Объ одномъ свойствѣ дифференціальныхъ уравненій задачи о движеніи тяжелаго твердаго тѣла, имѣющаго неподвижную точку *).

А. М. Ляпунова.

1. Вопросъ о движеніи тяжелаго твердаго тѣла, имѣющаго неподвижную точку, зависитъ, какъ извѣстно, отъ интегрированія системы дифференціальныхъ уравненій слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr+\beta\zeta-\gamma\eta,\\
B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp+\gamma\xi-\alpha\zeta,\\
C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq+\alpha\eta-\beta\xi,\\
\frac{d\xi}{dt} &= r\eta-q\zeta,\\
\frac{d\eta}{dt} &= p\zeta-r\xi,\\
\frac{d\zeta}{dt} &= q\xi-p\eta.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Здѣсь A, B, C, α, β, γ суть извѣстныя постоянныя, изъ которыхъ первыя три представляютъ главные моменты инерціи твердаго тѣла,

*) Предметъ этой статьи былъ доложенъ мною Харьковскому Математическому Обществу въ засѣданіи 10 мая 1893 г. Но нѣкоторыя независящія отъ меня обстоятельства помѣшали своевременному окончанію ея редактированія, вслѣдствіе чего она появляется въ печати нѣсколько запоздавшею.

Считаю нужнымъ замѣтить, что вопросъ, которому она посвящена, рѣшается также въ только-что опубликованномъ сочиненіи Г. Г. Аппельрота подъ заглавіемъ *Задача о движеніи тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки*.

соотвѣтствующіе неподвижной точкѣ, а послѣднія три пропорціональны прямоугольнымъ координатамъ центра тяжести въ системѣ координатъ, оси которыхъ совпадаютъ съ осями этихъ моментовъ инерціи.

Безъ нѣкоторыхъ предположеній относительно этихъ постоянныхъ уравненія (1) еще не удалось проинтегрировать, и до недавняго времени были извѣстны только два случая, въ которыхъ получался ихъ общій интегралъ.

Одинъ изъ нихъ, въ которомъ интегрированіе было выполнено еще Эйлеромъ, есть тотъ, когда

$$\alpha = \beta = \gamma = 0\,,$$

т. е. когда центръ тяжести тѣла совпадаетъ съ неподвижною точкой; другой, указанный Лагранжемъ,—тотъ, когда два изъ названныхъ моментовъ инерціи равны между собою, а центръ тяжести лежитъ гдѣ либо на оси третьяго, т. е. когда при надлежащемъ выборѣ обозначеній

$$A = B\,, \qquad \alpha = \beta = 0\,.$$

Въ обоихъ случаяхъ уравненія (1) интегрируются, какъ извѣстно, при помощи эллиптическихъ функцій, и величины p, q, r, ξ, η, ζ, каковы бы ни были ихъ начальныя значенія, выражаются однозначными функціями времени t, не имѣющими никакихъ другихъ особенныхъ точекъ, кромѣ полюсовъ (точекъ въ безконечности мы не разсматриваемъ).

С. В. Ковалевская недавно показала, какъ интегрируются уравненія (1) еще въ одномъ случаѣ: именно—когда два изъ моментовъ инерціи равны удвоенному третьему, а центръ тяжести лежитъ въ плоскости осей равныхъ моментовъ инерціи, т. е. когда выборомъ обозначеній можно распорядиться такъ, чтобы имѣли мѣсто равенства

$$A = B = 2C\,, \qquad \gamma = 0\,.$$

Въ этомъ случаѣ уравненія (1) интегрируются при помощи функцій ϑ, зависящихъ отъ двухъ аргументовъ, но p, q, r, ξ, η, ζ по прежнему выражаются однозначными функціями времени, не имѣющими другихъ особенныхъ точекъ, кромѣ полюсовъ.

Это то послѣднее обстоятельство и послужило С. В. Ковалевской къ открытію указаннаго сейчасъ случая.

Замѣтивши, что въ обоихъ извѣстныхъ случаяхъ интегрируемости функціи p, q, r, ξ, η, ζ обладаютъ сказаннымъ свойствомъ, С. В. Ковалевская предложила себѣ найти, если возможно, новые случаи того же рода и, стараясь разрѣшить эту задачу, пришла къ своему случаю.

Путь, которому она слѣдовала, намѣченъ въ параграфѣ 1^{омъ} ея мемуара *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe* (Acta mathem., t. 12), но съ большею обстоятельностью указанъ въ другомъ ея мемуарѣ, который былъ напечатанъ въ 14$^{\underline{\text{омъ}}}$ томѣ Acta mathematica подъ заглавіемъ: *Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*.

Въ настоящее время мы знаемъ такимъ образомъ три случая, въ которыхъ функціи p, q, r, ξ, η, ζ, каковы бы ни были ихъ начальныя значенія, выходятъ однозначными и безъ особенныхъ точекъ кромѣ полюсовъ.

Является вопросъ, не существуетъ ли другихъ такихъ же случаевъ? Или, можетъ быть, указанные три суть единственные случаи такого рода изъ всѣхъ, возможныхъ механически?

Хотя С. В. Ковалевская и не высказывается въ этомъ отношеніи категорически, но судя по ходу ея разсужденій, надо думать, что своимъ изслѣдованіемъ она считала вопросъ рѣшеннымъ и именно—въ послѣднемъ смыслѣ. По крайней мѣрѣ, къ такому заключенію приводитъ сопоставленіе двухъ слѣдующихъ ея утвержденій: въ началѣ перваго своего мемуара она говоритъ, что всѣ случаи разсматриваемаго рода должны быть таковы, чтобы уравненіямъ (1) можно было удовлетворить рядами, характерными для полюсовъ и содержащими въ своихъ коэффиціентахъ пять произвольныхъ постоянныхъ, а въ концѣ второго мемуара высказываетъ, какъ выводъ, что это возможно только въ трехъ указанныхъ выше случаяхъ.

Однако анализъ ея, по скольку о немъ можно судить на основаніи опубликованнаго въ упомянутыхъ сейчасъ мемуарахъ, нельзя считать рѣшающимъ, такъ какъ онъ основывается на нѣкоторыхъ допущеніяхъ, законность которыхъ можетъ подлежать сомнѣнію.

Это обстоятельство первый указалъ академикъ А. А. Марковъ, который недавно въ своихъ письмахъ сообщилъ мнѣ сущность возраженій, которыя высказывались имъ противъ анализа С. В. Ковалевской.

Но вполнѣ соглашаясь съ А. А. Марковымъ относительно недостаточности этого анализа, я тѣмъ не менѣе склоненъ былъ думать, что вопросъ разрѣшается въ томъ именно смыслѣ, какъ полагала С. В. Ковалевская, и что рѣшеніе его можетъ быть достигнуто безъ особыхъ затрудненій, если нѣсколько иначе приняться за дѣло.

Вслѣдствіе этого я рѣшилъ разсмотрѣть вопросъ съ другой точки зрѣнія и попытаться приложить къ нему методу, которая давно уже казалась мнѣ наиболѣе подходящею для рѣшенія вопросовъ такого рода.

Такимъ путемъ пришелъ я къ доказательству единственности найденныхъ трехъ случаевъ однозначности, которое и предлагаю здѣсь вниманію читателя.

Доказательство это основывается на соображеніяхъ, совершенно отличныхъ отъ тѣхъ, которыми руководилась С. В. Ковалевская, чѣмъ не только устраняются нѣкоторыя затрудненія принципіальнаго характера, присущія ея методѣ, но и достигается значительное упрощеніе анализа вслѣдствіе меньшаго числа и меньшей сложности тѣхъ частныхъ случаевъ, которые приходится разсматривать.

Метода, которою я пользуюсь, обладаетъ при томъ тѣмъ преимуществомъ, что приводитъ къ болѣе широкому заключенію, а именно: она позволяетъ заключить, что во всѣхъ остальныхъ возможныхъ случаяхъ, за исключеніемъ извѣстныхъ трехъ, функціи p, q, r, ξ, η, ζ не только могутъ имѣть особенныя точки, отличныя отъ полюсовъ, но при надлежащемъ выборѣ начальныхъ значеній навѣрно будутъ многозначными.

Наконецъ, хотя подъ возможными я и разумѣю здѣсь случаи возможные механически, анализъ мой обнимаетъ и множество другихъ случаевъ, ибо единственное предположеніе, которое я дѣлаю, состоитъ въ томъ, что A, B, C, α, β, γ вещественны, и что изъ чиселъ A, B, C ни одно не нуль.

Я доказываю такимъ образомъ слѣдующее:

Изъ всѣхъ случаевъ, когда постоянныя A, B, C, α, β, γ вещественны и A, B, C всѣ отличны отъ нуля, извѣстные три случая суть единственные, въ которыхъ функціи p, q, r, ξ, η, ζ, опредѣляемыя уравненіями (1), однозначны при всякихъ начальныхъ значеніяхъ.

2. Прежде, чѣмъ говорить о методѣ, которою я здѣсь пользуюсь, считаю необходимымъ указать на нѣкоторыя слѣдствія, вытекающія для уравненій (1) изъ принциповъ общей теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій и обусловливаемыя тѣмъ обстоятельствомъ, что вторыя части этихъ уравненій суть цѣлыя функціи величинъ p, q, r, ξ, η, ζ съ постоянными коэффиціентами.

Пусть p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 суть начальныя значенія функцій p, q, r, ξ, η, ζ, соотвѣтствующія нѣкоторому опредѣленному значенію t, которое означимъ черезъ t_0.

Пусть значеніе это на плоскости перемѣннаго t представляется точкою O.

Всякій разъ, когда p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 выбраны опредѣленнымъ образомъ, а перемѣнное t подчинено условію, чтобы представляющая точка оставалась внутри окружности достаточно малаго радіуса съ центромъ въ точкѣ O, функціи p, q, r, ξ, η, ζ будутъ вполнѣ опредѣленными и представятся рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $t-t_0$.

Если же перемѣнное t не подчинено сказанному условію, то чтобы говорить о значеніяхъ этихъ функцій въ какой либо точкѣ P, вообще необходимо задать путь L, соединяющій эту точку съ точкою O *).

*) Говоря о пути, соединяющемъ двѣ точки O и P, мы подразумѣваемъ, что рѣчь идетъ о геометрическомъ мѣстѣ точекъ, представляющихъ значенія перемѣннаго t, вещественная и мнимая часть котораго даны подъ видомъ опредѣленныхъ и непрерывныхъ

и разсматривать соотвѣтствующее ему непрерывное измѣненіе t отъ значенія t_0 до значенія, представляемаго точкою P.

Тогда по способу аналитическаго продолженія функцій можно будетъ опредѣлить функціи p, q, r, ξ, η, ζ, смотря по обстоятельствамъ, или для всѣхъ точекъ пути L, включая и точку P, или только для точекъ, встрѣчаемыхъ при движеніи по этому пути отъ точки O ранѣе нѣкоторой точки P' и насколько угодно близкихъ къ ней, но не для точки P'.

Въ первомъ случаѣ всѣ точки пути L, включая и точку P, будутъ для функцій p, q, r, ξ, η, ζ обыкновенными. Во второмъ всѣ точки, встрѣчаемыя ранѣе P', будутъ обыкновенными, а точка P' будетъ особенною, и съ приближеніемъ къ ней по крайней мѣрѣ нѣкоторыя изъ функцій p, q, r, ξ, η, ζ не будутъ приближаться ни къ какимъ предѣламъ; что же касается всѣхъ остальныхъ точекъ пути L, когда точка P' отлична отъ точки P, то относительно нихъ при разсматриваемомъ выборѣ пути нельзя сказать ничего опредѣленнаго.

Во второмъ случаѣ, чтобы говорить о значеніяхъ функцій p, q, r, ξ, η, ζ въ точкѣ P, путь L долженъ быть замѣненъ какимъ либо другимъ.

Допустимъ теперь, что, остановившись на какомъ либо опредѣленномъ выборѣ точки P и пути L, мы приписываемъ величинамъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 различныя значенія и, когда это возможно, опредѣляемъ соотвѣтствующія имъ значенія функцій p, q, r, ξ, η, ζ въ точкѣ P.

Тогда, если опредѣленіе это оказывается возможнымъ при какихъ либо величинахъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, то будетъ возможно и при всякихъ другихъ, достаточно къ нимъ близкихъ.

Это вытекаетъ изъ слѣдующаго весьма важнаго для насъ предложенія:

Если всѣ точки пути L, включая и точку P, при

$$p_0 = p_0', \quad q_0 = q_0', \quad r_0 = r_0', \quad \xi_0 = \xi_0', \quad \eta_0 = \eta_0', \quad \zeta_0 = \zeta_0'$$

суть обыкновенныя, то то же будетъ и при всякихъ другихъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, для которыхъ модули величинъ

$$p_0 - p_0', \quad q_0 - q_0', \quad r_0 - r_0', \quad \xi_0 - \xi_0', \quad \eta_0 - \eta_0', \quad \zeta_0 - \zeta_0' \tag{2}$$

не превосходятъ нѣкотораго отличнаго отъ нуля предѣла, при чемъ функціи p, q, r, ξ, η, ζ, соотвѣтствующія такимъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0,

---

функцій вещественнаго перемѣннаго s, способнаго получать всевозможныя значенія, лежащія между нѣкоторыми опредѣленными предѣлами, соотвѣтствующими точкамъ O и P. При этомъ точки пути различаемъ значеніями s, такъ-что точки, соотвѣтствующія различнымъ s, разсматриваемъ, какъ различныя точки пути, хотя бы онѣ и совпадали съ одною и тою же точкою плоскости, и двѣ точки пути считаемъ безконечно-близкими только тогда, когда онѣ соотвѣтствуютъ безконечно-близкимъ значеніямъ s.

будутъ способны представляться на пути L рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ (2), сходящимися равномѣрно для всѣхъ точекъ этого пути, включая и точку P, и всѣ эти точки для ихъ коэффиціентовъ, какъ функцій перемѣннаго t, будутъ обыкновенными.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что если при опредѣленномъ выборѣ точки P и пути L значенія функцій $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ въ этой точкѣ разсматриваются, какъ функціи величинъ $p_0, q_0, r_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$, то функціи эти будутъ обладать опредѣленными частными производными по какимъ угодно изъ этихъ величинъ и какого угодно порядка всякій разъ, когда всѣ точки пути L, включая и точку P, для функцій $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ суть обыкновенныя, и эти частныя производныя при постоянныхъ $p_0, q_0, r_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$ представятъ функціи перемѣннаго t, для которыхъ всякая точка плоскости, выходящая для функцій $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ при какомъ либо выборѣ пути обыкновенною, будетъ при томъ же выборѣ пути также обыкновенною.

Вообще значенія функцій $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ въ какой либо точкѣ P, опредѣляемыя при однихъ и тѣхъ же $p_0, q_0, r_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$, но при различныхъ путяхъ, могутъ быть различными.

Но допустимъ, что мы имѣемъ дѣло съ случаемъ, когда значенія эти не зависятъ отъ пути, каковы бы ни были $p_0, q_0, r_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$, т. е. когда функціи $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ однозначны при всякихъ начальныхъ значеніяхъ.

Тогда при всякомъ опредѣленномъ выборѣ величинъ $p_0, q_0, r_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$ положенія всѣхъ особенныхъ точекъ этихъ функцій будутъ вполнѣ опредѣленными, и во всякой части плоскости, несодержащей этихъ точекъ, разсматривавшіяся сейчасъ частныя производныя будутъ также однозначными.

Разысканіе условій этой однозначности при величинахъ $p_0, q_0, r_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$, соотвѣтствующихъ нѣкоторымъ извѣстнымъ частнымъ рѣшеніямъ уравненій (1), и составляетъ сущность моей методы.

Я ограничиваюсь при этомъ разсмотрѣніемъ частныхъ производныхъ перваго порядка, чего при надлежащемъ выборѣ частныхъ рѣшеній уравненій (1) оказывается вполнѣ достаточно для полнаго рѣшенія вопроса.

Пусть l означаетъ какую либо изъ величинъ $p_0, q_0, r_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$. Тогда уравненіями

$$u = \frac{\partial p}{\partial l}, \quad v = \frac{\partial q}{\partial l}, \quad w = \frac{\partial r}{\partial l},$$

$$x = \frac{\partial \xi}{\partial l}, \quad y = \frac{\partial \eta}{\partial l}, \quad z = \frac{\partial \zeta}{\partial l}$$

опредѣлится нѣкоторое частное рѣшеніе слѣдующей системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}
A\frac{du}{dt} &= (B-C)(rv+qw)+\beta z-\gamma y,\\
B\frac{dv}{dt} &= (C-A)(pw+ru)+\gamma x-\alpha z,\\
C\frac{dw}{dt} &= (A-B)(qu+pv)+\alpha y-\beta x,\\
\frac{dx}{dt} &= \eta w-\zeta v+ry-qz,\\
\frac{dy}{dt} &= \zeta u-\xi w+pz-rx,\\
\frac{dz}{dt} &= \xi v-\eta u+qx-py,
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

и всѣ шесть такихъ рѣшеній, получаемыхъ, когда l поочередно полагается равнымъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, будутъ независимыми, такъ что изъ нихъ извѣстнымъ путемъ могутъ быть выводимы всякія другія рѣшенія той же системы.

Для всякаго извѣстнаго частнаго рѣшенія уравненій (1) коэффиціенты въ уравненіяхъ (3) будутъ извѣстными функціями t, и вопросъ будетъ состоять въ разысканіи условій, при которыхъ всякія функціи u, v, w, x, y, z, удовлетворяющія этимъ уравненіямъ, оставались бы однозначными во всякой части плоскости, не содержащей особенныхъ точекъ функцій p, q, r, ξ, η, ζ разсматриваемаго рѣшенія системы (1).

Всякія необходимыя условія этого рода навѣрно будутъ необходимы и для однозначности функцій p, q, r, ξ, η, ζ при всякихъ начальныхъ значеніяхъ.

Дѣйствительно, пусть для разсматриваемаго частнаго рѣшенія уравненій (1), соотвѣтствующаго начальнымъ значеніямъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, система (3) допускаетъ рѣшеніе, въ которомъ функціи u, v, w, x, y, z (всѣ или только нѣкоторыя), выходя изъ точки O съ начальными значеніями u_0, v_0, w_0, x_0, y_0, z_0, достигаютъ одной и той же точки P по двумъ путямъ, не встрѣчающимъ особенныхъ точекъ функцій p, q, r, ξ, η, ζ, съ различными значеніями. Тогда функціи p, q, r, ξ, η, ζ, опредѣляемыя начальными значеніями

$$p_0+u_0\varepsilon,\quad q_0+v_0\varepsilon,\quad r_0+w_0\varepsilon,\quad \xi_0+x_0\varepsilon,\quad \eta_0+y_0\varepsilon,\quad \zeta_0+z_0\varepsilon,$$

при $|\varepsilon|$ достаточно маломъ, но отличномъ отъ нуля, будутъ достигать той же точки по тѣмъ же путямъ также съ различными значеніями, ибо на основаніи указаннаго выше предложенія функціи эти при $|\varepsilon|$

достаточно маломъ представятся на разсматриваемыхъ путяхъ рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ ε, а члены первой степени относительно ε, очевидно, будутъ въ этихъ рядахъ вида

$$u\varepsilon, \quad v\varepsilon, \quad w\varepsilon, \quad x\varepsilon, \quad y\varepsilon, \quad z\varepsilon.$$

3. Чтобы требованіе однозначности функцій u, v, w, x, y, z могло привести къ какимъ либо условіямъ, уравненія (3) должны быть разсматриваемы только для такихъ рѣшеній уравненій (1), которыя обладали бы особенными точками по крайней мѣрѣ для нѣкоторыхъ изъ функцій $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$, ибо при отсутствіи особенныхъ точекъ для послѣднихъ функціи u, v, w, x, y, z также не будутъ имѣть такихъ точекъ и всегда будутъ однозначными во всей плоскости перемѣннаго t.

Такимъ образомъ для нашей методы весьма важно имѣть какія либо частныя рѣшенія уравненій (1) съ особенными точками по крайней мѣрѣ для нѣкоторыхъ изъ функцій $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$.

Подобныя рѣшенія дѣйствительно извѣстны и возможны во всѣхъ случаяхъ, за исключеніемъ одного, который характеризуется равенствами $\alpha=\beta=\gamma=0$ и условіемъ, что A, B, C не всѣ различны.

Простѣйшія изъ такихъ рѣшеній суть рѣшенія вида

$$\left.\begin{aligned} p&=\frac{a}{t}, & q&=\frac{b}{t}, & r&=\frac{c}{t}\\ \xi&=\frac{f}{t^2}, & \eta&=\frac{g}{t^2}, & \zeta&=\frac{h}{t^2}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

гдѣ a, b, c, f, g, h означаютъ постоянныя, изъ которыхъ по крайней мѣрѣ нѣкоторыя отличны отъ нуля.

Не останавливаясь на разысканіи всевозможныхъ системъ значеній a, b, c, f, g, h, соотвѣтствующихъ рѣшеніямъ такого типа, укажемъ двѣ такихъ системы, изъ которыхъ одна возможна всякій разъ, когда A, B, C всѣ различны, другая — всякій разъ, когда между числами α, β, γ по крайней мѣрѣ одно есть нуль и по крайней мѣрѣ одно не нуль.

Первая изъ этихъ системъ опредѣляется слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} a&=-B'C', & b&=-C'A', & c&=-A'B',\\ f&=0, & g&=0, & h&=0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

гдѣ

$$A'=\sqrt{\frac{A}{B-C}}, \qquad B'=\sqrt{\frac{B}{C-A}}, \qquad C'=\sqrt{\frac{C}{A-B}}$$

и радикалы имѣютъ какія угодно свойственныя имъ алгебраическія значенія.

Вторая, соотвѣтствующая предположенію, что $\beta = 0$, и что изъ чиселъ α и γ хотя одно не нуль, есть слѣдующая:

$$\left.\begin{aligned} a &= 0, & b &= 2i, & c &= 0, \\ f &= -\frac{2Bi}{\gamma + \alpha i}, & g &= 0, & h &= -\frac{2B}{\gamma + \alpha i}, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

гдѣ i означаетъ $\pm\sqrt{-1}$.

Этихъ формулъ, если къ нимъ присоединить подобныя имъ, соотвѣтствующія предположенію $\alpha = 0$ или $\gamma = 0$, будетъ для насъ вполнѣ достаточно, такъ какъ въ случаѣ, когда A, B, C всѣ различны, мы можемъ пользоваться формулами (5), а въ случаѣ, когда между ними существуютъ равныя, одно изъ чиселъ α, β, γ всегда можемъ предположить нулемъ (α или β, когда $A = B$; β или γ, когда $B = C$; γ или α, когда $C = A$), послѣ чего можно будетъ пользоваться формулами (6) или имъ подобными, если только α, β, γ не всѣ нули, т. е. если разсматриваемый случай не заключается въ случаѣ Эйлера.

Для рѣшеній типа (4) система (3) будетъ слѣдующаго вида:

$$At\frac{du}{dt} = (B - C)(cv + bw) + \beta tz - \gamma ty,$$

$$Bt\frac{dv}{dt} = (C - A)(aw + cu) + \gamma tx - \alpha tz,$$

$$Ct\frac{dw}{dt} = (A - B)(bu + av) + \alpha ty - \beta tx$$

$$t^2\frac{dx}{dt} = gw - hv + cty - btz,$$

$$t^2\frac{dy}{dt} = hu - fw + atz - ctx,$$

$$t^2\frac{dz}{dt} = fv - gu + btx - aty,$$

и если за неизвѣстныя функціи вмѣсто x, y, z принять tx, ty, tz, приведется къ одному изъ извѣстныхъ типовъ.

Интегрированіе этой системы зависитъ отъ рѣшенія слѣдующаго алгебраическаго уравненія $6^{\text{ой}}$ степени относительно неизвѣстнаго k:

$$\begin{vmatrix} Ak & (C-B)c & (C-B)b & 0 & \gamma & -\beta \\ (A-C)c & Bk & (A-C)a & -\gamma & 0 & \alpha \\ (B-A)b & (B-A)a & Ck & \beta & -\alpha & 0 \\ 0 & h & g & k-1 & -c & b \\ -h & 0 & f & c & k-1 & -a \\ g & -f & 0 & -b & a & k-1 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

*

Разсмотрѣніе этого уравненія тотчасъ же даетъ и условія однозначности функцій u, v, w, x, y, z.

