Продолженіе лекц. 24 марта.

7.

## Аналитическая геометрія — продолженіе.

### О соприкасающемся кругѣ (du cercle osculateur)*

Пусть въ системѣ прямоугольныхъ координатъ дана кривая, уравненіе которой

$$y = f(x).$$

Такъ какъ общее уравненіе круга содержитъ три произвольныхъ постоянныхъ, то соприкасающимся кругомъ будетъ ~~кругъ~~, имѣющій съ данною кривою соприкосновеніе втораго пор. Итакъ пусть

$$(1)\quad (x-\xi)^2 + (y'-\eta)^2 = \rho^2$$

уравненіе неизвѣстнаго круга.

Изъ послѣдняго равенства, чрезъ два послѣдовательн. дифференцированія, имѣемъ:

$$(2)\quad x - \xi + (y'-\eta)\frac{dy'}{dx} = 0,$$

$$(3)\quad 1 + \frac{dy'^2}{dx^2} + (y'-\eta)\frac{d^2y'}{dx^2} = 0.$$

Для нашей цѣли нужно чтобы равенства

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

одновременно имѣли мѣсто; замѣнивши въ

---

* Cours d'An., par Sturm, 207 p.

въ предшествующихъ выраженіяхъ $y'$, $\frac{dy'}{dx}$, $\frac{d^2y'}{dx^2}$

соотвѣтственно черезъ $y$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, для опредѣ-

ленія $\xi$, $\eta$, $\rho$ слѣдующія три уравненія:

$$(4) \qquad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \rho^2,$$

$$(5) \qquad (x-\xi) + (y-\eta)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$(6) \qquad 1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

гдѣ $x$ и $y$ координаты точки соприкосновенія.

Изъ написанныхъ сей-часъ равенствъ имѣемъ:

$$\eta - y = -\frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \xi - x = \frac{\frac{dy}{dx}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

а также

$$\rho^2 = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2 = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2},$$

откуда:

$$\rho = \pm\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Числитель этого выраженія будетъ положительный, и предъ выраженіемъ слѣдуетъ брать знакъ $+$ или $-$, смотря по тому будетъ ли $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ или $< 0$, если нужно опредѣлить выраженіе абсолютной величины $\rho$.

Изъ ур. (b) ясно, что $\eta - y$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ всегда имѣютъ одинъ и тотъ-же знакъ; и какъ $\eta - y$ есть разность между ординатою центра круга и ординатою точ. соприкасанія, то не трудно видѣть, что центръ соприкасающагося круга находится всегда въ вогнутости кривой. Марта 28^ое^

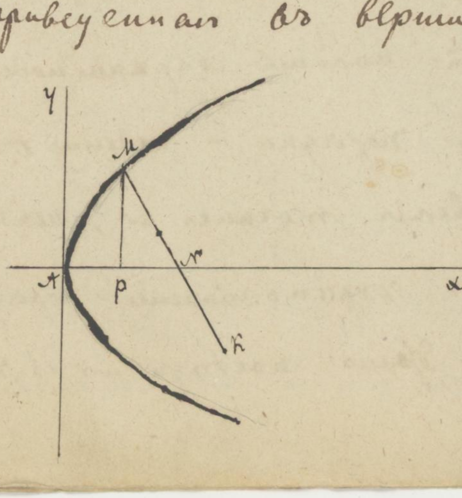
Ясно также, изъ выше сказаннаго, [ур. (5)] что кривая и соприкасающійся кругъ имѣютъ общую касательную въ т. соприкосновенія; а если такъ, то центръ соприкасающагося круга находится на нормальной къ кривой въ т. $(x, y)$.

Нужно также замѣтить, что соприкасающійся кругъ съ кривою имѣетъ вообще соприкосновеніе 2^го^ пор., слѣдов. нечетнаго порядка, — почему онъ пересѣкаетъ кривую во всѣхъ точкахъ ея, исключая только тѣхъ, гдѣ соприкосновеніе порядка высшаго чѣмъ 2^го^. Въ этихъ послѣднихъ случаяхъ, если соприкосновеніе нечетнаго пор., кривая и ея соприкасающійся кругъ находятся по одну и туже сторону отъ ихъ общей касательной.

Часто называютъ соприкасающійся кругъ кругомъ кривизны; его центръ и радіусъ — центромъ и радіусомъ кривизны. Въ последствіи мы увидимъ почему это такъ.

Для примера, предположимъ себе найти выраженіе радіуса кривизны МК для коническаго сѣченія, въ какой бы то ни было точкѣ.

