ЛОГАРИѲМЫ

а) *Общія изслѣдованія.*

§ 122.

Когда дается основаніе (2), показатель (6), то въ возвышеніи требуется найти степень 2^6 или 64; т. е. $2^6 = 64$; (такимъ же образомъ, когда въ извлеченіи дается степень 64, показатель 6, тогда отыскивается основаніе 2, т. е. $2 = \sqrt[3]{64}$); но ежели дается основаніе 2, степень 64, то можно потребовать найти и показателя (6), т. е. такое число x, до котораго, если основаніе степени 2 возвысится, то произведетъ данную степень 64. Сей способъ разложенія называется *опредѣленіемъ логариѳмовъ* и на основаніи сказаннаго о немъ, подставивъ x на мѣсто 6, въ выраженіе $2^6 = 64$, имѣемъ право написать

$$2^x = 64.$$

Это числовое выраженіе, опредѣленія логариѳмовъ, называется ариѳметическимъ *уравненіемъ четвертаго* и послѣдняго вида, въ которомъ данное основаніе принимаетъ названіе *основанія логариѳмовъ*, данная степень (64) — *соотвѣтствующаго числа*, а искомый показатель или результатъ x — *логариѳма*; въ слѣдствіе чего уравненіе

$$2^x = 64$$

даетъ такое заключенiе: *основанiе логариѳмовъ* (2), *возвышенное до логариѳма* (x) *равно соотвѣтствующему числу* (64); и вообще пишутъ

$$a^x = s\ldots\ldots\ (a)$$

Вотъ это основное уравненiе опредѣленiя логариѳмовъ, въ которомъ подъ буквою a, вообще разумѣемъ всякое число основанiя, *кромѣ единицы*, ибо извѣстно, что всѣ степени 1-цы равны 1-цѣ; подъ x—искомый показатель, а подъ s, данное соотвѣтствующее число. И такъ *логариѳмъ числа есть отыскиваемый показатель степени, до котораго должно возвысить основанiе логариѳмовъ, чтобъ получить соотвѣтствующее число*.

На основанiи этого слѣдуетъ, что $2^6 = 64$ и $2^x = 64$, хотя и связаны однимъ и тѣмъ же равенствомъ и способомъ дѣйствiя, но не одно и то же; ибо $2^6 = 64$ есть тожество и принадлежитъ къ выкладкѣ степени 64 поданнымъ 2 и 6, въ то время, какъ уравненiе $2^x = 64$ къ способу изысканiя x поданнымъ 2 и 64.

§ 123.

Рѣшенiе уравненiя $a^x = s$ состоитъ изъ двухъ частей, въ первой излагается способъ вычисленiя x, а во второй, какъ вычисленную уже его величину представить въ общемъ результатѣ.

а) *Рѣшенiе первой части.* Для вычисленiя x должно взять предъидущее числовое уравненiе

$$2^x = 64.$$

Откуда понятно, чтобъ изъ него получить x, то должно основанiе 2 помножать на себя до тѣхъ поръ, пока непроизведетъ соотвѣтствующее, число 64;—тогда число, показывающее сколько равныхъ производителей входитъ въ произведенiе, и означитъ величину x; и такъ, помноживъ 2 на 2 получаю $2.2=4$, слѣд. 2 нельзя взять за логариѳмъ x, почему помножаю 4 или 2.2 на 2, имѣю $2.2.2=8$,—опять вычисленiе негодится; помножая 8 или 2.2 2 на 2 нахожу $2.2.2.2=16$, но какъ и этимъ не дошли до желаемаго, то помноживъ 16 или 2.2.2.2 на произведенiе 2.2 получаю полную степень 64, т. е. $2.2.2.2.2.2=64$; сосчитавъ въ послѣднемъ выводѣ число равныхъ производителей, нахожу ихъ 6, слѣд. 6 и равно x или $x=6$; такъ что

