad \lg C = 0,0580477.$$

Этими значеніями A, B, C мы и пользовались выше.

---

[1] Exp. Ph. Bd. 2, S, 159 und 163, 4 Aufl.

[2] Вычисленіе производилось съ семизначными таблицами въ-видахъ сравненія съ вычисленіями Вюльнера по формулѣ Гельмгольца.

Зная эти коэффиціенты, можно вычислить обратно по даннымъ λ значенія показателей преломленія n для другихъ лучей. Результаты вычисленій помѣщены въ таблицѣ (I). Въ этой таблицѣ рядомъ съ нашими результатами помѣщены вычисленія Вюльнера по формулѣ Гельмгольца съ тремя же постоянными коэффиціентами по тѣмъ-же даннымъ.

Таблица I.

Флинтглассъ (von Rosette).

Лучъ	n наблюденное.	Наб.—выч.	Наб.—выч.
B	1,61268	± 0	± 0
C	1,61443	+ 9	+10
D	1,61929	+11	+ 7
E	1,62569	± 0	± 0
F	1,63148	—11	— 4
G	1,64269	—13	— 4
H	1,65268	± 0	± 0.

Здѣсь въ 3-мъ столбцѣ помѣщены разности между наблюденіемъ и вычисленіемъ по формулѣ Фойхта, и въ 4-мъ по формулѣ Гельмгольца съ тремя-же коэффиціентами, именно по формулѣ:

$$n^2 - 1 = - P\lambda^2 + \frac{Q\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda_m{}^2},$$

въ которой P, Q и λ_m [1] суть постоянные коэффиціенты.

Таблица (I) показываетъ, что формула Фойхта нѣсколько менѣе удовлетворяетъ наблюденіямъ, чѣмъ формула Гельмгольца.

Примѣнимъ теперь формулу Фойхта къ водѣ. Вычислимъ A, B и C для линій B, D и F. Найдемъ:

---

[1] Это λ_m отлично отъ вышеприведеннаго λ_m Фойхтовой формулы.

$A = 1{,}760716$; $B = +0{,}0001157719$; $C = 0{,}3982556$

$\lg A = 0{,}2456893$; $\lg B = 6{,}0636033 - 10$; $\lg C = 9{,}6001619 - 10$.

Этими значеніями A, B, C мы и пользовались выше.

Обратно, по даннымъ A, B, C можно вычислить n, результаты чего помѣщены въ таблицѣ II.

Таблица II.

Вода при 19°,5С.

Лучъ	n наблюденное.	Наб.—выч.	Наб.—выч.
B	1,33048	± 0	± 0
C	1,33122	+ 2	+ 5
D	1,33307	± 0	± 0
E	1,33527	— 4	— 5
F	1,33720	± 0	± 0
G	1,34063	+14	— 1
H	1,34350	+ 6	— 4.

Видимъ, что сравненіе здѣсь даетъ то-же самое.

Займемся теперь повѣркой формулы Фойхта въ предположеніи, что $B = 0$.

Въ этомъ случаѣ формула Фойхта обращается въ слѣдующую:

$$n^2 = \frac{A\lambda^2}{\lambda^2 - C} \qquad (5)$$

съ двумя постоянными A и C[1].

Формула (5) показываетъ, что n измѣняется въ одномъ направленіи при измѣненіи λ отъ 0 до $\sqrt{C}$, слѣдовательно между

[1] Значеніе этихъ постоянныхъ приведены передъ таблицами III и IV.

$\lambda = 0$ и $\lambda = \sqrt{C}$ количество n не имѣетъ ни max., ни min. и остается все время воображаемымъ количествомъ.

При $\lambda = \sqrt{C}$ показатель n обращается въ ∞; затѣмъ при измѣненіи λ отъ $\sqrt{C}$ до ∞ показатель n величина дѣйствительная и постепенно уменьшающаяся до значенія равнаго $\sqrt{A}$, когда λ, увеличиваясь, стремится къ ∞.

Примѣняя формулу (5), къ водѣ, найдемъ

$$\sqrt{C} = 0^{\mu\mu},6751$$

такихъ малыхъ волнъ еще не наблюдали.

Для флинтгласса

$$\sqrt{0} = 1^{\mu\mu},0388$$

и здѣсь тоже нѣтъ наблюденій.

