I.

ТЕОРІЯ ДВИЖЕНІЯ ТѢЛЪ

БРОСАЕМЫХЪ НА ПОВЕРЬХНОСТИ ЗЕМНОЙ.

Тимофея Осиповскаго.

---

1. Вообразимъ, что шарообразное тѣло брошено на поверьхности земной со скоростію c подъ угломъ къ горизонту ζ. Какъ силы управляющія его движеніемъ суть, сила метанія, сопротивленіе воздуха, и тяжесть; и какъ первыя двѣ простираются всегда по направленію одной прямой линѣи, а послѣдняя по направленію прямой же линѣи перпендикулярной къ горизонту; плоскость же опредѣляемая сими двумя линѣями, по коей оныя силы разполагаются, остается всегда одна и таже, то и все движеніе тѣла произходить будетъ по сей плоскости.

Назначимъ координаты кривой линѣи по сей плоскости тѣломъ описываемой буквами x и y, разумѣя подъ x горизонтальную и подъ y вертикальную; и назовемъ постоянную силу тяжести $2g$ и сопротивленіе производимое воздухомъ R; то по прошествіи какого либо времени t отъ того мгновенія, когда тѣло брошено, будетъ

$$\frac{1}{dt}.d.\frac{dx}{ds}. = -R.\frac{dx}{ds},$$

$$\frac{1}{dt}.d.\frac{dy}{dt} = -R.\frac{dy}{ds} - 2g;$$

понимая подъ ds дифференціалъ дуги описанной тѣломъ во время t.

2. Поелику теорія и опытъ согласно показываютъ, что сопротивленіе производимое жидкостію пропорціонально квадратамъ скорости, съ коею тѣло въ ней движется, то будетъ $R = k. \frac{ds^2}{dt^2}$; гдѣ k означаетъ постояннаго коеффиціента зависящаго наиболѣе отъ содержанія плотности движимаго тѣла къ плотности жидкости, и отъ радіуса движимаго тѣла; которой коеффиціентъ относительно къ воздуху, по его рѣдкости, очень малъ. Такимъ образомъ оныя уравненія обратятся въ

$$d. \frac{dx}{dt} + k. \frac{ds. dx}{dt} = 0,$$

$$d. \frac{dy}{dt} + k. \frac{dsdy}{dt} + 2gdt = 0;$$

кои, при предположеніи дифференціала dx постояннымъ, будутъ

$$ddt - kdsdt = 0,$$

$$dtddy - dyddt + kdsdydt + 2gdt^3 = 0.$$

Естьли первое изъ сихъ уравненій помноженное на dy сложится со вторымъ, то второе чрезъ то сократится, и уравненія сведутся на

$$ddt - kdsdt = 0,$$

$$ddy + 2gdt^2 = 0;$$

кои, по назначеніи dt чрезъ pdx и dy чрезъ qdx, при чемъ будетъ $ds = dx\sqrt{(1 + qq)}$, обратятся въ

$$dp - kpdx\sqrt{(1+qq)} = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (a)$$
$$dq + 2gppdx = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (b).$$

3. Выключивъ изъ уравненій (a) и (b) величину dx получимъ

$$\left.\begin{array}{l} 2gpdp + kdq\sqrt{(1+qq)} = 0, \\ \text{коего интегралъ будетъ} \\ gpp + k\int dq\sqrt{(1+qq)} = a. \end{array}\right\} \;.\;.\;.\;.\; (c)$$

4. Какъ уравненіе (b) доставляетъ $dx = -\frac{dq}{2gpp}$ и $dy = qdx = -\frac{qdq}{2gpp}$, то будетъ

$$x = C - \tfrac{1}{2}\int \frac{dq}{a - k\int dq\sqrt{(1+qq)}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (d)$$

$$y = C' - \tfrac{1}{2}\int \frac{qdq}{a - k\int dq\sqrt{(1+qq)}} \;.\;.\;.\;.\; (e).$$

5. Для вычисленія по симъ формуламъ опредѣлимъ сперва въ уравненіи (c) постоянную величину a. На сей конецъ положимъ $\sqrt{(1+qq)} = q + u$, то будетъ $q = \frac{1-uu}{2u}$, $dq = -\left(\frac{1+uu}{2uu}\right).du$ и $\sqrt{(1+qq)} = \frac{1+uu}{2u}$; чрезъ что величина $dq\sqrt{(1+qq)}$ обратится въ $-\tfrac{1}{4}.\frac{(1+u^2)^2}{u^3}du$ $= -\tfrac{1}{4}\left\{\frac{1}{u^3} + \frac{2}{u} + u\right\}du$, коея интегралъ будетъ $\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1-u^4}{4uu}\right\} + \tfrac{1}{2}log.\frac{1}{u} = \tfrac{1}{2}q\sqrt{(1+qq)} + \tfrac{1}{2}log.[q+\sqrt{(1+qq)}]$. По сему уравненіе ($c$) будетъ

$$gpp + \tfrac{1}{2}k[q\sqrt{(1+qq)} + log.(q+\sqrt{(1+qq)})] = a \;.\;.\;.\; (c).$$ Какъ величина $\frac{1}{p} = \frac{dx}{dt}$ означаетъ

горизонтальную скорость тѣла, и $q = \frac{dy}{dx}$ означаетъ тангенсъ угла, которой составляетъ съ горизонтомъ направленіе кривой линѣи въ точкѣ движенія тѣла; то при началѣ движенія будетъ $\frac{1}{p} = c.\ cos.\ \zeta$, и $q = tang.\ \zeta$; а по сему будетъ

$$a = \frac{g}{cc.\ cos\ \zeta^2} + \tfrac{1}{2} k \left\{ \frac{sin\ \zeta}{cos.\ \zeta^2} + log.\ \left(\frac{1 + sin \zeta}{cos.\ \zeta} \right) \right\},$$

или

$$a = \frac{g}{cc.\ cos\ \zeta^2} + \tfrac{1}{2} k \left\{ \frac{sin\ \zeta}{cos\ \zeta^2} + log.\ tang.\ (\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\zeta) \right\},$$

разумѣя подъ π два прямыхъ угла.

6. Теперь уравненіе (c) опредѣлять будетъ отношеніе существующее между горизонтальною скоростію тѣла и тангенсомъ угла, которой составляетъ съ горизонтомъ направленіе кривой линѣи въ точкѣ движенія тѣла; уравненія же (d) и (e) опредѣлять будутъ координаты x и y чрезъ оной же тангенсъ, для коихъ постоянныя величины C и C' должны быть опредѣлены такъ, чтобъ при $x = o$ и $y = o$ была величина $q = tang.\ \zeta$.

7. Мы будемъ употреблять сіи формулы для нахожденія величинъ x и y до наибольшей аппликаты y, то есть до вершины кривой линѣи; и какъ при сей вершинѣ $\frac{dy}{dx} = q = o$, то, естьли наибольшая аппликата назначится чрезъ h, и соотвѣтсвующая ей абсцисса чрезъ f, будетъ $f = C$ и $h = C'$; величины же x и y будутъ

$$x = f - \tfrac{1}{2}\int\frac{dq}{a - k\int dq\sqrt{(1+qq)}}$$

$$y = h - \tfrac{1}{2}\int\frac{qdq}{a - k\int dq\sqrt{(1+qq)}}$$

или, по назначеніи $k = \mu a$,

$$x = f - \frac{1}{2a}\int\frac{dq}{1 - \mu\int dq\sqrt{(1+qq)}} \;.\;.\;.\;.\;.\; (d),$$

$$y = h - \frac{1}{2a}\int\frac{qdq}{1 - \mu\int dq\sqrt{(1+qq)}} \;.\;.\;.\;.\; (e);$$

въ коихъ по интегрованіи подставить должно $q = o$;

величины же f и h будутъ

$$f = \frac{1}{2a}\int\frac{dq}{1 - \mu\int dq\sqrt{(1+qq)}},$$

$$h = \frac{1}{2a}\int\frac{qdq}{1 - \mu\int dq\sqrt{(1+qq)}},$$

въ коихъ по интегрованіи подставить должно $q = \text{tang. } \zeta$.

8. Изъ уравненія же (c) опредѣлится и скорость, съ коею тѣло при сей вершинѣ двигаться будетъ; а имянно, поелику при сей вершинѣ $q = o$, будетъ при ней $gpp = a$, и $\frac{1}{pp} = \frac{g}{a}$; такъ что естьли скорость при вершинѣ назначится чрезъ v, то будетъ

$$v = \sqrt{\frac{g}{a}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (f).$$

9. При движеніи тѣла далѣе вершины кривой линѣи можно его разсматривать такъ, какъ бы оно начало двигаться при оной, будучи брошено по горизонтальному направленію со скоростію $\sqrt{\frac{g}{a}}$. Естьли для кривой

линѣи идущей отъ вершины далѣе по движенію тѣла положится начало осей координатъ при сей самой вершинѣ, и назначатся координаты, вертикальная чрезъ y' и горизонтальная чрезъ x', то сила по горизонтальному направленію побуждающая тѣло будетъ $-k.\frac{ds'dx'}{dt^2}$ и по вертикальному $2g-k.\frac{ds'dy'}{dt^2}$. Слѣдовательно уравненія движенія для сей второй половины кривой линѣи будутъ одинаковы съ уравненіями для первой половины, выключая что будетъ здѣсь величина g съ противнымъ знакомъ. Итакъ естьли уравненія для сей второй половины, соотвѣтсвующія уравненіямъ (a), (b), (c) для первой половины назначены будутъ чрезъ (a'), (b'), (c'), то сіи уравненія будутъ

$$dp'-kp'dx'\sqrt{(1+q'q')}=0 \;\ldots\ldots\; (a')$$

$$dq'-2gp'p'dx'=0 \;\ldots\ldots\ldots\; (b')$$

$$\left.\begin{aligned}2gp'dp'-kdq'\sqrt{(1+q'q')}&=0\\ gp'p'-k\int dq'\sqrt{(1+q'q')}&=a'\end{aligned}\right\}\ldots\ldots (c').$$

Что принадлежитъ до постоянной величины a', то, поелику при вершинѣ $gp'p'=a$ и $q=0$, будетъ $a'=a$; и какъ здѣсь $gp'p'=\frac{dq'}{2dx'}=\frac{q'dq'}{2dy'}$, то по назначеніи k чрезъ μa будетъ здѣсь

$$x'+C''=\frac{1}{2a}\int\frac{dq'}{1+\mu\int dq'\sqrt{(1+q'q')}} \;\ldots\ldots\; (d'),$$

$$y'+C'''=\frac{1}{2a}\int\frac{q'dq'}{1+\mu\int dq'\sqrt{(1+q'q')}} \;\ldots\ldots\; (e').$$

10. Естьли назначится $y'=h-y$, то тангенсы q и q' принадлежать будутъ къ одной

и той же горизонтальной ординатѣ кривой линѣи, то есть къ угламъ составляемымъ кривою линѣею съ одною и тоюже горизонтальною ординатою по ту и по сю сторону вертикальной оси координатъ y.