$$2^6 = 64$$

или

$$2 = \sqrt[6]{64}$$

Вообще, если въ основномъ уравненiи

$$a^x = s$$

примемъ основанiе a,—за *постоянную* величину, логариѳмъ же x и соотвѣтствующее число s за *измѣняющiяся* въ величинахъ, то выйдетъ два случая перемѣнъ: величина s станетъ измѣнятся съ измѣненiемъ x, и обратно, величина x станетъ измѣнятся съ измѣненiемъ s; такъ что, вставляя на мѣсто s всевозможныя соотвѣтствующiя числа, получимъ всевозможные логариѳмы, приличиствующiе каждому въ особенности подставленному числу на мѣсто s; и обратно, вставляя на мѣсто логариѳма x разныя числа, и возвышая до нихъ постоянное основанiе, получимъ всевозможныя соотвѣтствующiя числа. И такъ, отсюда ясно видимъ, что для вычисленія логариѳмовъ всѣхъ чиселъ, должны принять за главное условіе, *чтобъ одно основаніе ихъ, бывъ избрано разъ, оставалось на всегда величиною постоянною, т. е. никогда неизмѣняющеюся*, (чемъ оно и отличается отъ основанія степени, которое постоянно для одного какого либо случая), *при всѣхъ измѣненіяхъ логариѳмовъ и соотвѣтствующихъ чиселъ.*

Вотъ какимъ способомъ вычисляются логариѳмы, и хотя въ Алгебрѣ предлагаются несравненно простѣйшіе и сокращеннѣйшіе способы, но за всѣмъ этимъ, величайшаго бы труда стоило, если бы мы, при каждомъ требованіи вопроса, стали вычислять логариѳмы; воизбѣжаніе чего, преодолены единожды и на всегда трудности, знаменитыми мужами, по коимъ составлены *таблицы логариѳмовъ*, служащія, въ математическихъ наукахъ, драгоцѣннымъ пособіемъ. Употребительнѣйшія изъ нихъ: таблицы *Лоланда* и *Колета*. Представь себѣ книгу чиселъ, въ которой съ одной стороны стоятъ соотвѣтствующія числа, а противъ нихъ логариѳмы, или иначе, показатели степеней, въ которыя слѣдуетъ возвысить извѣстное постоянное число, для составленія соотвѣтствующихъ чиселъ, тогда будешь имѣть понятіе о *таблицѣ логариѳмовъ.*

b). *Рѣшеніе второй части* уравненія $a^x = s$, заключается въ томъ, какъ дойти до общаго выраженія логариѳма, или иначе, до общаго результата опредѣленія логариѳмовъ.

Рѣшеніе сей части вопроса содержится въ самыхъ словахъ произношенія уравненія

$$a^{x}=s,$$

изъ котораго логариѳмъ x *выводимъ*, говоря такъ: логариѳмъ числа a^{x} или числа s есть показатель x; и въ слѣдствіе того пишемъ

$$la^{x} \textit{ или } ls \textit{ есть } x; \text{ т. е.}$$

$$ls^{x}=ls=x \ldots\ldots (b)$$

гдѣ буква l означаетъ логариѳмъ. Подъ симъ выраженіемъ результата, опредѣленія логариѳмовъ, вообще разумѣемъ, что дѣйствіе вычисленія логариѳма x по уравненію (a), какъ выше видѣли, уже свершилось, или, если свершится, то въ результатѣ т. е. въ ls дѣйствительно выйдетъ показатель x опредѣленною числовою величиною.

И такъ, изъ уравненія

$$a^{x}=s \ldots . (a)$$

для результата логариѳмовъ можемъ брать, или

$$la^{x}=x$$

или

$$ls=x,$$

вставивъ послѣднее выраженіе т. е. ls на мѣсто x, въ основное уравненіе логариѳмовъ (a), имѣемъ

$$a^{ls}=s$$

т. е. *основаніе логариѳмовъ* (a), *возвышенное до* *общаго результата логариөмовъ* (ls), *равно или производитъ соотвѣтствующее число* s.

§ 124.

Общія заключенія. Если въ уравненіи

$$a^{ls} = s$$

положимъ $ls = 1$, тогда $a^1 = s$, и слѣд.

$$ls = la = 1$$

т. е. *логариөмъ основанія равняется единицѣ.* А какъ $a^0 = 1$ (§ 122), то $l.1 = la^0 = 0$; слѣд. *логариөмъ единицы равенъ нулю.*

§ 125.

Принявъ $b = a^{lb}$, а $c = a^{lc}$, и перемноживъ эти выраженія соотвѣтственно, получимъ

$$b.c = a^{lb}.\ a^{lc} = a^{lb+lc} \ (\S\ 120),$$

чего, взявъ логариөмы, имѣемъ

$$lb.c = la^{lb+lc} = lb + lc$$

т. е. *логариөмъ произведенія, двухъ или нѣсколькихъ чиселъ, равняется суммѣ логариөмовъ каждаго производителя.* И такъ $l(21.52.357) = l.21 + l.52 + l.357$.