Условія эти состоятъ въ томъ, чтобы 1) всѣ корни этого уравненія были вещественными цѣлыми числами (положительными, отрицательными или нулями — безразлично) и 2) чтобы всякій кратный его корень обращалъ въ нуль всѣ миноры опредѣлителя, фигурирующаго въ первой части равенства, до порядка, равнаго кратности этого корня, невключительно.

Условія эти необходимы и достаточны.

Разысканіемъ ихъ мы и займемся въ слѣдующихъ параграфахъ, ограничиваясь предположеніемъ, что $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ вещественны, и предполагая, конечно, что A, B, C всѣ отличны отъ нуля *).

4. Начнемъ съ случая, когда A, B, C всѣ различны.

Если остановимся на формулахъ (5), то уравненіе (7) послѣ небольшихъ преобразованій приведется къ виду

$$k(k-1)^3(k^2-4)=0,$$

и слѣдовательно условіе, относящееся къ характеру его корней, всегда будетъ выполнено. Но такъ какъ уравненіе это имѣетъ трехкратный корень 1, то необходимо еще удовлетворить условію, чтобы всѣ миноры второго порядка для опредѣлителя, представляющаго первую часть уравненія (7), при $k=1$ дѣлались нулями.

Выражая, что это условіе выполняется для минора, получаемаго изъ названнаго опредѣлителя вычеркиваніемъ второго и третьяго столбца и третьей и четвертой строки, находимъ:

$$\begin{vmatrix} A & 0 & \gamma & -\beta \\ A'B'(C-A) & -\gamma & 0 & \alpha \\ 0 & -A'B' & 0 & B'C' \\ 0 & C'A' & -B'C' & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Равенство же это, приводящееся къ виду

$$\alpha\sqrt{A(B-C)}+\beta\sqrt{B(C-A)}+\gamma\sqrt{C(A-B)}=0,$$

при вещественныхъ $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ и при различныхъ A, B, C, между которыми среднее пусть будетъ B, возможно только въ случаѣ, когда

---

*) Уравненіе (7) только обозначеніями отличается отъ того, къ которому приходитъ С. В. Ковалевская (ея неизвѣстное n связано съ неизвѣстнымъ k равенствомъ $n-1=k$), и требованіе, которому, слѣдуя ея указанію, пришлось бы подчинить его корни, выразилось бы такъ: пять изъ этихъ корней должны быть вещественными неотрицательными числами.

$$\beta = 0, \quad \alpha\sqrt{A(B-C)} + \gamma\sqrt{C(A-B)} = 0. \qquad (8)$$

Случай, характеризуемый этими равенствами, былъ указанъ Г. Г. Аппельротомъ, который пришелъ къ нему изъ разсмотрѣнія того же уравненія (7), желая удовлетворить уравненіямъ (1) рядами, обладающими полюсами перваго порядка и содержащими въ своихъ коэффиціентахъ пять произвольныхъ постоянныхъ *).

Случай этотъ послужилъ потомъ предметомъ изслѣдованія профессоровъ П. А. Некрасова, Н. Е. Жуковскаго и Б. К. Млодзѣевскаго, причемъ П. А. Некрасовымъ было показано, что если только α и γ не нули (т. е. если разсматриваемый случай не приводится къ Эйлерову), функціи p, q, r, ξ, η, ζ при надлежащемъ выборѣ начальныхъ значеній навѣрно будутъ многозначными **).

Обстоятельство это, впрочемъ, нетрудно обнаружить и разсмотрѣніемъ уравненія (7), составленнаго въ предположеніи $\beta = 0$ при величинахъ a, b, c, f, g, h, опредѣляемыхъ формулами (6).

Дѣйствительно, уравненіе это можно представить подъ видомъ:

$$D_1 D_2 = 0,$$

гдѣ

$$D_1 = \begin{vmatrix} Bk & -\gamma & \alpha \\ h & k-1 & 2i \\ -hi & -2i & k-1 \end{vmatrix} = B(k+2)(k-1)(k-3),$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} Ak & 2(C-B)i & \gamma \\ 2(B-A)i & Ck & -\alpha \\ -h & hi & k-1 \end{vmatrix}.$$

Если же вычислимъ опредѣлитель D_2, то найдемъ, что изъ трехъ корней уравненія $D_2 = 0$ одинъ есть 2, а остальные опредѣляются уравненіемъ:

$$ACk(k+1) + 2(B-A)(C-2B) - 2B(A-C)\frac{\alpha(\alpha+\gamma i)}{\alpha^2+\gamma^2} = 0. \qquad (9)$$

Но послѣднее, при различныхъ A и C, если ни α, ни γ не равны нулю, очевидно, не можетъ обладать вещественными корнями.

Поэтому въ разсматриваемомъ случаѣ функціи p, q, r, ξ, η, ζ могутъ быть однозначными при всякихъ начальныхъ значеніяхъ только

*) Г. Г. Аппельротъ. *По поводу § 1 мемуара С. В. Ковалевской „Sur le problème de la rotation...“* (Математическій Сборникъ, томъ XVI).

**) П. А. Некрасовъ. *Къ задачѣ о движеніи тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки* (тамъ же).

при равенствѣ нулю одного изъ чиселъ α и γ; а такъ какъ въ силу (8) равенство одного изъ нихъ нулю влечетъ за собою и равенство нулю другого, то однозначность эта возможна лишь тогда, когда разсматриваемый случай приводится къ случаю **Эйлера**.

5. Разсмотримъ теперь случай, когда A, B, C не всѣ различны, и чтобы остановиться на чемъ либо опредѣленномъ, допустимъ, что $A = B$.

Мы можемъ тогда, нисколько не теряя въ общности, одно изъ чиселъ α, β предположить нулемъ, ибо при $A = B$ къ такому случаю всегда можно придти путемъ извѣстнаго линейнаго преобразованія уравненій (1).

Допустимъ поэтому, что $\beta = 0$.

Если бы въ тоже время было и $\alpha = 0$, то мы имѣли бы дѣло съ случаемъ **Лагранжа**. Мы встрѣтились бы съ послѣднимъ также и при $A = C$, ибо тогда имѣли бы $A = B = C$, а при этомъ условіи, нисколько не теряя въ общности, можно предположить нулями два изъ чиселъ α, β, γ.

Мы будемъ поэтому предполагать, что ни α, ни $A - C$ не нули.

Остановившись на этихъ предположеніяхъ, обращаемся къ уравненію (7), соотвѣтствующему формуламъ (6).

Мы только-что видѣли, что уравненіе это, кромѣ четырехъ вещественныхъ цѣлыхъ корней, имѣетъ два корня, опредѣляемые уравненіемъ (9), которые, при $A - C$ и α отличныхъ отъ нуля, могутъ быть вещественными только при $\gamma = 0$.

Мы должны поэтому допустить, что $\gamma = 0$, послѣ чего, дѣлая въ уравненіи (9) $A = B$ и полагая

$$\frac{A}{C} = n,$$

приведемъ его къ виду

$$k(k+1) = 2(n-1).$$

Отсюда заключаемъ, что n необходимо должно быть нѣкоторымъ цѣлымъ положительнымъ числомъ.

Но въ предположеніи $\gamma = 0$, которое мы должны были сейчасъ сдѣлать, для a, b, c, f, g, h возможна слѣдующая система значеній:

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = 2i,$$

$$f = -\frac{2C}{\alpha + \beta i}, \qquad g = -\frac{2Ci}{\alpha + \beta i}, \qquad h = 0,$$

подобная (6), а соотвѣтствующее ей уравненіе, подобное (9), будетъ вида:

$$BA\,k(k+1) + 2(C-B)(A-2C) - 2C(B-A)\frac{\beta(\beta+\alpha i)}{\beta^2+\alpha^2} = 0.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ уравненіе это обращается въ слѣдующее:

$$\left(k-\frac{2}{n}+2\right)\left(k+\frac{2}{n}-1\right)=0,$$

и условіе, чтобы корни его были цѣлыми, требуетъ, чтобы $\frac{2}{n}$ было числомъ цѣлымъ.

Такимъ образомъ приходимъ къ выводу, что n и $\frac{2}{n}$ оба должны быть цѣлыми положительными числами; а это возможно лишь въ двухъ предположеніяхъ: $n=1$ и $n=2$.

Первое приводитъ къ исключенному нами случаю Лагранжа; второе—къ случаю С. В. Ковалевской.

6. Предыдущимъ изслѣдованіемъ теорема, формулированная въ концѣ параграфа 1-го, можетъ считаться доказанною.

Если поэтому можетъ быть рѣчь о какихъ либо новыхъ случаяхъ однозначности функцій p, q, r, ξ, η, ζ при вещественныхъ A, B, C, α, β, γ и при отличныхъ отъ нуля A, B, C, то только въ предположеніи, что начальныя значенія этихъ функцій подчиняются извѣстнымъ условіямъ.

Въ этомъ отношеніи въ особенности должно обратить вниманіе на условіе вещественности.

До сихъ поръ для величинъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 всякія значенія разсматривались, какъ возможныя, и изъ нашего анализа не слѣдуетъ, что если величины эти предполагать вещественными, то только въ извѣстныхъ трехъ случаяхъ функціи p, q, r, ξ, η, ζ всегда будутъ однозначными.

Дѣйствительно, на основаніи предыдущаго мы можемъ только утверждать, что во всѣхъ случаяхъ, отличныхъ отъ этихъ трехъ, между системами значеній p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, *дѣлающими модули разностей*

$$p_0-\frac{a}{t_0},\quad q_0-\frac{b}{t_0},\quad r_0-\frac{c}{t_0},\quad \xi_0-\frac{f}{t_0^2},\quad \eta_0-\frac{g}{t_0^2},\quad \zeta_0-\frac{h}{t_0^2}$$

при одной изъ разсматривавшихся системъ значеній a, b, c, f, g, h *достаточно малыми*, всегда найдутся такія, при которыхъ функціи p, q, r, ξ, η, ζ не будутъ однозначными.

Но для всѣхъ разсматривавшихся системъ значеній a, b, c, f, g, h [какъ и для всякихъ другихъ, соотвѣтствующихъ рѣшеніямъ вида (4)], каково бы ни было t_0, изъ величинъ

$$\frac{a}{t_0},\quad \frac{b}{t_0},\quad \frac{c}{t_0},\quad \frac{f}{t_0^2},\quad \frac{g}{t_0^2},\quad \frac{h}{t_0^2}$$

хотя одна всегда выходитъ мнимою. Поэтому въ числѣ указанныхъ сейчасъ системъ значеній p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 можетъ вовсе не оказаться такихъ, для которыхъ значенія эти всѣ были бы вещественными.

Чтобы воспользоваться нашею методой для рѣшенія вопроса въ предположеніи вещественности p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, мы должны для составленія системы (3) вмѣсто разсматривавшихся брать какія либо другія рѣшенія системы (1), съ вещественными начальными значеніями для функцій p, q, r, ξ, η, ζ.

Тогда разсматривая уравненія (3), мы можемъ быть увѣрены, что всякое условіе, необходимое для однозначности функцій u, v, w, x, y, z при какихъ бы то ни было начальныхъ значеніяхъ въ какой либо области, не содержащей особенныхъ точекъ коэффиціентовъ этихъ уравненій, есть вмѣстѣ съ тѣмъ условіе, необходимое для однозначности функцій p, q, r, ξ, η, ζ при всякихъ вещественныхъ начальныхъ значеніяхъ.

7. Изъ рѣшеній системы (1), обладающихъ требуемымъ свойствомъ, мы можемъ указать во первыхъ всѣ тѣ, которыя опредѣляются уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr,\\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp,\\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq,\\ \xi=\eta&=\zeta=0 \end{aligned}\right\} \qquad (\mathbf{10})$$

при вещественныхъ p_0, q_0, r_0, и слѣдовательно даютъ для p, q, r такія же выраженія, какъ и въ вопросѣ о вращательномъ движеніи твердаго тѣла по инерціи.

Для того, чтобы въ числѣ рѣшеній этого рода существовали обладающія особенными точками, какъ это необходимо для нашей методы, постоянныя A, B, C должны быть всѣ различными.

Тогда за исключеніемъ нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ, относящихся къ значеніямъ величинъ p_0, q_0, r_0, функціи p, q, r будутъ обладать особенными точками, и всѣ эти особенныя точки будутъ полюсами. Разложенія же функцій p, q, r вблизи всякаго полюса $t=\tau$ по степенямъ $t-\tau$ будутъ вида

$$p=\frac{a}{t-\tau}+a'+a''(t-\tau)+\ldots,$$

$$q=\frac{b}{t-\tau}+b'+b''(t-\tau)+\ldots,$$

$$r=\frac{c}{t-\tau}+c'+c''(t-\tau)+\ldots,$$

гдѣ a, b, c будутъ имѣть тѣ или другія величины, выводимыя изъ формулъ (5).

Когда между числами α, β, γ хотя одно есть нуль, мы можемъ указать еще рѣшенія другого рода, а именно: рѣшенія, опредѣляющія движенія, свойственныя физическому маятнику.

Если напримѣръ мы имѣемъ дѣло съ случаемъ, когда $\beta = 0$, рѣшенія эти опредѣлятся уравненіями:

$$p = r = \eta = 0,$$

$$B \frac{dq}{dt} = \gamma \xi - \alpha \zeta,$$

$$\frac{d\xi}{dt} = q\zeta, \quad \frac{d\zeta}{dt} = q\xi,$$

въ предположеніи, что q_0, ξ_0, ζ_0 вещественны.

Для того, чтобы между этими рѣшеніями существовали обладающія особенными точками, изъ чиселъ α и γ по крайней мѣрѣ одно должно быть отличнымъ отъ нуля.

Тогда, если исключить нѣкоторыя частныя предположенія относительно величинъ q_0, ξ_0, ζ_0, функціи q, ξ, ζ будутъ обладать особенными точками, которыя всѣ будутъ полюсами; а разложенія этихъ функцій вблизи всякаго полюса $t = \tau$ будутъ вида:

$$q = \frac{b}{t - \tau} + b' + b''(t - \tau) + \ldots,$$

$$\xi = \frac{f}{(t-\tau)^2} + \frac{f'}{t - \tau} + f'' + \ldots,$$

$$\zeta = \frac{h}{(t-\tau)^2} + \frac{h'}{t - \tau} + h'' + \ldots,$$

гдѣ b, f, h опредѣлятся по формуламъ (6).

Таковы будутъ рѣшенія, которыми мы теперь воспользуемся взамѣнъ рѣшеній типа (4).

8. Останавливаясь на какомъ либо изъ указанныхъ сейчасъ рѣшеній системы (1) и разсматривая соотвѣтствующую ему систему (3) вблизи какого либо изъ полюсовъ ея коэффиціентовъ, нетрудно замѣтить, что она будетъ принадлежать къ классу системъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ исключительно правильными рѣшеніями.

Дѣйствительно, всѣ рѣшенія системы (1), которыми мы здѣсь пользуемся, таковы, что вблизи всякаго ихъ полюса $t=\tau$ имѣютъ мѣсто разложенія вида:

$$\begin{aligned}
(t-\tau)p &= a+a'(t-\tau)+\ldots,\\
(t-\tau)q &= b+b'(t-\tau)+\ldots,\\
(t-\tau)r &= c+c'(t-\tau)+\ldots,\\
(t-\tau)^2\xi &= f+f'(t-\tau)+\ldots,\\
(t-\tau)^2\eta &= g+g'(t-\tau)+\ldots,\\
(t-\tau)^2\zeta &= h+h'(t-\tau)+\ldots.
\end{aligned}$$

Поэтому, если положимъ

$$u=x_1,\qquad v=x_2,\qquad w=x_3,$$
$$(t-\tau)x=x_4,\qquad (t-\tau)y=x_5,\qquad (t-\tau)z=x_6$$

и затѣмъ, измѣнивши для упрощенія формулъ обозначеніе независимаго перемѣннаго, вмѣсто $t-\tau$ будемъ писать t, то система (3) приведется къ виду:

$$t\frac{dx_s}{dt}=P_{s1}(t)x_1+P_{s2}(t)x_2+\ldots+P_{s6}(t)x_6,$$
$$(s=1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6)$$

гдѣ $P_{sj}(t)$ означаютъ функціи t, способныя при достаточно маломъ $|t|$ представляться рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ t.

Такимъ образомъ система (3) привелась къ каноническому виду системъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, всѣ рѣшенія которыхъ вблизи точки $t=0$ суть правильныя *).

Для такихъ системъ всегда легко найти всѣ условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы во всякомъ ихъ рѣшеніи опредѣляемыя ими функціи вблизи точки $t=0$ были однозначными.

Для нашей цѣли однако же нѣтъ надобности разсматривать всѣ условія этого рода, а достаточно обратить вниманіе на одно изъ необходимыхъ, которое состоитъ въ томъ, чтобы функціи x_s, опредѣляемыя слѣдующею системою линейныхъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}
t\frac{dx_s}{dt}=P_{s1}(0)x_1+P_{s2}(0)x_2+\ldots+P_{s6}(0)x_6\\
(s=1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6)
\end{aligned}\right\}\qquad\textbf{(11)}$$

во всякомъ рѣшеніи этой системы были однозначными.

*) Относительно такихъ системъ уравненій можно между прочимъ указать на изслѣдованія Sauvage (Ann. scientif. de l'école norm. super., 3 série, tomes 3, 5 et 6).

Но система (11) есть та самая, которую при различныхъ предположеніяхъ относительно a, b, c, f, g, h мы разсматривали въ предыдущихъ параграфахъ, и изслѣдованіе которой насъ привело только къ извѣстнымъ тремъ случаямъ.

Мы можемъ поэтому утверждать, что случаи эти суть единственные, въ которыхъ функціи p, q, r, ξ, η, ζ однозначны при всякихъ вещественныхъ начальныхъ значеніяхъ.

9. Въ послѣднихъ параграфахъ, предполагая p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 вещественными, мы не подчиняли ихъ, кромѣ этого, никакимъ другимъ условіямъ.

Но въ вопросѣ механики, который приводитъ къ уравненіямъ (1), величины ξ, η, ζ означаютъ косинусы угловъ нѣкотораго направленія съ тремя взаимно перпендикулярными осями. Поэтому функціи ξ, η, ζ, а слѣдовательно и ихъ начальныя значенія ξ_0, η_0, ζ_0 должны быть таковы, чтобы ихъ сумма квадратовъ была равною 1.

Является вопросъ, не существуетъ ли какихъ либо новыхъ случаевъ, въ которыхъ функціи p, q, r, ξ, η, ζ выходили бы однозначными при всякихъ вещественныхъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, удовлетворяющихъ соотношенію

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = 1,$$

и вопросъ этотъ тѣмъ болѣе умѣстенъ, что когда A, B, C всѣ различны, а изъ чиселъ α, β, γ ни одно не нуль, возможность многозначныхъ рѣшеній уравненій (1) была нами доказана только въ предположеніи, что численныя значенія величинъ ξ_0, η_0, ζ_0 достаточно малы.

Небольшое размышленіе приводитъ, однако, тотчасъ же къ отрицательному отвѣту на этотъ вопросъ.

Дѣйствительно, на основаніи предыдущаго во всякомъ случаѣ, который не приводится къ одному изъ извѣстныхъ трехъ, величинамъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 всегда можно приписать такія вещественныя значенія, при которыхъ функціи p, q, r, ξ, η, ζ (всѣ или только нѣкоторыя) не будутъ однозначными.

Пусть же въ какомъ либо изъ такихъ случаевъ уравненіями

$$p = f_1(t), \qquad q = f_2(t), \qquad r = f_3(t),$$
$$\xi = \varphi_1(t), \qquad \eta = \varphi_2(t), \qquad \zeta = \varphi_3(t),$$

представляется одно изъ многозначныхъ рѣшеній, соотвѣтствующихъ вещественнымъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0.

Какъ и во всякомъ другомъ рѣшеніи системы (1), функціи ξ, η, ζ, опредѣляемыя этими уравненіями, будутъ удовлетворять соотношенію

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \sigma^2,$$

гдѣ σ нѣкоторое постоянное. Для нашего же рѣшенія постоянное это навѣрно будетъ отличнымъ отъ нуля, ибо въ противномъ случаѣ вслѣдствіе предположенной вещественности величинъ ξ_0, η_0, ζ_0 мы имѣли бы

$$\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0,$$

а тогда рѣшеніе наше необходимо совпадало бы съ однимъ изъ рѣшеній, опредѣляемыхъ уравненіями (10), и слѣдовательно, противно допущенному, не было бы многозначнымъ.

Если же σ не нуль, мы можемъ составить уравненія

$$p = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} f_1\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right), \qquad \xi = \frac{1}{\sigma} \varphi_1\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right),$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} f_2\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right), \qquad \eta = \frac{1}{\sigma} \varphi_2\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right),$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} f_3\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right), \qquad \zeta = \frac{1}{\sigma} \varphi_3\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right),$$

и уравненіями этими опредѣлится, какъ нетрудно видѣть, также нѣкоторое рѣшеніе системы (1). А рѣшеніе это при σ положительномъ соотвѣтствуетъ вещественнымъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, удовлетворяющимъ соотношенію

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = 1,$$

и по крайней мѣрѣ нѣкоторыя изъ функцій p, q, r, ξ, η, ζ выходятъ въ немъ навѣрно многозначными.

Мы приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующему выводу:

Всякій разъ, когда при вещественныхъ A, B, C, α, β, γ и при отличныхъ отъ нуля A, B, C мы не имѣемъ дѣло ни съ однимъ изъ трехъ извѣстныхъ случаевъ, начальнымъ значеніямъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 функцій p, q, r, ξ, η, ζ всегда можно приписать такія вещественныя величины, согласныя съ условіемъ

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = 1,$$

при которыхъ по крайней мѣрѣ нѣкоторыя изъ функцій p, q, r, ξ, η, ζ не будутъ однозначными.

О высшихъ предѣлахъ корней алгебраическихъ уравненій.

П. Н. Рахманова.

§ 1. Для нахожденія высшихъ предѣловъ положительныхъ корней численныхъ уравненій въ настоящее время существуетъ уже нѣсколько способовъ. Въ предлагаемой статьѣ мы даемъ еще два новыхъ способа, которые иногда для названныхъ предѣловъ даютъ величину менѣе высокую, чѣмъ другіе. Кромѣ того, здѣсь же мы указываемъ на одинъ довольно общій случай, когда высшимъ предѣломъ положительныхъ корней будетъ единица.

§ 2. Первый способъ. Положимъ, что въ цѣлой раціональной функціи

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

коэффиціенты

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{m-1}$$

всѣ положительные, а коэффиціентъ a_m — первый отрицательный; тогда очевидно, что, полагая $x>1$, будемъ имѣть:

$$f(x)>\sum_{k=0}^{k=m-1}a_k\cdot x^{n-m+1}+a_mx^{n-m}+a_{m+1}x^{n-m-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\,. \quad (1)$$

Обозначимъ теперь численно наибольшій отрицательный коэффиціентъ данной функціи чрезъ $-a_p$; тогда говоримъ, что при всякомъ $x>0$, очевидно, будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$\sum_{k=0}^{k=m-1}a_k\cdot x^{n-m+1}+a_mx^{n-m}+a_{m+1}x^{n-m-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n>$$

$$>\sum_{k=0}^{k=m-1}a_k\cdot x^{n-m+1}-a_p(x^{n-m}+x^{n-m-1}+\ldots+x+1)\,.\ \ .\ .\ (2)$$

На основаніи (2) и (1) ясно, что всѣ тѣ значенія $x > 1$, которыя удовлетворяютъ неравенству

$$\sum_{k=0}^{k=m-1} a_k \cdot x^{n-m+1} - a_p\,(x^{n-m} + x^{n-m-1} + \ldots + x + 1) > 0\,, \quad . \; . \; (3)$$

à fortiori удовлетворяютъ и неравенству

$$f(x) > 0\,.$$

Но неравенству (3), по теоремѣ: „всегда можно найти столь большое положительное значеніе x, что знакъ всего полинома будетъ одинаковъ со знакомъ члена съ наивысшей степенью x“, удовлетворяетъ

$$x > 1 + \frac{a_p}{\sum\limits_{k=0}^{k=m-1} a_k}\,;$$

слѣдовательно, за высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія

$$f(x) = 0$$

можно принять выраженіе:

$$1 + \frac{a_p}{\sum\limits_{k=0}^{k=m-1} a_k}\,.$$

Примѣръ:

$$4x^{10} + 696x^9 - 800x^8 - 100x^4 + 21x^2 - 2100 = 0\,.$$

Здѣсь

$$1 + \frac{a_p}{\sum\limits_{k=0}^{k=m-1} a_k} = 1 + \frac{2100}{4 + 696} = 4\,;$$

значитъ искомый предѣлъ будетъ 4.