Въ семъ случаѣ будетъ

$$\frac{q'dq'}{1+\mu\int dq'\sqrt{(1+q'q')}}=\frac{qdq}{1-\mu\int dq\sqrt{(1+qq)}}$$

или

$$q'dq'-qdq=\mu\left\{qdq\int dq'\sqrt{(1+q'q')}+q'dq'\int dq\sqrt{(1+qq)}\right\}.$$

По сему будетъ $q'>q$; то есть во второй половинѣ кривая линѣя будетъ сильнѣе нагибаться къ вертикальной оси, нежели въ первой ея половинѣ.

Назначимъ $q'=\frac{q}{1-\mu u}$, то оное уравненіе обратится въ

$$dq\left\{2u-3\mu u^2+\mu\mu u^3\right\}+qdu=$$

$$qdq\left\{(1-\mu u)^2+\frac{1}{2.3}q^2-\frac{1}{2^3.5}q^4(1-\mu u)^{-2}+\frac{1}{2^4.7}q^6(1-\mu u)^{-4}\ldots\right\}$$

$$+\left\{qdq(1-\mu u)+\mu qqdu\right\}\left\{1+\frac{1}{2.3}q^2-\frac{1}{2^3.5}q^4+\frac{1}{2^4.7}q^6-\ldots\right\};$$

ибо $\int dq\sqrt{(1+qq)}=q+\frac{1}{2.3}q^3-\frac{1}{2^3.5}q^5+\frac{1}{2^4.7}q^7-\ldots\ldots;$

Положимъ потомъ $u=\alpha q+\beta q^2+\gamma q^3+\delta q^4+q^5+\zeta q^6+\ldots$. то оное уравненіе обратится въ
$3\alpha+(4\beta-3\mu\alpha^2)q+(5\gamma-6\mu\alpha\beta+\mu\mu\alpha^3)q^2+[6\delta-3\mu(2\alpha\gamma+\beta\beta)+3\mu^2\alpha^2\beta]q^3+[7\varepsilon-6\mu(\alpha\delta+\beta\gamma)+3\mu^2\alpha(\alpha\gamma+\beta\beta)]q^4+[8\zeta-3\mu(2\alpha\varepsilon+2\beta\delta+\gamma^2]+\mu^2(3\alpha^2\delta+6\alpha\beta\gamma+\beta^3)q^5+\ldots\ldots$

$$=2-2\mu\alpha q+\left(\mu^2\alpha^2-\mu\beta+\tfrac{1}{3}\right)q^2+2\mu^2\alpha\beta q^3+\Big[\mu\delta+\mu\mu(2\alpha\gamma+\beta\beta)$$

$$+\frac{1}{2.3}\mu\beta-\frac{1}{2^2.5}\Big]q^4+\Big[2\mu\varepsilon+2\mu^2(\alpha\delta+\beta\gamma)-\frac{1}{2^2.5}\mu\alpha+\tfrac{1}{3}\mu\gamma\Big)q^5$$

$$+\ldots\ldots;$$

Откуда найдется

$$\alpha=\tfrac{2}{3},$$

$$\beta=0,$$

$$\gamma=\frac{1}{3.5}+\frac{4}{3^3.5}\mu^2,$$

$$\delta=\frac{2}{3^2.5}\mu+\frac{8}{3^4.5}\mu^3,$$

$$\varepsilon=-\frac{1}{2^2.5.7}+\frac{2}{3^2.7}\mu^2+\frac{8}{3^4.7}\mu^4,$$

$$\zeta=-\frac{83}{2.3^2.5^2.7}\mu+\frac{2108}{3^4.5^2.7}\mu^3+\frac{314}{3^5.5^2.7}\mu^5,$$

и такъ далѣе.

Такимъ образомъ для каждаго тангенса q найдется соотвѣтственный тангенсъ q' по другую сторону вершины.

Естьли положится $q=tang.\ \zeta$, то будетъ q' тангенсъ того угла, подъ которымъ тѣло упадетъ опять на горизонтъ; и когда сей тангенъ q' подставится въ выраженіи величины x', то, буде получится $x'=f'$, тогда вся горизонтальная широта кривой линѣи будетъ $=f+f$.

11. По представленіи теперь формулъ для вычисленія какъ величинъ x и y, такъ и величинъ x' и y', остается показать способъ интегрованія функцій входящихъ въ ихъ выраженія, дабы сіи величины изображались въ строкахъ столь сильно сходящихся, чтобъ

выкладку удобно совершать было можно. На сей конецъ мы разберемъ особенно два случая: вопервыхъ, когда уголъ метанія ζ очень малъ, каковъ бываетъ при пушечныхъ выстрѣлахъ; во вторыхъ, когда уголъ метанія ζ великъ, каковъ бываетъ при метаніи бомбъ.

12. Положимъ для малаго угла ζ

$$\frac{1}{1-\mu\int dq\sqrt{(1+qq)}}=\frac{1}{1-\mu q}+\frac{\alpha q^3}{(1-\mu q)^2}+\beta q^5+\gamma q^6$$
$$+\delta q^7+\ldots\ldots$$
$$=1+\mu q+\mu\mu qq+(\mu^3+\alpha)q^3+(\mu^4+2\alpha\mu)q^4+(\mu^5+3\alpha\mu^2$$
$$+\beta)q^5+(\mu^6+4\alpha\mu^3+\gamma)q^6+\ldots\ldots$$

то, поелику $1-\mu\int dq\sqrt{(1+qq)}=$

$$1-\mu\left(q+\frac{1}{2.3}q^3-\frac{1}{2^3.5}q^5+\frac{1}{2^4.7}q^7-\ldots\ldots\right),$$

найдется

$$\alpha=\frac{1}{2.3}\mu,$$

$$\beta=-\frac{1}{2^3.5}\mu,$$

$$\gamma=\frac{1}{2^2.3^2}.\mu^2,$$

$$\delta=\frac{7}{2^3.3.5}\mu^3+\frac{1}{2^4.7}\mu,$$

и такъ далѣе.

Такимъ образомъ, поелику $\frac{1}{1-\mu q}+\frac{\alpha q^3}{(1-\mu q)^2}=$

$$\left(1-\frac{1}{2\mu^2}\right).\frac{1}{(1-\mu q)}+\frac{1}{6\mu^2}.\frac{1}{(1-\mu q)^2}+\frac{1}{3\mu^2}+\frac{1}{6\mu}.q,$$

будетъ

$$x = C - \frac{1}{2a}\Big\{\Big(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\Big)\log.\ \frac{1}{1-\mu q} + \frac{1}{6\mu^3(1-\mu q)}$$

$$+ \frac{1}{3\mu^2}.\ q + \frac{1}{12\mu}\ q^2 + \tfrac{1}{6}\beta q^6 + \tfrac{1}{7}\gamma q^7 + \tfrac{1}{8}\delta q^8 + \ldots\ldots\Big\}$$

Поелику же $\frac{q}{1-\mu q} + \frac{\alpha q^4}{(1-\mu q)^2} = \Big(\frac{1}{\mu} - \frac{2}{3\mu^3}\Big).\ \frac{1}{1-\mu q}$ $+ \frac{1}{6\mu^3}.\ \frac{1}{(1-\mu q)^2} - \Big(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\Big) + \frac{1}{3\mu^2}\ q + \frac{1}{6\mu}\ q^2$, будетъ

$$y = C' - \frac{1}{2a}\Big\{\Big(\frac{1}{\mu^2} - \frac{2}{3\mu^4}\Big)\log.\ \frac{1}{1-\mu q} + \frac{1}{6\mu^4(1-\mu q)}$$

$$-\Big(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\Big) q + \frac{1}{6\mu^2}\ q^2 + \frac{1}{18\mu}\ q^3 + \tfrac{1}{7}\beta q^7 + \tfrac{1}{8}\gamma q^8$$

$$+ \tfrac{1}{9}\delta q^9 + \ldots\ldots\Big\}$$

На основаніи же уравненій (d') и (e'), чрезъ измѣненіе въ предъидущихъ формулахъ μ въ $-\mu$ и q въ q', получимъ

$$x' + C'' = \frac{1}{2a}\Big\{\Big(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\Big) log.\ (1 + \mu q') - \frac{1}{6\mu^3(1+\mu q')}$$

$$+ \frac{1}{3\mu^2}.\ q' - \frac{1}{12\mu}.\ q'^2 - \tfrac{1}{6}\beta q'^6 + \tfrac{1}{7}\gamma q'^7 - \tfrac{1}{8}\delta q'^8 + \ldots\ldots\Big\}$$

$$y' + C''' = \frac{1}{2a}\Big\{\Big(\frac{1}{\mu^2} - \frac{2}{3\mu^4}\Big)\log.\ \frac{1}{1+\mu q'} + \frac{1}{6\mu^4(1+\mu q')}$$

$$+\Big(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\Big) q' + \frac{1}{6\mu^2}\ q'^2 - \frac{1}{18\mu}\ q'^3 - \tfrac{1}{7}\beta q'^7 + \tfrac{1}{8}\gamma q'^8$$

$$- \tfrac{1}{9}\delta q'^9 + \ldots\ldots\Big\}.$$

Какъ при $x = 0$ и $y = 0$ величина $q = tang.\ \zeta$, то по назначеніи для краткости $tang.\ \zeta$ чрезъ b получимъ

$$C = \frac{1}{2a}\left\{\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\right) \log. \frac{1}{1-\mu b} + \frac{1}{6\mu^3(1-\mu b)} + \frac{1}{3\mu^2}. b\right.$$

$$\left. + \frac{1}{12\mu} b^2 + \tfrac{1}{6}\beta b^6 + \tfrac{1}{7}\gamma b^7 + \tfrac{1}{8}\delta b^8 + \ldots\right\}.$$

$$C' = \frac{1}{2a}\left\{\left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{2}{3\mu^4}\right) \log. \frac{1}{1-\mu b} + \frac{1}{12\mu^4(1-\mu b)}\right.$$

$$- \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\right) b + \frac{1}{6\mu^2} b^2 + \frac{1}{18\mu} b^3 + \tfrac{1}{7}\beta b^7 + \tfrac{1}{8}\gamma b^8$$

$$\left. + \tfrac{1}{9}\delta b^9 + \ldots\right\}.$$

Поелику же при $x' = o$ и $y' = o$ величина $q' = o$, будетъ $C'' = -\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{6\mu^3}$, $C''' = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{6\mu^4}$.