Слѣд., если нужно сдѣлать умноженіе, то, взявъ, изъ таблицы, логариѳмы производителей, въ суммѣ получимъ логариѳмъ произведенія, которому соотвѣтствующее число будетъ требуемое произведеніе. И такъ, *умноженіе*, помощію таблицъ логариѳмовъ, *производится чрезъ простое сложеніе.*

§ 126.

Посему $lb.c.d.f\ldots\ldots=lb+lc+ld+lf\ldots\ldots$ Но если примемъ $b=c=d=f=\ldots\ldots$ и положимъ, что въ произведеніи содержится n производителей, то получимъ

$$lb^n=l(\underbrace{b.b.b.b\ldots\ldots b}_{(n)})=\underbrace{lb+lb+lb\ldots\ldots lb}_{(n)}$$

или

$$lb^n=n.lb;$$

т. е *логариѳмъ степени равняется логариѳму основанія степени* (но не основанію логариѳмъ), *умноженному показателемъ*. Впрочемъ эту теорему можно вывести прямо изъ выраженія $b=a^{lb}$, которое, возвысивъ въ n-ю степень, по (§ 120), получимъ

$$b^n=a^{n.lb};$$

чего, взявъ логариѳмъ, будетъ

$$lb^n=la.^{n.lb}=nlb.$$

Слѣд., чтобъ возвысить число въ степень, достаточно отыскать въ таблицахъ логариѳмъ его и умножить на показателя степени, тогда число, соотвѣтствующее произведенію будетъ требуемая степень. И такъ, *возвышеніе*, помощію таблицъ логариѳмовъ, *производится чрезъ простое умноженіе*.

§ 127.

На основаніи § 41, взявъ логариѳмъ уравненія

$$д' = ч.\ д,$$

получимъ

$$lд' = lч + lд;$$

Откуда, по (§ 25), будетъ

$$lч = lд' - lд \ldots\ldots\ldots (1)$$

Поелику же $ч = \frac{д'}{д}$, то, вставивъ въ выраженіе (1) на мѣсто ч, его результатъ $\frac{д'}{д}$, имѣемъ

$$l\frac{д'}{д} = lд' - lд \ldots\ldots (2)$$

Уравненіе (1) даетъ такое заключеніе: *логариѳмъ частнаго равняется логариѳму дѣлимаго безъ логариѳма дѣлителя*: $l.\frac{5470}{780} = l.5470 - l.780$. А уравненіе (2) даетъ такое заключеніе: *логариѳмъ дроби равняется логариѳму числителя безъ логариѳма знаменателя*. Такъ $l.\frac{3}{7}$ $l.3 - l.7$. Въ прочемъ, такія выводы можно получить прямо, положивъ, что $b = a^{lb}$, $c = a^{lc}$ и, раздѣливъ первое на второе, будетъ

$$\frac{b}{c} = \frac{a^{lb}}{a^{lb}} = a^{lb - lc} \ (\S\ 121);$$

чего, взявъ логариѳмъ, имѣемъ

$$l\frac{b}{c} = la^{lb - lc} = lb - lc \ (\S\ 124)$$

слѣд., чтобъ раздѣлить одно число на другое, вычитаютъ логариѳмъ дѣлителя изъ логариѳма дѣлимаго, и потомъ отыскиваютъ число, соотвѣтствующее разности: и оно будетъ искомымъ частнымъ. И такъ *дѣленіе*, помощію логариѳмовъ, *производится чрезъ простое вычитаніе*.

Показанное правило въ § 125, о логариѳмѣ единицы, можно вывести изъ логариѳма частнаго. Положивъ въ $\frac{b}{c}$, $b = c$, будетъ $\frac{b}{b} = 1$ и $l.1 = lb - lb = 0$. Такимъ же образомъ

$$l\frac{1}{b} = l.1 - lb, \text{ но } l.1 = 0, \text{ слѣд.}$$

$$l\frac{1}{b} = -lb$$

т. е. *логариѳмы правильныхъ дробей суть числа отрицательныя*.

§ 128.

Съ увеличиваніемъ соотвѣтствующихъ чиселъ и логариѳмы увеличиваются; обратно, съ увеличиваніемъ логариѳмовъ и соотвѣтствующія числа увеличиваются; слѣд., вставивъ въ уравненіе

$$a^{x} = s$$

на мѣсто x безконечное число ∞, получимъ

$$a^{\infty} = \infty$$

чего, взявъ логариѳмъ, будетъ

$$l\,\infty = la^{\infty} = \infty$$

т. е. *логариѳмъ безконечнаго числа есть безконечность*.