§ 3. Второй способъ. Возьмемъ цѣлую раціональную функцію въ видѣ

$$F(x) = a_{n_0} x^{n_0} + a_{n_1} x^{n_1} + a_{n_2} x^{n_2} + \ldots + a_{n_{v-1}} x^{n_{v-1}} + a_{n_v}\,,$$

гдѣ

$$n_0 > n_1 > n_2 > \ldots$$

Функцію эту мы можемъ представить такъ:

$$F(x)=f_1(x)-\varphi_1(x)+f_2(x)-\varphi_2(x)+\ldots+f_m(x)-\varphi_m(x),$$

гдѣ подъ $f_k(x)$ слѣдуетъ разумѣть суммы положительныхъ, рядомъ стоящихъ, членовъ, а подъ $-\varphi_k(x)$ — суммы отрицательныхъ, рядомъ стоящихъ, членовъ. Назовемъ чрезъ r_k показателя степени x въ послѣднемъ членѣ функціи $f_k(x)$ и чрезъ ϱ_k — показателя степени x въ первомъ членѣ функціи $\varphi_k(x)$; назовемъ далѣе, чрезъ s_k сумму всѣхъ коэффиціентовъ функціи $f_k(x)$ и чрезъ σ_k — сумму всѣхъ коэффиціентовъ функціи $\varphi_k(x)$. Тогда, предполагая $x \geqq 1$, будемъ имѣть:

$$F(x)\geqq s_1x^{r_1}-\sigma_1x^{\rho_1}+s_2x^{r_2}-\sigma_2x^{\rho_2}+\ldots+s_mx^{r_m}-\sigma_mx^{\rho_m}. \quad . \; (4)$$

Отсюда ясно, что всѣ тѣ значенія $x\geqq 1$, которыя удовлетворяютъ неравенству

$$s_1x^{r_1}-\sigma_1x^{\rho_1}+s_2x^{r_2}-\sigma_2x^{\rho_2}+\ldots+s_mx^{r_m}-\sigma_mx^{\rho_m}>0, \; . \; . \; (5)$$

удовлетворятъ также и неравенству:

$$F(x)>0.$$

Но неравенству (5), какъ легко видѣть, удовлетворяетъ x, величина котораго больше наибольшаго изъ слѣдующихъ выраженій:

$$\sqrt[r_1-\rho_1]{\frac{\sigma_1}{s_1}},\quad \sqrt[r_2-\rho_2]{\frac{\sigma_2}{s_2}},\ldots,\sqrt[r_m-\rho_m]{\frac{\sigma_m}{s_m}}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

значитъ наибольшее изъ выраженій (6) можетъ быть принято за высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія:

$$F(x)=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Само собою разумѣется, что въ томъ частномъ случаѣ, когда всѣ подрадикальныя дроби

$$\frac{\sigma_1}{s_1},\quad \frac{\sigma_2}{s_2},\ldots,\frac{\sigma_m}{s_m}$$

будутъ правильныя, за высшій предѣлъ положительныхъ корней слѣдуетъ взять единицу.

Примѣръ:

$$x^7 - 9x^5 + 7x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 400x - 1 = 0$$

Здѣсь

$$\sqrt[r_1-\rho_1]{\frac{\sigma_1}{s_1}} = \sqrt[7-5]{\frac{9}{1}} = 3$$

$$\sqrt[r_2-\rho_2]{\frac{\sigma_2}{s_2}} = \sqrt[4-3]{\frac{6+8}{7}} = 2\,,$$

$$\sqrt[r_3-\rho_3]{\frac{\sigma_3}{s_3}} = \sqrt[1-0]{\frac{1}{400}} = \frac{1}{400}\,.$$

Наибольшее изъ этихъ выраженій есть первое, а потому искомый предѣлъ есть число 3.

§ 4. Изъ предыдущаго параграфа мы видимъ, что если коэффиціенты уравненія (7) удовлетворяютъ условію

$$s_k - \sigma_k \geqq 0$$

для всѣхъ значеній

$$k = 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \ldots\,,\ m\,,$$

то высшимъ предѣломъ положительныхъ корней будетъ единица. Покажемъ теперь, что предѣлъ этотъ будетъ равняться единицѣ и въ томъ болѣе общемъ случаѣ, когда между коэффиціентами уравненія существуетъ рядъ соотношеній вида

$$\sum_{k=1}^{k=i}(s_k - \varrho_k) \geqq 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

гдѣ

$$i = 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ldots\,,\ m\,.$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая $x \geqq 1$, будемъ имѣть, во 1-хъ, знакомое уже намъ неравенство или равенство

$$F(x) \geqq \sum_{k=1}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \varrho_k x^{\rho_k})\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

и во 2-хъ, на основаніи (A), еще такой рядъ неравенствъ или равенствъ:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{k=1}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \sigma_k x^{\rho_k}) \geqq (s_1 - \sigma_1)x^{\rho_1} + \sum_{k=2}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \sigma_1 x^{\rho_k}) \\
(s_1 - \sigma_1)x^{\rho_1} + \sum_{k=2}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \sigma_k x^{\rho_k}) \geqq \sum_{k=1}^{k=2}(s_k - \sigma_k)x^{\rho_2} + \sum_{k=3}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \sigma_k x^{\rho_k}) \\
\sum_{k=1}^{k=2}(s_k - \sigma_k)x^{\rho_2} + \sum_{k=3}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \sigma_k x^{\rho_k}) \geqq \sum_{k=1}^{k=3}(s_k - \sigma_k)x^{\rho_3} + \sum_{k=4}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \sigma_k x^{\rho_k}) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_{k=1}^{k=m-1}(s_k - \sigma_k)x^{\rho_{m-1}} + s_m x^{r_m} - \sigma_m x^{\rho_m}) \geqq \sum_{k=1}^{k=m}(s_k - \sigma_k)x^{\rho_m}.
\end{array}\right\} (8)$$

Теперь, по условію,

$$\sum_{k=1}^{k=m}(s_k - \sigma_k) \geqq 0\,;$$

слѣдовательно, при всякомъ положительномъ значеніи x

$$\sum_{k=1}^{k=m}(s_k - \sigma_k)x^{\rho_m} \geqq 0\,.$$

А если это такъ, то, въ силу (4) и (8), для $x \geqq 1$

$$F(x) \geqq 0\,.$$

Такимъ образомъ, высшимъ предѣломъ положительныхъ корней уравненія (7), при соблюденіи условій (A), дѣйствительно будетъ единица, что и требовалось доказать.

§ 5. Намъ кажется, что, прежде чѣмъ прилагать къ данному уравненію какой-либо способъ для нахожденія высшаго предѣла его положительныхъ корней, необходимо сперва посмотрѣть, не удовлетворяютъ ли коэффиціенты этого уравненія условіямъ (A), ибо въ противномъ случаѣ мы будемъ рисковать получить искомый предѣлъ слишкомъ высокимъ. Въ справедливости только-что сказаннаго можно убѣдиться на слѣдующемъ примѣрѣ:

$$x^{10} - x^9 + 445x^8 - 86x^7 - 64x^6 + 2x^5 - 96x^4 + 3x^3 - 88x^2 + 12x - 100 + 0\,,$$

гдѣ коэффиціенты удовлетворяютъ условіямъ (A).

Извлеченіе изъ письма академика А. А. Маркова къ профессору К. А. Андрееву *)

Въ послѣдней книжкѣ „Сообщеній Харьковскаго Матем. Общества" помѣщена статья, найденная въ бумагахъ академика В. Г. Имшенецкаго. Осмѣливаюсь высказать убѣжденіе, что академикъ В. Г. Имшенецкій никогда не публиковалъ бы этой статьи . . . .

. . . .

Заблужденія содержащіяся въ статьѣ „Сравненіе способа профес. Н. В. Бугаева съ другими . . . " выясняются слѣдующими примѣрами.

Примѣръ 1.

Придерживаясь обозначеній разбираемой статьи, положимъ:

$$L = 3 + x\,,\ \ M = 2 - (3 + x)(2 - x + x^2),\ \ N = (1 + x^2)(3 + x)^2\,,$$
$$P = 2(3 + x)(1 + x^2) - 2(3 + x)^2\,,\ \ Q = -2 + x - x^2 + 3(3 + x)\,,$$
$$R = -1\,.$$

Тогда

$$M_1 = -(3 + x)(2 - x + x^2)\,,\ \ Q_1 = (3 + x)(2 + 2x)\,,$$
$$P_1 = -(2 + 2x)(3 + x)^2\,,$$

и

$$v = 3 + x$$

будетъ такимъ общимъ дѣлителемъ функцій

$$L\,,\ M_1\ \text{и}\ Q_1$$

---

*) Въ настоящемъ извлеченіи точками обозначены тѣ мѣста письма, которыя распорядительный комитетъ Общества не нашелъ возможнымъ печатать. *Ред.*

наивысшей степени, квадратъ котораго дѣлитъ

$$N \text{ и } P_1 .$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ предложенное дифференціальное уравненіе

$$Ly'' + (M + 2Ny)y' + Py^2 + Qy + R = 0$$

допускаетъ рѣшеніе

$$y = \frac{1}{3 + x},$$

числитель котораго 1 удовлетворяетъ дифференціальному уравненію (III) или равносильному ему (IV)

$$(lz)'' + (m_1 z)' + q_1 z + (nz^2)' + p_1 z^2 + R = 0 ,$$

гдѣ

$$l = 1 , \quad m_1 = -2 + x - x^2 , \quad q_1 = 2 + 2x , \quad n = 1 + x^2$$

$$p_1 = -2 - 2x , \quad R = -1 .$$

И въ силу сказаннаго на стр. 65 („Легко показать, что уравненіе (III) не можетъ имѣть раціональнаго дробнаго рѣшенія) послѣднее дифференціальное уравненіе не можетъ допускать дробныхъ рѣшеній.

Въ дѣйствительности же оно допускаетъ рѣшеніе

$$z = \frac{1}{x} .$$

Ошибка автора состоитъ въ томъ, что функціи

$$l_2 , \; m_3 , \; q_3 , \; n_2 , \; p_3$$

могутъ быть и дробными, авторъ же предполагаетъ ихъ непремѣнно цѣлыми.

Примѣръ 2.

Возьмемъ:

$$L = (1 + x) , \quad M_1 = (1 + x)(1 - x + x^2) , \quad Q_1 = 2(1 + x)(1 - x) ,$$

$$N = (1 + x)^2 (1 + x^2 + x^4) , \quad P_1 = (1 + x)^2 (1 - 2x - 4x^3) ,$$

$$R = 1 + 2x$$

и приложимъ способъ, указанный въ § 6 разбираемой статьи, къ разысканію раціональныхъ рѣшеній уравненія

$$(Ly)'' + (M_1 y)' + Q_1 y + (Ny^2)' + P_1 y^2 + R = 0 \ldots \ldots \text{(A)}$$

*

Въ данномъ случаѣ общій дѣлитель наивысшей степени для

$$L\,,\,M_1 \text{ и } Q_1$$

равенъ

$$1+x$$

и квадратъ его дѣлитъ

$$N \text{ и } P_1\,.$$

Поэтому, согласно правилу § 6, мы должны перейти къ уравненію

$$\left(\frac{Lz}{1+x}\right)''+\left(\frac{M_1 z}{1+x}\right)'+\frac{Q_1 z}{1+x}+\left(\frac{Nz^2}{(1+x)^2}\right)'+\frac{P_1 z^2}{(1+x)^2}+R=0\,,$$

т. е. къ уравненію

$$z''+[1-x+x^2+2(1+x^2+x^4)z]\,z'+z^2+z+1+2x=0\,,$$

и искать для него цѣлыя рѣшенія.

Но цѣлыхъ рѣшеній послѣднее уравненіе не допускаетъ.

И потому, согласно утвержденіямъ стр. 69 разбираемой статьи, не можетъ быть сомнѣнія, что предложенное уравненіе (A) не допускаетъ раціональныхъ рѣшеній.

Въ дѣйствительности же оно допускаетъ рѣшеніе

$$y=\frac{1}{x(x+1)}\,.$$

Изъ приведенныхъ примѣровъ видно, что знаменатель v дробнаго рѣшенія

$$y=\frac{u}{v}$$

дифференціальнаго уравненія

$$(Ly)''+(M_1 y)'+Q_1 y+(Ny^2)'+P_1 y^2+R=0$$

можетъ заключать такіе простые множители, которые не дѣлятъ ни одну изъ цѣлыхъ функій

$$L,\ M_1,\ Q_1,\ N,\ P_1,\ M,\ Q \text{ и } P.$$

Эти множители представляютъ одно изъ главныхъ затрудненій, которое въ статьѣ „Сравненіе способа проф. Н. В. Бугаева съ другими“ оставлено вовсе безъ вниманія . . . . . .

. . . . . Если уже для уравненій линейныхъ эти пріемы не только уступаютъ естественнымъ пріемамъ Ліувилля, но и требуютъ, какъ показали проф. К. А. Поссе и П. А. Некрасовъ *), существенныхъ измѣненій **), то перенесеніе ихъ на уравненія нелинейныя едва ли можетъ принести большую пользу.

Здѣсь считаю необходимымъ оговориться, что до сихъ поръ неизвѣстно такихъ пріемовъ, которые давали бы для всякаго дифференціальнаго уравненія полное рѣшеніе вопроса, допускаетъ ли оно раціональныя рѣшенія или нѣтъ.

Однако, для одного изъ классовъ уравненій, упоминаемыхъ академикомъ В. Г. Имшенецкимъ, это можно сдѣлать довольно просто, пользуясь, конечно, иными пріемами.

Я говорю объ уравненіяхъ, получаемыхъ изъ однородныхъ линейныхъ извѣстною подстановкою

$$\frac{y'}{y} = z.$$

О разысканіи раціональныхъ рѣшеній такихъ уравненій мною было сдѣлано сообщеніе въ С.-Петербургскомъ Матем. Обществѣ, вѣроятно, въ ноябрѣ 1891 года . . . . . .

. . . . . Сущность моего сообщенія можно найти въ Comptes-Rendus за 1891 годъ.

Здѣсь обнаруживается тотъ важный фактъ, что нѣкоторую дробную часть рѣшенія приходится отыскивать послѣ всего.

И потому предварительное опредѣленіе знаменателя едва ли возможно.

---

*) Математическій Сборникъ, Т. XVII.

**) Измѣненіе множителя сдѣлало пріемы Имшенецкаго равносильными пріемамъ Ліувилля. *(Примѣч. автора)*.

Комментарій къ статьѣ академика В. Г. Имшенецкаго о разысканіи раціональныхъ рѣшеній нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

(Отвѣтъ на критику академика А. А. Маркова).

К. А. Андреева *).

Покойный академикъ В. Г. Имшенецкій за нѣсколько мѣсяцевъ до своей смерти возъимѣлъ намѣреніе приложить тѣ руководящія идеи, которымъ онъ слѣдовалъ въ своихъ работахъ по разысканію раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, къ подобнымъ же цѣлямъ относительно нѣкоторыхъ видовъ уравненій нелинейныхъ. Примѣры, на которые онъ прежде всего обратилъ по этому поводу свое вниманіе, показали ему, что иногда это приложеніе оказывается возможнымъ; и вотъ осенью 1891 года онъ рѣшился изложить въ засѣданіи Петербургскаго Математическаго Общества, тогда еще не бывшаго оффиціально утвержденнымъ, какъ свои общія соображенія, такъ и примѣры.

О томъ, что это дѣйствительно было имъ сдѣлано, и именно въ октябрѣ 1891 года, я получилъ увѣдомленіе отъ него самого въ письмѣ отъ 17 октября. Вслѣдствіе этого я былъ почти увѣренъ, что въ бумагахъ покойнаго ученаго должны были сохраниться слѣды этихъ работъ его мысли.

При разборѣ этихъ бумагъ я дѣйствительно нашелъ двѣ рукописи, посвященныя названному вопросу. Одна была переписана начисто и какъ бы приготовлена къ печати, но представляла нѣкоторыя недо-

*) Статья эта ранѣе ея доклада Обществу разсматривалась распорядительнымъ комитетомъ. По желанію послѣдняго въ ней сдѣланы нѣкоторыя сокращенія. *Ред.*

статки изложенія. Другая имѣла внѣшность менѣе обработанную. По содержанію обѣ онѣ оказались въ значительной части сходными.

Зная, что эти рукописи содержатъ то самое, что уже было предметомъ устнаго сообщенія ученому Обществу, я ни на минуту не сомнѣвался, что содержаніе ихъ, какъ бы оно ни было несовершенно по формѣ и недостаткамъ внутренняго характера, составляетъ уже достояніе науки и, какъ таковое, подлежитъ напечатанію.

Выбрать для опубликованія только одну изъ двухъ рукописей оказалось невозможнымъ, потому что онѣ во многомъ дополняютъ одна другую. То, что въ первой можетъ показаться совершенно непонятнымъ, выясняется при чтеніи второй, и наоборотъ, недосказанное во второй можно найти въ первой. Вслѣдствіе этого, воспользовавшись совѣтомъ профессора П. А. Некрасова, я рѣшился напечатать ихъ обѣ, какъ двѣ редакціи одной и той же работы. При этомъ изъ второй рукописи были выпущены вступленіе, одинаковаго содержанія съ вступленіемъ первой и подавшее, очевидно, автору поводъ къ не вполнѣ удачному заглавію *), и нѣкоторые примѣры.

Что произведеніе акад. В. Г. Имшенецкаго, заключающееся въ этихъ рукописяхъ, есть трудъ далеко незаконченный и представляющій нѣкоторыя несовершенства, для меня не подлежало сомнѣнію. Къ тому же я зналъ, что такъ смотрѣлъ на него и самъ авторъ, писавшій 15-го марта 1892 года въ письмѣ къ проф. Н. В. Бугаеву: „Я предполагалъ еще поработать надъ предложеннымъ мною пріемомъ, чтобы его дополнить".

Это обстоятельство не можетъ, однако, уменьшить, на мой взглядъ, интереса къ произведенію столь выдающагося ученаго и не отклонило меня отъ его изданія, хотя я и предвидѣлъ возможность неблагопріятной для него критики.

Всякій, желающій взять на себя роль критика посмертнаго произведенія, не долженъ, по моему мнѣнію, упускать изъ виду, что отъ автора онъ уже не можетъ получить разъясненія какихъ-либо недоразумѣній. Въ такихъ условіяхъ необходима крайняя осторожность, чтобы не приписать автору тѣхъ намѣреній, какихъ у него не было и не придать словамъ его того значенія, какого онъ самъ не подразумѣвалъ.

Едва появилась въ печати работа академ. В. Г. Имшенецкаго, какъ акад. А. А. Марковъ пожелалъ выступить противъ нея съ критикою, указывающею исключительно на ея недостатки и не имѣющею въ то же

*) Это заглавіе, не смотря на его несоотвѣтствіе съ существенною частью содержанія работы, указываетъ съ одной стороны на генезисъ мыслей автора, начавшаго свои изслѣдованія съ критическаго взгляда на пріемъ проф. Н. В. Бугаева, а съ другой на то, что скромной задачей автора было прежде всего выяснить возможность получать иногда его способомъ результаты быстрѣе, чѣмъ при помощи способовъ, основанныхъ на употребленіи непрерывныхъ дробей.

время признаковъ осторожности, о которой только что было сказано. Критика эта составляетъ содержанiе письма, предназначавшагося его авторомъ къ напечатанiю въ „Сообщенiяхъ Харьк. Мат. Общества" и помѣщеннаго выше въ извлеченiи (см. стр. 146—149).

Издавши недоконченную работу акад. В. Г. Имшенецкаго, я предполагалъ въ особой своей статьѣ, посвященной обзору его дѣятельности, представить рядъ замѣчанiй въ формѣ комментарiя, имѣя въ виду, главнымъ образомъ, связь идей автора въ этомъ и предыдущихъ его произведенiяхъ. Критика академика А. А. Маркова вынуждаетъ меня приступить къ осуществленiю этого намѣренiя ранѣе, чѣмъ я предполагалъ, и притомъ не независимо, а въ видѣ отвѣта на эту критику.

Критическiй прiемъ академика А. А. Маркова простъ и коротокъ. Онъ приводитъ два примѣра, допускающiе рѣшенiя, существованiя которыхъ, по буквальному смыслу двухъ, въ отдѣльности взятыхъ, мѣстъ статьи акад. В. Г. Имшенецкаго, предположить нельзя, и утверждаетъ, что этимъ выясняются заблужденiя и ошибки покойнаго автора.

Такое отношенiе къ дѣлу я рѣшаюсь назвать формальнымъ и объясняю его себѣ только тѣмъ, что критикующiй не всмотрѣлся въ работу акад. В. Г. Имшенецкаго достаточно внимательно.

Съ своей стороны, разобравши еще разъ подробно все, что находится въ обѣихъ редакцiяхъ статьи акад. В. Г. Имшенецкаго, я прихожу къ заключенiю, что примѣрами акад. А. А. Маркова не выясняется ничего, такъ какъ эти примѣры потому уже не противорѣчатъ истинному смыслу утвержденiй статьи, что вовсе ему не соотвѣтствуютъ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ, я не нахожу въ этой статьѣ ни ошибокъ, ни заблужденiй, а усматриваю, какъ и прежде, лишь недоконченность всей работы, да погрѣшности изложенiя, отнюдь не обусловливающiяся какою-либо неправильностью сужденiй, т. е. недостатки, вполнѣ естественные въ произведенiи, за разработкою котораго автора застигла смерть.

Чтобы подтвердить все это, необходимо войти въ подробности.

Если изучающiй прiемы акад. В. Г. Имшенецкаго въ вопросѣ о разысканiи рацiональныхъ частныхъ интеграловъ дифференцiальныхъ уравненiй пожелаетъ безпристрастно *) усвоить себѣ весь ходъ его идей, то долженъ прежде всего обратить свое вниманiе на слѣдующее.

Положивши въ основанiе своего прiема особое преобразованiе уравненiя, которое можно было бы назвать подведенiемъ коэффицiентовъ при производныхъ подъ знакъ дифференцированiя, покойный авторъ ограничиваетъ сперва свои дальнѣйшiя изысканiя лишь тѣми случаями,

---

*) Здѣсь разумѣется пристрастiе не личное, а идейное, т. е. склонность предпочитать одинъ образъ мыслей, болѣе намъ привычный, другому, съ которымъ нужно еще освоиться.

когда это преобразованіе приводитъ къ нахожденію знаменателя искомаго интеграла *непосредственно*, т. е. будучи примѣнено къ уравненію, взятому въ его заданномъ видѣ. Затѣмъ слѣдуетъ примѣненіе того-же пріема къ уравненію, помноженному на нѣкоторый множитель. Обѣ эти стадіи сужденій проходятся покойнымъ ученымъ отдѣльно и въ названной послѣдовательности, какъ въ его статьяхъ, относящихся къ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ, такъ и въ разбираемой теперь, найденной послѣ его смерти, работѣ.

Хотя въ первой редакціи этой работы объ этой послѣдовательности сужденій и не упоминается столь-же обстоятельно, какъ въ статьяхъ о линейныхъ уравненіяхъ, но внимательный читатель все же легко замѣтитъ, что эта послѣдовательность имѣетъ здѣсь мѣсто, и что все, что говорится въ параграфахъ 4-мъ и 5-мъ, относится къ первой или предварительной стадіи сужденій. Во второй редакціи эта предварительная часть значительно сокращена, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, указаніе на названное раздѣленіе пріема сдѣлано отчетливо (см. стр. 73).

Только принимая во вниманіе все сейчасъ сказанное, можно понять точный смыслъ того, что говорится въ 4-мъ параграфѣ первой редакціи, не преувеличивая, какъ это дѣлаетъ акад. А. А. Марковъ, общности дѣлаемыхъ здѣсь заключеній.