Предположимъ, что кривая отнесена къ системѣ прямоугольныхъ координатъ, изъ которыхъ одна — одна изъ осей кривой, а другая — касательная проведенная въ вершинѣ; уравненіе кривой будетъ:




$$y^2 = 2px + qx^2$$

Дифференцируя 2 раза это уравненіе, находимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p + qx}{y},$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = q,$$

и, подставивъ вмѣсто $\frac{dy}{dx}$ его величину,

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{p^2 + 2pqx + q^2x^2}{y^2} = q,$$

или наконецъ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Слѣдовательно, для выраженія абсолютной велич. $\rho$, имѣемъ равенство:

$$\rho = \frac{y^3\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

Числитель этого выраженія есть кубъ нормальной MN. Въ самомъ дѣлѣ, прямоугольный треугольникъ MNP даетъ

$$\overline{MN}^2 = n^2 = y^2 + y^2\frac{dy^2}{dx^2}, \text{ или } n = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}};$$

откуда

$$y^3\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = n^3;$$

и наконецъ

$$\rho = \frac{n^3}{p^2}.$$

Слѣдовательно, <u>во всякомъ коническомъ сѣченіи радіусъ кривизны равняется кубу нормальной,</u>

раздѣленному на квадратъ полу-параметра.

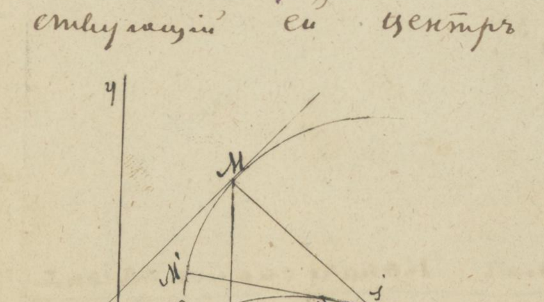
Развертки или эволюты и развертывающіяся плоскихъ кривыхъ (Développées et développantes des courbes planes). Общія свойства эволютъ. Приложеніе къ параболѣ, эллипсу и гиперболѣ.

Мы видѣли, что назвавши черезъ $\xi$ и $\eta$ координаты центра круга кривизны, соотвѣтствующаго точкѣ $M$ кривой $CM$, имѣемъ, для опредѣленія этихъ количествъ, уравненія

$$(1)\qquad x - \xi + (y-\eta)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$(2)\qquad 1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Когда точка $M(x,y)$ кривой будетъ перемѣщаться по кривой по закону непрерывности, тогда соотвѣтствующій ей центръ кривизны будетъ также




перемѣщаться (~~[illegible]~~) и опишетъ въ плоскости кривой нѣкоторую линію, называемую разверткою (développée или __эволютой__ данной кривой; послѣдняя же въ отношении эволюты называется __развертывающейся__ (développante).

Уравнение развертки или эволюты есть ничто иное, какъ соотношение между координатами $\xi$ и $\eta$ центра кривизны; потому это уравнение въ каждомъ частномъ случаѣ получится отъ исключения $x$ и $y$ между уравнениями (1) и (2) или и уравнениемъ данной кривой $f(x, y) = 0$. Для совершения этого исключения можно поступать такимъ образомъ: найдя изъ уравн. $f(x, y) = 0$, данной кривой, величины $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, надо внести ихъ въ уравнения (1) и (2) или, что тоже, ~~случае~~ въ слѣдующия

$$(3)\quad x - \xi = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \qquad (4)\quad y - \eta = -\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

которыя суть непосредственныя слѣдствия (1) и (2); потомъ, опредѣливъ изъ (3) и (4) величины $x$ и $y$, надо подставить ихъ величины въ уравнение данной кривой.

Прежде нежели перейдемъ къ выводу уравнений ~~р~~ эволютъ для частныхъ случаевъ, разсмотримъ общия свойства эволютъ.

Эволюта обладаетъ очень замѣчательными свойствами.

Докажемъ, на первый разъ, что <u>всѣ радіусы кривизны МК, $M_1K_1$, ...</u> или нормальныя къ данной кривой, <u>суть касательныя къ эволютѣ</u> въ точкахъ $K, K_1, \ldots$, или <u>въ центрахъ кривизны</u>.

Въ самомъ дѣлѣ, если принять $x$ за независимую перемѣнную и продифференцируемъ уравн. (1), трактуя $y, \frac{dy}{dx}, \xi$ и $\eta$ функціями $x$, получимъ:

$$\cancel{dx} - \frac{d\xi}{dx} + \left(\frac{dy}{dx} - \frac{d\eta}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + (y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

или

$$\cancel{dx}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dx}\frac{dy}{dx} = 0,$$

что вслѣдствіе уравн. (2) обращается въ:

$$d\xi + d\eta\frac{dy}{dx} = 0,$$

откуда

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{dx}{dy}.$$

Это послѣднее выраженіе показываетъ, что касательная проведенная къ эволютѣ черезъ т. K есть перпендикуляръ къ касательной, проведенной черезъ т. M къ кривой CM. Итакъ, касательная къ эволютѣ есть прямая KM.