Измѣнивъ въ a^{x}, показателя x на — x, получимъ

$$a^{-x} = \frac{1}{a^{x}} \text{ (122, слу. 2)};$$

откуда видимъ, что съ увеличиваніемъ x дробь уменьшается, такъ что при x равномъ ∞, дробь обратится въ *нуль*, т. е.

$$a^{-\infty} = 0$$

чего, взявъ логариѳмъ, будетъ

$$l.0 = la^{-\infty} = -\infty$$

посему и говорятъ: *логариѳмъ нуля есть число безконечно большое, взятое отрицательно*. Отсюда слѣдуетъ, что *логариѳмы отрицательныхъ чиселъ невозможны, когда основаніе есть число положительное*.

Ибо, если основаніе — величина положительная, то предѣлъ уменьшенія всѣхъ степеней, или соотвѣтствующихъ чиселъ есть нуль, коего логариѳмъ, какъ уже вывели, равенъ — ∞, но съ уменьшеніемъ соотвѣтствующихъ чиселъ и логариѳмы уменьшаются, и нуль есть безконечное уменьшеніе числа, слѣд. — ∞ есть безконечное уменьшеніе логариѳма, словомъ, есть безконечно малое число. Отрицательныя же числа, отъ положительныхъ, по начертанію, уже слѣдуетъ послѣ нуля (§ 30); а какъ логариѳмъ нуля равенъ безконечно малому числу, то логариѳмъ отрицательнаго числа, равенъ *невозможному*. Потому, что ниже безконечно-малаго мы себѣ ничего представить неможемъ.

§ 129.

На основаніи § 72, взявъ логариѳмъ уравненія

$$k^n = p, \text{ или } p = k^n,$$

получимъ

$$lp = nlk;$$

откуда lk, по § 41, будетъ

$$lk = \frac{lp}{n}.$$

Поелику же $k = \sqrt[n]{p}$, то, вставивъ въ послѣднее выраженіе намѣсто k, ему равное $\sqrt[n]{p}$, будетъ

$$l\sqrt[n]{p} = \frac{lp}{n}$$

т. е. *логариѳмъ корня, данной степени, равняется логариѳму радикальнаго числа, раздѣленному на показателя корня.* Такъ $l.\sqrt[n]{3452}=\frac{l.3452}{7}$.

Слѣд., чтобъ извлечь корень, достаточно раздѣлить логариѳмъ даннаго радикала на показателя степени корня: число, соотвѣтствующее въ таблицахъ сему частному, и будетъ требуемый корень. Посему *извлеченіе корней,* помощію таблицъ логариѳмовъ, *совершается чрезъ простое дѣленіе.*

Чтобъ опредѣлить логариѳмъ $\sqrt[n]{b^m}$, то сначала положимъ, что $b^m=c$, отъ чего выйдетъ

$$l\sqrt[n]{c}=\frac{lc}{n};$$

потомъ вставивъ, на мѣсто с ему равное b^m, получимъ

$$l\sqrt[n]{b^m}=\frac{lb^m}{n}$$

но $lb^m=m\,lb$ (§ 127) слѣд.

$$l\sqrt[n]{b^m}=\frac{m\,lb}{n}$$

т. е. *логариѳмъ корня, у котораго радикальное число имѣетъ показателя, равняется произведенію сего показателя на логариѳмъ радикала, раздѣленному на показателя корня.* Такимъ же образомъ

$$l(\sqrt[m]{b})^n=n\,l\sqrt[m]{b}=\frac{n.lb}{m}.$$

Сводъ заключеній. И такъ уравненій логариѳмовъ всего *четырнадцать;* выпишемъ ихъ здѣсь, для общаго свода:

$$1.\ a^x = s$$

$$2.\ la^x = ls = x$$

$$3.\ a^{ls} = s$$

$$4.\ la = 1$$

$$5.\ l1 = 0$$

$$6.\ l0 = -\infty$$

$$7.\ l\infty = \infty$$

$$8.\ lb.c = lb + lc$$

$$9.\ lb^n = n\,lb$$

$$10.\ l\frac{\partial'}{\partial} = l\partial' - l\partial$$

$$11.\ l\frac{1}{b} = -lb$$

$$12.\ l\sqrt[n]{p} = \frac{lp}{n}$$

$$13.\ l\sqrt[n]{b^m} = \frac{m\,lb}{n}$$

$$14.\ l(\sqrt[m]{b})^n = \frac{n\,lb}{m}$$

b.) *Частныя изслѣдованія.*

§ 130.