По сему будетъ

$$f = \frac{1}{2a}\left\{\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\right) \log. \frac{1}{1-\mu b} + \frac{b}{6\mu^2(1-\mu b)} + \frac{1}{3\mu^2} b\right.$$

$$\left. + \frac{1}{12\mu} bb + \tfrac{1}{6}\beta b^6 + \tfrac{1}{7}\gamma b^7 + \tfrac{1}{8}\delta b^8 + \ldots\right\}$$

$$h = \frac{1}{2a}\left\{\left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{2}{3\mu^4}\right) \log. \frac{1}{1-\mu b} + \frac{b}{6\mu^3(1-\mu b)}\right.$$

$$- \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\right) b + \frac{1}{6\mu^2} bb + \frac{1}{18\mu} b^3 + \tfrac{1}{7}\beta b^7 + \tfrac{1}{8}\gamma b^8$$

$$\left. + \tfrac{1}{9}\delta b^9 + \ldots\right\}$$

$$f' = \frac{1}{2a}\left\{\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\right) \log. (1+\mu b') + \frac{b'}{6\mu^2(1+\mu b')}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3\mu^2} b' - \frac{1}{12\mu} b'^2 - \tfrac{1}{6}\beta b'^6 + \tfrac{1}{7}\gamma b'^7 - \tfrac{1}{8}\delta b'^8\right\}$$

$$f + f' = \frac{1}{2a}\left\{\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\right) \log. \frac{1+\mu b'}{1-\mu b} + \frac{1}{6\mu^2} \times\right.$$

$$\frac{b+b'}{(1-\mu b)(1+\mu b')}+\frac{1}{3\mu^2}(b+b')-\frac{1}{12\mu}(b'^2-b^2)$$

$$\left.-\tfrac{1}{6}\beta(b'^6-b^6)+\tfrac{1}{7}\gamma(b'^7+b^7)-\ldots\right\}$$

13. Когда уголъ ζ великъ, тогда назначимъ сперва, по § 5, $q=\frac{1-uu}{2u}$; то будетъ $dq=-\left\{\frac{1+uu}{2uu}\right\}du$ и $\int dq\surd(1+qq)=\frac{1-u^4}{8uu}+\frac{1}{2}\log.\frac{1}{u}$. Положимъ потомъ $u=1-s$, то будетъ $q=\frac{s(1-\frac{1}{2}s)}{1-s}$, $dq=\frac{(1-s+\frac{1}{2}ss)ds}{(1-s)^2}$ и $\int dq\surd(1+qq)=\frac{\frac{1}{2}s-\frac{3}{4}s^2+\frac{1}{2}s^3-\frac{1}{8}s^4}{(1-s)^2}-\frac{1}{2}\log(1-s)$, а по сему

$$x=C-\frac{1}{2a}\int\frac{dq}{1-\mu\int dq\surd(1+qq)}=$$

$$C-\frac{1}{2a}\int\frac{(1-s+\frac{1}{2}ss)ds}{1-(2+\mu)s+(1+\frac{3}{2}\mu)s^2-\frac{2}{3}\mu s^3+\frac{1}{12}\mu s^4-\frac{1}{65}\mu s^5-\ldots}$$

Назначимъ теперь

$$\frac{1-s+\frac{1}{2}ss}{1-(2+\mu)s+(1+\frac{3}{2}\mu)s^2-\frac{2}{3}\mu s^3+\ldots}=\frac{1}{1-\lambda s-\nu ss}+\alpha s^2+\beta s^3$$
$$+\gamma s^4+\ldots\ldots=1+\lambda s+(\lambda\lambda+\nu+\alpha)s^2+(\lambda^3+2\lambda\nu+\beta)s^3+(\lambda^4$$
$$+3\lambda^2\nu+\nu\nu+\gamma)s^4+(\lambda^5+4\lambda^3\nu+3\lambda\nu^2+\delta)s^5+\ldots\ldots$$

то найдется

$\lambda=1+\mu$;
$\nu+\alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu$;
$2\lambda\nu+\beta=1-\frac{1}{3}\mu-\mu^2$
$3\lambda^2\nu+\nu\nu+\gamma=\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\mu-\frac{23}{12}\mu^2-\frac{3}{2}\mu^3$
$4\lambda^3\nu+3\lambda\nu^2+\delta=2+\frac{11}{10}\mu-2\frac{3}{4}\mu^2-4\frac{1}{4}\mu^3-2\mu^4$

и такъ далѣе;

гдѣ должно назначить ν по состоянію величины μ, дабы величины $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, и пр. оставаясь въ положительномъ состояніи выходили отчасу меньшія дроби. Послѣ чего найдется

$$x = C - \frac{1}{2a}\left\{ \int \frac{ds}{1-\lambda s-\nu ss} + \tfrac{1}{3}\alpha s^3 + \tfrac{1}{4}\beta s^4 + \tfrac{1}{5}\gamma s^5 + \tfrac{1}{6}\delta s^6 + \ldots \right\} (d)$$

Естьли на пр. назначится $\nu = \frac{3}{4}(1-2\mu)$, то будетъ

$$\alpha = \mu - \tfrac{1}{4}$$
$$\beta = 2\mu^2 + \tfrac{7}{6}\mu - \tfrac{1}{2}$$
$$\gamma = 3\mu^3 + 2\tfrac{7}{12}\mu^2 + 2\tfrac{5}{12}\mu - \tfrac{21}{16}$$
$$\delta = 4\mu^4 + 4\mu^3 + 6\tfrac{1}{4}\mu^2 + 3\tfrac{13}{80}\mu - 2\tfrac{11}{16}$$

и такъ далѣе.

Поелику же при семъ будетъ $1-\lambda s-\nu ss = (1-\frac{3}{2}s)\,[1+\frac{1}{2}(1-2\mu)s]$, а по сему $\frac{1}{1-\lambda s-\nu ss} = \frac{3}{4-2\mu}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{2}s} + \frac{1-2\mu}{4-2\mu}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}(1-2\mu)s}$, то будетъ

$$x = C - \frac{1}{2a}\left\{ \frac{1}{2-\mu}\log.\frac{1+\frac{1}{2}(1-2\mu)s}{1-\frac{3}{2}s} + \tfrac{1}{3}\alpha s^3 + \tfrac{1}{4}\beta s^4 + \tfrac{1}{5}\gamma s^5 + \tfrac{1}{6}\delta s^6 + \ldots\ldots \right\};$$

и какъ при $x=0$ величина $q = tang.\ \zeta$, величина же $s = 1+q-\sqrt{(1+qq)}$, то по назначеніи при $q = tang.\ \zeta$ величины s чрезъ b получимъ

$$C = \frac{1}{2a}\left\{ \frac{1}{2-\mu}\log.\frac{1+\frac{1}{2}(1-2\mu)b}{1-\frac{3}{2}b} + \tfrac{1}{3}\alpha b^3 + \tfrac{1}{4}\beta b^4 + \tfrac{1}{5}\gamma b^5 + \tfrac{1}{6}\delta b^6 + \ldots \right\};$$

и какъ при верьху кривой линѣи $q=0$ и $s=0$, то будетъ

$$f=C.$$

Какъ $dy=qdx=\frac{s(1-\frac{1}{2}s)}{1-s}dx$, то естьли назначится

$$\frac{1-\frac{3}{2}s+ss-\frac{1}{4}s^3}{1-(3+\mu)s+(3+\frac{5}{2}\mu)s^2-(1+\frac{13}{6}\mu)s^3+\frac{3}{4}\mu s^4-\frac{1}{10}\mu s^5+\frac{1}{120}\mu s^6-\ldots}$$

чрезъ $\frac{1}{1-\alpha's}+\frac{\beta's}{(1-\alpha's)^2}+\frac{\gamma's^2}{(1-\alpha's)^3}+\delta's^3+\varepsilon's^4+\zeta's^5+\ldots\ldots$

$$=1+(\alpha'+\beta')s+(\alpha'\alpha'+2\alpha'\beta'+\gamma')s^2+(\alpha'^3+3\alpha'^2\beta'+3\alpha'\gamma'+\delta')s^3$$
$$+(\alpha'^4+4\alpha'^3\beta'+6\alpha'^2\gamma'+\varepsilon')s^4+(\alpha'^5+5\alpha'^4\beta'+10\alpha'^3\gamma'+\zeta')s^5$$
$$+\ldots\ldots$$

то найдется

$$\alpha'+\beta'=\tfrac{3}{2}+\mu$$
$$\alpha'^2+2\alpha'\beta'+\gamma'=\tfrac{5}{2}+2\mu+\mu^2$$
$$\alpha'^3+3\alpha'^2\beta'+3\alpha'\gamma'+\delta'=\tfrac{15}{4}+\tfrac{47}{12}\mu+\tfrac{5}{2}\mu^2+\mu^3$$
$$\alpha'^4+4\alpha'^3\beta'+6\alpha'^2\gamma'+\varepsilon'=\tfrac{21}{4}+\tfrac{27}{4}\mu+\tfrac{67}{12}\mu^2+3\mu^3+\mu^4$$
$$\alpha'^5+5\alpha'^4\beta'+10\alpha'^3\gamma'+\zeta'=7+10\tfrac{13}{30}\mu+10\tfrac{19}{24}\mu^2+8\tfrac{1}{2}\mu^3+3\tfrac{1}{2}\mu^4$$
$$+\mu^5$$

и такъ далѣе;

для коего выраженія величину α' должно назначить такъ, чтобъ при наибольшей въ выкладкѣ величинѣ s было количество $\alpha's<1$, и чтобъ при томъ прочія величины β, γ, δ, и пр. выходили дроби меньшія единицы. Естьли назначимъ на пр. $\alpha'=1+\frac{1}{3}\mu$, то будетъ

$$\beta'=\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}\mu;$$
$$\gamma'=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\mu+\tfrac{4}{9}\mu^2$$
$$\delta'=-\tfrac{1}{4}+\tfrac{5}{12}\mu-\tfrac{1}{3}\mu^2+\tfrac{8}{27}\mu^3$$
$$\varepsilon'=-\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}\mu-\tfrac{1}{12}\mu^2+\tfrac{1}{3}\mu^3+\tfrac{16}{27}\mu^4$$
$$\zeta'=-\tfrac{3}{2}+\tfrac{13}{30}\mu+\tfrac{19}{24}\mu^2+\tfrac{55}{54}\mu^3+\tfrac{14}{9}\mu^4+\tfrac{192}{243}\mu^5$$

и такъ далѣе.

По приведеніи теперь членовъ $\frac{s}{1-\alpha' s}+\frac{\beta' s^2}{(1-\alpha' s)^2}$

$+\frac{\gamma' s^3}{(1-\alpha' s)^3}$ въ видъ $A+\frac{B}{1-\alpha' s}+\frac{C}{(1-\alpha' s)^2}+\frac{D}{(1-\alpha' s)^3}$

при чемъ будетъ,

$$A=-\frac{1}{\alpha'^3}(\gamma'-\alpha'\beta'+\alpha'\alpha')$$

$$B=\frac{1}{\alpha'^3}(3\gamma'-2\alpha'\beta'+\alpha'\alpha')$$

$$D=-\frac{1}{\alpha'^3}(3\gamma'-\alpha'\beta')$$

$$E=\frac{\gamma'}{\alpha'^3}$$

получимъ

$$y=C'-\frac{1}{2a}\left\{As+\frac{1}{\alpha'}B\log.\frac{1}{1-\alpha s}+\frac{D}{\alpha'}\cdot\frac{1}{1-\alpha' s}\right.$$
$$\left.+\frac{E}{2\alpha'}\cdot\frac{1}{(1-\alpha' s)^2}+\tfrac{1}{5}\delta' s^5+\tfrac{1}{6}\varepsilon' s^6+\tfrac{1}{7}\zeta' s^7+\ldots\right\}$$

гдѣ будетъ

$$C'=\frac{1}{2a}\left\{Ab+\frac{1}{\alpha'}B\log.\frac{1}{1-\alpha' b}+\frac{D}{\alpha'}\cdot\frac{1}{1-\alpha' b}+\frac{E}{2\alpha'}\times\right.$$
$$\left.\frac{1}{(1-\alpha' b)^2}+\tfrac{1}{5}\delta' b^5+\tfrac{1}{6}\varepsilon' b^6+\tfrac{1}{7}\zeta' b^7+\ldots\right\}$$