Какъ непосредственное следствіе этого свойства есть то, что <u>эволюта кривой есть место последовательныхъ пересеченій нормальныхъ къ этой кривой.</u> Въ самомъ деле, разсмотримъ две изъ этихъ нормальныхъ MK и M,K,, которыя будутъ следовательно касательными къ эволюте въ точкахъ K и K,. Пусть I точка, где они пересекаются: когда M, приближается неопределенно къ M, M,K, приближается къ MK, и уголъ K,IK стремится къ двумъ прямымъ. K,K есть наибольшая сторона треугольника K,IK, и какъ эта сторона стремится къ нулю, тоже будетъ и съ IK. Следовательно, точка I движется на постоянной прямой MK приближаясь безконечно къ т. K, которую и можно разсматривать какъ точку пересеченія нормальной MK съ нормальною, безконечно къ ней близкой.

<u>Разность между двумя радіусами кривизны MK и M,K, равняется дуге K,K эволюты, взятой между двумя соответствующими центрами кривизны.</u>

Для доказательства вышесказаннаго предложенія, продифференцируемъ уравненіе

$$\rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2,$$

трактуя $y$, $\xi$, $\eta$ и $\rho$ функціями перемѣннаго независимаго $x$; имѣемъ:

$$\rho\, d\rho = (x-\xi)(dx-d\xi)+(y-\eta)(dy-d\eta),$$

или

$$\rho\, d\rho = dx\left(x-\xi+(y-\eta)\frac{dy}{dx}\right)-(x-\xi)\,d\xi-(y-\eta)\,d\eta,$$

что въ силу уравненія (1) сводится на

$$\rho\, d\rho = -(x-\xi)\,d\xi-(y-\eta)\,d\eta,$$

откуда получимъ, обозначивъ черезъ $\sigma$ дугу $FK$,

$$\frac{d\rho}{d\sigma} = \frac{(\xi-x)}{\rho}\cdot\frac{d\xi}{d\sigma}+\frac{(\eta-y)}{\rho}\cdot\frac{d\eta}{d\sigma}.$$

Но изъ урав. (1):

$$-\frac{(\xi-x)}{\eta-y} = \frac{dy}{dx} = tg\,\alpha;$$

откуда, по закону пропорціональности,

$$\sin\alpha = \frac{-(\xi-x)}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}} = \frac{-(\xi-x)}{\rho},$$

$$\cos\alpha = \frac{\eta-y}{\rho};$$

а также, такъ какъ $\frac{d\eta}{d\xi} = tg\,\lambda$,

$$\sin\lambda = \frac{d\eta}{\sqrt{d\eta^2+d\xi^2}} = \frac{d\eta}{d\sigma},$$

$$\cos\lambda = \frac{d\xi}{d\sigma}.$$

Следовательно, по подставлении, имеемъ:

$$\frac{d\varrho}{d\sigma} = -\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda = \sin(\lambda-\alpha) = \sin 90^\circ = 1;$$

почему имеемъ:

$d\varrho = d\sigma$, т.е. <u>дифер. рад. крив. = дифер. дуги.</u>

Изъ этого равенства заключаемъ, что

$$\varrho = \sigma + C,$$

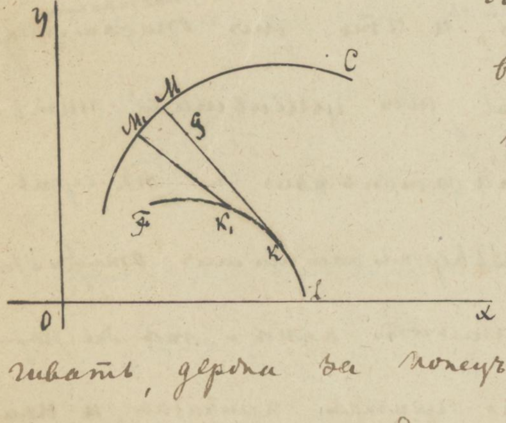
(здесь через $C$ обозначаемъ постоян. колич.); а также имеемъ

$$\varrho_1 = \sigma_1 + C:$$

откуда

$$\varrho - \varrho_1 = \sigma - \sigma_1 = \text{arc } FK - \text{arc } FK_1 = \text{arc } KK_1.$$