Заданное уравненіе трактуется В. Г. Имшенецкимъ, очевидно, какъ допускающее такое рѣшеніе $y = \frac{u}{v}$, знаменатель котораго *можетъ быть опредѣленъ непосредственно*, что ясно указывается вторымъ условіемъ высказываемой теоремы, условіемъ, поставленнымъ въ концѣ ея. О такихъ только рѣшеніяхъ и говорится въ этомъ параграфѣ вообще. Въ этомъ ограниченномъ смыслѣ нужно, слѣдовательно, понимать слово рѣшеніе и въ утвержденіи: „Легко показать, что уравненіе (III) не можетъ имѣть раціональнаго дробнаго рѣшенія $z = \frac{u_1}{v_1}$“, а также и въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ, служащихъ ему доказательствомъ.

Академикъ А. А. Марковъ, очевидно, понимаетъ это утвержденіе не въ такомъ относительномъ смыслѣ, а совершенно абсолютно, что видно изъ его словъ, которыми онъ заключаетъ свой примѣръ, служащій, по его мнѣнію, опроверженіемъ этого утвержденія:

„Ошибка автора состоитъ въ томъ, что функціи l_2, m_3, q_3, n_2, p_3 могутъ быть и дробными, авторъ же предполагаетъ ихъ непремѣнно цѣлыми“.

Я нахожу, напротивъ, что самъ критикъ впадаетъ здѣсь въ ошибку, игнорируя, что въ способѣ В. Г. Имшенецкаго существуетъ еще примѣненіе интегрирующаго множителя, назначеніе котораго въ томъ и состоитъ, чтобы случаи, когда функціи l_2, m_3, . . . могутъ быть дробными, приводить къ случаямъ, когда онѣ цѣлыя.

Въ той части работы, гдѣ ведутся теоретическія разсужденія о рѣшеніяхъ, находимыхъ *безъ посредства множителя*, авторъ имѣлъ, слѣдовательно, полное право считать названныя функціи цѣлыми.

Сказаннымъ я не желаю утверждать, что въ статьѣ акад. В. Г. Имшенецкаго существуютъ указанія, слѣдуя которымъ можно найти интегрирующій множитель въ примѣрѣ акад. А. А. Маркова. Вопроса о томъ, приводитъ-ли способъ В. Г. Имшенецкаго всегда къ нахожденію существующаго раціональнаго рѣшенія, я коснусь ниже, но какой-бы на него ни послѣдовалъ отвѣтъ, вышеприведенныя замѣчанія о несоотвѣтствіи возраженій значенію словъ автора остаются въ силѣ.

Наибольшаго вниманія со стороны комментатора разсматриваемой работы акад. В. Г. Имшенецкаго требуютъ тѣ ея мѣста, гдѣ говорится о невозможности раціональныхъ рѣшеній вообще. Это тѣ мѣста, гдѣ, къ сожалѣнію, вкрались самыя нежелательныя погрѣшности изложенія. Критика этихъ мѣстъ легка. Тѣмъ не менѣе внимательный критикъ не долженъ поступать такъ рѣшительно и формально какъ акад. А. А. Марковъ, признающій, очевидно, свой второй примѣръ достаточнымъ фактическимъ опроверженіемъ цитируемаго имъ утвержденія, чтобы не входить въ дальнѣйшее разсмотрѣніе опровергаемаго.

Считая за лучшее не рубить, а развязывать узелъ, постараюсь добраться до смысла опровергаемаго утвержденія сличая соотвѣтственныя мѣста обѣихъ редакцій работы В. Г. Имшенецкаго.

Въ первой редакціи о невозможности раціональныхъ интеграловъ говорится при переходѣ отъ непосредственнаго разысканія къ способу, основанному на примѣненіи множителя (см. стр. 69); во второй же послѣ всего (см. стр. 75), гдѣ это оказывается болѣе умѣстнымъ *). Вмѣстѣ съ тѣмъ, во второй редакціи высказываемое объ этомъ предметѣ заключеніе вполнѣ опредѣленно и не можетъ подать повода къ тѣмъ же недоразумѣніямъ, какъ начало 6-го параграфа въ первой редакціи.

Сопоставляя эти мѣста обѣихъ редакцій, безпристрастный критикъ необходимо придетъ къ убѣжденію, что въ охарактеризованіи двухъ случаевъ въ началѣ 6-го параграфа подъ однимъ и тѣмъ же обозначеніемъ v необходимо подразумѣвать (какъ безъ сомнѣнія подразумѣвалъ и самъ авторъ) двѣ вещи совершенно разныя. Въ первомъ случаѣ v есть тотъ общій дѣлитель функцій L, M_1, Q_1, N и P_1, о которомъ говорилось нѣсколькими строками ранѣе. Во второмъ же v есть то, что во второй редакціи обозначено буквою Y, т. е., какъ сказано на стр. 75, полиномъ, долженствующій представлять знаменателя искомаго рѣшенія. Только при такомъ различеніи значеній буквы v въ двухъ разсматриваемыхъ случаяхъ становится понятнымъ смыслъ дальнѣйшихъ строкъ

*) Это и нѣкоторые другіе признаки заставляютъ заключить, что вторая редакція позднѣйшая.

и между прочимъ того, почему авторъ находитъ достаточнымъ разсматривать примѣненіе интегрирующаго множителя лишь въ первомъ случаѣ.

Нельзя же, въ самомъ дѣлѣ, думать, что акад. В. Г. Имшенецкій, находя нужнымъ при извѣстныхъ условіяхъ прибѣгать къ интегрирующему множителю, когда обозначенный чрезъ v общій дѣлитель коэффиціентовъ имѣетъ постоянное значеніе, полагалъ безполезнымъ это дѣлать при тѣхъ-же условіяхъ, когда этотъ общій дѣлитель есть полиномъ, будучи будто-бы увѣренъ, что въ этомъ случаѣ (включающемъ въ себѣ предыдущій и приводящемся къ нему простою замѣною vy чрезъ z) искомаго рѣшенія вовсе не существуетъ.

Обозначеніе однимъ и тѣмъ же символомъ двухъ разныхъ понятій, безъ всякаго указанія на подразумѣваемое различіе, есть, конечно, недостатокъ изложенія. Но этого недостатка нѣтъ и слѣда во второй редакціи, а потому, какъ замѣченный и исправленный самимъ авторомъ, онъ не долженъ подлежать осужденію.

Академикъ А. А. Марковъ, опровергая столь рѣшительно утвержденіе параграфа 6-го, долженъ былъ бы принять все это во вниманіе, и я думаю, что его строгая критика была-бы справедливою лишь въ томъ случаѣ, если бы можно было признать за критикующимъ право разсматривать утвержденіе акад. В. Г. Имшенецкаго совершенно формально и безъ сличенія съ соотвѣтствующимъ мѣстомъ второй редакціи статьи.

Обращаюсь теперь къ вопросу о томъ, какое значеніе придавалъ В. Г. Имшенецкій своему способу въ практическомъ смыслѣ и былъ ли онъ увѣренъ, что, слѣдуя этому способу, всегда можно получить раціональное рѣшеніе уравненія разсматриваемаго имъ вида или же убѣдиться въ его несуществованіи.

Такъ какъ основное преобразованіе уравненія показываетъ, что умноженіемъ всего уравненія на соотвѣтственнымъ образомъ подобранный множитель разысканіе дробнаго рѣшенія всегда приводится къ разысканію цѣлаго, то затрудненіе въ достиженіи главной цѣли изысканія можетъ встрѣтиться только въ составленіи этого множителя, который долженъ быть полиномомъ, состоящимъ изъ тѣхъ же линейныхъ дѣлителей, какъ и знаменатель искомаго рѣшенія.

Точныхъ правилъ для нахожденія интегрирующаго множителя во всѣхъ случаяхъ В. Г. Имшенецкій нигдѣ не даетъ, а указываетъ только на возможность такого нахожденія (въ первой редакціи въ началѣ страницы 70-й) или рекомендуетъ руководиться пріемами, сходными съ тѣми, которые имъ употреблялись въ статьѣ, относящейся къ линейнымъ уравненіямъ (во второй редакціи въ началѣ стр. 75-й). Это заставляетъ думать, что такихъ точныхъ правилъ онъ не имѣлъ и самъ. Позволительно даже думать, что онъ имѣлъ преувеличенное представленіе о возможности этихъ правилъ и о ихъ сходствѣ съ пріемами, вполнѣ достаточными для линейныхъ уравненій. Но не позволительно, мнѣ кажется, игнорировать, что въ этомъ-то именно пунктѣ работа акад. В. Г. Имшенецкаго и является недоконченною.

То самое обстоятельство, что В. Г. Имшенецкій нигдѣ не формулируетъ категорически своего убѣжденія въ безусловной возможности получать всякое раціональное рѣшеніе помощію его способа, а ограничивается въ указанныхъ выше мѣстахъ довольно неопредѣленными намеками, должно бы располагать осторожнаго критика къ тому, чтобы такого убѣжденія ему и не приписывать.

Если бы покойный ученый имѣлъ возможность осуществить свое намѣреніе поработать еще надъ своимъ пріемомъ, то, безъ сомнѣнія, увидѣлъ бы тѣ границы, въ которыхъ онъ приложимъ, и добросовѣстно, какъ всегда, указалъ бы ихъ. Очень можетъ быть, что онъ ограничился бы группою уравненій, приводимыхъ къ линейнымъ однороднымъ подстановкою $y = \frac{z'}{z}$, не обобщая ихъ, какъ въ разбираемой работѣ. Но и тогда его пріемъ представлялъ бы много оригинальнаго и полезнаго въ практическомъ примѣненіи къ примѣрамъ.

Академикъ А. А. Марковъ видитъ главное затрудненіе достиженію цѣли критикуемой имъ работы въ томъ, что нѣкоторые изъ линейныхъ множителей знаменателя искомой дроби могутъ не быть дѣлителями ни одной изъ цѣлыхъ функцій, составленныхъ извѣстнымъ образомъ изъ коэффиціентовъ уравненія. При этомъ онъ утверждаетъ, что это затрудненіе оставлено В. Г. Имшенецкимъ безъ вниманія.

Съ этимъ нужно, конечно, согласиться, но отсюда до усмотрѣнія въ работѣ В. Г. Имшенецкаго *заблужденій* слишкомъ большой шагъ, и академика А. А. Маркова нельзя было-бы упрекнуть въ неосторожномъ употребленіи этого слова лишь въ томъ случаѣ, если бы акад. В. Г. Имшенецкій выразился гдѣ-либо, что упомянутаго затрудненія вовсе нѣтъ, или, что онъ не считаетъ его препятствіемъ къ примѣненію своего метода.

Я увѣренъ съ своей стороны, что В. Г. Имшенецкій, встрѣтившись съ этимъ затрудненіемъ, ясно его увидѣлъ, но только не занялся тотчасъ же разъясненіемъ себѣ его значенія *). Доказательство этому я усматриваю въ слѣдующемъ.

Въ обѣихъ редакціяхъ статьи говорится, что для разысканія линейныхъ множителей знаменателя нужно обращать вниманіе на то, въ какомъ изъ членовъ уравненія этотъ множитель будетъ входить дѣлителемъ въ высшей степени, очевидно, съ цѣлью обнаружить тотъ изъ извѣстныхъ полиномовъ, который на этого множителя дѣлится. Хотя во второй редакціи и не упоминается вовсе о возможности случая, когда

*) Вѣроятно, въ надеждѣ возвратиться къ этому предмету въ болѣе благопріятное для занятій время.

такихъ членовъ будетъ нѣсколько, но нельзя думать, чтобы авторъ не допускалъ этой возможности, ибо въ первой редакціи прямо сказано (въ концѣ 69 стр.), что при $\alpha = 1$, т. е. когда разсматриваемый линейный множитель не есть кратный для знаменателя, оба члена уравненія Ly'' и $2Nyy'$ будутъ имѣть его дѣлителемъ въ одной и той же степени. Если авторъ остановился на этомъ замѣчаніи и не вошелъ вслѣдъ за тѣмъ въ разсмотрѣніе указаннаго имъ факта, то этого еще нельзя считать съ его стороны заблужденіемъ. Въ примѣрѣ, который онъ разсматриваетъ, оба коэффиціента L и N дѣлятся на предполагаемаго множителя знаменателя, но очевидно, что это только частный случай, и предполагать, что В. Г. Имшенецкій заблуждался, принимая его за общій, значило бы думать, что онъ считалъ необходимымъ признакомъ дѣлимости суммы дѣлимость каждаго слагаемаго.

Въ виду всего сказаннаго, сужденія академика А. А. Маркова по разсматриваемому вопросу можно-бы было признать справедливыми и безпристрастными, если бы вмѣсто рѣшительнаго обвиненія покойнаго ученаго въ заблужденіи онъ ограничился утвержденіемъ, что въ недоконченной работѣ В. Г. Имшенецкаго оставленъ безъ разсмотрѣнія случай, когда на нѣкоторые множители искомаго знаменателя дѣлится не единственный членъ уравненія, а сумма нѣсколькихъ членовъ, и что подробное разсмотрѣніе этихъ случаевъ приводитъ къ заключенію, что пріемъ В. Г. Имшенецкаго не примѣнимъ къ разсматриваемому имъ типу уравненій во всей допускаемой имъ общности, т. е. при какихъ угодно цѣлыхъ функціяхъ, служащихъ коэффиціентами уравненія.

Усматривая совершенно неосновательно заблужденія въ послѣдней работѣ покойнаго В. Г. Имшенецкаго, академикъ А. А. Марковъ не упускаетъ случая, чтобы подвергнуть осужденію и его прежнія произведенія, посвященныя уравненіямъ линейнымъ. При этомъ для сравнительной оцѣнки имъ употребляется такая неопредѣленная и ничего сама по себѣ не характеризующая мѣра сравненія, какъ степень естественности.

Авторъ критики забываетъ, повидимому, что вся математика есть искусство и что въ ней менѣе искусственно только то, что болѣе первобытно. Изъ всѣхъ способовъ вычисленія самый естественный, безъ сомнѣнія, это счетъ по пальцамъ, но въ то-же время онъ и самый несовершенный. Всякое усовершенствованіе вносится въ математику искусственно; всякій шагъ впередъ обусловливается искусственнымъ расширеніемъ поля зрѣнія или такимъ же улучшеніемъ средствъ изслѣдованія. Можно возставать поэтому только противъ безплодной искусственности, которая ничего новаго не приноситъ и ничего не совершенствуетъ, а этого-то именно недостатка и нельзя приписать способу В. Г. Имшенецкаго.

Основное преобразованіе уравненія въ связи съ употребленіемъ интегрирующаго множителя есть искусственный пріемъ, всецѣло принадлежащій изобрѣтательности В. Г. Имшенецкаго, и такъ какъ, благодаря этому пріему устраняется необходимость разсматривать безконечное множество частныхъ случаевъ, заставившая самого Ліувилля ограничиться за предѣлами уравненія второго порядка лишь нѣкоторыми общими указаніями, то въ пріемѣ этомъ нельзя не видѣть всѣхъ признаковъ усовершенствованія.

Благодаря этому пріему, В. Г. Имшенецкій самъ увидѣлъ и далъ увидѣть другимъ возможность формулировать общія правила для разысканія раціональныхъ интеграловъ линейныхъ уравненій какого угодно n-го порядка. Самъ онъ этихъ правилъ не формулировалъ, но это сдѣлалъ, идя по его слѣдамъ, профессоръ П. А. Некрасовъ, на котораго, по моему мнѣнію, совершенно напрасно ссылается академикъ А. А. Марковъ въ подтвержденіе своихъ словъ, будто-бы способъ В. Г. Имшенецкаго требуетъ *существенныхъ измѣненій.*

Во всемъ, что проф. П. А. Некрасовъ писалъ по разсматриваемому вопросу, нѣтъ ни одной строчки, гдѣ говорилось-бы, что развитіе и дополненіе способа В. Г. Имшенецкаго, предлагаемыя этимъ ученымъ, онъ считалъ вносящими въ этотъ способъ *существенныя измѣненія.* Напротивъ, заявивши съ самаго начала своей статьи, посвященной способу В. Г. Имшенецкаго, что онъ принимаетъ на себя долгъ болѣе полнаго разъясненія этого способа, проф. П. А. Некрасовъ говоритъ въ заключеніи: „Пріемы нахожденія дробныхъ рѣшеній ур. (1), указанные въ § 2, совпадаютъ съ пріемами В. Г. Имшенецкаго и лишь пополнены доказательствами ихъ;“ и далѣе: „Указанное въ § 3 дальнѣйшее усовершенствованіе способа В. Г. Имшенецкаго уже заключалось въ его основныхъ идеяхъ, изъ которыхъ В. Г. Имшенецкій лишь не успѣлъ извлечь всѣхъ выгодъ“ *).

Признавая за изслѣдованіями В. Г. Имшенецкаго нѣкоторые недостатки, проф. П. А. Некрасовъ, однако, говоритъ: „Недостатки эти не колеблятъ сущности способа Имшенецкаго, а относятся только къ изложенію“ **).

Ясно, что намѣренія *существенно* измѣнить способъ В. Г. Имшенецкаго профессору П. А. Некрасову приписать нельзя.

Не болѣе основательна, по моему мнѣнію, и ссылка на профессора К. А. Поссе. Этотъ ученый въ своемъ письмѣ, напечатанномъ въ Московскомъ Математическомъ Сборникѣ, выражается слѣдующимъ образомъ ***).

„Я не хочу (этимъ) сказать, что способъ В. Г. Имшенецкаго не можетъ быть дополненъ или нѣсколько видоизмѣненъ такъ, чтобы онъ давалъ возможность найти всѣ раціональныя дробныя рѣшенія, если

*) Математич. Сборн. т. XVII. Москва, 1893, стр. 380—381.

**) Тамъ-же, стр. 343.

***) Тамъ-же, стр. 390.

таковыя существуютъ, а только позволяю себѣ обратить ваше вниманіе на необходимость такихъ дополненій".

Трудно предположить, чтобы выраженія *нѣсколько видоизмѣненъ* и *существенно измѣненъ* считались профессоромъ К. А. Поссе равнозначущими, и едва-ли можно признать, что при замѣнѣ перваго изъ этихъ выраженій вторымъ смыслъ предыдущихъ строкъ останется неискаженнымъ.

Менѣе всего можно согласиться съ мнѣніемъ академика А. А. Маркова, что существенныя измѣненія, внесеніемъ которыхъ пріемы В. Г. Имшенецкаго настолько исправляются, что становятся равносильными пріемамъ Ліувилля, слѣдуетъ видѣть въ измѣненіи вида интегрирующаго множителя.

Профессоръ П. А. Некрасовъ придаетъ, какъ мнѣ кажется, нѣсколько преувеличенное значеніе формѣ интегрирующаго множителя, но и онъ въ своемъ воспроизведеніи сообщенія В. Г. Имшенецкаго, сдѣланнаго имъ за 4 дня до смерти, предложенную авторомъ перемѣну формы множителя называетъ только *весьма полезною* въ теоретическомъ и практическомъ отношеніи *). Самъ же В. Г. Имшенецкій смотрѣлъ на дѣло, повидимому, еще шире. Въ томъ же воспроизведеніи его сообщенія говорится, что онъ разъяснилъ, что способъ его „заключаетъ въ себѣ средства видоизмѣнять ходъ рѣшенія задачи, такъ какъ способъ этотъ допускаетъ *разнообразіе* въ выборѣ интегрирующаго множителя" **).

По моему мнѣнію, способъ академика В. Г. Имшенецкаго останется *способомъ Имшенецкаго*, какъ бы его ни дополняли и видоизмѣняли, до тѣхъ поръ, пока въ его основаніи будетъ лежать предложенное его авторомъ преобразованіе уравненія и употребленіе интегрирующаго множителя. Въ этомъ его существенный признакъ и во многихъ отношеніяхъ преимущество предъ способомъ Ліувилля.

Смотря на способъ В. Г. Имшенецкаго съ этой точки зрѣнія нельзя не предвидѣть болѣе широкихъ его примѣненій, чѣмъ только къ уравненіямъ линейнымъ. Весьма вѣроятно, что, пользуясь этимъ способомъ, можно вывести общія правила разысканія раціональныхъ рѣшеній для уравненій, приводимыхъ къ линейнымъ однороднымъ подстановкою $y=\frac{z'}{z}$ ***).

---

*) Математ. Сборн. т. XVII, стр. 396.

**) Тамъ-же, стр. 395.

***) Основаніемъ для этого могутъ послужить два пріема, употребленные В. Г. Имшенецкимъ въ послѣднемъ изъ примѣровъ, находящихся во второй редакціи критикуемой акад. А. А. Марковымъ статьи. Особеннаго вниманія заслуживаетъ второй пріемъ, который, при нѣкоторыхъ дополненіяхъ, можетъ приводить къ нахожденію и тѣхъ линейныхъ множителей знаменателя искомаго раціональнаго рѣшенія, которые не входятъ въ первый коэффиціентъ уравненія.

Объ этомъ предметѣ, по словамъ акад. А. А. Маркова, имъ было сдѣлано сообщеніе С.-Петербургскому Математическому Обществу, вѣроятно, въ ноябрѣ 1891 года, сущность котораго изложена въ Comptes-Rendus за тотъ же годъ *).

Замѣтка акад. А. А. Маркова въ названномъ французскомъ изданіи отличается такою краткостью и, вмѣстѣ съ тѣмъ, такою неопредѣленностью и общностью указаній на пріемы рѣшенія, что составить себѣ понятіе о какихъ-либо общихъ правилахъ для этого рѣшенія читающему чрезвычайно трудно. Вслѣдствіе этого нельзя понять даже приблизительно, что собственно разумѣетъ акад. А. А. Марковъ въ своемъ критическомъ письмѣ подъ словами *иные* (по сравненію со способомъ В. Г. Имшенецкаго) *пріемы*.

Если цѣлью замѣтки, помѣщенной акад. А. А. Марковымъ въ Comptes-Rendus, было только выяснить возможность получать посредствомъ конечнаго числа алгебраическихъ дѣйствій раціональныя рѣшенія уравненій разсматриваемаго типа, когда эти рѣшенія существуютъ, то слѣдуетъ замѣтить, что въ этомъ отношеніи его работа не представляетъ ничего новаго. Въ томъ-же томѣ Comtes-Rendus находится замѣтка Painlevé **), въ которой авторъ, доказывая преимущество своихъ правъ на пріоритетъ въ разсматриваемомъ акад. А. А. Марковымъ вопросѣ въ сравненіи съ правами послѣдняго, поясняетъ, что этотъ вопросъ, и притомъ въ болѣе широкой постановкѣ, былъ рѣшенъ имъ за нѣсколько лѣтъ ранѣе.

Если же академикъ А. А. Марковъ имѣлъ въ виду дать дѣйствительно правила вычисленія, то приходится пожалѣть, что подробности этихъ правилъ имъ нигдѣ не опубликованы, ибо, пока этого не сдѣлано, противопоставленіе способу В. Г. Имшенецкаго какихъ-то *иныхъ пріемовъ* не можетъ имѣть никакого значенія.

---

*) Comptes-Rendus, t. CXIII. 1891, p. 685--688.

**) Тамъ-же, стр. 739.

Дополненіе къ сочиненію: „О движеніи твердаго тѣла въ жидкости"*).

В. А. Стеклова.

Въ мое сочиненіе: „О движеніи твердаго тѣла въ жидкости", представляющее изложеніе сообщеній, сдѣланныхъ мною въ засѣданіяхъ Харьк. Матем. Общества за 1891, 92 и 93 гг., а также обобщеніе и дополненіе изслѣдованій, напечатанныхъ въ „Сообщеніяхъ" Общества за тѣже годы, вкрались нѣкоторыя погрѣшности и поспѣшныя заключенія, которыя необходимо исправить.

Это я и сдѣлаю въ настоящей замѣткѣ.

Не повторяя объясненій, я буду пользоваться тѣми же обозначеніями, которыя употреблены въ разсматриваемомъ сочиненіи, ссылаясь прямо на стран. и параграфы, о которыхъ будетъ рѣчь.

1. На стран. 44 и 45 (гл. I, § 15) я дѣлаю мимоходомъ замѣчанія объ опредѣленіи точки приложенія даннаго импульса, производящаго или только поступательное, или только вращательное движеніе твердаго тѣла въ жидкости. Эти замѣчанія должны быть выпущены, какъ очевидно неосновательныя.