и какъ при вершинѣ $s=0$, то будетъ

$$h=\frac{1}{2a}\left\{Ab+\frac{1}{\alpha'}B\log.\frac{1}{1-\alpha' b}+\frac{Db}{1-\alpha' b}+\frac{Eb(2-\alpha' b}{2(1-\alpha' b)^2}\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{5}\delta' b^5+\tfrac{1}{6}\varepsilon' b^6+\tfrac{1}{7}\zeta' b^7+\ldots\right\}.$$

Поелику $x'+C''=\frac{1}{2a}\int\frac{dq'}{1+\mu\int dq'\sqrt{(1+q'q')}}=$

$$\frac{1}{2a}\int\frac{(1-s'+\frac{1}{2}s's')ds'}{1-(2-\mu)s'+(1-\frac{3}{2}\mu)s'^2+\frac{2}{3}\mu s'^3-\frac{1}{12}\mu s'^4+\frac{1}{60}\mu s'^5+\ldots}$$

то положивъ

$$\frac{1-s'+\frac{1}{2}s's'}{1-(2-\mu)s'+(1-\frac{3}{2}\mu)s'^2+\frac{2}{3}\mu s'^3-\frac{1}{12}\mu s'^4+\frac{1}{60}\mu s'^5+\frac{1}{120}\mu s'^6+\ldots}$$

$$=\frac{1}{1-\lambda's'-\nu's's'}+\alpha''s'^2+\beta''s'^3+\gamma''s'^4+\delta''s'^5+\ldots\ldots$$

$$=1+\lambda's'+(\lambda'\lambda'+\nu'+\alpha'')s'^2+(\lambda'^3+2\lambda'\nu'+\beta'')s'^3+(\lambda'^4+3\lambda'^2\nu'$$
$$+\nu'^2+\gamma'')s'^4+(\lambda'^5+4\lambda'^3\nu'+3\lambda'\nu'^2+\delta'')s'^5+\ldots\ldots$$

Получимъ

$\lambda'=1-\mu$
$\nu'+\alpha''=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu$
$2\lambda'\nu'+\beta''=1+\frac{1}{3}\mu-\mu^2$
$3\lambda'^2\nu'+\nu'^2+\gamma''=\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\mu-\frac{23}{12}\mu^2+\frac{3}{2}\mu^3$
$4\lambda'^3\nu'+3\lambda'\nu'^2+\delta''=2-\frac{11}{10}\mu-2\frac{3}{4}\mu^2+4\frac{1}{4}\mu^3-2\mu^4$

и такъ далѣе;

гдѣ должно назначить ν' по состоянію величины μ, чтобъ величины α'', β'', γ'', δ'', и проч. выходили отчасу меньшія дроби. Послѣ чего найдется $x'+C''=\frac{1}{2a}\Big\{\int\frac{ds'}{1-\lambda's'-\nu'ss}+\frac{1}{3}\alpha''s'^3+\frac{1}{4}\beta''s^4$

$$+\frac{1}{5}\gamma''s'^5+\frac{1}{6}\delta''s'^6+\ldots\Big\}\ldots\quad(k')$$

Естьли на пр. назначимъ $\nu'=\mu$, то будетъ

$\alpha''=\frac{1}{2}(1-\mu)$
$\beta''=1-\frac{5}{3}\mu+\mu^2$
$\gamma''=\frac{3}{2}-\frac{19}{6}\mu+\frac{37}{12}\mu^2-\frac{3}{2}\mu^3$
$\delta''=2-\frac{51}{10}\mu+\frac{25}{4}\mu^2-\frac{15}{4}\mu^3+2\mu^4$

и такъ далѣе.

Поелику же будетъ

$\frac{1}{1-\lambda s'-\nu s's'}=\frac{1}{1+\mu}\Big\{\frac{1}{1-s'}+\frac{\mu}{1+\mu s'}\Big\}$, то получится

$$s' + C'' = \frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{1+\mu}\ log.\ \frac{1+\mu s'}{1-s'} + \frac{1}{3}\alpha'' s'^3 + \frac{1}{4}\beta'' s'^4 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5}\gamma'' s'^5 + \frac{1}{6}\delta'' s'^6 + \ldots\right\}$$

гдѣ будетъ

$$C'' = \frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{1+\mu}\ log.\ \frac{1+\mu b'}{1-b'} + \frac{1}{3}\alpha'' b'^3 + \frac{1}{4}\beta'' b'^4 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5}\gamma'' b'^5 + \frac{1}{6}\delta'' b'^6 + \ldots\right\}$$

и $f' = C''$.

14. Изъ снесенія уравненія (b) съ уравненіемъ (c) получимъ

$$ddq - 2\,kdxdq\,\sqrt{(1+qq)} = 0. \ldots\ldots \qquad (g).$$

Пусть будетъ $q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \ldots$, то по назначеніи $1+\alpha\alpha$ чрезъ ee будетъ

$$\sqrt{(1+qq)} = e + \frac{\alpha\beta}{e}x + \left(\frac{\alpha\gamma}{e} + \frac{\beta\beta}{2e^3}\right)x^2 + \left(\frac{\alpha\delta}{e} + \frac{\beta\gamma}{e^3} - \frac{\alpha\beta^3}{2e^5}\right)x^3$$

$$+ \left(\frac{\alpha\varepsilon}{e} + \frac{2\beta\delta+\gamma\gamma}{2e^3} - \frac{\beta\beta(3\alpha\gamma-\beta\beta)}{2e^5} - \frac{5\beta^4}{8e^7}\right)x^4 + \ldots,$$

чрезъ что оное уравненіе (g) обратится въ

$$\gamma + 3\delta x + 6\varepsilon x^2 + \ldots =$$

$$k\left\{\beta + 2\gamma x + 3\delta x^4 + 4\varepsilon x^3 + \ldots\right\}\left\{e + \frac{\alpha\beta}{e}x + \left(\frac{\alpha\gamma}{e} + \frac{\beta^2}{2e^3}\right)x^2\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\alpha\delta}{e} + \frac{\beta\gamma}{e^3} - \frac{\alpha\beta^3}{2e^5}\right)x^3 + \ldots\right\};$$

откуда найдется

$$\gamma = k\beta e$$

$$\delta = \tfrac{1}{3}k\left(\frac{\alpha\beta\beta}{e} + 2\gamma e\right)$$

$$\varepsilon = \tfrac{1}{6}k\left(\frac{3\alpha\beta\gamma}{e} + \frac{\beta^3}{2e^3} + 3\delta e\right)$$

$$\zeta = \tfrac{1}{10}\,k\left(\frac{2\alpha(2\beta\delta+\gamma\gamma)}{e}+\frac{2\beta\beta\gamma}{e^3}-\frac{\alpha\beta^4}{2e^5}+4\varepsilon e\right)$$

и такъ далѣе.

Такимъ образомъ величины γ, δ, ε и проч. опредѣлятся чрезъ α и β. Чтожъ принадлежитъ до опредѣленія сихъ двухъ величинъ, то поелику при $x=o$ должно быть $q=tang.\,\zeta$, будетъ $\alpha=tang.\,\zeta$; потомъ поелику $\frac{dq}{dx}=\beta+2\gamma x+3\delta x^2+\ldots\ldots$ $=-2gpp$, и при $x=o$ величина $p=\frac{1}{c.\,cos\,\zeta}$, будетъ $\beta=-\frac{2g}{cc.\,cos\,\zeta^2}$.

Наконецъ изъ уравненія $q=\frac{dy}{dx}=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3$ $+\varepsilon x^4+\zeta x^5+\ldots\ldots$ найдется

$$y=\alpha x+\tfrac{1}{2}\beta x^2+\tfrac{1}{3}\gamma x^3+\tfrac{1}{4}\delta x^4+\tfrac{1}{5}\varepsilon x^5+\tfrac{1}{6}\zeta x^6+\ldots\ldots$$

15. Естьли бы положить, что сопротивленіе причиняемое воздухомъ равно нулю, а по сему $k=o$, то, поелику при семъ величины γ, δ, ε и проч. обратились бы въ нуль, уравненіе для кривой линѣи было бы

$$y=\alpha x+\tfrac{1}{2}\beta x^2$$

или $y=x\,tang\,\zeta-\frac{gxx}{cc.\,Cos\,\zeta^2}$;

которое принадлежитъ къ Параболѣ. По сему естьли бы около нашей земли не было воздуха, то бы всѣ тѣла бросаемыя подъ косымъ угломъ къ горизонту описывали обыкновенную Параболу.

16. Естьли въ уравненіи (a) подставимъ вмѣсто $dx\sqrt{(1+qq)}$ количество ds, то полу-

чимъ $dp - kpds = o$, а по сему будетъ $\frac{dp}{p} = kds$ и $Ap = e^{ks}$; для коего уравненія постоянная величина A найдется по разсужденію, что при $s = o$ должно быть $p = \frac{1}{c. Cos \zeta}$. Слѣдовательно будетъ вообще $p. c. Cos \zeta = e^{ks}$; такъ что естьли горизонтальная скорость тѣла вообще назначится чрезъ v, то будетъ

$$v. e^{ks} = c. Cos \zeta.$$

17. Естьли величину дуги кривой линѣи тѣломъ описываемой взятую отъ начала до ея вершины, назначимъ чрезъ σ, и скорость при вершинѣ, какъ и въ § 8, назначимъ чрезъ v, то будетъ $v. e^{k\sigma} = c. Cos \zeta$; и какъ $v = \sqrt{\frac{g}{a}}$, то будетъ $e^{2k\sigma} = \frac{a. cc. Cos \zeta^2}{g}$; откуда найдется

$$\sigma = \frac{1}{2k} \log. \frac{acc. Cos \zeta^2}{g}.$$

18. Изъ уравненія $p = \frac{e^{ks}}{c. Cos \zeta}$ получится $pp = \frac{e^{2ks}}{cc. Cos \zeta^2}$, и $pdp = \frac{kds}{cc. Cos \zeta^2}. e^{2ks}$; которая величина когда подставится въ уравненіи (c), то будетъ

$$2 g. e^{2ks} ds + cc. Cos \zeta^2. dq. \sqrt{(1 + qq)} = o.$$

Назначимъ въ семъ уравненіи $k = o$, то оно, какъ мы выше видѣли, принадлежать будетъ къ параболѣ. Пусть дуга сея послѣдней линѣи, отъ того же начала взятая, назначится чрезъ s', то при такомъ же въ ней тангенсѣ q будетъ $2gds' + cc. Cos \zeta^2 . dq \surd (1+qq) = o$; а по сему при одинакомъ тангенсѣ q какъ въ той такъ и въ другой кривой линѣи будетъ e^{2ks} $ds = ds'$, коего уравненія интегралъ будетъ $e^{2ks} = C + 2ks'$. И какъ величины s и s' начинаются въ одной точкѣ, то будетъ $C = 1$; а посему

$$e^{2ks} = 1 + 2ks'$$

или $s = \frac{1}{2k} \log (1 + 2ks')$.