Отсюда следуетъ, что если возьмемъ гибкую и нерастяжимую нить $M_1K_1KL$, часть $K_1KL$ которой совпадаетъ съ эволютой, а часть $K_1M_1$ совпадаетъ съ касательною къ ней $M_1K_1$, и потомъ эту нить, укрепивъ ее въ т. $L$, станемъ постепенно развертывать, держа за конецъ $M_1$, такъ чтобы части $M_1K_1$, $MK$, ... не совпадающія съ кривою, были постоянно касательными къ эволюте, то конецъ $M_1$ опишетъ данную кривую, которая поэтому и называ-



ется развертывающеюся. (Въ сам. дѣлѣ, предположимъ,
что часть прямой линіи натянута по касательной
KM, и что конецъ ея находится не въ т. M кри-
вой, а въ ξ; имѣемъ

$$\xi K = M_1K_1 + K_1K,$$

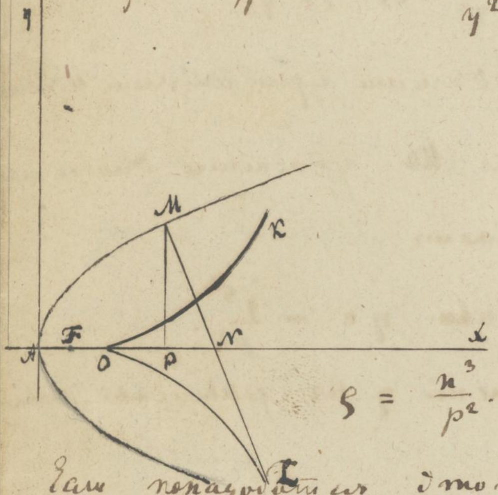
потому что $K_1K$ есть часть, которая получилась
отъ развертыванія кривой въ прямую линію. Но съ
другой стороны имѣемъ: $MK = M_1K_1 + K_1K$. Почему имѣ-
емъ $\xi K = MK$; откуда слѣдуетъ, что ξ должна нахо-
диться на кривой CM, или, что конецъ нити опи-
шетъ кривую CM.)
Ясно также, что одни и тѣже кривыя FK имѣютъ неопредѣленное
число развертывающихся, и что для построенія описанія ихъ
стоитъ только удлинять или укорачивать нить на
произвольную величину. (Касательныя къ FK суть
нормальныя ко всѣмъ развертывающимся, откуда слѣ-
дуетъ, что эти послѣднія имѣютъ одни и тѣже нор-
мальныя и одни тѣже центры кривизны; и какъ
онѣ заключаютъ на этихъ общихъ нормальныхъ опредѣлен-
ныя длины, можно, посредствомъ одной развертыв-

вающейся, получитъ весь другія.)

## Радіусъ кривизны и эволюта параболы.

Марта 29го

Приложимъ теперь вышеизложенную теорію къ параболѣ, которой уравненіе




$$y^2 = 2px.$$

Мы нашли выше, обозначивъ черезъ n нормальную MN и черезъ ρ радіусъ кривизны въ т. M, что

$$\rho = \frac{n^3}{p^2}.$$

Если понадобится этотъ радіусъ кривизны выразить функцією координатъ т. M, должно продифференцировать два раза уравненіе $y^2 = 2px$, послѣ чего будемъ имѣть:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Итакъ, для выраженія абсолютной велич. ρ, имѣемъ:

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{p^2}{y^3}} = \frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Чтобы вывести теперь уравненіе эволюты, подставимъ выраженія $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ въ уравненія

$$x - \xi + (y-\eta)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0;$$

получимъ:

$$(x-\xi) + (y-\eta)\frac{p}{y} = 0, \quad 1 + \frac{p^2}{y^2} - (y-\eta)\frac{p^2}{y^3} = 0.$$

Исключеніе $x$ и $y$ между этими уравненіями и уравненіемъ кривой приводитъ къ уравненію эволюты.