2. Въ § 73 пятой главы (стр. 184) въ правыхъ частяхъ равенствъ (α_1) пропущены члены: въ первомъ

$$+\frac{b_{34}}{b_{44}}(b_{14}-b_{36}),$$

во второмъ

$$+\frac{b_{35}}{b_{55}}(b_{25}-b_{36}),$$

въ правыхъ частяхъ перваго и второго изъ равенствъ (α_2) (стр. 187)—члены

$$+\frac{b_{24}}{b_{44}}(b_{14}-b_{25}),\quad +\frac{b_{26}}{b_{66}}(b_{36}-b_{25}),$$

*) См. Приложеніе къ запискамъ Императорскаго Харьковскаго Университета за 1893 годъ.

и въ правыхъ частяхъ равенствъ (α_3) (стр. 187)—члены

$$+\frac{b_{15}}{b_{55}}(b_{25}-b_{14}), \quad +\frac{b_{16}}{b_{66}}(b_{36}-b_{14}).$$

Наконецъ, подъ № (β), кромѣ написанныхъ равенствъ, должно быть еще

$$b_{14}=b_{25}=b_{36}.$$

Въ формулахъ на стр. 188, 189 вмѣстѣ a_{36} надо поставить b_{36}.

3. При изслѣдованіи одного возможнаго движенія въ жидкости тяжелаго твердаго тѣла съ одной плоскостью симметріи (гл. V, § 80, стр. 200 etc.) изъ того обстоятельства, что размахи колебаній оси z относительно осей ξ или ζ убываютъ съ теченіемъ времени, я поспѣшно заключилъ, что величина этихъ размаховъ (см. стр. 206) при возрастаніи t до ∞ стремится къ нулю.

Изъ приведенныхъ въ работѣ разсужденій слѣдуетъ, что размахи колебаній оси z убываютъ съ теченіемъ времени,—и только.

Неосновательно также утвержденіе, что времена продолжительности этихъ размаховъ убываютъ (стр. 208).

Далѣе, неравенства (33), (35) и слѣдующее за нимъ должны быть измѣнены на обратныя (стр. 208, 209, § 84, гл. V).

Величины обозначенныя мной черезъ $\left(\vartheta'_{\frac{\pi}{2}}\right)_i$ не убываютъ съ теченіемъ времени, а, наоборотъ, возрастаютъ и могутъ даже возрастать безпредѣльно.

Такимъ образомъ, слова: „такъ какъ далѣе

$$\left(\vartheta'_{\frac{\pi}{2}}\right)_i = k^2 \int\limits_{t_{2i-1}}^{t_{2i}} t^2 \sin 2\vartheta dt = k^2\, \Theta\, \frac{t_{2i}^3 - t_{2i-1}^3}{3}, \text{ *)}$$

гдѣ Θ есть среднее значеніе $\sin 2\vartheta$ въ промежуткѣ $t_{2i}-t_{2i-1}$, то $\left(\vartheta'_{\frac{\pi}{2}}\right)_i$ стремится къ нулю и ось z стремится къ совпаденію съ осью ζ“ должно выпустить, ибо заключеніе въ нихъ содержащееся неосновательно. Наконецъ, равенство

$$\alpha_{i+1}-\alpha_i = n^2(-1)^{i+1}\vartheta_i \frac{t_{2i}^2 - t_{2(i-1)}^2}{2}$$

показываетъ только, что начало координатъ совершаетъ колебательныя движенія по оси ξ,—и только.

---

*) Исправляю кстати ошибочно напечатанную, хотя и ненужную, формулу въ концѣ стр. 209.

Выводъ, что „размахи колебаній по оси ξ начала координатъ убываютъ съ теченіемъ времени, и движеніе стремится къ прямолинейному по оси ζ“, былъ бы сомнителенъ даже въ предположеніи, что $\lim \vartheta_i \Big|_{t=\infty} = 0$, и несомнѣнно долженъ быть отброшенъ, въ силу вышесказаннаго, какъ неосновательный.

Итакъ, нельзя утверждать, что „движеніе начала координатъ стремится съ возрастаніемъ времени къ равном. ускор. по направленію параллельному оси ζ“ и что „амплитуда волнообразной кривой, описываемой началомъ координатъ въ плоскости симметріи убываетъ съ теченіемъ времени и стремится къ нулю при возрастаніи t до ∞“ *). Заключенія § 89-го (стр. 215), начиная со словъ: „Размахи колебаній оси z и т. д.“ должно поэтому замѣнить слѣдующими:

Размахи колебаній оси z около осей ξ или ζ, смотря по знаку разности $a_{33}-a_{11}$, убываютъ, а скорость вращенія оси z въ моменты совпаденій ея съ одной изъ осей ξ или ζ возрастаетъ съ теченіемъ времени.

Начало координатъ описываетъ въ плоскости симметріи нѣкоторую волнообразную кривую.

Замѣчу еще, что на стран. 214 въ строкахъ 2-й и 4-й снизу вмѣсто $\sin 2\vartheta$ должно быть $\sin^2\vartheta$.

4. Геометрическая интерпретація вращательной части движенія тяжелаго твердаго тѣла, удвоенная живая сила котораго

$$2T = a\mathbf{S}\, x_1^2 + 2b\,\mathbf{S}\, x_1 y_1 + \mathbf{S}\, c_1 y_1^2,$$

приведенная на стр. 230, 231 и 232 (§ 94, гл. V), должна быть замѣнена слѣдующей:

Построимъ конусъ (C) векторовъ Ξ и ортогональный къ нему конусъ (D_1), т. е. огибающій конусъ плоскостей перпендикулярныхъ къ образующимъ конуса (C).

Характеристикой этого огибающаго конуса будетъ прямая (L), уравненіе которой

$$\frac{x}{c_1 y_1 m^2 t^2 - x_1 Q} = \frac{y}{c_2 y_2 m^2 t^2 - x_2 Q} = \frac{z}{c_3 y_3 m^2 t^2 - x_3 Q}, \qquad (\alpha)$$

гдѣ

$$Q = c_1 y_1 x_1 + c_2 y_2 x_2 + c_3 x_3 y_3 .$$

При движеніи тѣла плоскость (E) перпендикулярная къ неизмѣнному въ пространствѣ направленію вектора Ξ будетъ касаться конуса (D_1) по образующей (L).

---

*) См. стр. 215, § 86, гл. V.

*

Угловая скорость лежитъ въ плоскости (F), проходящей черезъ направленіе Ξ и прямую (α).

Движеніе тѣла (его вращательная часть) воспроизведется катаніемъ вмѣстѣ со скольженіемъ конуса (D_1) по плоскости (E).

Скорость катанія

$$\omega_1 = \Omega \cos(\Omega, L) = G \cos(G, L)^*,$$

гдѣ

$$G = \sqrt{c_1{}^2 y_1{}^2 + c_2{}^2 y_2{}^2 + c_3{}^2 y_3{}^2},$$

т. е. равна проекціи вектора G, лежащаго въ плоскости (F), на прямую (L), а скорость скольженія

$$\omega_2 = mbt + G \cos(G\Xi).$$

Построеніе конуса векторовъ G указано въ концѣ стр. 231.

Движеніе тѣла представится сложнымъ изъ двухъ: вращательнаго движенія его вмѣстѣ съ воображаемой неизмѣняемой системой, вращающейся равномѣрно ускоренно вокругъ неизмѣннаго въ пространствѣ направленія вектора Ξ и изъ относительнаго по отношенію къ этой воображаемой системѣ движенія тѣла, состоящаго въ катаніи вмѣстѣ со скольженіемъ конуса (D_1), неизмѣнно связаннаго съ тѣломъ, по плоскости (E) перпендикулярной къ направленію Ξ. Скорости катанія и скольженія равны соотвѣтственно прокціямъ на плоскость (E) и на направленіе Ξ вектора G.

---

*) Мы не пишемъ знакъ $\pm$.

Къ теоріи осмотическаго давленія.

А. П. Грузинцева.

Лѣтъ десять тому назадъ (1885 г.) голландскій ученый Вантгоффъ, изучая растворы, предложилъ очень остроумную и плодотворную по своимъ послѣдствіямъ теорію ихъ. Онъ *предположилъ*, что частицы твердаго тѣла, раствореннаго въ жидкости, распространены въ ней подобно частицамъ газа, заключеннаго въ нѣкоторой оболочкѣ. Подобно этимъ послѣднимъ частицы раствореннаго тѣла производятъ на оболочку, ихъ заключающую, нѣкоторое давленіе, называемое *осмотическимъ* и это давленіе, согласно предложенію Вантгоффа, связано съ объемомъ жидкости, въ которой растворено тѣло, соотношеніемъ тождественнымъ съ законами Бойля и Гей-Люссака для газовъ, а именно, если p будетъ осмотическое давленіе, s удѣльный объемъ раствора и T абсолютная температура его, то

$$ps = RT, \qquad (1)$$

гдѣ R нѣкоторое постоянное для даннаго раствора.

Явленіе осмотическаго давленія было извѣстно задолго до Вантгоффа (Траубе въ 1867 и въ особенности Пфефферъ въ 1878 г. наблюдали и изслѣдовали его), но Вантгоффу принадлежитъ честь установленія связи между осмотическимъ давленіемъ и температурой, а такъ же и степенью концентраціи раствора. Онъ даже сдѣлалъ попытку (въ 1887 году) дать теорію осмотическаго давленія, исходя изъ принциповъ термодинамики, и получилъ соотношеніе (1) въ частной формѣ:

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{p}{T} \qquad (2)$$

при

$$s = \text{const.}$$

и для очень слабыхъ растворовъ.

Затѣмъ, сравнивая наблюдаемыя осмотическія давленія съ концентраціей раствора, онъ нашелъ, что осмотическое давленіе пропорціонально концентраціи, т. е.

$$p = kz, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

если z будетъ концентрація, т. е. отношеніе массы растворѳннаго вещества къ массѣ раствора.

Въ томъ же году (1887), когда Вантгоффъ далъ свою теорію осмотическаго давленія, французскій физикъ Дюгемъ (Duhem) опубликовалъ двѣ работы, въ которыхъ онъ излагаетъ теорію растворовъ при помощи принциповъ термодинамики, не прибѣгая къ какимъ-либо особымъ ограниченіямъ; но, къ удивленію, точное примѣненіе термодинамики къ рѣшенію поставленнаго вопроса привело Дюгема къ такимъ общимъ уравненіямъ, изъ которыхъ для очень слабыхъ растворовъ *не получалось* уравненіе (2), а слѣдовательно и (1), хотя нѣкоторыя другія слѣдствія, какъ первое приближеніе, оказывались такими же, какъ и указанныя Вантгоффомъ (а именно, свойства такъ называемыхъ изотоническихъ растворовъ въ отношеніи упругости паровъ изъ нихъ и температуръ затвердѣванія). Причина такого разногласія оставалась невыясненной. Не смотря на то, что Дюгемъ, послѣ основательныхъ возраженій, сдѣланныхъ Вантгоффомъ на его первую работу, передѣлалъ свою теорію, согласно указаніямъ Вантгоффа, въ результатѣ получилось тоже заключеніе.

Размышляя о причинахъ такого разногласія, я нашелъ ее, какъ мнѣ кажется, въ одномъ обстоятельствѣ, состоящемъ въ томъ, что Дюгемъ *), вмѣсто вводимой имъ въ теорію удѣльной теплоты разведенія раствора, долженъ былъ бы взять теплоту растворенія; тогда изъ его теоріи прямо будетъ вытекать уравненіе (1), какъ только мы предположимъ, что растворъ—слабой концентраціи.

Далѣе, разъ ставъ на критическую точку зрѣнія по отношенію къ теоріи Дюгема, я нашелъ, что его теорію должно еще измѣнить въ другомъ пунктѣ, хотя *au fond* она остается все таки Дюгемовой.

Изложимъ теперь эту теорію съ достаточной полнотой, чтобы читателю, знакомому съ теоріей Дюгема, возможно было судить о томъ, въ какихъ пунктахъ и какимъ образомъ мы измѣняемъ ее.

Пусть мы имѣемъ сосудъ, раздѣленный полупроницаемой (т. е. проницаемой для растворителя и не проницаемой для раствореннаго твердаго тѣла) перегородкой на двѣ части (1) и (2); пусть въ 1$^{\text{ой}}$ части будетъ находиться растворитель въ количествѣ μ граммъ, а во 2$^{\text{ой}}$ растворъ, состоящій изъ m граммъ растворителя и m' граммъ раство-

*) Journal de physique, (2), VI, pp. 397—414.

реннаго твердаго тѣла; такимъ образомъ, концентрація x будетъ опредѣляться соотношеніемъ:

$$x = \frac{m'}{m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(a)}$$

Здѣсь, слѣдовательно, мы относимъ массу раствореннаго твердаго тѣла къ массѣ растворителя, входящаго въ составъ раствора, а не къ массѣ всего раствора. Пусть, далѣе, абсолютная температура будетъ T, давленіе въ первой части сосуда p_1, во второй p_2. Въ такомъ случаѣ осмотическое давленіе p будетъ опредѣляться соотношеніемъ:

$$p = p_2 - p_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \text{(b)}$$

Назовемъ внутренніе термодинамическіе потенціалы 1 грамма чистаго растворителя, 1 грамма растворителя раствора и 1 грамма раствореннаго твердаго тѣла символами:

$$\mathrm{F}_1(p_1, T), \quad \mathrm{F}(x, p_2, T), \quad \mathrm{F}'(x, p_2, T),$$

а буквами

$$F_1, \ F_2$$

внутренніе термодинамическіе потенціалы (свободныя энергіи по Гельмгольцу) 1ᵒᵉ и 2ᵒᵉ части взятой системы; въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$F_1 = \mu \mathrm{F}_1(p_1, T),$$

$$F_2 = m\mathrm{F}(x, p_2, T) + m'\mathrm{F}'(x, p_2, T),$$

или, вслѣдствіе соотношенія (a):

$$F_2 = m\mathrm{F}(x, p_2, T) + mx\mathrm{F}'(x, p_2, T) \quad \ldots \ldots \text{(c)}$$

Если затѣмъ

$$v_1, \ v_2$$

будутъ объемы 1ᵒᵉ и 2ᵒᵉ части разсматриваемой системы, а

$$A$$

тепловой эквивалентъ механической работы, то основные принципы термодинамики даютъ для безконечно малаго измѣненія въ состояніи взятой системы слѣдующее уравненіе:

$$dF + Ap_1 dv_1 + Ap_2 dv_2 = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \text{(I)}$$

гдѣ положено

$$F = F_1 + F_2$$

и всѣ члены выражены въ тепловыхъ единицахъ (граммо-калоріяхъ); приэтомъ имѣемъ:

$$v_1 = \mu s_1 , \quad v_2 = (m + m')s = m(1 + x)s , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{d})$$

если

$$s_1 , \quad s$$

будутъ удѣльные объемы чистаго растворителя и раствора при температурѣ T и соотвѣтственныхъ давленіяхъ p_1 и p_2.

Пусть изъ первой части сосуда при той же температурѣ и давленіи переходитъ во вторую черезъ проницаемую для растворителя перегородку dm граммъ его массы; въ такомъ случаѣ получимъ:

$$dF_1 = \mathrm{F}_1(p_1 , T)d\mu = - \mathrm{F}_1(p_1 , T)dm ,$$

$$dF_2 = \left\{ \mathrm{F}(x , p_2 , T) - \left[\frac{\partial \mathrm{F}(x , p_2 , T)}{\partial x} + x \frac{\partial \mathrm{F}'(x , p_2 , T)}{\partial x} \right] \right\} dm ,$$

ибо при переходѣ dm растворителя во вторую часть измѣнится и концентрація раствора, причемъ по равенству (a) имѣемъ:

$$\frac{\partial x}{\partial m} = - \frac{x}{m} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{e})$$

Затѣмъ равенства (d) даютъ:

$$dv_1 = - s_1 dm , \quad dv_2 = \left[s - x(1 + x) \frac{\partial s}{\partial x} \right] dm ,$$

ибо удѣльный объемъ есть функція не только p_2 и T, но и концентраціи раствора x.

Соединяя найденное, получимъ:

$$dF = \left\{ \mathrm{F}(x, p_2, T) - \mathrm{F}_1(p_1, T) - x \left[\frac{\partial \mathrm{F}(x, p_2, T)}{\partial x} + x \frac{\partial \mathrm{F}'(x, p_2, T)}{\partial x} \right] \right\} dm,$$

$$p_1 dv_1 + p_2 dv_2 = \left[p_2 s - p_1 s_1 - p_2 x(1 + x) \frac{\partial s}{\partial x} \right] dm .$$

Такъ-какъ F_2 есть линейная однородная функція m и m', то заключаемъ, что

$$\frac{\partial \mathrm{F}(x, p_2, T)}{\partial x} + x \frac{\partial \mathrm{F}'(x, p_2, T)}{\partial x} = 0 .$$

Подставляя все это въ уравненіе (I), послѣ легкаго преобразованія находимъ:

$$F(x, p_2, T) + Ap_2\left[s - x(1+x)\frac{\partial s}{\partial x}\right] = F_1(p_1, T) + Ap_1 s_1 . \quad . (A)$$

Это и будетъ основнымъ уравненіемъ въ теоріи осмотическаго давленія.

Уравненіе (A) можно преобразовать и тогда оно получитъ простой физическій смыслъ.

Пусть

$$\Phi_1(p_1, T)$$

будетъ термодинамическій потенціалъ при постоянномъ давленіи 1 грамма чистаго растворителя въ 1-ой части сосуда при температурѣ T и давленіи p_1; тогда по опредѣленію потенціала имѣемъ:

$$F_1(p_1, T) + Ap_1 s_1 = \Phi_1(p_1, T) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (f)$$

Далѣе, пусть

$$\Phi_2(x, p_2, T)$$

будетъ термодинамическій потенціалъ при постоянномъ давленіи 1 грамма раствора во 2-ой части сосуда; въ такомъ случаѣ по опредѣленію потенціала имѣемъ:

$$\Phi_2(x, p_2, T) = mF(x, p_2, T) + mxF'(x, p_2, T) + Ap_2 ms(1+x)$$

и, если

$$\Phi(x_1, p_2, T)$$

будетъ термодинамическій потенціалъ при постоянномъ давленіи 1 грамма растворителя во 2-ой части сосуда, то по извѣстному свойству потенціала:

$$\Phi(x, p_2, T) = \frac{\partial \Phi_2(x, p_2, T)}{\partial m};$$

а потому:

$$\Phi(x, p_2, T) = F(x, p_2, T) + Ap_2\left[s - x(1+x)\frac{\partial s}{\partial x}\right] . \quad . \quad . (g)$$

Подставляя изъ равенствъ (f) и (g) въ уравненіе (A), находимъ:

$$\Phi(x, p_2, T) = \Phi_1(p, T) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (B)$$

Это уравненіе дано Дюгемомъ, только при помощи анализа, немного отличающагося отъ нашего.

Физическій смыслъ равенства (B) ясенъ: *осмотическое равновѣсіе наступаетъ тогда, когда равны термодинамическіе потенціалы при постоянномъ давленіи 1 грамма чистаго растворителя и 1 грамма его, входящаго въ составъ раствора* при общей температурѣ и соотвѣтствующихъ давленіяхъ,

Теперь, пользуясь равенствомъ (B), мы можемъ составить уравненіе, характеризующее самое явленіе растворенія твердаго тѣла въ жидкомъ.

Когда мы переводимъ безконечно-малое количество dm чистаго растворителя изъ $1^{\underline{ой}}$ части сосуда во $2^{\underline{ую}}$, то въ послѣдней концентрація уменьшится. Чтобы сохранить степень этой концентраціи, мы растворимъ dm' граммъ твердаго тѣла; на этотъ процессъ пойдетъ

$$Ldm'$$

калорій. При этомъ, такъ-какъ концентрація не должна измѣняться, то для опредѣленія dm' имѣемъ уравненіе:

$$\frac{m' + dm'}{m + dm} = x,$$

откуда

$$dm' = xdm.$$

Такимъ образомъ,

$$Ldm' = Lxdm$$

будетъ безконечно-малое количество теплоты, приходящееся на массу $(1 + x)$ граммъ раствора, а слѣдовательно, притокъ теплоты, идущей на растворение dm' граммъ твердаго тѣла, отнесенной къ 1-цѣ массы, будетъ:

$$dQ = \frac{Lx}{1+x}dm, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(h)}$$

причемъ L будетъ теплотой растворенія.

Съ другой стороны, если

$$\Psi(x\,,\ p_1\,,\ T)$$

будетъ термодинамическій потенціалъ 1 грамма системы при постоянномъ давленіи p_1, то извѣстная теорема термодинамики даетъ:

$$dQ = dU + Ap_1 dv\,,$$

причемъ U будетъ внутренняя энергія системы.

Далѣе извѣстно, что:

$$dU = d\left(\Psi - T\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right) - Ap_1 dv;$$

слѣдовательно:

$$dQ = d\left(\Psi - T\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right).$$

Такъ какъ процессъ изотермическій, то послѣднее равенство можно написать въ такомъ видѣ:

$$dQ = d\Psi - T\frac{\partial}{\partial T}d\Psi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

Но по смыслу значенія $d\Psi$ имѣемъ:

$$d\Psi = [\Phi_1(p_1,\ T) - \Phi(x,\ p_1,\ T)]\,dm,$$

а потому равенство (k) при помощи (h) обращается въ слѣдующее:

$$\Phi_1(p_1, T) - \Phi(x, p_1, T) - T\frac{\partial}{\partial T}[\Phi_1(p_1, T) - \Phi(x, p_1, T)] = \frac{Lx}{1+x}. \quad (C)$$

Преобразуемъ это равенство.

Подставляя въ него значеніе $\Phi_1(p_1,\ T)$ изъ уравненія (B), получаемъ:

$$\frac{1}{T}[\Phi(x, p_2, T) - \Phi(x, p_1, T)] - \frac{\partial}{\partial T}[\Phi(x, p_2, T) - \Phi(x, p_1, T)] = \frac{Lx}{T(1+x)}$$

или:

$$\frac{Lx}{T(1+x)} = \int_{p_1}^{p_2} \frac{\partial}{\partial P}\left[\frac{\Phi(x,\ P,\ T)}{T} - \frac{\partial \Phi(x,\ P,\ T)}{\partial T}\right] dP, \quad . \quad . \quad . \quad (l)$$

причемъ перемѣнная интегрированія обозначена буквой P.

Но извѣстно, что вообще:

$$\frac{\partial \Phi(x,\ P,\ T)}{\partial T} = Av,$$

гдѣ

$$v = \frac{v_2}{m},$$

а потому при помощи (g):

$$\int_{p_1}^{p_2}\frac{\partial}{\partial P}\left[\frac{\Phi(x\,,\;P\,,\;T)}{T}\right]dP=\frac{Ap}{T}\left[s-x(1+x)\frac{ds}{dx}\right],$$

$$\int_{p_1}^{p_2}\frac{\partial}{\partial P}\left[\frac{\partial\Phi(x\,,\;P\,,\;T)}{\partial T}\right]dP=A\frac{\partial}{\partial T}\int_{p_1}^{p_2}vdP=Ap\frac{\partial}{\partial T}\left[s-x(1+x)\frac{ds}{dx}\right],$$

если пренебрежемъ измѣненіемъ объема отъ давленія, что для жидкостей вполнѣ позволительно.

Итакъ, равенство (l) обращается въ слѣдующее:

$$\frac{Ap}{T}\left[s-x(1+x)\frac{ds}{dx}\right]-Ap\frac{\partial}{\partial T}\left[s-x(1+x)\frac{ds}{dx}\right]=\frac{Lx}{T(1+x)}\,.\quad (D)$$

Подобное уравненіе получилъ и Дюгемъ, но съ той существенной разницей, что у него въ правой части входитъ выраженіе

$$\frac{L}{T}\,;$$

причемъ у него L есть теплота разведенія раствора, а не теплота растворенія, и кромѣ того не входитъ концентрація.

Составимъ теперь другое выраженіе для L; иными словами, составимъ другое соотношеніе между p, s и T. Для этой цѣли воспользуемся общимъ уравненіемъ Томсона (Клапейрона), которое имѣетъ мѣсто при всякомъ термическомъ обратимомъ процессѣ, съ каковымъ мы и имѣемъ здѣсь дѣло.