19. Что принадлежитъ до коеффиціента сопротивленія k, то теорія, прилагая къ движенію тѣлъ въ жидкостяхъ законы сраженія тѣлъ опредѣленной массы, для шарообразнаго тѣла радіуса r и плотности δ, движущагося въ жидкости, коея плотность D, доставляетъ при упругой жидкости $k = \frac{D}{\delta r}$, при неупругой же $k = \frac{D}{2\delta r}$. Но какъ сіе приложеніе по неопредѣленности жидкости, въ коей тѣло движется, мѣста имѣть не можетъ, то сіи выраженія величины k много удаляются отъ истинны; опытъ же показываетъ, что для воздуха близко къ истиннѣ $k = \frac{2}{9} . \frac{D}{\delta r}$.

Возьмемъ для метаній въ воздухѣ $k = \frac{2}{9} . \frac{D}{\delta r}$, и приложимъ его къ примѣрамъ.

1. Свинцовая пуля радіуса 0,0265 Французскаго фута выстрѣлена изъ ружья со скоростію 1625 Французскихъ футовъ подъ угломъ къ горизонту $7^\circ\, 15'$. Спрашивается, въ какомъ разстояніи она опять упадетъ на горизонтъ?

Плотность свинца 11,35, средняя же плотность воздуха по Лавоазіеру $\frac{1}{812}$ въ сравненіи съ плотностію воды; по сему $log.\ k = 6{,}9498898$, $log.\ hyp.\ tang.\ (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\zeta) = log.\ hyp.\ tang.\ 48^\circ\, 37\frac{1}{2}' = 0{,}126869$; $\frac{\sin \zeta}{\cos \zeta^2} = 0{,}128241$, $a = 0{,}00011946$, $log.\ a = 6{,}0772225$; $log.\ \mu = 0{,}8726673$, $log.\ b = 9{,}1045420$, $log.\ b' = 9{,}6404998$; откуда найдется $f + f' = 2498$ футовъ. При опытахъ же дѣланныхъ въ Туринѣ сіе пространство на самомъ дѣлѣ было 2655 футовъ; а по сему сопротивленіе предположенное нами еще болѣе должнаго, что можетъ произойти отъ несоотвѣтственнаго предположенія плотности пули и воздуха.

2. Бомба имѣющая въ радіусѣ половину Французскаго фута, коея относительная тяжесть 5, брошена подъ угломъ 45° къ горизонту со скоростію 350 футовъ въ секунду. Спр. широта кривой линѣи, которую она опишетъ

При предположеніи средней плотности воздуха въ $\frac{1}{812}$ противъ воды найдется

$$k = \frac{4}{9.812.5} = \frac{1}{9.203.5} = 0{,}00010942; \; a = 0{,}00037211,$$

$log.\ \mu = 9{,}4686201$; $b = 0{,}5868$; $b' = 0{,}6560$; положивъ же $\nu = \frac{1}{2}(1 - 2\mu)$ и $\nu' = \frac{3}{2}\mu$, по формуламъ (h) и (h') получимъ

$$= \frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{\sqrt{(3-2\mu+\mu\mu)}}\ \textit{log. hyp.}\ \frac{1+\frac{1}{2}b[\sqrt{(3-2\mu+\mu\mu)}-(1+\mu)]}{1-\frac{1}{2}b[\sqrt{(3-2\mu+\mu\mu)}+1+\mu]}\right.$$
$$+\tfrac{1}{6}\mu b^3+(\tfrac{1}{3}\mu+\tfrac{1}{4}\mu^2)b^4+\tfrac{1}{5}(\tfrac{3}{2}\mu^3+\tfrac{19}{12}\mu^2+\tfrac{7}{6}\mu-\tfrac{1}{4})b^5$$
$$\left.+\tfrac{1}{6}(2\mu^4+2\tfrac{3}{4}\mu^3+3\tfrac{1}{4}\mu^2+\tfrac{21}{10}\mu-\tfrac{3}{4})b^6+\ldots..\right\}$$

$$f' = \frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{\sqrt{(1+\mu+\mu^2)}}\ \textit{log. hyp.}\ \frac{1+\frac{1}{2}b'[\sqrt{(1+\mu+\mu\mu)}-(1-\mu)]}{1-\frac{1}{2}b'[\sqrt{(1+\mu+\mu\mu)}+1-\mu)}\right.$$
$$+(\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{3}\mu)b'^3+\tfrac{1}{4}(1-\tfrac{8}{3}\mu+2\mu^2)b'^4+\tfrac{1}{5}(\tfrac{3}{2}-\tfrac{14}{3}\mu+\tfrac{29}{6}\mu^2-3\mu^3)b'^5$$
$$\left.+\tfrac{1}{6}(2-\tfrac{71}{10}\mu+8\tfrac{1}{2}\mu^2-7\mu^3+4\mu^4)b'^6+\ldots..\right\}$$

По сему $f=1675$ фут. $f'=1340$ футовъ, и вся горизонтальная широта 3015 футовъ.

20. Въ разсужденіи употребленія выведенныхъ нами предъ симъ формулъ вообще замѣтить должно, что по измѣняющейся плотности воздуха δ величина k выражающаяся чрезъ $\frac{\lambda D}{\delta r}$ въ разныя времена бываетъ разная, такъ что когда при измѣненіи плотности воздуха δ въ δ' величина k измѣнится въ k', то будетъ $k'=\frac{\delta'}{\delta}k$; причемъ, буде плотность δ соотвѣтствовала высотѣ барометра h и теплотѣ $t°$ Реом., плотность же δ' соотвѣтствуетъ высотѣ барометра h' и теплотѣ $t'°$ Реом., будетъ

$$\delta'=\frac{h'\delta}{h\left\{1+\frac{3(t'-t)}{640}\right\}},\ \text{и}\ \frac{\delta'}{\delta}=\frac{h'}{h\left\{1+\frac{3(t'-t)}{640}\right\}};\ \text{а по сему}$$

будетъ $k'=\dfrac{h'k}{h\left\{1+\frac{3(t'-t)}{640}\right\}}$.

II.

ОБЪ АСТРОНОМИЧЕСКИХЪ ПРЕЛОМЛЕНІЯХЪ.

Т. Осиповскаго.

---

1. Астрономическимъ преломленіемъ называется измѣненіе направленія претерпѣваемаго лучемъ свѣта, приходящимъ отъ какого ни есть свѣтила, при прохожденіи его чрезъ Атмосферу земную, покуда онъ достигнетъ нашего глаза.

2. Наблюденія показываютъ, что сіе преломленіе бываетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе направленіе луча отклоняется отъ вертикальнаго; вертикальной же лучь не претерпѣваетъ никакого преломленія.

3. Какъ сіе преломленіе лучей безъ сомнѣнія происходитъ отъ безпрестанныхъ преломленій, кои они претерпѣваютъ проходя чрезъ слои воздуха отчасу измѣняющія свою плотность начиная отъ самой вышшей части Атмосферы до самой поверхности земной; то дабы вывесть законъ цѣлаго преломленія луча, положимъ что кругъ радіуса *CA* представляетъ поверьхность земли нашей, кругъ же радіуса *CD* предѣлъ Атмосферы, при которомъ начинается чувствительное преломленіе. Пусть круги радіусовъ *CD*, *CE*, *CF* и проч. представляютъ предѣлы слоевъ Атмосферы, имѣющихъ каждый единообразную плотность, но при переходѣ отъ слоя къ слою отчасу увеличивающихъ оную даже до самой поверьхности земли.

4. Предположивъ, что въ верхней части Атмосферы, гдѣ начинается преломленіе, господствуетъ всегда единообразная теплота, должно будетъ заключить, что на сей высотѣ каждой слой той же плотности долженъ удерживать и ту же толстоту. По сему разстояніе предѣла преломленія отъ поверьхности земной, въ томъ же мѣстѣ, съ измѣненіемъ состоянія барометра и термометра должно измѣняться: при той же теплотѣ но при большей высотѣ барометра, долженъ сей предѣлъ, отъ прибавляющихся слоевъ съ низу, удаляться отъ поверьхности земной, при меньшей же высотѣ барометра отъ убывающихъ слоевъ съ низу, долженъ опускаться. Подобныя измѣненія въ высотѣ онаго предѣла должна, при той же высотѣ барометра, производить теплота, расширяя или сжимая нижніе слои, а можетъ быть измѣняя и при той же плотности воздуха преломительную его силу.

5. Положимъ, что при какой либо теплотѣ и при какомъ либо стояніи барометра въ нѣкоторомъ мѣстѣ *A* на поверьхности земной вошелъ въ Атмосферу лучь *RSB*; и преломляясь при переходѣ изъ слоя въ слой въ точкахъ *S*, *H*, *I* и проч. описалъ до глаза *A* ломаную линѣю *SHIKA*; то онъ покажется глазу пришедшимъ по послѣднему своему направленію *AM*, и уголъ *BIA*, или, по проведеніи линѣи *AN* параллельно *BR*, уголъ *NAM* будетъ цѣлое преломленіе онаго луча *RS*. Проведемъ къ точкамъ *S*, *H*, *I* и проч. изъ центра земли *C* радіусы векторы пути описаннаго лу-

чемъ, кои будутъ къ слоямъ Атмосферы перпендикулярны, и положимъ что лучь при входѣ въ первой слой при S, прежде преломленія въ немъ, составлялъ съ радіусомъ векторомъ уголъ θ, а по преломленіи уголъ θ'; то онъ со вторымъ радіусомъ векторомъ составитъ прежде преломленія уголъ $\theta' + \delta\theta'$, гдѣ $\delta\theta'$ будетъ $= SCH$. Пусть сей лучь по преломленіи составитъ со вторымъ радіусомъ векторомъ уголъ θ'', то онъ съ третьимъ радіусомъ векторомъ до преломленія составитъ уголъ $\theta'' + \delta\theta''$, гдѣ будетъ $\delta\theta'' = HCI$. Пусть сей лучь по преломленіи составитъ съ четвертымъ радіусомъ векторомъ уголъ θ''', и такъ далѣе. Пусть въ какое либо время придетъ лучь изъ S въ T, при чемъ радіусъ векторъ опишетъ уголъ SCT, которой назначимъ чрезъ ω. Положимъ что число всѣхъ слоевъ, чрезъ кои лучь прошелъ въ сіе время, будетъ n, разумѣя n число неизмѣримо великое, и назначимъ уголъ $\theta^{(n)}$, которой будетъ при T, буквою ψ. Пусть знаменатели преломительности, т. е. знаменатели содержанія между синусомъ паденія и синусомъ преломленія, по порядку слоевъ, будутъ $\lambda', \lambda'', \lambda'''$....., то будетъ

$$\sin.\ \theta' = \ldots\ldots\ldots\ \lambda' \sin \theta,$$
$$\sin.\ \theta'' = \lambda'' \sin(\theta' + \delta\theta') = \lambda'' \sin.\ \theta'(1 + \delta\theta'\ Cot\ \theta'),$$
$$\sin.\ \theta''' = \lambda''' \sin.(\theta'' + \delta\theta'') = \lambda''' \sin\ \theta''(1 + \delta\theta''.\ Cot.\ \theta''),$$

и такъ далѣе;