Значенія нижнихъ предѣловъ n суть: $\sqrt{A} = 1,59415$ для флинтгласса и $\sqrt{A} = 1,32405$ для воды.

Опредѣленіе постоянныхъ A и C въ обоихъ этихъ случаяхъ производилось по даннымъ для фраунгоферовыхъ линій B и G.

Для дальнѣйшаго изученія формулы (5) я вычислилъ по ней обратно показатели n для данныхъ λ и для сравненія произвелъ вычисленіе по упрощенной (съ двумя коэффиціентами) формулѣ Гельмгольца ($P = Q$, какъ показали вычисленія Вюльнера), которую можно тогда написать въ видѣ:

$$n^2 - 1 = \frac{H\lambda^2}{\lambda^2 - h}. \qquad (6)$$

Такой-же видъ имѣетъ и упрощенная формула Ломмеля.

Значеніе λ для $n = \infty$ суть:

для воды $\sqrt{h} = 1^{\mu\mu},0075$

въ флинтгласса $\sqrt{h} = 1^{\mu\mu},3007$.

Въ таблицѣ (III) помѣщены разности между вычисленіемъ и наблюденіемъ по формуламъ Фойхта (5) и Гельмгольца (Ломмеля) (6) для флинтгласса; въ таблицѣ (IV) тоже для воды; причемъ постоянныя были слѣдующія:

для флинтгласса $A = 2{,}541307$; $C = 1{,}079145$
$H = 1{,}543394$; $h = 1{,}691747$

а для воды $A = 1{,}753097$; $C = 0{,}455693$
$H = 0{,}753625$; $h = 1{,}014975$

Таблица III.

Флинтглассъ.

Лучъ	Ф. В.—Н.	Г.(Л.) В.—Н.
B	± 0	± 0
C	+ 5	+ 1
D	+ 22	+ 10
E	+ 35	+ 18
F	+ 35	+ 19
G	± 0	± 0
H	— 55	— 27

Таблица IV.

Вода.

Лучъ.	Ф. В.—Н.	Г.(Л.) В.—Н.
B	± 0	± 0
C	— 12	— 13
D	— 25	— 29
E	— 23	— 28
F	— 20	— 25
G	± 0	± 0
H	+ 25	+ 34.

Таблицы эти показываютъ, что для флинтгласса формула Гельмгольца (Ломмеля) лучше удовлетворяетъ, чѣмъ Фойхта, а для воды, какъ будто, Фойхтова нѣсколько лучше, чѣмъ Гельмгольцева[1].

Теперь можно сдѣлать общій выводъ изъ всего предыдущаго:

1. Формула Фойхта съ тремя постоянными коэффиціентами для нѣкоторыхъ тѣлъ противорѣчитъ даннымъ опыта.

2. Формула Фойхта съ двумя коэффиціентами, хотя и не противорѣчитъ даннымъ опыта (за отсутствіемъ впрочемъ предѣль-

[1] Вычисляя тѣ-же наблюденія по упрощенной формулѣ Кеттелера: $n^2 - 1 = \frac{K}{\lambda^2 - k}$, получаемъ крайне большія разности, такъ для линіи C наблюденіе даетъ $k = 1{,}61443$, а вычисленіе $1{,}61784$; причемъ было $K = 798{,}451$; $k = -450{,}539072$ (флинтглассъ).

ныхъ наблюденій), но удовлетворяетъ имъ вообще слабѣе подобной-же формулы Гельмгольца (Ломмеля).

Прибавленіе. Изслѣдуя формулу Гельмгольца съ тремя коэффиціентами такимъ-же образомъ, какимъ мы изслѣдовали формулу Фойхта, найдемъ, что если $Q > P$ (что имѣетъ мѣсто для флинтгласса (von Rosette)[1] и нѣкоторыхъ другихъ тѣлъ), то при

$$\lambda^2 = \lambda_m{}^2 \left(1 + \sqrt{\frac{Q}{Q-P}}\right)$$

показатель n пріобрѣтаетъ наименьшее значеніе. Это значеніе можетъ быть вычислено по формулѣ

$$n^2 - 1 = \lambda_m{}^2 (2Q - P + 2\sqrt{Q(Q-P)}).$$

Пользуясь данными λ_m, P и Q, вычисленными Вюльнеромъ для флинтгласса (von Rosette), найдемъ, что n будетъ minimum при

$$= 13^{\mu\mu}196$$

и значеніе n min. будетъ:

$$n = 1{,}6027.$$

Но такой результатъ вполнѣ противорѣчитъ опыту, какъ показываютъ измѣренія Мутона (1879) и Ланглея (1884). Такимъ образомъ и о формулѣ Гельмгольца съ тремя коэффиціентами должно сказать то-же, что сказано выше о подобной же формулѣ Фойхта.