Это уравненіе имѣетъ видъ:

$$l=AT\frac{\partial p}{\partial T}\,,\quad\ldots\ldots\ldots\quad (m)$$

гдѣ l есть скрытая теплота увеличенія единицы объема тѣла при постоянной температурѣ,—въ нашемъ случаѣ взятаго нами раствора. Равенство

$$dv_2=\left[s-x\,(1+x)\frac{ds}{dx}\right]dm$$

и равенство (h) даютъ:

$$l=\frac{dQ}{dv_2}=\frac{Lx}{\left[s-x(1+x)\dfrac{ds}{dx}\right](1+x)}\,.$$

Подставляя въ (m), находимъ:

$$A\left[s-x\,(1+x)\frac{ds}{dx}\right]\frac{\partial p}{\partial T}=\frac{Lx}{T(1+x)}\,.\quad\ldots\ldots\quad (E)$$

Этимъ уравненіемъ Дюгемъ совсѣмъ не пользуется.

Къ тому же уравненію мы придемъ и въ томъ случаѣ, если воспользуемся съ нашей точки зрѣнія пріемомъ Дюгема.

Дѣйствительно, дифференцируя по T уравненіе (B) и считая при этомъ p_2 функціей T, а p_1 отъ температуры независящимъ, получаемъ:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial T}+\frac{\partial \Phi}{\partial T}=\frac{\partial \Phi_1}{\partial T}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\mathrm{n})$$

но по равенству (g) имѣемъ:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_2}=A\left[s-x(1+x)\frac{\partial s}{\partial x}\right];$$

кромѣ того, называя S_1 и S_2 энтропіи растворителя и раствора, отнесенныя къ 1 грамму массы, по извѣстнымъ соотношеніямъ термодинамики имѣемъ:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial T}=-S_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial T}=-S_2;$$

да еще по равенству (b) находимъ:

$$\frac{\partial p_2}{\partial T}=\frac{\partial p}{\partial T};$$

подставляя все это въ равенство (n), получаемъ:

$$A\left[s-x(1+x)\frac{\partial s}{\partial x}\right]\frac{\partial p}{\partial T}=S_2-S_1; \quad \ldots \ldots (\mathrm{p})$$

но, вообще для всей взятой системы:

$$dS=\frac{dQ}{T}.$$

Отсюда, интегрируя отъ состоянія системы въ видѣ чистаго растворителя до состоянія ея въ видѣ раствора концентраціи x, находимъ:

$$S_2-S_1=\frac{1}{T}\int dQ. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\mathrm{q})$$

Здѣсь

$$\int dQ$$

есть то количество теплоты, которое идетъ на процессъ растворенія, т. е.

$$\frac{Lx}{1+x}$$

калорій; а потому равенство (p) обращается въ (E).

Теперь, соединяя уравненія (D) и (E) и полагая на время

$$s - x(1+x)\frac{ds}{dx} = \sigma,$$

получаемъ послѣ очевиднаго преобразованія:

$$\frac{\partial(p\sigma)}{\partial T} - \frac{p\sigma}{T} = 0 \,. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

Это и есть окончательное уравненіе для осмотическаго давленія, связывающее это послѣднее съ объемомъ и температурой. Интегрируя его, получаемъ, по подстановкѣ значенія σ:

$$p\left[s - x(1+x)\frac{ds}{dx}\right] = RT, \quad \ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

при чемъ R есть постоянное интегрированія.

Уравненіе (II) при

$$\sigma = \text{const}.$$

даетъ равенство (2) Вантгоффа, а уравненіе (III) при очень маломъ x, т. е. для растворовъ слабой концентраціи, обращается въ уравненіе (1).

Итакъ, надлежащее примѣненіе принциповъ термодинамики къ физической теоріи растворовъ съ точки зрѣнія Вантгоффа даетъ результаты согласные съ опытомъ.

Уравненіе (III), полученное мной изъ анализа болѣе точнаго, чѣмъ анализъ Дюгема, должно служить основаніемъ физической теоріи растворовъ; мы изъ него можемъ извлечь полезныя слѣдствія. Точно также равенства (D) или (E) при помощи (III) дадутъ возможность связать теплоту растворенія съ элементами осмотическаго давленія.

Такъ, исключая изъ равенствъ (E) и (III) величину объема

$$s - x(1+x)\frac{ds}{dx},$$

получаемъ соотношеніе для теплоты растворенія:

$$\frac{\partial lgp}{\partial T} = \frac{Lx}{ART^2(1+x)}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

которое отличается отъ обыкновенно употребляемаго только формой *).

Но разработку этихъ вопросовъ мы сдѣлаемъ предметомъ нашего послѣдующаго сообщенія.

8 апрѣля 1894 г.

---

*) См., напр., статью Dieterici, Wied. An. (45), 209.

По поводу комментарія профессора К. А. Андреева *).

А. А. Маркова.

Въ виду того, что комментарій проф. К. А. Андреева **) представляетъ какъ-бы возраженіе на мою краткую замѣтку, я вынужденъ обратить вниманіе на нижеслѣдующія обстоятельства.

Хотя замѣтка въ первоначальной редакціи не отличалась многословіемъ, проф. К. А. Андреевъ, или распорядительный комитетъ, нашелъ необходимымъ еще сократить ее.

Выкинутыя мѣста содержали мое мнѣніе о публикованіи посмертныхъ трудовъ. Содержали они также нѣкоторыя объясненія моего отношенія къ разбираемой работѣ.

Исключеніе этихъ мѣстъ, которое я считаю неосновательнымъ, значительно искалѣчило мою статью ***).

Я согласился на искалѣченіе своей статьи только потому, что надѣялся такимъ образомъ избѣжать безплодной полемики, лишенной твердыхъ научныхъ основаній.

---

*) Распорядительный комитетъ Харьковскаго Математическаго Общества постановилъ напечатать эту замѣтку академика А. А. Маркова лишь затѣмъ, чтобы дать возможность каждому читателю „Сообщеній Математическаго Общества" составить безпристрастное сужденіе о предметѣ полемики. Это напечатаніе отнюдь не должно быть понимаемо какъ выраженіе согласія распорядительнаго комитета съ мнѣніемъ академика А. А. Маркова о статьѣ „Комментарій къ статьѣ академика В. Г. Имшенецкаго о разысканіи раціональныхъ рѣшеній нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій". *Ред.*

**) См. выше стр. 150.

***) Академику А. А. Маркову было предложено замѣнить выпущенныя мѣста его письма вставками, не имѣющими рѣзкости тона и не содержащими указаній на нѣкоторыя личныя отношенія. Но онъ заявилъ, что считаетъ это невозможнымъ. *Ред.*

Комментарій же проф. К. А. Андреева представляетъ образецъ такой полемики. Отличаясь значительной длиннотой, этотъ комментарій, въ дѣйствительности, обходитъ всѣ научные вопросы.

Вступать въ подобную полемику я не желаю, а въ настоящее время тѣмъ болѣе, что не чувствую для этого достаточнаго литераторскаго таланта. Долженъ однако замѣтить, что даже въ искалѣченной моей замѣткѣ высказано мое мнѣніе, что академикъ В. Г. Имшенецкій не публиковалъ бы статьи, о которой идетъ рѣчь. Слѣдовательно, отвѣтственность за ея содержаніе лежитъ не на покойномъ академикѣ В. Г. Имшенецкомъ, а на распорядительномъ комитетѣ Харьковскаго Математическаго Общества, къ которому я и обратился съ своими замѣчаніями.

А. Марковъ.

27-го Апрѣля 1894 года.

О разысканіи раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій при помощи интегрирующаго множителя.

К. А. Андреева *).

1. Не подлежитъ сомнѣнію, что первенство въ разсмотрѣніи и разрѣшеніи вопроса о разысканіи раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій принадлежитъ Ліувиллю. Во второмъ изъ мемуаровъ, представленныхъ имъ Парижской Академіи Наукъ въ 1832 и 1833 годахъ подъ заглавіемъ: „Sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique“ **), этотъ ученый разсмотрѣлъ съ большою подробностью всѣ возможныя частности вопроса для уравненій двухъ первыхъ порядковъ и далъ затѣмъ весьма суммарныя указанія на возможность примѣненія употребленныхъ имъ для этихъ случаевъ сужденій къ уравненіямъ какого угодно высшаго порядка. Неопредѣленность этихъ указаній, главнымъ же образомъ безполезный и не приведенный въ систему разборъ подробностей, могущихъ представиться при разсмотрѣніи всѣхъ коэффиціентовъ уравненія одновременно, составляютъ слабую сторону изслѣдованія Ліувилля. По всей вѣроятности, эти недостатки были причиною того, что способъ Ліувилля для рѣшенія вопроса, имѣющаго важное значеніе въ систематическомъ изложеніи теоріи дифференціальныхъ уравненій, не былъ воспроизведенъ ни въ одномъ изъ трактатовъ, посвященныхъ этой теоріи, и, повидимому, оставался въ забвеніи въ теченіе болѣе полустолѣтія.

Еще Пуассонъ, представлявшій Парижской Академіи докладъ о мемуарахъ Ліувилля, обратилъ вниманіе на эти недостатки, но отсутствіе

*) Сообщеніе, сдѣланное въ засѣданіи Харьк. Мат. Общ. 17-го декабря 1893 г.

**) См. въ „Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences“ t. V, 1838, а также въ Journal de l'Ecole Polytechnique“, t. XIV, 22 cahier, 1833 p. 153—183.

точнаго изложенія метода для уравненій высшихъ порядковъ онъ объяснялъ сложностью вычисленій, зависящею отъ самаго существа вопроса. Это объясненіе едва-ли можно считать достаточнымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, какъ бы ни были сложны вычисленія, приводящія къ окончательному рѣшенію разсматриваемаго вопроса, число алгебраическихъ дѣйствій, изъ которыхъ они слагаются, конечное, и должны существовать общія правила, устанавливающія родъ и послѣдовательность этихъ дѣйствій.

По существу вопросъ о разысканіи раціональныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій представляется въ значительной степени сходнымъ съ вопросомъ о разысканіи раціональныхъ корней алгебраическихъ уравненій съ численными раціональными коэффиціентами. Въ обоихъ вопросахъ полное рѣшеніе нельзя считать даннымъ, пока не дана схема для вычисленій, долженствующихъ приводить къ искомому рѣшенію, каковъ бы ни былъ порядокъ или степень уравненія.

Отсутствіе такой схемы у Ліувилля дѣлаетъ то, что его изслѣдованіе о дифференціальныхъ уравненіяхъ въ названномъ мемуарѣ нужно признать мастерскимъ эскизомъ, намѣчающимъ путь къ нахожденію раціональныхъ рѣшеній этихъ уравненій, но не дающимъ точнаго маршрута для желающихъ идти этимъ путемъ въ отдѣльныхъ частныхъ случаяхъ.

Новая обработка того же вопроса и выработка недостающаго маршрута или схемы представлялась поэтому необходимою въ интересахъ науки и приходится удивляться, если справедливо, что никто изъ ученыхъ въ теченіе болѣе пятидесяти лѣтъ съ появленія мемуаровъ Ліувилля этимъ не занялся.

2. Если не ошибаемся, покойный академикъ В. Г. Имшенецкій, былъ первый послѣ Ліувилля, обратившійся снова къ занимающему насъ вопросу. Въ 1887 году онъ помѣстилъ въ LV томѣ Записокъ Императорской Академіи Наукъ статью подъ заглавіемъ: „Общій способъ нахожденія раціональныхъ дробныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами“, въ которой разсматриваетъ вопросъ самостоятельно и пролагаетъ другой путь къ его рѣшенію, отличный отъ указаннаго Ліувиллемъ, хотя и близкій къ нему по самой сущности дѣла.

Къ сожалѣнію эта статья носитъ слѣды поспѣшности работы и имѣетъ тотъ же главный недостатокъ, какъ и изслѣдованіе Ліувилля. Въ ней мы также не находимъ полной схематической формулировки предлагаемаго способа *).

---

*) Этотъ недостатокъ не восполненъ и во второй статьѣ В. Г. Имшенецкаго, посвященной тому же предмету и напечатанной въ LVIII томѣ Записокъ Импер. Акад. Наукъ въ 1888 году подъ заглавіемъ: „Дополненіе теоріи и одно приложеніе общаго способа нахожденія раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами“.

Не смотря на это, изложеніе В. Г. Имшенецкаго представляетъ многія выгодныя особенности и, между прочимъ, ту, что, идя указываемымъ имъ путемъ, не приходится дѣлать сразу такого множества частныхъ предположеній о коэффиціентахъ даннаго уравненія, какъ это дѣлается у Ліувилля, и легко замѣтить ту послѣдовательность и закономѣрность которымъ должны подчиняться эти предположенія.

Спустя нѣсколько лѣтъ послѣ появленія въ печати работы В. Г. Имшенецкаго она подверглась критикѣ со стороны нѣсколькихъ нашихъ ученыхъ, оставившихъ, къ сожалѣнію, безъ вниманія указанный выше главный недостатокъ и выставлявшихъ на видъ при посредствѣ частнаго примѣра недостатки второстепеннаго значенія и, притомъ, легко исправимые *). Это заставило автора работы возвратиться снова къ предмету своихъ изслѣдованій и дать своему способу небольшое измѣненіе, которое было имъ сообщено Московскому Математическому Обществу въ засѣданіи 19-го мая 1892 года.

За смертью В. Г. Имшенецкаго и не разысканіемъ въ его бумагахъ полнаго текста этого сообщенія, оно не могло быть напечатано вполнѣ, но сущность его была воспроизведена профессоромъ П. А. Некрасовымъ въ видѣ особой замѣтки, составившей приложеніе къ протоколу одного изъ послѣдующихъ засѣданій того же Общества **).

3. Одновременно съ этой замѣткой проф. П. А. Некрасовъ напечаталъ свое собственное изслѣдованіе подъ заглавіемъ: „Способъ В. Г. Имшенецкаго для нахожденія алгебраическихъ раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейныхъ дифференціальныхъ уравненій" ***), представляющее новую обработку того же предмета, доведенную на этотъ разъ до конца и содержащую полную формулировку способа подъ видомъ двухъ особыхъ правилъ (стр. 372 и 379).

По словамъ самого автора, цѣлью этой статьи было дать способу В. Г. Имшенецкаго болѣе полное разъясненіе и такое дальнѣйшее усовершенствованіе, котораго корень заключался бы въ его основныхъ идеяхъ. Нельзя оспаривать, что цѣль эта авторомъ достигнута, но едва ли простѣйшимъ и прямымъ путемъ.

Намъ кажется, что, придерживаясь основныхъ идей В. Г. Имшенецкаго, проф. П. А. Некрасовъ придалъ въ то же время слишкомъ большой вѣсъ нѣкоторымъ его обозначеніямъ и вспомогательнымъ преобразованіямъ. Вслѣдствіе этого его правила, безъ выгоды для результата, даютъ указанія дѣйствій не надъ самыми коэффиціентами даннаго уравненія, а надъ выраженіями, въ которыя они преобразуются лишь для общихъ теоретическихъ сужденій. Къ тому же эти правила, представляя выводъ изъ предшествующихъ разсужденій,

*) См. Мат. Сборн. Т. XVII, 1893, стр. 385—391.

**) Тамъ-же, стр. 391—398.

***) Тамъ же. стр. 341—382.

оказываются непонятными въ отдѣльности отъ нихъ и потому не могутъ съ удобствомъ служить схемою для выполненія вычисленій.

Все это заставляетъ насъ думать, что вопросъ остается еще не доведеннымъ до достаточной степени простоты и ясности, и потому мы рѣшаемся представить его въ новомъ изложеніи, имѣя главнымъ образомъ въ виду выводъ возможно простой и общей схемы вычисленій, которыя должны производиться надъ коэффиціентами даннаго линейнаго уравненія для нахожденія его раціональныхъ частныхъ интеграловъ.

Подобно проф. П. А. Некрасову, мы будемъ придерживаться въ нашемъ изложеніи того пути, по которому шелъ въ своихъ изслѣдованіяхъ В. Г. Имшенецкій, отдавая ему предпочтеніе предъ анализомъ Ліувилля главнымъ образомъ потому, что на этомъ пути сразу открывается передъ нами (какъ будетъ показано ниже) рядъ послѣдовательныхъ ступеней, приводящихъ неуклонно къ окончательному и простѣйшему рѣшенію вопроса, чего нельзя сказать о способѣ Ліувилля. Слѣдуя за Ліувиллемъ, мы не видимъ, напротивъ, ни начала, ни конца этого ряда, и примѣняющему этотъ способъ приходится, для установленія послѣдовательности вычисленій, руководствоваться въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ своею собственною сообразительностью.

4. Положимъ, что дано уравненіе

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_ny=V, \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

въ которомъ P_0, P_1, ... P_n и V суть извѣстные полиномы, не имѣющіе общаго дѣлителя.

Помножимъ обѣ части этого уравненія на неопредѣленный полиномъ M и затѣмъ приведемъ его къ виду

$$\frac{d^n}{dx^n}(S_0y)+\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(S_1y)+\ldots+\frac{d}{dx}(S_{u-1}y)+(S_ny)=MV. \quad . \quad (2)$$

Здѣсь S_0, $S_1 \ldots S_n$ суть также полиномы, выражающіеся опредѣленнымъ образомъ чрезъ полиномы P_0, $P_1 \ldots P_n$ и M.

Чтобы получить эти выраженія, разложимъ каждое слагаемое первой части уравненія (2) по формулѣ Лейбница и сравнимъ сумму коэффиціентовъ при производной отъ y порядка $(n-i)$ съ коэффиціентомъ при той же производной въ уравненіи (1), умноженномъ на M. Въ результатѣ будемъ имѣть:

$$S_i+(n-i+1)S'_{i-1}+\frac{(n-i+2)(n-i+1)}{2!}S''_{i-2}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}S_0^{(i)}=MP_i.$$

Отсюда, измѣненіемъ указателя i и дифференцированіемъ, выводимъ слѣдующій рядъ равенствъ:

$$S_i+(n-i+1)S'_{i-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}S_0^{(i)}=MP_i$$

$$S'_{i-1}+(n-i+2)S''_{i-2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-i+2)}{(i-1)!}S_0^{(i)}=(MP_{i-1})'$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_1^{(i-1)}+nS_0^{(i)}=(MP_1)^{(i-1)}$$

$$S_0^{(i)}=(MP_0)^{(i)}$$

который представляетъ собою систему $(i+1)$ уравненій первой степени съ $(i+1)$ неизвѣстными S_i, $(S_{i-1})'$, $(S_{i-2})''$, $\ldots S_0^{(i)}$.

Рѣшеніе этой системы по общимъ правиламъ и даетъ для полиномовъ S_i слѣдующее общее выраженіе:

$$\left.\begin{aligned}S_i=MP_i-(n-i+1)(MP_{i-1})'+\frac{(n-i+2)(n-i+1)}{2!}(MP_{i-2})''-\ldots\\ \ldots(-1)^i\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}(MP_0)^{(i)}.\end{aligned}\right\}(3)$$

Въ частности будемъ имѣть

$$S_n=MP_n-(MP_{n-1})'+(MP_{n-2})''-\ldots+(-1)^n(MP_0)^{(n)},$$

или

$$S_n=(-1)^n[(MP_0)^{(n)}-(MP_1)^{(n-1)}+(MP_2)^{(n-2)}-\ldots+(-1)^nMP_n]. \quad (4)$$

Выраженія (3) и (4) будутъ имѣть въ послѣдующемъ очень важное значеніе.

5. Допустимъ теперь, что данному уравненію (1) удовлетворяетъ раціональная дробь

$$y=\frac{Z}{Y},$$

подлежащая опредѣленію, и поставимъ себѣ ближайшею задачею найти такой видъ для полинома M, при которомъ всѣ полиномы

$$S_0, S_1, \ldots S_{n-1}, S_n$$

дѣлятся на знаменателя Y этой дроби.

Множитель M, удовлетворяющій этому условію, В. Г. Имшенецкій называлъ интегрирующимъ на томъ основаніи, что при такомъ M, какъ показываетъ самый видъ уравненія (2), за знаменателя Y искомаго раціональнаго рѣшенія этого уравненія можетъ быть принятъ общій наибольшій дѣлитель полиномовъ S_0, $S_1 \ldots S_n$. Числитель же опредѣлится какъ цѣлая функція Z, удовлетворяющая уравненію, которое получимъ, раздѣливши въ уравненіи (2) полиномы S_0, $S_1 \ldots S_n$ на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя.

Наша задача будетъ, слѣдовательно, состоять въ нахожденіи интегрирующаго множителя, къ чему, такимъ образомъ, и сводится вся трудность разсматриваемаго вопроса.

Замѣтимъ прежде всего, что если M есть интегрирующій множитель, то произведеніе его на какой угодно полиномъ H будетъ также интегрирующимъ множителемъ.

Въ самомъ дѣлѣ, замѣнивъ M черезъ HM и обозначивъ черезъ T_0, $T_1, \ldots T_n$ полиномы, въ которые обратятся при этомъ S_0, $S_1, \ldots S_n$, получимъ изъ равенства (3) слѣдующее:

$$T_i = HMP_i - (n-i+1)(HMP_{i-1})' + \frac{(n-i+2)(n-i+1)}{2!}(HMP_{i-2})'' - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^i \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}(HMP_0)^{(i)},$$

которое примѣненіемъ формулы Лейбница легко преобразуется въ такое:

$$T_i = HS_i - (n-i+1)H'S_{i-1} + \frac{(n-i+2)(n-i+1)}{2!}H''S_{i-2} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^i \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}H^{(i)}S_0.$$

Отсюда и видимъ, что всякій общій дѣлитель всѣхъ S_i будетъ общимъ дѣлителемъ и всѣхъ T_i. Слѣдовательно, при существованіи интегрирующаго множителя, такихъ множителей должно быть безчисленное множество.

Интегрирующій множитель возможно низшей степени, т. е. такой, который уже не будетъ произведеніемъ другого интегрирующаго множителя на цѣлую функцію, мы будемъ называть абсолютно наименьшимъ.

Изъ сказаннаго выше видно, что всякій интегрирующій множитель можетъ служить для нахожденія раціональнаго рѣшенія уравненія (1), но въ то-же время очевидно, что, въ видахъ упрощенія вычисленій и съ цѣлью полученія простѣйшаго результата, нужно стараться найти интегрирующій множитель возможно низшей степени при существующихъ условіяхъ или относительно наименьшій.

6. Для того чтобы полиномъ M былъ интегрирующимъ множителемъ уравненія (1), вполнѣ достаточно, чтобы онъ дѣлалъ дѣлящимися на Y только полиномы

$$S_0, S_1, \ldots S_{n-1}.$$

Дѣлимость же на Y полинома S_n есть необходимое слѣдствіе этого условія.

Въ самомъ дѣлѣ, при этомъ условіи всѣ слагаемыя первой части уравненія (2), за исключеніемъ послѣдняго, равно какъ и вторая часть, будутъ функціи цѣлыя. Таковою же функціей должно быть, слѣдовательно, и послѣднее слагаемое $S_n y$.

Эта дѣлимостъ полинома S_n на общаго дѣлителя полиномовъ S_0, $S_1, \ldots S_{n-1}$, принимаемаго за знаменателя Y искомаго раціональнаго рѣшенія даннаго дифференціальнаго уравненія, есть обстоятельство первостепенной важности. Основываясь на немъ, всегда можно достигнуть нахожденія интегрирующаго множителя.

7. Положимъ, что $(x-a)$ есть одинъ изъ линейныхъ множителей знаменатель Y, входящій въ него въ степени α, и допустимъ, что тотъ же множитель входитъ въ интегригующій множитель M въ степени β, такъ что

$$M=(x-a)^\beta N,$$

гдѣ N означаетъ полиномъ, не дѣлящійся на $(x-a)$.

Условимся, далѣе, обозначать чрезъ K всякій полиномъ, дѣлящійся на $(x-a)$, и чрезъ $P_0(a)$, $P_1(a) \ldots P_0'(a)$, $P_1'(a) \ldots$ значенія функцій P_0, $P_1, \ldots$ и ихъ производныхъ при $x=a$.