наконецъ при T

$$\sin.\ \theta^{(n)} = \lambda^{(n)} \sin.(\theta^{(n-1)} + \delta.\theta^{(n-1)}) = \lambda^{(n)} \times$$
$$\sin.\ \theta^{(n-1)}(1 + \delta\theta^{(n-1)}\ Cot.\ \theta^{(n-1)});$$

откуда, по перемноженіи между собою всѣхъ членовъ въ обѣихъ частяхъ уравненій и по раздѣленіи съ обѣихъ сторонъ на $sin.\, \theta'. sin.\, \theta''.$ $sin.\, \theta''' \ldots\ldots sin.\, \theta^{(n-1)}$, а потомъ по назначеніи произведенія $\lambda'.\lambda''.\lambda''' \ldots \lambda^{(n)}$ чрезъ k, получимъ

$$sin.\, \theta^{(n)} = sin.\, \psi = k.\, sin.\, \theta (1+\delta\theta'. Cot.\, \theta')(1+\delta\theta''. Cot.\, \theta'') \ldots\ldots (1+\delta\theta^{(n-1)}. Cot.\, \theta^{(n-1)}).$$

Естьли возьмемъ съ обѣихъ сторонъ иперболическіе логариѳмы, то получимъ

$$log.\, sin.\, \psi = l.\, k + l.\, sin.\, \theta + l\, (1+\delta\theta'. Cot.\, \theta') + l.\, (1+\delta\theta''. Cot.\, \theta'') + \ldots + l(1+\delta\theta^{(n-1)}. Cot.\, \theta^{(n-1)})$$

Какъ $l(1+x) = x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots\ldots$, и при величинѣ x чрезвычайно малой $l(1+x) = x$, то по малости величинъ $\delta\theta'. Cot.\, \theta', \delta\theta''. Cot.\, \theta''$ и проч. будетъ

$$l.\, sin.\, \psi = l.\, k + l.\, sin.\, \theta + \delta\theta'. Cot.\, \theta' + \delta\theta''\, Cot.\, \theta'' + \ldots + \delta\theta^{(n-1)} \times Cot.\, \theta^{(n-1)}.$$

Уравненіе сіе иначе изобразится чрезъ

$$l.\, sin.\, \psi = l.\, k + l.\, sin\, \theta + \Sigma\, \delta\psi. Cot.\, \psi,$$

разумѣя подъ Σ знакъ суммованія членовъ $\delta\psi. Cot\, \psi$ отъ $\psi = \theta'$ до $\psi = \theta^{(n-1)}$; или чрезъ

$$l.\, sin.\, \psi = l.\, k + l.\, sin.\, \theta + \int \delta\psi. Cot.\, \psi. \;.\;.\;.\;. \quad (a)$$

разумѣя интегрованіе совершеннымъ отъ $\psi = \theta$ до $\psi = \theta^{(n)}$.

6. Для интегрованія величины $\delta\psi. Cot.\, \psi$ надлежитъ прежде опредѣлить величину $\delta\psi$, которая не есть дифференціалъ $d\psi$ угла ψ. Ее опредѣлить можно двоякимъ образомъ; 1хъ естьли, по назначеніи радіуса вектора CT

чрезъ r, опишемъ имъ внутрь угла $d\omega$ или $\delta\psi$ дугу круга, то сія дуга будетъ $= - dr.tang.\psi$ (знакъ — взятъ здѣсь, поелику съ продолженіемъ движенія луча радіусъ векторъ уменьшается); по сему будетъ $\delta\psi = \frac{- dr.\, tang.\, \psi}{r}$; въ которомъ случаѣ будетъ $\delta\psi.\, Cot.\, \psi = - \frac{dr}{r}$. 2хъ При переходѣ каждаго угла $\theta^{(\lambda)}$ въ $\theta^{(\lambda+1)}$ сперва сей уголъ, прежде преломленія луча, получаетъ приращеніе $\delta\theta^{(\lambda)}$, а потомъ чрезъ преломленіе уменьшается нѣкоторымъ количествомъ $d.\rho$, разумѣя подъ ρ претерпѣнное уже имъ преломленіе; по сему $d.\theta^{(\lambda)} = \delta.\theta^{(\lambda)} - d.\rho$ или $\delta.\theta^{(\lambda)} = d.\theta^{(\lambda)} + d.\rho$, т. е. $\delta.\psi = d.\psi + d.\rho$.

7. Такимъ образомъ оное уравненіе (a) будетъ

$$l.\, Sin.\, \psi = l.\, k + l.\, Sin.\, \theta - \int \frac{dr}{r} \ldots\ldots (a')$$

или

$$l.\, Sin.\, \psi = l.\, k + l.\, Sin.\, \theta + \int d\psi.\, Cot.\, \psi + \int d\rho.\, Cot.\, \psi \ldots \quad (a'')$$

гдѣ въ интегралахъ начальной уголъ ψ долженъ быть $= \theta$.

Изъ снесенія сихъ уравненій получится

$$\int d\psi.\, Cot.\, \psi + \int d\rho.\, Cot.\, \psi + \int \frac{dr}{r} = o,$$

и естьли при углѣ $\psi = \theta$ радіусъ векторъ $r = R$, то будетъ

$$l \frac{Sin.\, \psi}{Sin.\, \theta} + l \frac{r}{R} + \int d\rho\, Cot.\, \psi = o$$

или

$$l\frac{r\,Sin\,\psi}{R\,Sin.\,\theta}+\int d\rho\,Cot.\,\psi=o\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(b)$$

8. Уравненіе $\delta\psi=d\psi+d\rho$ или $d\omega=d\psi+d\rho$ доставляетъ $d\psi=d\omega-d\rho$, а по сему $\psi=\theta+\omega-\rho$; притомъ величины ω и ρ начинаются и возрастаютъ вмѣстѣ; по сему величина ω есть какая либо функція угла ρ и $\psi=\theta+f.\rho$; Тейлерова же теорема показываетъ, что сія функція $f.\rho$ должна быть вида $\lambda\rho+\frac{1}{2}\mu\rho^2+\frac{1}{6}\nu\rho^3+\ldots\ldots$, гдѣ коеффиціенты λ, μ, ν и проч. зависимы отъ θ и можетъ быть отъ Атмосферныхъ измѣненій.

9. Опредѣливъ теперь зависимость величины ψ отъ ρ приступимъ къ интегрованію формулы $d\rho\,Cot.\,\psi$. Поелику будетъ $d\psi=d\rho$ $[\lambda+\mu\rho+\frac{1}{2}\nu\rho^2+\ldots\ldots]$, то будетъ $d\rho=\frac{d\psi}{\lambda+\mu\rho+\frac{1}{2}\nu\rho^2+\ldots}$.
Какъ величина ρ всегда очень мала, и никогда не превышаетъ 33 минутъ или 0,0096, величина же λ состоитъ, какъ мы ниже увидимъ, изъ нѣсколькихъ единицъ, то члены $\mu\rho+\frac{1}{2}\nu\rho^2+\ldots\ldots$ во все продолженіе движенія луча въ Атмосферѣ весьма мало прибавляютъ къ члену λ, а по сему величина $\lambda+\mu\rho+\frac{1}{2}\nu\rho^2+\ldots\ldots$ можетъ во все продолженіе движенія луча, безъ чувствительной ошибки, быть разсматриваема постоянною; но какъ она начинается величиною λ, и въ продолженіе движенія луча возрастаетъ до $\lambda+\mu\rho+\frac{1}{2}\nu\rho^2+\ldots\ldots$, то ближе къ истиннѣ будетъ, когда при интегрованіи возьмется середнее между сими число $\lambda+\frac{1}{2}\mu\rho+\frac{1}{4}\nu\rho^2+\ldots\ldots$ Такимъ образомъ будетъ

$$\int d\rho\, Cot.\psi = \frac{\int d\psi\, Cot.\psi}{\lambda+\frac{1}{2}\mu\rho+\frac{1}{4}\nu\rho^2+\ldots} = \frac{l\frac{\sin\psi}{\sin\theta}}{\lambda+\frac{1}{2}\mu\rho+\frac{1}{4}\nu\rho^2+\ldots}$$

Назначимъ $\lambda+\frac{1}{2}\mu\rho+\frac{1}{4}\nu\rho^2+\ldots$ буквою η, то оное уравненіе (b) обратится въ

$$\eta\, log.\frac{r\,Sin.\psi}{R\sin\theta}+l.\frac{\sin\psi}{\sin\theta}=0$$

или

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{\eta}\left(\frac{\sin\psi}{\sin\theta}\right)^{\eta+1}=1;$$

откуда найдется

$$\frac{Sin.\,\theta}{Sin.\,\psi}=\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}}.$$

Когда лучь достигнетъ глаза наблюдателя въ A, тогда уголъ ψ означать будетъ видимое разстояніе направленія его отъ зенита, r радіусъ земли, и ρ цѣлое преломленіе лучемъ претерпѣнное. Пусть тогда будетъ $\psi=\varphi$ и $r=a$, то получимъ уравненіе

$$\frac{Sin.\,\theta}{Sin.\,\varphi}=\left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}}$$

или

$$\frac{Sin.\,(\varphi-\lambda\rho-\frac{1}{2}\mu\rho^2-\frac{1}{6}\nu\rho^3-\ldots)}{sin.\,\varphi}=\left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}} \qquad (b')$$

10. Естьли мы члены $\frac{1}{2}\mu\rho+\frac{1}{4}\nu\rho^2+\ldots$ передъ λ презримъ, то уравненіе (b') обратится въ

$$\frac{Sin.\,(\varphi-\lambda\rho)}{Sin.\,\varphi}=\left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$$

или

$$Sin.\,(\varphi-\lambda\rho)=\zeta.\,Sin.\,\varphi,$$

которое есть уравненіе Симсоново.

11. Изъ Симсонова уравненія легко произвесть можно уравненіе Брадлеево. И дѣйствительно изъ онаго уравненія получится

$$\frac{1-\zeta}{1+\zeta}=\frac{Sin.\,\varphi - Sin.\,(\varphi-\lambda\rho)}{Sin.\,\varphi + Sin.\,(\varphi-\lambda\rho)}=\frac{tang\,\frac{1}{2}\lambda\rho}{tang\,(\varphi-\frac{1}{2}\lambda\rho)};$$

въ которомъ уравненіи когда степени величины ρ вышшія первой предъ сею будутъ презрѣны, и по сему вмѣсто $tang.\,\frac{1}{2}\lambda\rho$ подставится $\frac{1}{2}\lambda\rho$, то получится

$$\rho=\frac{1}{\frac{1}{2}\lambda}\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right).\ tang.\,(\varphi-\tfrac{1}{2}\lambda\rho)$$

или

$$\rho=m.\ tang.\,(\varphi-\tfrac{1}{2}\lambda\rho),$$

которое и есть уравненіе Брадлеево.