---

[1] Для другого сорта флинтгласса $Q < P$, какъ нашелъ Вюльнеръ же (Wied. Ann. Bd. XXIII, S. 311).

ЗАМѢТКА

о частныхъ интегралахъ одного линейнаго дифференціальнаго уравненія.

П. С. Флорова.

Обозначимъ чрезъ

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots . . u_{2n}$$

частные интегралы уравненія

$$\frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} = \varphi(x^2)\,u \qquad (1)$$

и положимъ

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} u_1 & , u_2 & , u_3 & , \ldots . . u_{2n} \\ u_1' & , u_2' & , u_3' & , \ldots . . u'_{2n} \\ u_1'' & , u_2'' & , u_3'' & , \ldots . . u''_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_1^{(2n-1)} & , u_2^{(2n-1)} & , u_3^{(2n-1)} & , \ldots . . u_{2n}^{(2n-1)} \end{vmatrix}.$$

Продифференцировавъ это равенство $(2n+1)$ разъ, получимъ, принимая во вниманіе данное уравненіе (1),

$$\frac{d^{2n+1}\omega(x)}{dx^{2n+1}}=\begin{vmatrix} u_1' & , u_2' & , u_3' & , \ldots\ldots u'_{2n} \\ u_1'' & , u_2'' & , u_3'' & , \ldots\ldots u''_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(2n-1)} & , u_2^{(2n-1)} & , u_3^{(2n-1)} & , \ldots\ldots u_{2n}^{(2n-1)} \\ u_1^{(2n+1)} & , u_2^{(2n+1)} & , u_3^{(2n+1)} & , \ldots\ldots u_{2n}^{(2n+1)} \end{vmatrix}$$

или

$$\frac{d^{2n+1}\omega(x)}{dx^{2n+1}}=-\varphi(x^2)\,\omega(x). \qquad (2)$$

Отсюда слѣдуетъ, что $\omega(-x)$ есть также интегралъ даннаго уравненія (1).

КЪ ТЕОРІИ РАДІУСА КРИВИЗНЫ.

М. Тихомандрицкаго.

Во II. томѣ «Analytische Geometrie des Raumes» Сальмонъ-Фидлера въ § 105 на стр. 140 находимъ формулу:

$$\frac{\sin^2\omega}{\rho^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} - \frac{2\cos\omega}{rr'}, \qquad (1)$$

въ которой ϱ обозначаетъ радіусъ кривизны линіи пересѣченія двухъ поверхностей, r и r' радіусы кривизны сѣченій тѣхъ же поверхностей нормальными плоскостями, проходящими чрезъ касательную къ линіи ихъ пересѣченія въ разсматриваемой точкѣ; ω уголъ между внѣшними нормалями поверхностей въ той же точкѣ. Въ указанномъ § эта формула доказывается только для случая $\omega = \frac{\pi}{2}$, когда, слѣд., поверхности пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, при помощи теоремы Мёнье; общая же формула, данная безъ доказательства, употребляется для вывода выраженія $\frac{1}{\rho^2}$ чрезъ частныя производныя первыхъ двухъ порядковъ отъ функцій U и V, представляющихъ первыя части уравненій $U=0$ и $V=0$ поверхностей, опредѣляющихъ своимъ пересѣченіемъ разсматриваемую кривую, причемъ берется въ помощь выраженіе радіуса кривизны нормальнаго сѣченія поверхности, выведенное въ § 35, и преобразованіе знаменателя этого выраженія въ опредѣлитель изъ § 100.