Вычисленіе логариѳмовъ всѣхъ чиселъ. Изъ § 124 видѣли, что логариѳмъ x, изъ уравненія

$$2^x = 64$$

вычисляется числомъ 6, т. е. $x=6$ или $1.64=6$; такимъ же образомъ, изъ уравненія $3^x=243$ найдется $x=5$. Однимъ словомъ, если въ общемъ уравненіи логариѳмовъ

$$a^x=s$$

число s будетъ *полною степенью*, даннаго основанія логариѳмовъ a, тогда x всегда найдется, цѣлымъ числомъ, чрезъ возвышеніе a, въ разныя степени, начиная отъ нулевой; если же число s небудетъ полною степенью, тогда x получится *смѣшанною* дробью, и въ этомъ случаѣ, показанный въ § 124 способъ вычисленія, прямо удовлетворить вопросу неможетъ; въ слѣдствіе того, разберемъ его сдѣсь подробнѣе.

Пусть требуется разрѣшить уравненіе $2^x=6$. Дѣлая $x=2$ и $x=3$, находимъ $2^2=4$ и $2^3=8$; изъ чего видимъ, что величина x заключается между 2 и 3, слѣд. должна быть равна 2 + *дробь*. И такъ

1. Положимъ, что

$$x=2+\frac{1}{x_1} \dots \dots \dots (a)$$

(гдѣ x_1 есть величина перваго порядка и >1). Вставляя эту величину въ данное уравненіе $2^x=6$, имѣемъ

$$2^{2+\frac{1}{x_1}}=6; \text{ или по (§ 120)}$$

$$2^2 \cdot 2^{\frac{1}{x_1}}=6; \text{ откуда}$$

$$2^{\frac{1}{x_{,}}} = \frac{6}{2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Или, возвысивъ обѣ части уравненія $2^{\frac{1}{x}} = \frac{3}{2}$, въ $x_{,}$, по (§ 120), будетъ

$$\left(2^{\frac{1}{x_{,}}}\right)^{x_{,}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_{,}}$$

но

$$\left(2^{\frac{1}{x_{,}}}\right)^{x_{,}} = 2^{\frac{x_{,}}{x_{,}}} = 2, \text{ слѣд.}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x_{,}} = 2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Чтобъ опредѣлить $x_{,}$ изъ уравненія (1), полагаемъ послѣдовательно $x_{,} = 1$ и $x_{,} = 2$ и находимъ $\left(\frac{3}{2}\right)^{1} = \frac{3}{2}$, которое < 2 и $\left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{4}$, которое > 2; и такъ $x_{,}$ (перваго порядка) заключается между 1 и 2.

2. Положимъ, что

$$x_{,} = 1 + \frac{1}{x_{,,}} \; . \; : \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{Ѣ})$$

(гдѣ $x_{,,}$ есть втораго порядка и также > 1). Вставляя эту величину въ уравненіе (1) съ $x_{,}$, имѣемъ

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1+\frac{1}{x_{,,}}} = 2, \text{ или } \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x_{,,}}} = 2,$$

откуда

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x_{,,}}} = \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}, \text{ или}$$

$$\frac{3^{\frac{1}{x_{,,}}}}{2^{\frac{1}{x_{,,}}}} = \frac{4}{3}, \text{ что возвысивъ въ } x_{,,}, \text{ будетъ}$$

$$\left(\frac{3^{\frac{1}{x_{,,}}}}{2^{\frac{1}{x_{,,}}}}\right)^{x_{,,}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{x_{,,}} \text{ или}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x_{,,}} = \frac{3}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Предположенія $x_{,,} = 1$ и $x_{,,} = 2$ даютъ $\left(\frac{4}{3}\right)^1 = \frac{4}{3}$, $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$; первое меньше, а второе больше $\frac{3}{2}$, слѣд. $x_{,,}$ (втораго порядка) заключается между 1 и 2.