12. Что принадлежитъ до величины $\frac{a}{R}$, то положимъ, что при какой либо опредѣленной теплотѣ въ мѣстѣ наблюденія, и при извѣстной высотѣ барометра; высота Атмосферы, при коей начинается преломленіе, составляетъ p; тогда будетъ $\frac{a}{R}=\frac{a}{a+p}=\frac{1}{1+\frac{p}{a}}$, $\left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}}=\frac{1}{\left(1+\frac{p}{a}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}}}$. Какъ величина $\frac{p}{a}$ всегда очень мала, то весьма близко къ истиннѣ будетъ $\left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}}=\left(1+\frac{p}{a}\right)^{-\frac{\eta}{\eta+1}}=$

$1 - \frac{\eta}{\eta+1} \cdot \frac{p}{a}$. Таким образомъ въ формулѣ Симсоновой будетъ $\zeta = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{p}{a}$ и въ Брадлеевой $m = \frac{1}{\lambda+1} \cdot \frac{p}{a}$.

13. Опредѣлимъ теперь для оныхъ двухъ формулъ и величину λ. Для сего употребимъ формулу Симсонову, какъ ближайшую къ истинной. Положимъ, что двумъ угламъ ϕ и ϕ' соотвѣтствуютъ преломленія ρ и ρ'; то по сей формулѣ должно быть

$$\frac{Sin.\,\phi}{Sin.\,(\phi - \lambda\rho)} = \frac{Sin.\,\phi'}{Sin.\,(\phi - \lambda\rho')}.$$

Возьмемъ для опредѣленія величины λ углы $\phi = 70°$ и $\phi' = 80°$. По таблицѣ преломленія Брадлеевой приведенной къ высотѣ Барометра 0,76 Фран. метровъ, или 28 дюйм. 0,94 линѣи, при теплотѣ $-8°$ Реомюра $\rho = 172'',5$; $\rho' = 349'',3$, коимъ соотвѣтствующая величина по оной формулѣ найдется $\lambda = 5,329$. При теплотѣ $0°$ Реомюра $\rho = 164'',4$; $\rho' = 332'',8$, коимъ соотвѣтствуетъ $\lambda = 5,670$. При теплотѣ $+8°$ Реомюра $\rho = 157'',0$; $\rho' = 317'',8$, коимъ соотвѣтствуетъ $\lambda = 5,956$. Изъ сего измѣненія величины λ, соотвѣтствующаго таблицѣ Брадлеевой, заключить должно, что λ съ возрастаніемъ теплоты возрастаетъ. Но естьли возьмемъ таблицу Піацціеву, о коей говорится, что она отъ $\phi = 70°$ до $\phi = 90°$ составлена единственно на основаніи наблюденій его, безъ всякаго участія теоріи, то онымъ же угламъ при тѣхъ же теплотахъ, какія взяты выше сего изъ таблицы Брадлеевой, соотвѣтствуютъ $\lambda = 7{,}987$; $\lambda = 5{,}048$; $\lambda = 9{,}437$. Таковой непорядочной ходъ величины λ заставляетъ или сомнѣваться въ точности наблюденій, на коихъ основываясь Піачи составилъ свою таблицу; или сіе падать должно на формулу Симсонову, что можетъ быть только въ случаѣ томъ, когда уголъ ω описываемый радіусомъ векторомъ и преломленіе ρ взаимно независимы, что невѣроятно. Естьли возьмемъ новую таблицу Лапласову, то тѣмъ же угламъ, и при тѣхъ же теплотахъ соотвѣтственныя величины λ найдутся $\lambda = 6{,}932$; $\lambda = 7{,}267$; $\lambda = 7{,}525$; кои также показываютъ, что съ приращеніемъ теплоты величина λ становится больше. Въ прочемъ оное число λ такого свойства, что естьли на прим. къ Брадлеевскимъ преломленіямъ $164''{,}4$ и $332''{,}8$, соотвѣтствующимъ угламъ φ въ $70°$ и $80°$ при теплотѣ $= 0$, прибавится только по $0''{,}5$, то соотвѣтствующая величина λ по оной формулѣ Симсоновой, вмѣсто $5{,}670$ найдется $6{,}074$.

Естьли возьмемъ изъ разныхъ таблицъ преломленія соотвѣтствующія угламъ $\varphi = 10°$, $20°$, $30°$.... $90°$, и изъ ряда сихъ преломленій произведемъ ряды разностей, то ходъ сихъ рядовъ окажется правильнѣе всѣхъ въ таблицѣ Брадлеевой; что служитъ доказательствомъ, что она должна подходить ближе всѣхъ къ истиннѣ, чего и ожидать должно отъ искуснѣйшаго изъ наблюдателей.

14. Предъидущія изслѣдованія заставляютъ вѣрить, что коеффиціентъ λ съ измѣ-

неніемъ теплоты измѣняется. Теперь спрашивается, отъ одного ли только измѣненія плотности воздуха, теплотою причиняемаго, происходитъ оное измѣненіе въ величинѣ λ; или можетъ быть не измѣняется ли отъ теплоты и преломительная сила воздуха при той же плотности? Какъ опыты надъ преломительностію различныхъ прозрачныхъ тѣлъ дѣланные удостовѣряютъ, что преломительная сила ихъ зависитъ отъ качества и количества горючихъ веществъ въ нихъ заключающихся, теплота же изрѣжаетъ только части тѣлъ, то и не вѣроятно, чтобы она и въ воздухѣ причиняла измѣненіе въ преломительности не по одному измѣненію плотности его. Пусть при стояніи барометра h и теплотѣ δ по Реомюрову термометру плотность воздуха будетъ δ и въ тоже время плотность ртути Δ; то при высотѣ барометра y и теплотѣ t градусовъ Реом. будетъ плотность воздуха $= \frac{y}{h} \cdot \frac{\delta}{(1+mt)(1+nt)}$,

гдѣ n означаетъ расширеніе воздуха отъ прибавленія одного градуса теплоты, и m таковое же расширеніе ртути; для коихъ величинъ новѣйшіе опыты доставляютъ $n = \frac{5}{640}$ и $m = \frac{1}{4330}$ при высотѣ барометра $h = 0,76$ Фр. метровъ.

Поелику въ формулѣ Симсоновой $\omega = (\lambda + 1)\rho$, и при томъ же углѣ ω преломленіе ρ, при увеличивающейся и изрѣжающей воздухъ, и по сему уменьшающей преломительную его силу, теплотѣ становится менѣе, то при семъ количество $\lambda+1$ становится болѣе. И такъ разсмотримъ, не пропорціонально ли увеличиваніе количества $\lambda+1$ изрѣженію воздуха. При семъ предположеніи, ежели величину $\lambda+1$ соотвѣтствующую теплотѣ $0°$ назначимъ чрезъ s, то величина $\lambda+1$ соотвѣтствующая $t°$ должна быть $(1+nt)(1+mt)\, s$. Число $\lambda+1$ соотвѣтствующее преломленіямъ показаннымъ въ таблицѣ Брадлеевой при $0°$ температуры и при высотѣ барометра $28°$ есть 6.670; по чему для $t = 8°$ оно должно быть $\left(1+\frac{3}{80}\right)\left(1+\frac{8}{4330}\right).\ 6{,}670 = 6{,}933$; и для $t = -8°$ должно быть $6{,}408$; но выше видѣли мы, что выкладка основаемая на таблицѣ Брадлеевой для сихъ чиселъ доставляетъ $6{,}956$ и $6{,}329$. Числа $6{,}933$ и $6{,}956$ малымъ чѣмъ разнятся между собою; но разность чиселъ $6{,}408$ и $6{,}329$ довольно чувствительна, хотя, какъ мы выше въ § 13 видѣли, въ выраженіи количествъ преломленія не причиняетъ значительной разности.

15. Предъидущій параграфъ показываетъ, что величины λ, доставляемыя формулою Симсоновою для Брадлеевой таблицы преломленій, выходятъ менѣе, нежели каковы бы онѣ долженствовали быть, дабы измѣненія въ нихъ были пропорціональны измѣненію плотности воздуха причиняемому теплотою. Не происходитъ ли сіе отъ несовершенной точности формулы Симсоновой? Для сего возьмемъ изъ § 9 точнѣйшую формулу $\frac{Sin.\ \theta}{Sin.\ \phi} =$

$\left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}}$. Она будучи приложена къ двумъ угламъ ϕ и ϕ' при той же теплотѣ доставляетъ $\frac{Sin.\,\theta'}{Sin.\,\phi'} = \frac{Sin.\,\theta}{Sin.\,\phi} \times \left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\frac{1}{2}\mu(\rho'-\rho)}{(\lambda+1)^2}}$, между тѣмъ какъ Симсонова доставляетъ $\frac{Sin.\,\theta'}{Sin.\,\phi'} = \frac{Sin.\,\theta}{Sin.\,\phi}$. Какъ величина $\frac{a}{R} = \frac{1}{1+\frac{p}{a}}$, то будетъ $\left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\frac{1}{2}\mu(\rho'-\rho)}{(\lambda+1)^2}} = 1 - \frac{\frac{1}{2}\mu(\rho'-\rho)}{(\lambda+1)^2} \cdot \frac{p}{a}$, ибо величина $\frac{p}{a}$ очень мала; по сему будетъ

$$\frac{Sin.\,\theta'}{Sin.\,\phi'} = \frac{Sin.\,\theta}{Sin.\,\phi}\left\{1 - \frac{\frac{1}{2}\mu(\rho'-\rho)}{(\lambda+1)^2} \cdot \frac{p}{a}\right\};$$

которое уравненіе показываетъ, что буде величина μ есть величина отрицательная, то количество λ будетъ болѣе, нежели каково доставляетъ оное уравненіе выведенное изъ формулы Симсоновой, а притомъ сіе количество не есть постоянно; впрочемъ, по малости величины $(\rho'-\rho)\,\frac{p}{a}$, сіе измѣненіе величины λ очень мало.

16. Естьли въ формулѣ $\frac{Sin.\,\theta}{Sin.\,\phi} = \left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{\eta}{\eta+1}}$ положимъ $\theta = \phi - \lambda\rho - \frac{1}{2}\mu\rho\rho$, $\eta = \lambda + \frac{1}{2}\mu\rho$, то будетъ $\frac{\eta}{\eta+1} = \frac{\lambda}{\lambda+1} + \frac{\mu\rho}{2(\lambda+1)^2}$ и оная формула обратится въ

$$\frac{Sin.\,\varphi\; Cos.\,(\lambda\rho+\tfrac{1}{2}\mu\rho^2) - Cos.\,\varphi.\; Sin.\,(\lambda\rho+\tfrac{1}{2}\mu\rho^2)}{Sin.\,\varphi} =$$

$$\left(1+\frac{p}{a}\right)^{\frac{-\eta}{\eta+1}}$$

или

$$1-\lambda\rho\; Cot.\,\varphi - \tfrac{1}{2}(\lambda\lambda+\mu\; Cot.\,\varphi)\rho\rho = 1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}+\frac{\mu\rho}{2(\lambda+1)^2}\right).\frac{p}{a}$$

$$+\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\lambda}{\lambda+1}+\frac{\mu\rho}{2(\lambda+1)^2}\right\}\left\{1+\frac{\lambda}{\lambda+1}+\frac{\mu\rho}{2(\lambda+1)^2}\right\}.\ \frac{p^2}{a^2};$$

откуда чрезъ сравненіе сходственныхъ членовъ найдется

$$\lambda\rho\; Cot.\,\varphi = \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}+\frac{\mu\rho}{2(\lambda+1)^2}\right).\ \frac{p}{a}$$

$$\rho^2(\lambda\lambda+\mu\; Cot.\,\varphi) = -\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}+\frac{\mu\rho}{2(\lambda+1)^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{\lambda+1}+\frac{\mu\rho}{2(\lambda+1)^2}\right).\ \frac{p^2}{a^2}$$