Между тѣмъ формулу (1) можно получить, какъ мнѣ удалось замѣтить это еще 16 лѣтъ тому назадъ, прямо изъ опредѣленія угла смежности съ помощію довольно простыхъ вычисленій, причемъ теорема Мёнье и выраженіе радіуса кривизны плоскаго нормальнаго сѣченія данной поверхности получаются само собою, чрезъ что пріобрѣтается естественный переходъ отъ теоріи линій двоякой кривизны къ теоріи кривыхъ поверхностей. Такъ какъ этотъ выводъ ни мною, ни кѣмъ другимъ, сколько мнѣ извѣстно, не былъ еще опубликованъ, то я беру смѣлость предложить его вниманію Математическаго Общества.

1. Пусть

$$\left.\begin{aligned} U=f(x, y, z)=0 \\ V=F(x, y, z)=0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

будутъ уравненія поверхностей, опредѣляющихъ своимъ пересѣченіемъ кривую линію. Частныя производныя функцій U и V по перемѣннымъ x, y, z, мы будемъ по Сальмону-Фидлеру обозначать тою-же буквою, приписывая внизу нумера 1, 2, 3, причемъ 1 будетъ указывать на x, 2 на y, 3 на z. Означая чрезъ α, β, γ углы касательной прямой къ линіи пересѣченія поверхностей (1), мы будемъ имѣть для опредѣленія ихъ косинусовъ, какъ извѣстно, такую систему уравненій:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} U_1\cos\alpha+U_2\cos\beta+U_3\cos\gamma=0 \\ V_1\cos\alpha+V_2\cos\beta+V_3\cos\gamma=0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Изъ послѣднихъ двухъ на основаніи извѣстнаго свойства пропорцій, при помощи (2), найдемъ:

$$\frac{\cos\alpha}{\begin{vmatrix} U_2 & U_3 \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix}} = \frac{\cos\beta}{\begin{vmatrix} U_3 & U_1 \\ V_3 & V_1 \end{vmatrix}} = \frac{\cos\gamma}{\begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix} U_2 & U_3 \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} U_3 & U_1 \\ V_3 & V_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix}^2}}. \tag{4}$$

Входящая сюда въ четвертый членъ сумма квадратовъ опредѣлителей изъ частныхъ производныхъ можетъ быть по извѣстной теоремѣ объ умноженіи опредѣлителей представлена такъ:

$$\begin{vmatrix} U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 & U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3 \\ V_1U_1 + V_2U_2 + V_3U_3 & V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 \end{vmatrix}; \tag{5}$$

раздѣляя теперь первыя строку и столбецъ на

$$\Delta_1 U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}\,, \tag{6}$$

а послѣднія строку и столбецъ на

$$\Delta_1 V = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}\,, \tag{7}$$

и имѣя въ виду, что

$$U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3 = \Delta_1 U . \Delta_1 V \cos\omega\,, \tag{8}$$

гдѣ ω уголъ между внѣшними нормалями къ поверхностямъ (1), мы (5) дадимъ такой видъ:

$$(\Delta_1 U)^2.(\Delta V)^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega \\ \cos\omega & 1 \end{vmatrix} = (\Delta_1 U)^2.(\Delta_1 V)^2 \sin^2\omega. \tag{9}$$

Такимъ образомъ окончательно получимъ:

$$\sqrt{\begin{vmatrix} U_2 & U_3 \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} U_3 & U_1 \\ V_3 & V_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix}^2} = \Delta_1 U . \Delta_1 V \sin\omega. \tag{10}$$

2. Уголъ смежности $d\sigma$ этой кривой по формулѣ Серре выразится такъ:

$$d\sigma = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}\,; \qquad (1)$$

чтобы найти входящія сюда $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$ и $d\cos\gamma$, мы продифференцируемъ уравненія (2) и (3), что доставитъ намъ такую систему трехъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &\cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\beta\, d\cos\beta + \cos\gamma\, d\cos\gamma = 0 \\ &U_1\, d\cos\alpha + U_2\, d\cos\beta + U_3\, d\cos\gamma = A \\ &V_1\, d\cos\alpha + V_2\, d\cos\beta + V_3\, d\cos\gamma = B, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