Изъ втораго уравненія имѣемъ

$$1 + \frac{p^2}{y^2} - \frac{p^2}{y^2} + \frac{p^2\eta}{y^3} = 0, \quad \text{или} \quad \eta = -\frac{y^3}{p^2}.$$

Подставимъ это выраженіе $\eta$ въ равенство перваго, получимъ

$$x - \xi + p + \frac{y^2}{p} = 0,$$

откуда

$$\xi - p = 3x.$$

Итакъ имѣемъ

$$y^3 = -p^2\eta, \quad x = \frac{1}{3}(\xi - p) \quad \text{и} \quad y^2 = 2px,$$

откуда

$$y^6 = p^4\eta^2,$$

и

$$y^6 = (2px)^3 = \left[\frac{2}{3}p(\xi - p)\right]^3.$$

А также

$$p^4\eta^2 = \frac{8}{27}p^3(\xi - p)^3,$$

и

$$\eta^2 = \frac{8}{27p}(\xi - p)^3.$$

Если перенесемъ ось ординатъ, сдвинувши ее параллельно ~~от~~ самой себѣ, въ т. O, такъ что $AO = p$, уравнение приметъ форму болѣе простую

$$\eta^2 = \frac{8}{27p}\,\xi'^3,$$

или просто

$$\eta = \pm\sqrt{\frac{8}{27p}}\cdot\xi'^{\frac{3}{2}} \quad (x)$$

Строя эту кривую, увидимъ, что она имѣетъ форму KOL (какъ на чертежѣ); она симметрична по отношенію къ оси абсциссъ, что легко видѣть à priori, и простирается до безконечности въ положительную сторону $x^{\text{овъ}}$.

Дифференцируя последнее равенство, находимъ:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{27p}}\,\xi^{\frac{1}{2}} \; *$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \pm\frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{27p}}\cdot\xi^{-\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{6p}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\xi}}.$$

Знакъ у $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ есть тотъ-же самый, какъ у $\eta$; слѣдовательно) кривая повсюду ~~повсюду~~ выпукла къ оси абсциссъ.

---

* Здѣсь мы для простоты отбросили (') у $\xi$.

# Радіусъ кривизны и эволюта эллипса.

Пусть
$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$
уравненіе эллипса, отнесеннаго къ своему центру и своимъ осямъ. Изъ него имѣемъ:
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$
~~Подставивши~~ Послѣ этого это, известная формула радіуса кривизны дастъ
$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2y^3}} = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$
Чтобы имѣть эволюту эллипса, возьмемъ снова два уравненія
$$(1) \quad 1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$
$$(2) \quad x - \xi + (y-\eta)\frac{dy}{dx} = 0.$$
Замѣстивши въ нихъ $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ ихъ выраженіями, уравненіе (1) приметъ видъ:
$$a^4y^3 + b^4x^2y - a^2b^4(y-\eta) = 0,$$
или
$$y - \eta = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)y}{a^2b^4}$$
$$= \frac{a^4y^2 + b^2(a^2b^2 - a^2y^2)}{a^2b^4}\,y = \frac{(a^2-b^2)y^2 + b^4}{b^4}\,y;$$

и положивъ $a^2 - b^2 = c^2$, получимъ:

$$y - \eta = \frac{b^4 + c^2y^2}{b^4}y = y + \frac{c^2y^3}{b^4};$$

или наконецъ

$$(3) \quad \eta = -\frac{c^2y^3}{b^4}.$$

Замѣняя въ послѣднемъ выраженiи x ~~на~~ черезъ y, y черезъ x, потомъ a на b, b на a, что измѣнитъ $c^2$ на $-c^2$, будемъ имѣть:

$$(4) \quad \xi = \frac{c^2x^3}{a^4}.$$

Слѣдовательно, если положимъ, для краткости, $\frac{c^2}{a} = A$ и $\frac{c^2}{b} = B$, имѣемъ:

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{1}{3}} \quad и \quad \frac{y}{b} = -\left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

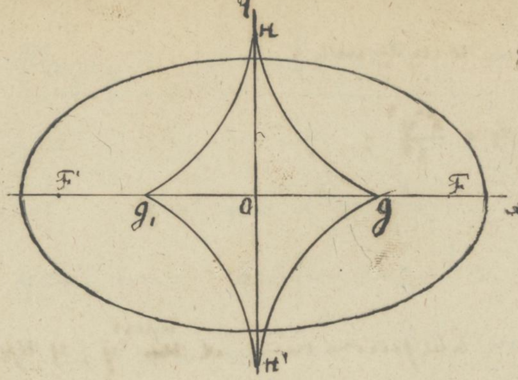
Подставивъ эти выраженiя въ уравненiе эллипса, ~~представленное въ формѣ~~

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

для уравненiя эволюты, имѣемъ

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Кривая, представляемая этимъ уравненiемъ, симметрична по отношенiю къ осямъ эллипса,




что, впрочемъ, также можно ~~было~~ видѣть à priori.

Для $\eta = 0$, имѣемъ

$$\xi = \pm A = \pm \frac{c^2}{a},$$

равенство, опредѣляющее двѣ точки $g$ и $g'$, расположенныя на оси $x$-овъ между фокусами. Такимъ же образомъ опредѣлимъ точки $H$ и $H'$, гдѣ кривая пересѣкаетъ ось $y$.