3. Полагая

$$x_{,,} = 1 + \frac{1}{x_{,,,}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (c),$$

получимъ изъ уравненія (2)

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{1 + \frac{1}{x_{,,,}}} = \frac{3}{2}, \text{ или } \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x_{,,,}}} = \frac{3}{2};$$

откуда

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x_{,,,}}} = \frac{9}{8}$$

По возвышеніи чего въ $x_{,,,}$, будетъ

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{x_{,,,}} = \frac{3}{4} \ldots\ldots\ldots (3)$$

Полагая послѣдовательно $x_{,,,}=1$, $x_{,,,}=2$, $x_{,,,}=3$, находимъ, что при двухъ послѣднихъ условіяхъ $\left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{81}{64} = 1\frac{17}{64}$, $\left(\frac{9}{8}\right)^3 = \frac{729}{512} = 1\frac{217}{512}$, первое меньше, а второе больше $\frac{4}{3}$ или $1\frac{1}{3}$, то $x_{,,,}$ (третьяго порядка) содержится между 2 и 3.

4. Пусть

$$x_{,,,} = 2 + \frac{1}{x_{IV}} \ldots\ldots (d),$$

то уравненіе (3) обращается въ

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{2+\frac{1}{x_{IV}}} = \frac{4}{3}, \text{ или } \frac{81}{64}\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{x_{IV}}} = \frac{4}{3};$$

Откуда

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{x_{IV}}} = \frac{256}{243}$$

и

$$\left(\frac{256}{243}\right)^{x_{IV}} = \frac{9}{8} \ldots (4)$$

Продолжая, такимъ образомъ, вычисленія, найдемъ, что величина x заключается между двумя цѣлыми числами k и k + 1 полагая $x_{vi} = \frac{1}{x_v}$, опредѣлимъ x_v, какъ опредѣлили x_{iv} и т. д.

Сближая найденныя уравненія (a), (b), (c), (d) . . .

$$x = 2 + \frac{1}{x_{,}},\ x_{,} = 1 + \frac{1}{x_{,,}},\ x_{,,} = 1 + \frac{1}{x_{,,,}},\ x_{,,,} = 2 + \frac{1}{x_{iv}},\ \ldots.$$

получимъ величину x въ видѣ непрерывной дроби

$$x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_{iv}}}}}$$

Но изъ § 109 извѣстно, что чемъ больше возмемъ членовъ непрерывной строки, тѣмъ дробь больше приближается къ истинной величинѣ даннаго числа; и такъ, посредствомъ сего способа, всегда найдется величина x, удовлетворяющая уравненію $2^x = 6$, если не въ точности, то, покрайней мѣрѣ, до произвольной степени приближенія. *На примѣръ*, составляя первыя четыре ближайшія дроби, находимъ

$$2,\ \frac{3}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{13}{5}$$

и дробь $\frac{13}{5}$ разнствуетъ отъ истинной величины x менѣе чемъ $\frac{1}{5^2}$, или $\frac{1}{25}$, (§ 111); но если вычислимъ величину x_{iv} (четвертаго порядка), по уравненію

$\left(\frac{256}{243}\right)^{x_{IV}} = \frac{9}{8}$, то увидимъ, что x_{IV} содержится между 2 и 3, или $x_{IV} = 2 + \frac{1}{x_V}$; слѣд. пятая ближайшая дробь есть $\frac{13.2+5}{5.2+2}$ или $\frac{31}{12}$ (§ 112). И такъ, дробь $\frac{13}{5}$ собственно разнствуетъ отъ величины x менѣе чемъ $\frac{1}{5.12}$ или $\frac{1}{60}$, а число $\frac{31}{12}$ только на $\frac{1}{12^2}$ или $\frac{1}{144}$.

§ 131.

Общій способъ. Пусть дано уравненіе

$$a^x = s$$

(полагая, что a и s больше 1; при томъ, $a < s$). Составляя послѣдовательно степени a, найдемъ, что s содержится между a^n и a^{n+1}, положимъ $x = n + \frac{1}{x_I}$ и, вставляя эту величину, въ уравненіе, получимъ $a^{\frac{n+1}{x_I}} = s$, или $a^n \times a^{\frac{1}{x_I}} = s$, откуда $\left(\frac{s}{a^n}\right)^{x_I} = a$; или, полагая для краткости $\frac{s}{a^n} = c, \ldots\ldots c^{x_I} = a$.

Продолжая по прежнему, увидимъ, что x содержится между $n_{,}$ и $n_{,} + \frac{1}{x_{,,}}$, вставя эту величину въ уравненіе съ $x_{,}$, также получимъ уравненіе вида $d^{\frac{1}{x_{,,}}} = c$ (полагая $\partial = \frac{a}{c^n}$) и т. д. Наконецъ, для x получимъ выраженіе

$$x = n + \cfrac{1}{n_{,} + \cfrac{1}{n_{,,} + \cfrac{1}{n_{,,,} + \cfrac{1}{n_{IV} + \cfrac{1}{n_{V} + \ldots}}}}}$$

Продолжая дѣйствіе, получимъ величину x до произвольной степени приближенія, которую всегда опредѣлить можно, потому что она означается *частнымъ, отъ раздѣленія единицы на квадратъ знаменателя послѣдней ближайшей дроби,* нами полученной (§ 111).