гдѣ для краткости положено:

$$\left.\begin{aligned} &-\cos\alpha\, dU_1 - \cos\beta\, dU_2 - \cos\gamma\, dU_3 = A, \\ &-\cos\alpha\, dV_1 - \cos\beta\, dV_2 - \cos\gamma\, dV_3 = B. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Рѣшая уравненія (6) по искомымъ дифференціаламъ косинусовъ, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} d\cos\alpha &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 0 & \cos\beta & \cos\gamma \\ A & U_2 & U_3 \\ B & V_2 & V_3 \end{vmatrix} \\ d\cos\beta &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ U_1 & A & U_3 \\ V_1 & B & V_3 \end{vmatrix} \\ d\cos\gamma &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & 0 \\ U_1 & U_2 & A \\ V_1 & V_2 & B \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

гдѣ

$$D = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Если вставить сюда вмѣсто $\cos\alpha$ и проч. ихъ выраженія изъ формулъ (4) § 1, то легко найдемъ:

$$D=\sqrt{\begin{vmatrix}U_2 U_3\\ V_2 V_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}U_3 U_1\\ V_3 V_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}U_1 U_2\\ V_1 V_2\end{vmatrix}^2}=\Delta_1 U.\Delta_1 V\sin\omega. \quad (6)$$

3. Раскрывая опредѣлители въ (4) пред. § будемъ имѣть:

$$d\cos\alpha=\frac{1}{D}\Big\{A(V_2\cos\gamma-V_3\cos\beta)-B(U_2\cos\gamma-U_3\cos\beta)\Big\}$$

$$d\cos\beta=\frac{1}{D}\Big\{A(V_3\cos\alpha-V_1\cos\gamma)-B(U_3\cos\alpha-U_1\cos\gamma)\Big\}$$

$$d\cos\gamma=\frac{1}{D}\Big\{A(V_1\cos\beta-V_2\cos\alpha)-B(U_1\cos\beta-U_2\cos\alpha)\Big\}.$$

Взявъ сумму квадратовъ этихъ выраженій и имѣя въ виду, что по извѣстной теоремѣ теоріи опредѣлителей

$$(U_2\cos\gamma-U_3\cos\beta)^2+(U_3\cos\alpha-U_1\cos\gamma)^2+(U_1\cos\beta-U_2\cos\alpha)^2=$$
$$=\begin{vmatrix}\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma & U_1\cos\alpha+U_2\cos\beta+U_3\cos\gamma\\ U_1\cos\alpha+U_2\cos\beta+U_3\cos\gamma & U_1^2+U_2^2+U_3^2\end{vmatrix}=$$
$$=U_1^2+U_2^2+U_3^2=(\Delta_1 U)^2;$$

$$(V_2\cos\gamma-V_3\cos\beta)^2+(V_3\cos\alpha-V_1\cos\gamma)^2+(V_1\cos\beta-V_2\cos\alpha)^2=$$
$$=V_1^2+V_2^2+V_3^2=(\Delta_1 V)^2;$$

$$(U_2\cos\gamma-U_3\cos\beta)(V_2\cos\gamma-V_3\cos\beta)+(U_3\cos\alpha-U_1\cos\gamma)\times$$
$$\times(V_3\cos\alpha-V_1\cos\gamma)+(U_1\cos\beta-U_2\cos\alpha)(V_1\cos\beta-V_2\cos\alpha)=$$
$$=\begin{vmatrix}\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma & U_1\cos\alpha+U_2\cos\beta+U_3\cos\gamma\\ V_1\cos\alpha+V_2\cos\beta+V_3\cos\gamma & U_1V_1+U_2V_2+U_3V_3\end{vmatrix}=$$
$$=U_1V_1+U_2V_2+U_3V_3=\Delta_1 U.\Delta V_1\cos\omega,$$

а также принимая во вниманіе и (1) и (6) § 2, мы получимъ по сокращеніи и умноженіи на $\sin^2\omega$:

$$\sin^2\omega d\sigma^2=\left(\frac{A}{\Delta_1 U}\right)^2-2\left(\frac{A}{\Delta_1 U}\right)\cdot\left(\frac{B}{\Delta_1 V}\right)\cos\omega+\left(\frac{B}{\Delta_1 V}\right)^2. \quad (2)$$