Дифференцируя уравненіе кривой два раза сряду, будемъ имѣть

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{d\xi}{A} + \left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{d\eta}{B} = 0,$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{d\xi^2}{A^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{d\eta^2}{B^2} + \left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{d^2\eta}{B} = 0;$$

откуда

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{1}{A^2} + \left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{1}{B^2}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{3\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{B}}.$$

Изъ выведеннаго равенства явно, что $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ имѣетъ одинъ и тотъ же знакъ съ знаменателемъ правой части. Слѣдовательно эта производная будетъ имѣть знакъ общій съ $\eta$. Отсюда легко чаемъ, что) кривая своею вогнутостью постоянно обращена къ оси $x$.

Имѣемъ также:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{A}}{\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{B}} = -\left(\frac{A\eta}{B\xi}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{B}{A};$$

Эта производная становится 0 для $\eta = 0$ и безконечност. для $\xi = 0$; отсюда заключаемъ, что оси суть касательныя къ кривой въ точкахъ $G$, $G'$, $H$ и $H'$, которыя по случаю симметричности фигуры должны быть точками возврата (points de rebroussement) кривой.

<u>Радіусъ кривизны и эволюта гиперболы.</u>

Радіусъ кривизны и эволюта гиперболы могутъ быть выведены изъ уравненій выведенныхъ для эллипса, замѣняя въ этихъ послѣднихъ $b^2$ на $-b^2$. Такъ что для радіуса кривизны имѣемъ:

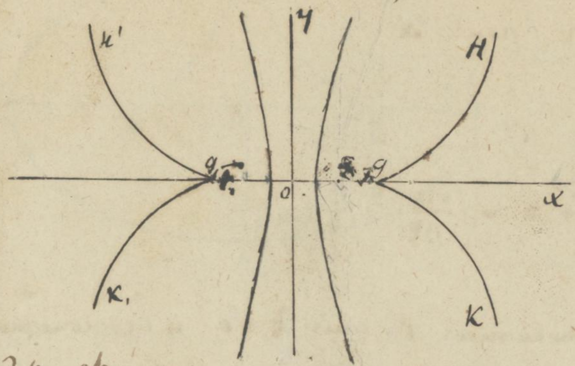
$$\rho = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4},$$

а для уравненія эволюты:

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

полагая $c^2 = a^2 + b^2$, $\frac{c^2}{a} = A$ и $\frac{c^2}{b} = B$.

Эволюта гиперболы состоитъ изъ двухъ безконечныхъ вѣтвей $HgK$, $H'g'K'$, симметрически расположенныхъ относительно обѣихъ

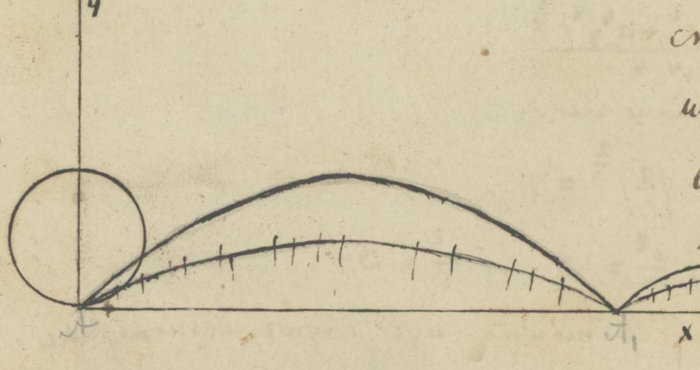



осей; она имѣетъ двѣ точки возврата $g$ и $g'$, расположенныя на оси $x^{\text{ов}}$ за фокусами относительно центра, и во вездѣ ~~(вогнутость)~~ выпуклостью обращена къ оси $x^{\text{овъ}}$.

## Опредѣленiе циклоиды и ея уравненiе.

Марта 31го

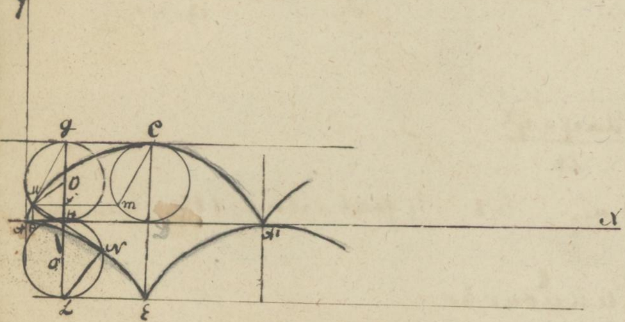
Предположимъ, что имѣемъ систему прямоугольныхъ координатъ $xy^{\text{овъ}}$ и предположимъ еще, что имѣемъ кругъ, радiусъ котораго $a$; точка $A$ на этомъ кругѣ пусть находится въ т. начала координатъ. Покатимъ этотъ кругъ по оси $x^{\text{овъ}}$ въ ея положительную




сторону: точка $A$ опишетъ некоторую кривую и придетъ опять къ оси $x^{\text{овъ}}$ только тогда, когда кругъ нашъ совершитъ полный оборотъ; такъ что т. А, отстоитъ отъ А' на разстояніе, равное окружности катящагося круга.