Въ разрѣшенномъ нами уравненіи полагалось $a < s$, когда же $a > s$ и оба порознь > 1, то замѣчая, что $a^{\circ} = 1$ и $a' = a$, заключаемъ, что x содержится между 0 и 1, тогда сначала нужно полагать, $x = \frac{1}{x_{,}}$, т. е. сдѣлать $n = 0$, и чрезъ то предъидущее выраженіе приметъ видъ

$$x = \frac{1}{x_{,}} = \cfrac{1}{n_{,} + \cfrac{1}{n_{,,} + \cfrac{1}{n_{,,,} + \cfrac{1}{n_{IV} + \ldots}}}}$$

Если же s есть дробь, и a цѣлое число большее единицы, то въ уравненіи $a^x = s$, должно x измѣнить на $-y$, что дастъ $a^{-y} = s$, но $a^{-y} = \frac{1}{a^y}$, слѣд. $\frac{1}{a^y} = s$ откуда $s \cdot a^y = 1$ и $a^y = \frac{1}{s}$; а какъ $\frac{1}{s} > 1$ (поелику s есть правильная дробь, которая, отъ дѣленія 1, превращается въ частное въ видѣ неправильной (§ 104), то y опредѣляется по предъидущему способу, и соотвѣтствующая величина x будетъ равнятся величинѣ y, *съ отрицательнымъ* знакомъ; ибо мы положили, что $x = -y$.

Тоже самое имѣетъ мѣсто, когда $s > 1$ и $a < 1$. Разрѣшить слѣдующія примѣры:

$3^x = 15 \ldots.$	$x = 2,46$	вѣрное до	0,01
$10^x = 3$	$x = 0.477$		0,001
$5^x = \frac{2}{3}$	$x = -0,25$		0,01
$\frac{7}{12} = \left(\frac{3}{7}\right)^x$	$x = 0,53$		0,01

Здѣсь ближайшія дроби обращены въ десятичныя.

Если предъидущемъ способомъ можно получить непрерывную строку съ опредѣленнымъ числомъ членовъ, то получимъ для x число *соизмѣримое* и равное послѣдней ближайшей дроби, выраженной цѣлымъ рядомъ; если же дробь будетъ безконечною, то x выйдетъ *несоизмѣримымъ*.

При вычисленіи логариѳмовъ, всѣхъ чиселъ, достаточно вычислить, по извѣстному основанію a, логариѳмы однихъ простыхъ чиселъ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,....; ибо всѣ прочія происходятъ отъ умноженія этихъ чиселъ между собою (§ 63); и логариѳмы ихъ получимъ чрезъ сложеніе логариѳмовъ простыхъ чиселъ. На прим.,

$$6 = 2 \,.\, 3 \qquad 1.6 = 1.2 + 1.3$$

$$24 = 2^2.3 \qquad 1.24 = 21.2 + 1.3$$

$$360 = 2^2.3^2.5 \qquad 1.360 = 21.2 + 21.3 + 1.5.$$

и прочее.

Притомъ въ таблицахъ достаточно помѣстить логариѳмы цѣлыхъ чиселъ, ибо логариѳмъ всякой дроби получится (§ 128) чрезъ вычитаніе логариѳма дѣлителя изъ логариѳма дѣлимаго.

§ 132.

Выборъ основанія логариѳмовъ. Въ сдѣланныхъ нами вычисленіяхъ логариѳмовъ, неполагалось за основаніе *опредѣленно* какого либо постояннаго числа, а въ слѣдствіе того мы неимѣли логариѳмовъ въ *системѣ*, т. е. слѣдующихъ въ естественномъ порядкѣ однихъ за другими, по возвышающейся лѣсницѣ, какъ идутъ соотвѣтствующія числа ихъ, начиная отъ единицы (§ 131); *выбравъ* же опредѣленное основаніе, единожды и на всегда, получимъ логариѳмы въ системѣ, или правильнѣе, *систему логариѳмовъ.*

Примемъ на время, что имѣемъ уже таблицы логариѳмовъ въ системѣ, вычисленныя по какому не есть основанію a, то изъ нихъ легко построить множество другихъ, по новому основанію.