по исключеніи же величины $\frac{p}{a}$,

$$\frac{\lambda\lambda\, tang\; \varphi^2+\mu\, tang.\,\varphi}{\lambda\lambda} = -\left\{1+\frac{2(\lambda+1)^2}{2\lambda(\lambda+1)+\mu\rho}\right\}$$

или

$$\frac{\lambda\lambda\; tang.\,\varphi^2+\mu\; tang.\,\varphi}{\lambda^2} = -\left\{\frac{2\lambda+1}{\lambda}-\frac{\mu\rho}{2\lambda\lambda}\right\};$$

и получится

$$\mu = -\frac{\lambda\,[2\lambda+\lambda\; tang.\,\varphi^2+1]}{tang.\,\varphi-\tfrac{1}{2}\rho}.$$

Такимъ образомъ будетъ

$$\theta = \varphi-\lambda\rho+\frac{\tfrac{1}{2}\lambda(2\lambda+\lambda\; tang.\,\varphi^2+1)}{tang.\,\varphi-\tfrac{1}{2}\rho}.\ \rho\rho;$$

гдѣ въ знаменателѣ $\frac{1}{2}\rho$ передъ $tang.\ \varphi$ безъ чувствительной ошибки презрѣно быть можетъ; въ которомъ случаѣ будетъ

$$\mu = -\lambda[(2\lambda+1)\,Cot.\ \varphi + \lambda\ tang.\ \varphi]$$

и

$$\theta = \varphi - \lambda\rho + \tfrac{1}{2}[(2\lambda+1)\,Cot.\ \varphi + \lambda\ tang.\ \varphi]\,\rho\rho;$$

такъ что въ формулѣ Симсоновой величина λ, собственно говоря, есть

$$\lambda' = \lambda[1 - \tfrac{1}{2}((2\lambda+1)\,Cot.\ \varphi + \lambda\ tang.\ \varphi)\rho]$$

откуда получится

$$\lambda = \lambda'[1 + \tfrac{1}{2}[(2\lambda+1)\,Cot.\ \varphi + \lambda\ tang.\ \varphi]\rho]$$

и

$$\lambda = \lambda'[1 + ((\lambda' + \tfrac{1}{2})\,Cot\ \varphi + \lambda'\ tang.\ \varphi)\rho];$$

по сему безъ чувствительной ошибки

$$\mu = -\lambda'((2\lambda'+1)\,Cot.\ \varphi + \lambda'\ txng.\ \varphi),$$

$$\frac{p}{a} = (\lambda'+1)\rho\ Cot.\ \varphi;$$

кои когда подставлены будутъ въ уравненіи параграфа 15го, то получимъ для поправленія формулы Симсоновой и опредѣленія точнѣйшей величины λ уравненіе

$$\frac{Sin.(\varphi' - \lambda\rho')}{Sin.\ \varphi'} = \frac{Sin\ (\varphi - \lambda\rho)}{Sin\ \varphi}\left\{1 + \frac{\lambda((2\lambda+1)\,Cot.\ \varphi + \lambda\ tang.\ \varphi)\rho(\rho' - \rho)\,Cot.\ \varphi}{2(\lambda+1)}\right\};$$

или

$$\frac{Sin.(\varphi' - \lambda\rho')}{Sin.\ \varphi'} = \frac{Sin.(\varphi - \lambda\rho)}{Sin.\ \varphi}\left\{1 + \frac{\lambda(\lambda + (2\lambda+1)\,Cot.\ \varphi^2)\rho(\rho' - \rho)}{2(\lambda+1)}\right\};$$

и какъ величины μ и $\frac{p}{a}$ для сего уравненія выведены посредствомъ одного угла ϕ, то сіе уравненіе будетъ точнѣе, когда изобразится чрезъ

$$\frac{Sin.(\phi'-\lambda\rho')}{Sin.\phi'}=\frac{Sin.(\phi-\lambda\rho)}{Sin.\phi}\left\{1+\frac{\lambda(\lambda+\frac{1}{2}(2\lambda+1)(Cot.\phi^2+Cot.\phi'2)\times\frac{1}{2}(\rho'+\rho).\frac{1}{2}(\rho'-\rho)}{\lambda+1}\right\}.$$

Естьли по сей формулѣ поправимъ выше найденныя величины для таблицы Брадлеевой посредствомъ тѣхъ же угловъ $\phi=70°$ и $\phi'=80°$, то для теплоты $+8°$ найдется $\lambda=5,816$, для теплоты $0°$ $\lambda=6,121$, для теплоты $-8°$ $\lambda=6,425$.

Естьли теперь, посредствомъ величины $\lambda+1=7,121$ соотвѣтствующей теплотѣ $0°$, выведемъ по предъидущему параграфу величины $\lambda+1$ для $+8°$ и $-8°$ теплоты, то сіи величины выйдутъ 6,841 и 7,402, кои почти равно разнятся отъ величинъ 6,816 и 7,425, каковыя доставляютъ поправленныя величины λ, и притомъ разность сія весьма невелика; да и та произойти можетъ отъ того, что мы въ оной формулѣ, которую для поправленія употребили, вмѣсто истинныхъ величинъ λ, μ и $\frac{p}{a}$, употребили только величины приближенныя. Чрезъ сіе можемъ удостовѣриться, что величины λ вмѣстѣ съ теплотою измѣняются сообразно тому, какъ въ предъидущемъ параграфѣ предполагаемо было. И какъ изъ § 13 явствуетъ, что хотя бы измѣненіе въ величинѣ λ сдѣлалось довольно чувствительно, но оно не причинитъ чувствительнаго измѣненія въ находимомъ по формулѣ Симсоновой преломленіи, то мы и предположимъ, что теплотѣ 0° соотвѣтствуетъ $\lambda = 6{,}12$; тогда соотвѣтствующая каждой другой теплотѣ t' величина $\lambda + 1$ будетъ выражаться чрезъ $\left(1 + \frac{3t}{640}\right)\left(1 + \frac{t}{4330}\right) \times 7{,}12$; которое выраженіе по § 14му должно будетъ еще помножить на содержаніе высоты барометра, бывшей при наблюденіи, въ высотѣ барометра составляющей 0,76 Фран. метровъ.

17. Опредѣлимъ теперь, посредствомъ Симсоновой формулы $Sin.(\varphi - \lambda\rho) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{p}{a}\right) \times Sin.\varphi$ величину $\frac{p}{a}$; и найдется $\frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{p}{a} = \frac{Sin.\varphi - Sin.(\varphi - \lambda\rho)}{Sin.\varphi}$ и $\frac{p}{a} = \frac{\lambda+1}{\lambda} \cdot \frac{2\,Sin.\frac{1}{2}\lambda\rho.\,Cos.(\varphi - \frac{1}{2}\lambda\rho)}{Sin.\varphi}$. Возьмемъ уголъ $\varphi = 70^\circ$ и величину λ соотвѣтствующую теплотѣ 0°, то есть $\lambda = 6{,}12$, то получится $\frac{p}{a} = 0{,}00207927$. Такую часть радіуса земнаго при теплотѣ 0° составляетъ высота Атмосферы, при коей преломленіе становится чувствительнымъ. Для теплоты $+8^\circ$, коей соотвѣтствуетъ $\lambda = 6{,}4$, найдется посредствомъ онаго же угла $\varphi = 70^\circ$ величина $\frac{p}{a} = 0{,}00206384$. Для теплоты -8°, коей соотвѣтствуетъ $\lambda = 5{,}84$ найдется посред-

ствомъ онаго же угла $\phi = 70°$ величина $\frac{p}{a} =$ 0,00209592. По сему при увеличивающейся теплотѣ величина $\frac{p}{a}$ уменьшается, и слѣдовательно чувствительное преломленіе начинается ближе къ поверхности земли. Напротивъ величины $\frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{p}{a}$ остаются при всѣхъ теплотахъ почти совсемъ неизмѣнны, и ихъ назначить можно среднимъ числомъ 0,0017872, такъ что въ формулѣ Симсоновой будетъ

$$Sin. (\phi - \lambda\rho) = 0{,}9982128 \times Sin. \phi.$$

Примѣръ 1й. По наблюденію Мешеня учиненному 18 Генваря (нов. ст.) 1798 года при высотѣ Барометра 27 дюйм. 4,5 лин. и теплотѣ $+ 7°$ Реомюра для угла $\phi = 86° \, 14' \, 42''$ найдено преломленія $12' 4'',2$.

По основаніямъ нами представленнымъ будетъ $\lambda + 1 = 7{,}12 \left(1 + \frac{3.7}{640}\right)\left(1 + \frac{7}{4330}\right) \times$ $\frac{336{,}94}{328{,}5} = 7{,}555$ и $\lambda = 6555$; потомъ

$$\begin{array}{ll}
log.\ 0{,}9982128 = & 9{,}9992231 \\
log.\ Sin.\ \phi = & \underline{9{,}9990667} \\
l.\ Sin.\ (\phi - \lambda\rho) = & 9{,}9982898 \\
\phi - \lambda\rho = & 84° 55' 7'' \\
\lambda\rho = & 1° 19' 35'' \\
\rho = 12' 8'',4 ; &
\end{array}$$

слѣдовательно выкладка доставляетъ $4'',2$ болѣе, нежели наблюденіе.

Примѣръ 2й. По наблюденію того же Мешеня, учиненному 21 Генваря 1798 года при высотѣ барометра 28 дюйм. 3,3 лин. и теплотѣ 6°,5 Реомюра, для угла $\phi = 86°15'20''$ найдено преломленіе $12'32'',5$.

По основаніямъ нами представленнымъ будетъ $\lambda + 1 = 7,12 \left(1 + \frac{3.6,5}{640}\right) \left(1 + \frac{6,5}{4330}\right) \times$

$\frac{336,94}{339,3} = 7,297$ и $\lambda = 6,297$; потомъ

$$\begin{array}{lll} log.\ 0,9982128 = & & 9,9992231 \\ l.\ Sin.\ \phi = & & 9,9990719 \\ \hline l.\ Sin.\ (\phi - \lambda\rho) = & & 9,9982950 \\ \quad \phi - \lambda\rho = & 84°55'34'',8 & \\ \quad \lambda\rho = & 1°19'45'',2 & \\ \quad \rho = 12'39'',9 & & \end{array}$$

по сему выкладка доставляетъ $7'',4$ болѣе нежели наблюденіе.

Сіи небольшія разности выкладки отъ наблюденій нельзя приписать единственно неточности основаній выкладки, но могутъ зависѣть и отъ несовершенной точности самыхъ наблюденій.

18. При вывожденіи формулы для вычисленія преломленій мы предполагали землю нашу шарообразною; но поелику видъ ея отъ шарообразности нѣсколько отступаетъ, то для большей точности, при разныхъ широтахъ мѣстъ, полагая высоту атмосферы p при той же теплотѣ одинакову во всѣхъ мѣстахъ, можно вмѣсто постояннаго радіуса a употреблять радіусы кривизны земли широтѣ мѣстъ соотвѣтствующіе.