Кривая, так. обр. описанная точкою катящагося круга, носитъ названіе <u>циклоиды</u>; кругъ, движеніемъ котораго эта кривая описывается, называется <u>производящимъ кругомъ</u>; точка А — <u>производящею точкою</u>.

Начнемъ съ вывода уравненія этой кривой. Возьмемъ на нашей циклоидѣ произвольную точку



М, и пусть АР = x, МР = y координаты этой точки; МО = а и МОН = u. Соединимъ МО и проведемъ МТ перпендикулярно къ ОН.

Изъ самаго способа происхожденія кривой видно, что arc МН = части прямой АН. Такъ что имѣемъ:

$$x = AH - PH = \text{arc } MH - MJ = au - a\sin u = a(u - \sin u),$$

$$y = OH - JK = a - a\cos u = a(1 - \cos u).$$

Так. обр. мы имѣемъ:

$$(1) \qquad x = a(u - \sin u)$$

$$(2) \qquad y = a(1 - \cos u), —$$

выраженія для координатъ т. $M$ взятой произвольно на дугѣ нашей циклоиды; чтобы получить уравненіе циклоиды, нужно только исключить уголъ $u$. Чтобы достигнуть этого обратимся къ равенству (2); изъ него имѣемъ:

$$\cos u = \frac{a-y}{a} \quad \text{или} \quad u = \text{arc}\cos\frac{a-y}{a},$$

откуда

$$\sin u = \pm\frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}.$$

Внося эти выраженія въ уравненіе (1), имѣемъ для уравненія циклоиды

$$(3) \qquad x = a\,\text{arc}\cos\frac{a-y}{a} \mp \sqrt{2ay - y^2},$$

т.е. отношеніе между $x$ и $y$, координатами различныхъ точекъ циклоиды.

Разсматривая это уравненіе оно кромѣ исходя.

изъ самаго понятія, которое мы составили себѣ о циклоидѣ, легко видѣть, что для абсциссы $x$ равной $\frac{1}{2}$ окружности производящаго круга ордината $y$ получаетъ наибольшую величину и именно она равна діаметру производящаго круга, т. е. $2a$. Видимъ также, что при дальнѣйшемъ увеличеніи абсциссы, величина $y$ начинаетъ убывать и обращается въ нуль для абсциссы = окруж. производящаго круга; затѣмъ $y$ снова начинаетъ возрастать до тѣхъ поръ пока $x$ не сдѣлается $= 1\frac{1}{2}$ окр. произв. круга, послѣ чего для $y$ начинается періодъ убыванія, оканчивающійся при $x =$ 2 окр. произв. круга, и т. д. Такъ что ясно, что кривая нашей циклоиды будетъ состоять не изъ одной части, а изъ безконечнаго числа совершенно тождественныхъ дугъ, которыя всѣ въ двухъ крайнихъ точкахъ своихъ касаются оси абсциссъ.

Такъ какъ всѣ дальнѣйшія дуги циклоиды

тождественны съ первою, то мы и ограничимся

изученіемъ свойствъ только 1ой дуги.

Примѣч. Возвращаясь къ выведенному нами уравн.

циклоиды (3) замѣтимъ, что для опредѣленія знака

предъ радикаломъ, слѣдуетъ обращать вниманіе на по-

ложеніе точки $M$ на дугѣ циклоиды. Именно, если

точка $M$ находится на дугѣ $AC$, слѣдуетъ брать

$+$, потому что въ этомъ случаѣ $u < \pi$, а $\sin u > 0$,

если же $M$ относится къ дугѣ $CA'$, имѣемъ $u > \pi$

и $\sin u < 0$. Слѣдовательно верхній знакъ соотвѣт-

ствуетъ дугѣ $AC$, а нижній $CA'$.