Въ такомъ случаѣ по теоремѣ Тейлора будемъ имѣть:

$$P_0=P_0(a)+K, \quad P_1=P_1(a)+K, \ldots$$

Вслѣдствіе этого, полагая $\beta>n-1$, получимъ: *)

$$(MP_0)^{(n)}=\Big\{(x-a)^\beta[NP_0(a)+K]\Big\}^{(n)}=$$

$$=(x-a)^{\beta-n}[\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+1)NP_0(a)+K],$$

$$(MP_1)^{(n-1)}=\Big\{(x-a)^\beta[NP_1(a)+K]\Big\}^{(n-1)}=$$

$$=(x-a)^{\beta-n+1}[\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+2)NP_1(a)+K],$$

. . . .

*) Возможность неравенства $\beta>n-1$ не можетъ подлежать сомнѣнію, если не ставить необходимымъ условіемъ, чтобы разсматриваемый интегрирующій множитель былъ абсолютно наименьшій.

и потому по формулѣ (4):

$$S_n = (-1)^n (x-a)^{\beta-n}[\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+1)NP_0(a)+K].$$

Въ то же время, какъ видно изъ формулы (3), будемъ имѣть вообще:

$$S_i = (x-a)^{\beta-i}U_i,$$

гдѣ U_i есть нѣкоторый опредѣленный полиномъ.

Слѣдовательно, полиномы

$$S_0, \; S_1, \ldots S_{n-1}$$

будутъ имѣть общимъ множителемъ

$$(x-a)^{\beta-n+1}$$

и для того, чтобы множитель M былъ интегрирующимъ и притомъ возможно меньшимъ, нужно положить

$$\beta-n+1=\alpha.$$

Такъ какъ при этомъ и полиномъ S_n долженъ дѣлиться на $(x-a)^{\beta-n+1}$, то, принимая во вниманіе послѣднее выраженіе для этого полинома, будемъ имѣть

$$P_0(a)=0,$$

ибо полиномъ N не дѣлится на $(x-a)$, а множители β, $(\beta-1)$, ... всѣ положительны.

Такимъ образомъ мы убѣждаемся, что всякій линейный множитель, входящій въ знаменателя Y раціональнаго рѣшенія, есть дѣлитель полинома P_0, и потому его можно считать извѣстнымъ.

8. На основаніи доказаннаго будемъ имѣть по теоремѣ Тейлора

$$P_0=(x-a)P_0'(a)+K$$

и потому, полагая $\beta > n-2$, получимъ:

$$(MP_0)^{(n)} = \Big\{(x-a)^{\beta+1}[NP_0'(a)+K]\Big\}^{(n)} =$$

$$=(x-a)^{\beta-n+1}[(\beta+1)\beta\ldots(\beta-n+2)NP_0'(a)+K],$$

$$(MP_1)^{(n-1)} = \Big\{(x-a)^{\beta}[NP_1(a)+K]\Big\}^{(n-1)} =$$

$$=(x-a)^{\beta-n+1}[\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+2)NP_1(a)+K],$$

и т. д.

Слѣдовательно, согласно равенству (4),

$$S_n=(-1)^n(x-a)^{\beta-n+1}\Big\{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+2)N[(\beta+1)P_0'(a)-P_1(a)]+K\Big\}.$$

Въ тоже время, какъ показываетъ общая формула (3), будемъ имѣть:

$$S_i=(x-a)^{\beta-i+1}\,U_i.$$

Полиномы $S_0, S_1, \ldots S_{n-1}$ будутъ, слѣдовательно, имѣть общимъ множителемъ

$$(x-a)^{\beta-n+2}$$

и для того, чтобы полиномъ M былъ возможно меньшимъ интегрирующимъ множителемъ, нужно положить

$$\beta-n+2=\alpha.$$

При этомъ полиномъ S_n долженъ дѣлиться также на $(x-a)^{\beta-n+2}$, для чего, какъ видно изъ послѣдняго выраженія для S_n, должно выполняться условіе:

$$(\beta+1)P_0'(a)-P_1(a)=0\,, \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

т. е. полиномъ

$$(\beta+1)P_0'-P_1$$

долженъ дѣлиться на $(x-a)$.

Это возможно въ двухъ случаяхъ: 1) когда множитель $(x-a)$ входитъ въ общаго наибольшаго дѣлителя D_1 полиномовъ P_0' и P_1, и 2) когда D_1 не дѣлится на $(x-a)$.

Остановимся сперва на второмъ изъ нихъ.

Въ этомъ случаѣ изъ равенства (5) можно по данному a опредѣлить соотвѣтственное β, т. е. найти показателя степени, въ которой биномъ $(x-a)$, взятый изъ числа дѣлителей полинома P_0, долженъ входить въ интегрирующаго множителя M.

Согласно предположеніямъ, на которыхъ основывается нашъ выводъ, β должно быть цѣлымъ, положительнымъ, конечнымъ числомъ, большимъ $(n-2)$. Поэтому въ случаѣ, когда изъ уравненія (5) такого значенія для β не получается, $(x-a)$ вовсе не будетъ дѣлителемъ полинома M.

9. Если подъ $(x-a)$ будемъ подразумѣвать не какой-либо опредѣленный биномъ, служащій дѣлителемъ полинома P_0, а любой изъ линейныхъ множителей этого послѣдняго, не входящій въ D_1, то a будетъ общимъ корнемъ уравненій

$$\left.\begin{aligned}(\beta+1)P_0'-P_1&=0\,,\\ X_1&=0\,,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

и

гдѣ X_1 есть произведеніе всѣхъ линейныхъ множителей P_0, не входящихъ въ D_1.

Слѣдовательно, для опредѣленія β нужно будетъ въ этомъ случаѣ исключить изъ двухъ послѣднихъ уравненій неизвѣстное x, что дастъ нѣкоторое алгебраическое уравненіе

$$F_1(\beta) = 0\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

содержащее только одно неизвѣстное β. При этомъ первое изъ уравненій (6) можетъ быть предварительно раздѣлено на D_1. Что же касается второго, то его первая часть X_1, какъ показываетъ самое ея значеніе, легко опредѣляется слѣдующимъ образомъ.

Сперва находимъ произведеніе X всѣхъ линейныхъ множителей полинома P_0, раздѣливъ для этого P_0 на его общаго наибольшаго дѣлителя съ P_0', и затѣмъ раздѣляемъ X на его общаго наибольшаго дѣлителя съ D_1.

Уравненіе (7) будетъ, вообще говоря, степени выше первой. Только цѣлыя, положительныя, большія $(n-2)$, числа, ему удовлетворяющія, будутъ показателями линейныхъ множителей полинома M изъ числа входящихъ въ X_1.

Если назовемъ черезъ β_1 наибольшій изъ цѣлыхъ, положительныхъ корней уравненія (7), то интегрирующій множитель M можетъ быть отыскиваемъ подъ видомъ

$$M = X_1^{\beta_1} M_1\,,$$

гдѣ M_1 есть полиномъ, состоящій только изъ такихъ линейныхъ множителей полинома P_0, которые входятъ въ D_1.

Понятно, что въ этомъ видѣ интегрирующій множитель не будетъ, вообще говоря, наименьшимъ. Онъ будетъ, однако, возможно меньшимъ изъ тѣхъ, которые можно найти, не прибѣгая къ разложенію полинома X_1 на множители.

10. Обратимся теперь къ первому изъ названныхъ выше случаевъ дѣлимости на $(x-a)$ полинома

$$(\beta+1)\,P_0' - P_1\,,$$

т. е. положимъ, что $(x-a)$ входитъ множителемъ въ D_1.

Въ этомъ случаѣ по теоремѣ Тейлора будемъ имѣть:

$$P_0 = \frac{(x-a)^2}{2!}\,[P_0''(a) + K],$$

$$P_1 = (x-a)\,[P_1'(a) + K].$$

Слѣдовательно, при условіи $\beta > n-3$, должно быть:

$$(MP_0)^{(n)} = \left\{\frac{(x-a)^{\beta+2}}{2!}[NP_0''(a)+K]\right\}^{(n)} =$$

$$= \frac{(x-a)^{\beta-n+2}}{2!}[(\beta+2)(\beta+1)\ \ldots(\beta-n+3)NP_0''(a)+K],$$

$$(MP_1)^{(n-1)} = \left\{(x-a)^{\beta+1}[NP_1'(a)+K]\right\}^{(n-1)} =$$

$$= (x-a)^{\beta-n+2}[(\beta+1)\beta\ldots(\beta-n+3)NP_1'(a)+K],$$

$$(MP_2)^{(n-2)} = \left\{(x-a)^{\beta}[NP_2(a)+K]\right\}^{(n-2)} =$$

$$= (x-a)^{\beta-n+2}[\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+3)NP_2(a)+K],$$

и потому, по формулѣ (4),

$$S_n = (-1)^n(x-a)^{\beta-n+2}\left\{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+3)N\left[\frac{(\beta+2)(\beta+1)}{2!}P_0''(a)-(\beta+1)P_1'(a)+P_2(a)\right]+K\right\}.$$

Въ то же время, на основаніи общей формулы (3), имѣемъ:

$$S_i = (x-a)^{\beta-i+2}U_i,$$

откуда слѣдуетъ, что

$$(x-a)^{\beta-n+3}$$

будетъ общимъ дѣлителемъ полиномовъ

$$S_0,\ S_1,\ldots S_{n-1},$$

и если M есть интегрирующій множитель, то можно положить

$$\beta - n + 3 = \alpha.$$

Такъ какъ при этомъ на $(x-a)^{\beta-n+3}$ долженъ дѣлиться полиномъ S_n, то, принимая во вниманіе послѣднее выраженіе для S_n, мы будемъ имѣть:

$$\frac{(\beta+2)(\beta+1)}{2!}P_0''(a)-(\beta+1)P_1'(a)+P_2(a)=0. \quad . \quad . \quad (8)$$

Отсюда и опредѣлится β подобно тому, какъ ранѣе изъ уравненія (5), если только $(x-a)$ не будетъ входить множителемъ въ общаго наибольшаго дѣлителя D_2 полиномовъ P_0'', P_1' и P_2.

11. Подъ $(x-a)$ можетъ быть подразумѣваемъ въ предыдущемъ любой изъ линейныхъ множителей полинома D_1, не входящій въ D_2. Произведеніе X_2 всѣхъ такихъ множителей найдемъ, раздѣливши общій

наибольшій дѣлитель $\triangle_1$ полиномовъ X и D_1 на общій наибольшій дѣлитель полиномовъ $\triangle_1$ и D_2.

Тогда a будетъ общимъ корнемъ уравненій:

$$\frac{(\beta+2)(\beta+1)}{2!}P_0''-(\beta+1)P_1'+P_2=0$$

и

$$X_2=0,$$

такъ что, исключивъ изъ этихъ уравненій неизвѣстное x (причемъ первое должно быть предварительно раздѣлено на D_2), получимъ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ.

$$F_2(\beta)=0,$$

служащее для опредѣленія β.

При этомъ по условіямъ, положеннымъ въ основаніе нашихъ разсужденій, β должно быть цѣлымъ, положительнымъ, конечнымъ числомъ, большимъ $(n-3)$.

Пусть β_2 будетъ наибольшій изъ корней послѣдняго уравненія, удовлетворяющихъ этимъ условіямъ. Такъ какъ въ такомъ случаѣ всякій линейный множитель полинома X_2 будетъ входить въ $X_2^{\beta_2}$ въ степени не низшей чѣмъ въ M, то интегрирующій множитель можетъ быть отыскиваемъ подъ видомъ

$$M=X_1^{\beta_1}X_2^{\beta_2}M_2.$$

12. Для нахожденія показателей степеней, въ которыхъ входятъ въ интегрирующій множитель такіе линейные дѣлители полинома P_0, которые содержатся въ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ D_2 полиномовъ P_0'', P_1', P_2, придется, очевидно, повторять періодически тѣ же разсужденія. При этомъ число послѣдовательныхъ коэффиціентовъ даннаго уравненія (1), вліяющихъ на значеніе опредѣляемаго показателя, будетъ постепенно возрастать, равно какъ и порядокъ ихъ производныхъ.

Изысканіе окончится лишь тогда, когда мы дойдемъ до ряда полиномовъ

$$P_0^{(k)},\ P_1^{(k-1)},\ P_2^{(k-2)}\ \ldots,$$

которые не будутъ имѣть общаго дѣлителя, входящаго въ P_0, что необходимо должно случиться (вслѣдствіе конечности степеней полиномовъ P_0, $P_1\ldots$), если не при $k\leqq n$, то при $k>n$.

Случай, когда $k>n$, не представляетъ никакихъ особенностей, какъ для примѣненія общаго хода сужденій, такъ и для формулировки вывода. Чтобы выяснить все это, повторимъ предыдущія разсужденія въ общемъ видѣ.

Положимъ, что на $(x-a)$ дѣлятся полиномы

$$P_0,\ P_1,\ P_2, \ldots P_{k-1},$$

а также и ихъ послѣдовательныя производныя до

$$P_0^{(k-1)},\ P_1^{(k-2)},\ P_2^{(k-3)}, \ldots P'_{k-2}$$

включительно.

Здѣсь k означаетъ какое угодно цѣлое положительное число, но при $k > n$ должно, очевидно, полагать: $P_{n+1}=0$, $P_{n+2}=0, \ldots$

По теоремѣ Тейлора мы будемъ имѣть:

$$P_0 = \frac{(x-a)^k}{k!} P_0^{(k)}(a) + K,$$

$$P_1 = \frac{(x-a)^{k-1}}{(k-1)!} P_1^{(k-1)}(a) + K,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

вслѣдствіе чего получимъ, полагая $\beta > n-k-1$,

$$(MP_0)^{(n)} = \left\{\frac{(x-a)^{\beta+k}}{k!}\left[NP_0^{(k)}(a)+K\right]\right\}^{(n)} =$$

$$= \frac{(x-a)^{\beta+k-n}}{k!}\left[(\beta+k)(\beta+k-1)\ldots(\beta+k-n+1)\, NP_0^{(k)}(a)+K\right]$$

$$(MP_1)^{(n-1)} = \left\{\frac{(x-a)^{\beta+k-1}}{(k-1)!}\left[NP_1^{(k-1)}(a)+K\right]\right\}^{(n-1)} =$$

$$= \frac{(x-a)^{\beta+k-n}}{(k-1)!}\left[(\beta+k-1)(\beta+k-2)\ldots(\beta+k-n+1) NP_1^{(k-1)}(a)+K\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

При помощи этихъ значеній выраженіе (4) для S_n приметъ видъ:

$$S_n = (-1)^n (x-a)^{\beta+k-n}\left\{N\left[\frac{(\beta+k)(\beta+k-1)\ldots(\beta+k-n+1)}{k!} P_0^{(k)}(a) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(\beta+k-1)(\beta+k-2)\ldots(\beta+k-n+1)}{(k-1)!} P_1^{(k-1)}(a) + \ldots\right] + K\right\}.$$

Въ тоже время по общей формулѣ (3) будемъ имѣть:

$$S_i = (x-a)^{\beta+k-i}\, U_i,$$

откуда заключаемъ, что

$$(x-a)^{\beta+k-n+1}$$

будетъ общимъ дѣлителемъ полиномовъ

$$S_0\,, S_1\,, \ldots S_{n-1}\,,$$

такъ что можно положить

$$\beta+k-n+1=\alpha\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (9)$$

Но для того, чтобы на этого дѣлителя дѣлился и полиномъ S_n, нужно, какъ показываетъ предыдущее выраженіе для S_n, чтобы β удовлетворяло условію:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(\beta+k)(\beta+k-1)\ldots(\beta+k-n+1)}{k\,!}\,P_0^{(k)}(a)-\\&-\frac{(\beta+k-1)(\beta+k-2)\ldots(\beta+k-n+1)}{(k-1)\,!}\,P_1^{(k-1)}(a)+\ldots=0\,,\end{aligned}\right\}\ (10)$$

откуда значеніе β и можетъ быть опредѣлено.

Въ первой части послѣдняго равенства число слагаемыхъ равно $k+1$, когда $k<n$, и $n+1$, когда $k\overline{\overline{>}}\,n$. Кромѣ того, при $k<n$, эти слагаемыя будутъ имѣть, какъ мы видѣли ранѣе, общихъ множителей, зависящихъ отъ β, чего не будетъ, очевидно, при $k\overline{\overline{>}}\,n$.

Если общій наибольшій дѣлитель полиномовъ

$$P_0^{(k)},\ P_1^{(k-1)},\ \ldots P_k\,,$$

есть постоянная величина или такая цѣлая функція, которая не имѣетъ общихъ множителей съ P_0, то уравненіе (10) будетъ опредѣлять показателя β для всякаго линейнаго множителя полинома P_0, входящаго въ общій наибольшій дѣлитель D_{k-1} полиномовъ

$$P_0^{(k-1)},\ P_1^{(k-2)},\ \ldots P_{k-1}.$$

Обозначая чрезъ X_k произведеніе всѣхъ такихъ линейныхъ множителей, будемъ имѣть, что соотвѣтствующіе имъ показатели, съ которыми они входятъ въ интегрирующій множитель M, опредѣлятся, какъ цѣлыя, положительныя и притомъ большія чѣмъ $n-k-1$, если $k<n-1$, рѣшенія уравненія

$$F_k(\beta)=0\,,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (11)$$

получаемаго по исключенiи неизвѣстнаго x изъ двухъ уравненiй:

$$\frac{(\beta+k)(\beta+k-1)\ldots(\beta+k-n+1)}{k!}P_0^{(k)}-$$

$$-\frac{(\beta+k-1)(\beta+k-2)\ldots(\beta+k-n+1)}{(k-1)!}P_1^{(k-1)}+\ldots=0$$

и

$$X_k=0.$$

Интегрирующiй множитель M можетъ быть разсматриваемъ поэтому, какъ содержащiй множителя $X_k^{\beta_k}$, гдѣ β_k есть наибольшiй изъ цѣлыхъ, положительныхъ корней уравненiя (11), большихъ $n-k-1$.

Изъ сказаннаго видимъ, что, при

$$M=X_1^{\beta_1}X_2^{\beta_2}\ldots X_k^{\beta_k},$$

полиномы

$$S_0,\ S_1,\ldots S_{n-1},\ S_n$$

будутъ дѣлиться на всѣ линейные множители, могущiе входить въ знаменателя Y искомаго рацiональнаго рѣшенiя даннаго уравненiя (1), и притомъ взятые въ степеняхъ не низшихъ, чѣмъ въ этомъ знаменателѣ. Эти полиномы будутъ, слѣдовательно, дѣлиться на Y.

Такимъ образомъ, при извѣстныхъ $X_1, X_2, \ldots X_k$ и $\beta_1, \beta_2\ldots\beta_k$, интегрирующiй множитель нужно считать найденнымъ.

Само собою понятно, что несуществованiе интегрирующаго множителя еще не есть признакъ несуществованiя дробнаго рацiональнаго рѣшенiя, такъ какъ полиномы $S_0, S_1, \ldots S_n$ могутъ имѣть общаго дѣлителя независимо отъ интегрирующаго множителя, т. е. при $M=1$.

Прибавимъ къ сказанному, что общiй наибольшiй дѣлитель полиномовъ $S_0, S_1, \ldots S_n$ будетъ общимъ знаменателемъ всѣхъ рацiональныхъ дробей, удовлетворяющихъ данному уравненiю (1), если при разысканiи числителя получится нѣсколько рѣшенiй.

13. Все вышеизложенное приводитъ насъ къ возможности формулировать правила для нахожденiя интегрирующаго множителя, служащаго для разысканiя дробныхъ рацiональныхъ рѣшенiй линейнаго дифференцiальнаго уравненiя (1), въ видѣ слѣдующей *схемы вычисленiй*.

1) Сперва нужно составить изъ коэффицiентовъ даннаго уравненiя и ихъ производныхъ таблицу полиномовъ:

$$\left.\begin{array}{l}
P_0, \\
P'_0, \quad P_1, \\
P''_0, \quad P'_1, \quad P_2 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
P_0^{(k)}, \quad P_1^{(k-1)}, \ldots P'_{k-1}, \ P_k \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
P_0^{(n)}, \quad P_1^{(n-1)}, \ldots P'_{n-1}, \ P_n \\
P_0^{(n+1)}, \ P_1^{(n)}, \ldots P''_{n-1}, \ P'_n \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}\right\}, \ \ldots\ldots \qquad (12)$$

отыскивая для полиномовъ каждой строки (начиная со второй) общихъ наибольшихъ дѣлителей D_1, D_2, D_3, ... и заканчивая ее тою строкою, для которой общій наибольшій дѣлитель не будетъ имѣть общихъ множителей съ P_0.

2) Затѣмъ нужно составить рядъ полиномовъ:

$$X, \ X_1, \ X_2 \ldots X_k, \ldots X_n, \ X_{n-1} \ldots,$$

опредѣляя каждый изъ нихъ по коэффиціентамъ даннаго уравненія слѣдующимъ образомъ.

Полиномъ X есть произведеніе всѣхъ линейныхъ множителей, входящихъ въ P_0, и получается раздѣленіемъ P_0 на общаго наибольшаго дѣлителя $\triangle_0$ полиномовъ P_0 и P'_0.

Полиномъ X_1 есть произведеніе линейныхъ множителей, входящихъ въ x, но не входящихъ въ D_1. Онъ получается раздѣленіемъ X на общаго наибольшаго дѣлителя $\triangle_1$ полиномовъ X и D_1, такъ что $X = X_1 \triangle_1$.

Полиномъ X_2 есть произведеніе линейныхъ множителей, входящихъ въ $\triangle_1$, но не входящихъ въ D_2, и, слѣдовательно, получается раздѣленіемъ $\triangle_1$ на общаго наибольшаго дѣлителя $\triangle_2$ полиномовъ $\triangle_1$ и D_2, такъ что $\triangle_1 = X_2 \triangle_2$.

И вообще

$$X_k = \frac{\triangle_{k-1}}{\triangle_k},$$

гдѣ $\triangle_k$ означаетъ общаго наибольшаго дѣлителя полиномовъ $\triangle_{k-1}$ и D_k.

3) Послѣ этого нужно составить уравненія:

$$F_1(\beta) = 0, \ F_2(\beta) = 0, \ldots F_k(\beta) = 0, \ldots F_n(\beta) = 0, \ F_{n+1}(\beta) \ldots$$

изъ которыхъ каждое получается исключеніемъ извѣстнаго x изъ двухъ уравненій вида:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{(\beta+k)(\beta+k-1)\ldots(\beta+k-n+1)}{k!}P_0^{(k)}-\\[2ex] -\dfrac{(\beta+k-1)(\beta+k-2)\ldots(\beta+k-n+1)}{(k-1)!}P_0^{(k-1)}+\ldots=0\\[2ex] \text{и}\qquad X_k=0\end{array}\right\}(13)$$

при $k=1\,,\,2\,,\ldots n\,,\,(n+1)\,,\ldots$

4) Наконецъ нужно найти рядъ чиселъ:

$$\beta_1\,,\,\beta_2\,,\ldots\beta_k\,,\ldots\beta_n\,,\,\beta_{n+1}\,,\ldots$$

изъ которыхъ каждое, напр. β_k, есть наибольшій изъ цѣлыхъ положительныхъ, и притомъ большихъ $(n-k-1)$, корней уравненія

$$F_k(\beta)=0$$

и, въ случаѣ не существованія такихъ корней, должно считаться равнымъ нулю.

Послѣ всѣхъ этихъ вычисленій интегрирующій множитель M опредѣлится формулою

$$M=X_1^{\beta_1}X_2^{\beta_2}\ldots X_k^{\beta_k}\ldots X_n^{\beta_n}X_{n+1}^{\beta_{n+1}}\ldots\quad\ldots\ldots(14)$$

14. Вычисленія по предложенной схемѣ не допускаютъ никакого упрощенія лишь въ томъ случаѣ, когда полиномы $X_1\,,\,X_2\ldots$ не могутъ быть разложены на множители. Когда же какой-либо изъ нихъ можно разложить на множители, напр.

$$X_k=V_kW_k\,,$$

то составленіе уравненія $F_k(\beta)=0$ достигается проще, если въ системѣ уравненій (13) будемъ брать вмѣсто уравненія $X_k=0$ отдѣльно два уравненія $V_k=0$ и $W_k=0$.