4. Раздѣляя это на ds, и полагая для краткости

$$-\frac{A}{ds}=M,\quad -\frac{B}{ds}=N, \tag{1}$$

мы получимъ, имѣя въ виду, что

$$\frac{d\sigma}{ds}=\frac{1}{\rho}, \tag{2}$$

слѣдующее выраженіе для радіуса кривизны ϱ:

$$\left(\frac{\sin\omega}{\rho^2}\right)^2=\left(\frac{M}{\Delta_1 U}\right)^2-2\left(\frac{M}{\Delta_1 U}\right)\cdot\left(\frac{N}{\Delta_1 V}\right)^2\cos\omega+\left(\frac{N}{\Delta_1 V}\right)^2 \tag{3}$$

здѣсь по (1) этого § и (2) § 2, на основаніи того, что

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \cos\beta=\frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}, \tag{4}$$

будетъ:

$$\left.\begin{aligned} M=U_{11}\cos^2\alpha+U_{22}\cos^2\beta+U_{33}\cos^2\gamma+2U_{23}\cos\beta\cos\gamma+\\ +2U_{31}\cos\gamma\cos\alpha+2U_{12}\cos\alpha\cos\beta\\ N=V_{11}\cos^2\alpha+V_{22}\cos^2\beta+V_{33}\cos^2\gamma+2V_{23}\cos\beta\cos\gamma+\\ +2V_{31}\cos\gamma\cos\alpha+2V_{12}\cos\alpha\cos\beta. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

5. Если $V=0$ будетъ представлять плоскость, то всѣ V_{ik} $(i,k=1,2,3)$, а слѣд. и N равны нулю, а потому формула (3) по извлеченіи квадратнаго корня приметъ такой видъ:

$$\frac{\sin\omega}{\rho}=\pm\frac{M}{\Delta_1 U}, \tag{1}$$

или внося вмѣсто M и $\Delta_1 U$ ихъ значенія:

$$\frac{\sin\omega}{\rho}=$$

$$=\frac{U_{11}\cos^2\alpha+U_{22}\cos^2\beta+U_{33}\cos^2\gamma+2U_{23}\cos\beta\cos\gamma+2U_{31}\cos\gamma\cos\alpha+2U_{12}\cos\alpha\cos\beta}{\pm\sqrt{U_1^2+U_2^2+U_3^2}} \tag{2}$$

Въ этой формулѣ вторая часть зависитъ лишь отъ направленія касательной къ линіи пересѣченія поверхности $U=0$ плоскостью $V=0$, направленія, опредѣляемаго углами α, β, γ, но не зависитъ отъ угла наклоненія сѣкущей плоскости $V=0$ къ касательной плоскости къ поверхности $U=0$; слѣд. она сохранится и тогда, когда будетъ $\omega=\frac{\pi}{2}$, т. е. когда сѣкущая плоскость будетъ нормальная къ $U=0$; но тогда первая часть (2) обратится въ $\frac{1}{r}$, обозначая чрезъ r радіусъ нормальнаго сѣченія поверхности $U=0$; слѣд. мы получаемъ, во-первыхъ, выраженіе этого радіуса:

$$\frac{1}{r}=$$

$$=\frac{U_{11}\cos^2\alpha+U_{22}\cos^2\beta+U_{33}\cos^2\gamma+2U_{23}\cos\beta\cos\gamma+2U_{31}\cos\gamma\cos\alpha+2U_{12}\cos\alpha\cos\beta}{\pm\sqrt{U_1^2+U_2^2+U_3^2}} \tag{3}$$

и, во-вторыхъ, равенство:

$$\frac{\sin\omega}{\rho}=\frac{1}{r}, \tag{4}$$

которое выражаетъ теорему Мёнье. Оно приметъ обычную форму, если ввести вмѣсто угла ω между нормалью къ поверхности и нормалью къ сѣкущей плоскости, уголъ θ между самою сѣкущей плоскостью и нормалью къ поверхности; тогда $\theta=90-\omega$, и слѣд. $\sin\omega=\cos\theta$ и равенство (4) приводится къ слѣдующему:

$$\rho=r\cos\theta. \tag{5}$$

6. И такъ, по (1) и (4) пред. §:

$$\pm\frac{M}{\Delta_1 U}=\frac{1}{r}; \tag{1}$$

и точно такъ-же

$$\pm \frac{N}{\Delta_1 V} = \frac{1}{r'}\,; \tag{2}$$

означая чрезъ r' радіусъ нормальнаго сѣченія поверхности $V=0$; внося это въ (3) § 4, получимъ:

$$\left(\frac{\sin\omega}{\rho}\right)^2 = \frac{1}{r^2} - \frac{2\cos\omega}{rr'} + \frac{1}{r'^2}\,, \tag{3}$$