Касательная и нормальная. Чтобы дать средство

проводить касательныя къ какимъ угодно точ-

камъ циклоиды, намъ необходимо опредѣлить выр-

аженіе $\frac{dy}{dx}$. Это выраженіе мы можемъ опредѣлить

непосредственно изъ ур. (3); но такъ какъ въ

это уравненіе входитъ радикалъ, то гораздо будетъ

проще, если мы продифференцируемъ (1) и (2):

такимъ путемъ скорѣе и легче дойдемъ до того же выраженія производной $y$ по $x$. Въ сам. дѣлѣ, дифференцируя рав. (1), получаемъ:

$$dx = a\,du - a\cos u\,du = a\,du(1-\cos u) = y\,du.$$

Дифференцируя 2$^{ое}$ рав. имѣемъ:

$$dy = a\sin u\,du = \pm du\sqrt{2ay-y^2}.$$

Раздѣливъ соотвѣтственно:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{y} = \pm\sqrt{\frac{2a}{y}-1}.$$

Если допустимъ $y=0$, то для т. $x=0$ увидимъ, что выраженіе $\frac{dy}{dx}$ будетъ $=\infty$, т.е. касательная будетъ перпендикулярна къ оси $x$. Итакъ, въ настоящемъ случаѣ, ось $y$ есть касательная къ циклоидѣ. Если допустимъ $y = 2a$, увидимъ, что наше выраженіе обратится въ нуль, т.е. найдемъ, что касательная соотвѣтствующая т. $D$ параллельна оси $x$.

Зная $\frac{dy}{dx}$ прямо можно написать выраженіе подкасательной. Въ сам. дѣлѣ, мы знаемъ, что

$$S_n = \frac{y\,dy}{dx};$$

Слѣдовательно, въ настоящемъ случаѣ, $= \sqrt{2ay - y^2} = \sqrt{y(2a-y)} = \sqrt{PH \times PG}$, т. е. видимъ, что $S_n = MG = PH$.

Но нормальная должна соединять т. $M$ съ концемъ под~~касательной~~нормальной: слѣдовательно, $MH$ будетъ изображать нормальную, а также $MG$, перпендикулярная къ $MH$, есть касательная въ этой точкѣ.

Изъ сказаннаго выводится очень простой способъ провести касательную въ одной изъ точекъ циклоиды, напр. $M$. Предположимъ кругъ $CmD$ описанный на наибольшей ординатѣ какъ на діаметрѣ; проводимъ $Mm$ параллельно $Ax$: параллельная къ $Cm$, проведенная черезъ т. $M$, будетъ искомая касательная.

Изъ самаго чертежа видно, что длина нормальной циклоиды въ т. $M$ должна быть равна хордѣ $MH$; но это еще можно доказать и аналитически. Въ сам. д., длина нормальной $=$ $y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$; а такъ какъ $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y}$:

$$N = y\sqrt{1+\frac{2ay-y^2}{y^2}} = \sqrt{2ay} = \sqrt{GH \times FH},$$ т.е.

средней пропорціональной между діаметромъ и отрѣзкомъ, т.е. = HM.

## Радіусъ и центръ круга кривизны.

Какъ извѣстно, радіусъ кривизны $\rho$ опредѣляется слѣдующею формулою

$$\rho = \pm \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Слѣдуетъ только въ эту форм. подставить выраженія $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, выведенныя изъ уравненія циклоиды, и нашъ вопросъ будетъ рѣшенъ.

Извѣстно, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay-y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2a}{y}-1},$$

Откуда:

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{2a}{y}-1,$$

а потомъ:

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a}{y^2}\frac{dy}{dx},$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}$$

Подставляя эти величины $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ въ соотвѣтств. выраженіи радіуса кривизны, находимъ

$$\rho^2 = \frac{\left(\frac{2a}{y}\right)^3}{\frac{a^2}{y^4}} = \frac{8a^3y}{a^2};$$

наконецъ

$$\rho = 2\sqrt{2ay}.$$

Но

$$\sqrt{2ay} = \sqrt{DH \cdot IH} = MH:$$

слѣдовательно, радіусъ кривизны есть удвоенная длина MH, а такъ какъ MH есть нормаль въ т. M будемъ имѣть центръ кривизны взявши на продолженіи MH точку N такую что $MN = 2MH$.

<u>Эволюта циклоиды.</u> Послѣдній выводъ позволяетъ очень просто опредѣлить эволюту циклоиды. Пусть HNL кругъ равный кругу OM, касающійся въ т. H къ Ax и находящійся подъ этой прямою; проведемъ LE параллельно Ax, и продолжимъ діаметръ CD до его пересѣченія E съ LE; дуги MH и NH будутъ равны, почему

$$\text{arc } NH = AH;$$

но

$$\text{arc } HNL = AD,$$

откуда

$$\text{arc } NL = AD - AH = DH = LE.$$