Проще всего уравненіе $F_k(\beta)=0$ составляется, очевидно, тогда, когда X_k состоитъ только изъ одного линейнаго множителя или можетъ быть разложено на такіе множители.

15. Приложимъ сказанное къ примѣрамъ. Пусть дано уравненіе

$$x(x+1)^2(x-2)^4\frac{d^2y}{dx^2}+(x-3)(x+1)(x-2)^4\frac{dy}{dx}-$$

$$-(35x^2-51x+17)(x+1)(x-2)^2y=-(31x^3-114x^2+123x-36).$$

Здѣсь имѣемъ:

$$P_0 = x(x+1)^2(x-2)^4, \quad P_1 = (x-3)(x+1)(x-2)^4,$$
$$P_3 = (35x^2 - 51x + 17)(x+1)(x-2)^2.$$

Такъ какъ полиномъ P_0 состоитъ изъ линейныхъ дѣлителей x, $(x+1)$, $(x-2)$, то интегрирующій множитель будетъ имѣть видъ

$$M = x^{\beta_1}(x+1)^{\beta_2}(x-2)^{\beta_3}.$$

Слѣдовательно, нужно найти β_1, β_2 и β_3.

Для опредѣленія β_1 полагаемъ $x=0$; тогда

$$P_0(0) = 0,$$
$$P_0'(0) = 16, \; P_1(0) = -3.16.$$

Уравненіе, опредѣляющее β, будетъ, слѣдовательно,

$$(\beta+1)16 + 3.16 = 0,$$

откуда $\beta = -4$, и потому $\beta_1 = 0$.

Для опредѣленія β_2 полагаемъ $x = -1$; тогда

$$P_0(-1) = 0,$$
$$P_0'(-1) = 0, \; P_1(-1) = 0,$$
$$P_0''(-1) = -2.3^4, \; P_1'(-1) = -4.3^4, \; P_2(-1) = 0,$$

и уравненіе, опредѣляющее β, будетъ

$$-\frac{(\beta+2)(\beta+1)}{2}.2.3^4 + (\beta+1).4.3^4 = 0$$

или

$$-81(\beta+1)[(\beta+2)-4] = 0,$$

откуда $\beta = -1$, $\beta = 2$. Слѣдовательно, $\beta_2 = 2$.

Для опредѣленія β_3 полагаемъ $x=2$; тогда

$$P_0(2) = 0,$$
$$P_0'(2) = 0, \; P_1(2) = 0,$$
$$P_0''(2) = 0, \; P_1'(2) = 0, \; P_2(2) = 0,$$
$$P_0'''(2) = 0, \; P_1''(2) = 0, \; P_2'(2) = 0,$$
$$P_0^{\text{IV}}(2) = 4!.2.3^2, \; P_1'''(2) = 0, \; P_2'' = -45.2.3,$$

и уравненіе, опредѣляющее β, будетъ

$$\frac{(\beta+4)(\beta+3)}{4\,!}.4!.2.3^2-\frac{1}{2!}.45.2.3=0$$

или

$$9[2(\beta+4)(\beta+3)-15]=0.$$

Такъ какъ это уравненіе не имѣетъ положительныхъ корней, то $\beta_3=0$.

Итакъ, интегрирующій множитель есть $(x+1)^2$.

Поэтому будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}
MP_0 &= x(x+1)^4(x-2)^4, \\
(MP_0)' &= (x+1)^3(x-2)^3(9x^2-5x-2), \\
(MP_0)'' &= 4(x+1)^2(x-2)^2(18x^3-20x^2-7x+4), \\
MP_1 &= (x-3)(x+1)^3(x-2)^4, \\
(MP_1)' &= 4(x+1)^2(x-2)^3(2x^2-6x+1), \\
MP_2 &= -(35x^2-51x+7)(x+1)^3(x-2)^2.
\end{aligned}$$

Слѣдовательно,

$$\begin{aligned}
S_0 &= MP_0 = x(x+1)^4(x-2)^4, \\
S_1 &= MP_1-2(MP_0') = -(x+1)^3(x-2)^3(17x^2-5x-10), \\
S_2 &= MP_2-(MP_1)'+(MP_0)'' = (x+1)^3(x-2)^2(29x^2-53x+17).
\end{aligned}$$

Отсюда видимъ, что знаменатель искомаго раціональнаго рѣшенія, будучи общимъ наибольшимъ дѣлителемъ функцій S_0, S_1 и S_2, есть

$$(x+1)^3(x-2)^2.$$

Для опредѣленія же числителя будемъ имѣть уравненіе вида (2):

$$\frac{d^2}{dx^2}[x(x+1)(x-2)^2z]-\frac{d}{dx}[(x-2)(17x^2-5x-10)z]+(29x^2-53x+17)z=$$
$$=-(x+1)^2(31x^3-114x^2+123x-36)$$

или

$$[(x^4-3x^3+4x)z]''-[(17x^3-39x^2+20)z]'+(29x^2-53x+17)z=$$
$$=-31x^5+52x^4+74x^3-96x^2-51x+36.$$

Полагая $z = Ax^\alpha + v$, находимъ изъ сравненія показателей и коэффиціентовъ старшихъ членовъ:

$$\alpha = 3\,,\ A = 1$$

и, слѣдовательно,

$$z = x^3 + v.$$

Вслѣдствіе этого для опредѣленія v получимъ уравненіе

$$[(x^4 - 3x^3 + 4x)v]'' - [(17x^3 - 39x^2 + 20)v]' + (29x^2 - 53x + 17)v =$$
$$= 57x^3 - 84x^2 - 51x + 36.$$

Полагая $v = Bx^\beta + w$, получимъ изъ сравненія старшихъ членовъ:

$$\beta = 1\,,\ B = -3\,;$$

слѣдовательно,

$$v = -3x + w.$$

По подстановкѣ этого значенія въ предыдущее уравненіе будемъ имѣть:

$$[(x^4 - 3x^2 + 4x)w]'' - [17x^3 - 39x^2 + 20)w]' + (29x^2 - 53x + 17)w = 0\,,$$

откуда

$$w = 0\,,$$

и потому

$$z = x^3 - 3x = x(x^2 - 3).$$

Итакъ, данное уравненіе имѣетъ единственное раціональное рѣшеніе:

$$y = \frac{x(x^2 - 3)}{(x+1)^3(x-2)^2}.$$

16. Возьмемъ еще уравненіе

$$x^2(x+1)^5\frac{dy}{dx} + x(x+1)^2(3x^3 + 19x^2 + 17x + 5)y =$$
$$= 4(9 + 9x - x^2)\,,$$

предложенное профессоромъ К. А. Поссе *).

---

*) Матем. Сборн. Т. XVII, 1893. стр. 389.

Здѣсь

$$P_0 = x^2(x+1)^5\,,\ P_1 = x(x+1)^2(3x^3+19x^2+17x+5).$$

Интегрирующій множитель долженъ имѣть видъ

$$M = x^{\beta_1}(x+1)^{\beta_2}.$$

Для опредѣленія β_1, полагаемъ $x = 0$; тогда

$$P_0(0) = 0\,,$$

$$P_0'(0) = 0\,,\ P_1(0) = 0\,,$$

$$P_0''(0) = 2\,,\ P_1'(0) = 5\,,$$

и уравненіе, опредѣляющее β, будетъ

$$\frac{(\beta+2)}{2}.2 - 5 = 0\,,$$

или

$$\beta - 3 = 0.$$

Слѣдовательно,

$$\beta_1 = 3.$$

Полагая, для опредѣленія β_2, $x = -1$, будемъ имѣть:

$$P_0(-1) = 0\,,$$

$$P_0'(-1) = 0\,,\ P_1(-1) = 0\,,$$

$$P_0''(-1) = 0\,,\ P_1'(-1) = 0$$

$$P_0'''(-1) = 0\,,\ P_1''(-1) = -2.4\,,$$

и потому β должно опредѣляться изъ уравненія

$$\frac{\beta+3}{3\,!}.0 + \frac{1}{2\,!}.2.4 = 0.$$

Но это уравненіе конечнаго значенія для β не даетъ; стало быть

$$\beta_2 = 0.$$

Интегрирующій множитель будетъ, слѣдовательно,

$$M = x^3.$$

По умноженіи на этого множителя, данное уравненіе обращается въ

$$x^5(x+1)^5\frac{dy}{dx}+x^4(x+1)^2(3x^3+19x^2+17x+5)y=4x^3(9+9x-x^2)$$

или

$$[x^5(x+1)^5y]'+x^4(x+1)^2[(3x^3+19x^2+17x+5)-5(x+1)^2(2x+1)]y=$$
$$=4x^3(9+9x-x^2)$$

или

$$[x^5(x+1)^5y]'-x^5(x+1)^2(7x^2+6x+3)y=4x^3(9+9x-x^2).$$

Знаменатель искомаго раціональнаго рѣшенія будетъ, слѣдовательно,

$$x^5(x+1)^2$$

и потому, полагая

$$y=\frac{z}{x^5(x+1)^2},$$

получимъ:

$$[(x+1)^3z]'-(7x^2+6x+3)z=4x^3(9+9x-x^2).$$

Подобно тому, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ находимъ, что это уравненіе удовлетворяется цѣлою функціей

$$z=4x^3+3$$

и потому

$$y=\frac{4x^3+3}{x^5(x+1)^2}.$$

17. Предложенная въ 13-мъ параграфѣ схема вычисленій даетъ правила для нахожденія интегрирующаго множителя, по которому знаменатель искомаго раціональнаго рѣшенія опредѣляется чрезъ посредство полиномовъ S_0, S_1, ... S_n, какъ ихъ общій наибольшій дѣлитель.

Легко видѣть, однако, что между интегрирующимъ множителемъ и знаменателемъ искомаго рѣшенія существуетъ прямая связь, въ силу которой одна изъ этихъ функцій опредѣляется непосредственно черезъ другую. Связь эта выражается равенствомъ (9), представляющимъ зависимость между показателями степеней α и β, въ которыхъ одинъ и тотъ же линейный множитель $(x-a)$ входитъ въ искомаго знаменателя Y и въ интегрирующаго множителя M.

Изъ общихъ соображеній параграфа 12-го слѣдуетъ, однако, что, допуская равенство (9), мы признаемъ въ то же время существующимъ такое цѣлое положительное значеніе для β, при которомъ на общаго дѣлителя

$$(x-a)^{\beta+k-n+1}$$

полиномовъ S_0, $S_1 \dots S_{n-1}$ дѣлится и полиномъ S_n. Если же такого значенія не существуетъ, то, какъ показываетъ выраженіе для S_n, биномъ $(x-a)$ будетъ входить множителемъ въ общаго наибольшаго дѣлителя всѣхъ полиномовъ S_0, $S_1 \dots S_n$ въ степени $\beta + k - n$. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ вмѣсто равенства (9) будемъ имѣть

$$\beta + k - n = \alpha.$$

На этомъ основаніи, имѣя интегрирующій множитель въ видѣ

$$M = (x-a_1)^{\beta_1}(x-a_2)^{\beta_2}\dots(x-a_k)^{\beta_k}\dots,$$

мы можемъ вычислить знаменателя искомой дроби по формулѣ

$$Y = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_k)^{\alpha_k}\dots,$$

гдѣ вообще

$$\alpha_k = \beta_k + k - n + 1, \quad . \ . \ . \ . \ . \quad . \ . \ . \ (15)$$

при существованіи цѣлаго положительнаго значенія для β_k, и

$$\alpha_k = \beta_k + k - n \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (16)$$

въ противномъ случаѣ.

Въ первомъ изъ приведенныхъ выше примѣровъ мы имѣли

$$M = x^{\beta_1}(x+1)^{\beta_2}(x-2)^{\beta_3},$$

причемъ только для β_2 получилось цѣлое положительное значеніе $\beta_2 = 2$.

Такъ какъ мы видѣли кромѣ того, что при $x=0$, $k=1$; при $x=-1$, $k=2$ и при $x=2$, $k=4$, то знаменатель Y опредѣлится формулою

$$Y = x^{\alpha_1}(x+1)^{\alpha_2}(x-2)^{\alpha_3},$$

гдѣ

$$\alpha_1 = 0 + 1 - 2, \quad \text{слѣд.} \ \alpha_1 = 0,$$
$$\alpha_2 = 2 + 2 - 2 + 1 = 3,$$
$$\alpha_3 = 0 + 4 - 2 = 2,$$

т. е.

$$Y = (x+1)^3(x-2)^2.$$

Во второмъ примѣрѣ мы имѣли

$$M = x^{\beta_1}(x+1)^{\beta_2},$$

причемъ $\beta_1 = 3$, а для β_2 не получилось цѣлаго конечнаго значенія.

Такъ какъ при этомъ мы видѣли, что для перваго множителя $k=2$, а для второго $k=3$, то

$$\alpha_1 = 3 + 2 - 1 + 1 = 5\,,$$

$$\alpha_2 = 0 + 3 - 1 = 2\,.$$

Слѣдовательно,

$$Y = x^5 (x+1)^2\,.$$

Изъ равенствъ (15) и (16) видно, что съ прибавленіемъ къ β_k какого нибудь цѣлаго положительнаго числа увеличивается на то же число и α_k. Отсюда заключаемъ, что этими равенствами можно пользоваться для нахожденія знаменателя искомой дроби и въ томъ случаѣ, когда найденный интегрирующій множитель не есть наименьшій, и между прочимъ при интегрирующемъ множителѣ, найденномъ, согласно предложенной нами схемѣ, въ видѣ (14).

Но такой знаменатель также не будетъ, вообще говоря, наименьшимъ, т. е. онъ будетъ имѣть общихъ дѣлителей съ числителемъ. Этого, впрочемъ, нельзя избѣжать вообще, не прибѣгая къ разложенію полинома P_0 на линейные множители.

18. Вмѣсто того, чтобы находить знаменателя искомаго раціональнаго рѣшенія по найденному интегрирующему множителю, можно воспользоваться соотношеніемъ (9) между β и α для того, чтобы самыя уравненія, служащія для опредѣленія β, преобразовать въ уравненія, опредѣляющія α.

Мы видѣли въ параграфѣ 12-мъ, что для опредѣленія β служитъ вообще уравненіе вида

$$\frac{(\beta+k)(\beta+k-1)\dots(\beta+k-n+1)}{k!}P_0^{(k)}(a) -$$

$$-\frac{(\beta+k-1)(\beta+k-2)\dots(\beta+k-n+1)}{(k-1)!}P_1^{(k-1)}(a) + \dots = 0\,.$$

По замѣнѣ въ немъ β выраженіемъ чрезъ α, взятымъ изъ равенства (9), получимъ уравненіе, служащее для опредѣленія α,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{k!}P_0^{(k)}(a) - \\ &-\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-2)}{(k-1)!}P_1^{(k-1)}(a) + \dots = 0\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (17)$$

Чтобы пользоваться этимъ уравненіемъ для нахожденія значеній α, соотвѣтствующихъ смыслу вопроса, нужно, однако, принять во вниманіе слѣдующее.

Такъ какъ $(\beta+1)$ есть число положительное, то изъ соотношенія (9) слѣдуетъ, что

$$\alpha > k - n,$$

условіе, не включающееся въ $\alpha > 0$, только при $k > 1$ и въ этомъ случаѣ существенное.

Въ то же время изъ выраженія для S_i въ параграфѣ 12-мъ видно, что при $k > n$, всѣ полиномы $S_0, S_1 \ldots S_n$ дѣлятся на $(x-a)$ въ степени по меньшей мѣрѣ равной $(k-n)$.

Вслѣдствіе этихъ замѣчаній при опредѣленіи показателя α изъ уравненія (17) нужно различать случаи: когда $k \overline{\leq} n$ и когда $k > n$. Въ первомъ случаѣ искомымъ показателемъ будетъ всякое цѣлое, положительное, конечно число, удовлетворяющее этому уравненію, и при несуществованіи такихъ чиселъ, должно положить $\alpha = 0$. Во второмъ же случаѣ искомый показатель будетъ равняться всякому цѣлому положительному корню уравненія (17), большему $(k-n)$, и при несуществованіи такихъ корней долженъ считаться равнымъ $(k-n)$.

Пользуясь уравненіемъ (17) для непосредственнаго нахожденія знаменателя искомаго раціональнаго рѣшенія въ первомъ изъ приведенныхъ выше примѣровъ, будемъ имѣть:

При $x=0$, $k=1$,

$$\alpha(\alpha+1)P_0'(0) - \alpha P_1(0) = 0$$

или

$$\alpha(\alpha+1).16 = \alpha.3.16 = 16\alpha(\alpha+4) = 0;$$

слѣдовательно,

$$\alpha_1 = 0.$$

При $x=-1$, $k=2=n$,

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{2} P_0''(-1) - \alpha P_1'(-1) + P_2(-1) = 0$$

или

$$-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}.2.3^4 + \alpha.4.3^4 = -3^4\alpha(\alpha+1-4) = 0;$$

слѣдовательно,

$$\alpha_2 = 3.$$

При $x = 2$, $k = 4 > n$,

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{4\,!} P_0^{\mathrm{IV}}(2) - \frac{\alpha}{3\,!} P_1'''(2) + \frac{1}{2\,!} P_2''(2) = 0$$

или

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{4\,!} . 4! . 2 . 3^2 - \frac{1}{2\,!} . 45 . 2 . 3 = 0$$

или

$$9[2\alpha(\alpha+1) - 15] = 0\,;$$

слѣдовательно,

$$\alpha_3 = k - n = 4 - 2 = 2.$$

Итакъ,

$$Y = (x+1)^3(x-2)^2.$$

Самая схема вычисленій, предложенная нами выше для нахожденія интегрирующаго множителя, превращается въ служащую для опредѣленія знаменателя искомаго раціональнаго интеграла, если въ ней уравненія

$$F_1(\beta) = 0\,,\ F_2(\beta) = 0, \ldots F_k(\beta) = 0 \ldots$$

будутъ замѣнены уравненіями

$$\varPhi_1(\alpha) = 0\,,\ \varPhi_2(\alpha) = 0\,, \ldots \varPhi_k(\alpha) = 0 \ldots$$

изъ которыхъ каждое получается исключеніемъ неизвѣстнаго x изъ двухъ уравненій:

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{k!} P_0^{(k)} - \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-2)}{(k-1)\,!} P_1^{(k-1)} + \ldots = 0$$

и

$$X_k = 0\,,$$

при $k = 1\,,\ 2\,,\ 3 \ldots$

19. Изъ того, что нахожденіе знаменателя раціональнаго интеграла даннаго линейнаго уравненія (1) можетъ быть достигнуто непосредственно, т. е. безъ предварительнаго опредѣленія интегрирующаго множителя и полиномовъ $S_0, S_1, \ldots S_n$, было бы ошибочно заключить, что и самый интегралъ получается такимъ путемъ проще, т. е. при помощи менѣе сложныхъ вычисленій.

Въ самомъ дѣлѣ, когда извѣстны полиномы $S_0, S_1, \ldots S_n$, то, какъ мы видѣли ранѣе, будетъ извѣстно въ формѣ (2) и уравненіе, опредѣляющее числителя искомой дроби. Если же извѣстенъ только знаменатель этой дроби, то уравненіе, служащее для опредѣленія числителя, должно быть еще найдено. Въ какомъ бы видѣ мы его ни предполагали, задача будетъ состоять въ нахожденіи $(n+1)$ полиномовъ, служащихъ коэффиціентами этого уравненія.

Вычисленія для нахожденія этихъ полиномовъ по знаменателю Y представляютъ тѣ же затрудненія и по меньшей мѣрѣ ту же степень сложности, какъ и вычисленія полиномовъ S_0, $S_1 \ldots S_n$ по множителю M.

Что же касается опредѣленія числителя искомой дроби, какъ цѣлой функціи, удовлетворяющей найденному дифференціальному уравненію, то оно представляетъ одинаковыя трудности, въ какомъ бы изъ двухъ видовъ (1) и (2) это уравненіе ни было получено.

Такимъ образомъ заключаемъ, что разысканіе раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій при помощи интегрирующаго множителя нельзя считать пріемомъ менѣе выгоднымъ даже въ практическомъ отношеніи, чѣмъ какой-либо другой пріемъ, служащій для той же цѣли. О теоретическомъ значеніи этого пріема, какъ орудія для вывода схемы вычисленій, предоставляемъ судить читателю на основаніи всего вышеизложеннаго.

20. Въ заключеніе скажемъ нѣсколько словъ о тѣхъ видахъ интегрирующаго множителя, въ которыхъ онъ разыскивался В. Г. Имшенецкимъ.

Изъ опредѣленія функцій X, X_1, $X_2 \ldots X_k \ldots$ слѣдуетъ, что

$$X = X_1 X_2 \ldots X_k \ldots$$

Поэтому, обозначая буквою γ наибольшій изъ показателей β_1, $\beta_2, \ldots$ въ выраженіи интегрирующаго множителя

$$M = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \ldots X_k^{\beta_k} \ldots,$$

будемъ имѣть

$$X^\gamma = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \ldots X_k^{\beta_k} \ldots H = MH,$$

гдѣ H есть нѣкоторый полиномъ.

Слѣдовательно, X^γ есть также интегрирующій множитель.

Если положимъ, далѣе, что Q есть какая-нибудь извѣстная цѣлая функція, дѣлящаяся на X, то получимъ

$$Q^\gamma = X^\gamma G$$

и въ частности

$$P_0^\gamma = X^\gamma G_0\,,$$

гдѣ G и G_0 суть нѣкоторые полиномы.

Слѣдовательно, Q^γ и P_0^γ будутъ также интегрирующіе множители.

Виды интегрирующаго множителя

$$P_0^\gamma \text{ и } X^\gamma$$

и суть тѣ, которые разсматривались В. Г. Имшенецкимъ.

Разысканіе множителя подъ этими видами имѣетъ ту теоретическую выгоду, что задача сводится при этомъ на опредѣленіе одного только числа γ. Вмѣстѣ съ тѣмъ и самый процессъ вычисленій можетъ быть формулированъ проще, а именно слѣдующимъ образомъ.

Для нахожденія интегрирующаго множителя подъ видомъ P_0^γ нужно составить рядъ уравненій

$$F_1(\beta) = 0\,,\ F_2(\beta) = 0\,, \ldots F_k(\beta) \ldots,$$

изъ которыхъ каждое получается исключеніемъ неизвѣстнаго x изъ уравненія

$$P_0 = 0$$

и уравненія

$$\frac{(\beta+k)(\beta+k-1)\ldots(\beta+k-n+1)}{k\,!}\,P_0^{(k)} -$$

$$-\frac{(\beta+k-1)(\beta+k-2)\ldots(\beta+k-n+1)}{(k-1)\,!}\,P_1^{(k-1)} + \ldots = 0$$

при $k = 1\,,\ 2\,,\ 3\,, \ldots$

Наибольшій изъ цѣлыхъ положительныхъ корней составленныхъ такимъ образомъ уравненій будетъ искомымъ значеніемъ γ.

Замѣтимъ, что замѣна каждаго изъ уравненій

$$X_1 = 0\,,\ X_2 = 0\,, \ldots X_k = 0\,, \ldots$$

разсматривавшихся нами прежде, однимъ и тѣмъ же

$$P_0 = 0$$

позволительна потому, что P_0 содержитъ множителемъ каждый изъ полиномовъ $X_1, X_2 \dots X_k \dots$, вслѣдствіе чего и уравненіе

$$F_k(\beta) = 0$$

(каково бы въ немъ ни было k) можетъ получить отъ такой замѣны только нѣсколько лишнихъ корней, не утрачивая всѣхъ прежнихъ. Эти лишніе корни не нарушаютъ, однако, правильности результата, такъ какъ въ случаѣ, когда между ними не будетъ большаго чѣмъ наибольшій изъ прежнихъ корней, значеніе числа γ не измѣнится; въ противномъ же случаѣ это значеніе увеличится, отъ чего P_0^γ не перестанетъ быть интегрирующимъ множителемъ.

Допущеніе излишнихъ множителей въ полиномахъ, надъ которыми производятся вычисленія, не вредящее дѣлу теоретически, можетъ, впрочемъ, повлечь за собою слишкомъ большое усложненіе вычисленій. Въ этомъ и заключается единственное неудобство разысканія интегрирующаго множителя подъ тѣми видами, въ которыхъ онъ разсматривался В. Г. Имшенецкимъ.