т. е. ту самую формулу, которая послужила Фидлеру для вывода выраженія кривизны чрезъ производныя функцій U и V, но приведена имъ безъ доказательства. Эта формула говоритъ намъ, что, складывая кривизны сѣченій обѣихъ поверхностей нормальными плоскостями, проходящими чрезъ касательную къ линіи пересѣченія поверхностей, по закону параллелограма силъ, представляя для этого кривизны отрѣзками прямыхъ, отложенными по соотвѣтственнымъ нормалямъ къ поверхностямъ, мы получимъ въ діагоналѣ его величину $\frac{\sin\omega}{\rho}$, изъ которой получается кривизна линіи пересѣченія поверхностей, чрезъ раздѣленіе на sin угла между ихъ нормалями.

7. Изъ формулы (3) можно вывести другую болѣе изящную. Если означимъ чрезъ $\mathfrak{r}$ радіусъ кривизны сѣченія поверхности $U=0$ плоскостью касательною къ поверхности $V=0$, а чрезъ $\mathfrak{r}'$ радіусъ кривизны сѣченія этой послѣдней поверхности (т. е. $V=0$), плоскостью касательною въ первой (т. е. $U=0$), то, имѣя въ виду, что каждая изъ касательныхъ плоскостей дѣлаетъ съ нормалью къ другой уголъ, дополняющій уголъ ω внѣшнихъ нормалей поверхностей до прямого, мы по теоремѣ Мёнье (формула (4) § 5) будемъ имѣть:

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin\omega}{\mathfrak{r}}\,; \tag{1}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin\omega}{\mathfrak{r}'}\,; \qquad (2)$$

вставляя это въ формулу (3) предыдущаго § будемъ имѣть по сокращеніи на $\sin^2\omega$:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\mathfrak{r}^2} - \frac{2\cos\omega}{\mathfrak{r}\mathfrak{r}^1} + \frac{1}{\mathfrak{r}'^2}\,, \qquad (3)$$

—формула, которая говоритъ, что кривизна линіи пересѣченія двухъ поверхностей есть сложная по закону параллелограма силъ изъ кривизны сѣченій каждой поверхности плоскостью, касательною къ другой.

$18\frac{8}{\mathrm{v}}86$.

РАЗНОСТЬ

n-ГО ПОРЯДКА ЛОГАРИѲМИЧЕСКОЙ ФУНКЦІИ.

М. А. Тихомандрицкаго.

Пусть дана нѣкоторая функція u_x отъ перемѣнной x; разность n-го порядка этой функціи чрезъ члены ряда ея значеній:

$$u_x,\ u_{x+h},\ u_{x+2h}\cdots\cdots u_{x+nh}, \tag{1}$$

соотвѣтствующихъ послѣдовательному увеличенію значеній x на h, выражается, какъ извѣстно, такимъ образомъ:

$$\Delta^n u_x = u_{x+nh} - C_1{}^n u_{x+(n-1)h} + C_2{}^n u_{x+(n-2)h} - \ldots + (-1)^n u_x, \tag{2}$$

гдѣ $C_m{}^n$ обозначаетъ m-ый биноміальный коэффиціентъ; разность n-го порядка отъ $\log u_x$ выразится чрезъ члены ряда (1), если возьмемъ логариѳмъ отъ дроби, числитель которой будетъ состоять изъ произведенія тѣхъ членовъ этого ряда, предъ которыми въ формулѣ (2) стоитъ знакъ $+$, знаменатель же изъ произведенія тѣхъ, предъ которыми стоитъ знакъ $-$, — возвышенныхъ каждый въ степень, показываемую его коэффиціентомъ въ той же формулѣ (2), такимъ образомъ:

$$\Delta^n \log u_x = \log\left\{\frac{u_{x+nh}\cdot(u_{x+(n-2)h})^{C_2{}^n}(u_{x+(n-4)h})^{C_4{}^n}\ldots}{(u_{x+(n-1)h})^{C_1{}^n}(u_{x+(n-2)h})^{C_3{}^n}\ldots\ldots\ldots}\right\} \tag{3}$$

Дѣйствительно, мы имѣемъ послѣдовательно:

$$\Delta \log u_x = \log u_{x+h} - \log u_x = \log \frac{u_{x+h}}{u_x};$$

$$\Delta^2 \log u_x = \Delta \log \frac{u_{x+h}}{u_x} = \log \frac{u_{x+2h}}{u_{x+h}} - \log \frac{u_{x+h}}{u_x} = \log \frac{u_{x+2h} u_x}{(u_{x+h})^2};$$

$$\Delta^3 \log u_x = \Delta \log \frac{u_{x+2h} \cdot u_x}{(u_{x+h})^2} = \log \frac{u_{x+3h} \cdot u_{x+h}}{(u_{x+2h})^2} - \log \frac{u_{x+2h} \cdot u_x}{(u_{x+h})^2} =$$

$$= \log \frac{u_{x+3h} \cdot (u_{x+h})^3}{(u_{x+2h})^3 u_x};$$

и т. д.—результаты, которые получаются изъ (3), полагая въ ней $n = 1, 2, 3$, и т. д.; такъ что остается только показать, что наша формула, разъ она вѣрна до порядка n, будетъ вѣрна и для непосредственно слѣдующаго, а слѣдовательно и для всякаго порядка. Для этого беремъ разность отъ обѣихъ частей (3); будемъ имѣть:

$$\Delta^{n+1} \log u_x = \log \left\{ \frac{u_{x+(n+1)h} \cdot (u_{x+(n-1)h})^{C_2{}^n} (u_{x+(n-3)h})^{C_4{}^n} \cdots}{(u_{x+nh})^{C_1{}^n} \cdot (u_{x+(n-2)h})^{C_3{}^n} \cdots\cdots\cdots} \right\} -$$

$$- \log \left\{ \frac{u_{x+nh} \cdot (u_{x+(n-2)n})^{C_2{}^n} \cdot (u_{x+(n-4)h})^{C_4{}^n} \cdots}{(u_{x+(n-1)h})^{C_1{}^n} (u_{x+(n-3)h})^{C_3{}^n} \cdots\cdots} \right\} =$$

$$= \log \left\{ \frac{u_{x+(n\ 1)h} \cdot (u_{x+(n-1)h})^{C_2{}^n + C_1{}^n} (u_{x+(n-3)h})^{C_4{}^n + C_3{}^n} \cdots}{(u_{x+nh})^{C_1{}^n + 1} (u_{x+(n-2)h})^{C_3{}^n + C_2{}^n} \cdots\cdots\cdots\cdots} \right\};$$

но, по извѣстнымъ свойствамъ биноміальныхъ коэффиціентовъ,

$$C_1^n+1=C_1^{n+1};\ C_2^n+C_1^n=C_2^{n+1};\ C_3^n+C_2^n=C_3^{n+1};\ C_4^n+C_3^n=C_4^{n+1},$$

и т. д.;

слѣд. мы получаемъ:

$$\Delta^{n+1}\log u_x=\log\left\{\frac{u_{x+(n+1)h}\cdot(u_{x+(n-1)h})^{C_2^{n+1}}\cdot(u_{x+(n-3)h})^{C_4^{n+1}}\cdots}{(u_{x+nh})^{C_1^{n+1}}(u_{x+(n-2)h})^{C_3^{n+1}}\cdots\quad\cdots}\right\},$$

—результатъ, который получается изъ (3) чрезъ перемѣну n на $n+1$, что и доказываетъ справедливость нашей формулы для всякаго значенія n.

Такимъ образомъ формула (3) выводится непосредственно изъ самаго опредѣленія конечной разности; но ее можно получить еще скорѣе изъ формулы (2), перемѣнивъ въ послѣдней u_x на $\log u_x$ и соединивъ затѣмъ всѣ члены въ одинъ на основаніи извѣстныхъ свойствъ логариѳма.

$18\frac{21}{II}86$.