Пусть будетъ уравненіе $Ъ^x = k$, въ которомъ Ъ есть основаніе новой системы логариѳмовъ, x логариѳмъ его, вычисленный по основанію Ъ и соотвѣтствующему числу k; послѣ чего, взявъ логариѳмы обѣихъ частей, даннаго уравненія, въ системѣ, имѣющей основаніемъ a, т. е. во первыхъ принявъ $Ъ^x = k$ за степень или измѣняющееся количество относительно a (§ 127), и имянно, положивъ $Ъ = a^{lЪ}$, отъ чего $Ъ^x = a^{xlЪ}$; а потомъ, подставивъ $a^{xlЪ}$ на мѣсто $Ъ^x$ въ уравненіе $Ъ^x = k$, получимъ

$$a^{xlЪ} = k;$$

и наконецъ, взявъ логариѳмы обѣихъ частей

$$la^{xlЪ} = lk,$$

находимъ

$$xlЪ = lk,$$

откуда $x = \frac{lk}{lЪ}$.

т. е. *чтобъ найти логариѳмъ* (x), *какого не есть числа* (k) *въ новой системѣ* (Ъ), *то должно, какъ даннаго числа* (k), *такъ и новаго основанія* (Ъ) *взять логариѳмы, изъ построенной уже системы,* (по основанію a), *и первый изъ нихъ раздѣлить на вторый.*

Такъ, изъ уравненія $3^x = 4$, получимъ $x = \frac{l.4}{l.3}$, т. е. x логариѳмъ 4 въ системѣ, имѣющей основаніемъ 3 равняется $\frac{l.4}{l.3}$, гдѣ l.4 и l.3 суть два логариѳма системы, вычисленной по основанію, на прим., числа 10.

Пусть будетъ k, k', k''.... рядъ чиселъ, a — основаніе извѣстной системы, b — основаніе новой системы, имѣемъ рядъ уравненій

$$b^x = k,\ b^{x'} = k',\ b^{x''} = k'',\ldots.$$

откуда

$$x = \frac{lk}{lb} = \frac{1}{lb}.lk;\ x' = \frac{1}{lb}.lk';\ x'' = \frac{1}{lb}.lk'',\ldots.$$

Слѣд., если имѣемъ уже таблицу, то для построенія другой достаточно *умножить* логариѳмы первой системы на постоянное количество $\frac{1}{lb}$. Это количество, служащее для перехода одной таблицы къ другой, называется *модулемъ* новой таблицы, относительно къ первой.

Первоначальныя таблицы логариѳмовъ вычислены по основанію 2,718281828459. Такія логариѳмы называются *гиперболическими* или *Неперовыми*, (по имени перваго изобрѣтателя) и означаются, для отличія, буквою l'.

Хотя за основаніе логариѳмовъ и можно брать всякое число, цѣлое или дробное, кромѣ единицы, но не смотря на это, самое выгоднѣйшее изъ всѣхъ есть число 10. Эта система называется *обыкновенною* или *Бриговою*, по имени изобрѣтателя; и построена изъ Неперовой, по уравненію

$$x = \frac{1}{l'.10}.l'k.$$

Для чего вычисляется модуль $\frac{1}{l'.10}$ въ числахъ, и именно:

$$\frac{1}{l'.10} = \frac{1}{2{,}3025850929940} = 0{,}4342944819$$

гдѣ $l'.10 = 2{,}3025850929940$ есть логариѳмъ основанія обыкновенной системы, вычисленный по основанію гиперболической; его, по Неперовымъ таблицамъ, въ столбцѣ логариѳмовъ, найти легко.

Наконецъ добавимъ, что помощію обыкновенныхъ таблицъ, также удобно опредѣляется и основаніе гиперболической системы. Ибо, означивъ это основаніе, т. е. 2,7182.... вообще чрезъ e, имѣемъ

$$e^{l'10} = 10$$

гдѣ $l'10$ означаетъ логариѳмъ числа 10 по основанію e, Неперовой системы; т. е. основаніе, Неперовой системы, возвышенное до логариѳма числа 10 равно 10. Взявъ этого уравненія, обыкновенныя логариѳмы

$$le^{l'.10} = l.10$$

т. е. положивъ, что $e = 10^{le}$, слѣд. $e^{l'.10} = 10^{l'.10.le}$, и вставивъ $10^{l'.10.le}$ на мѣсто $e^{l'.10}$, получимъ

$$l.10^{l'.10.le} = l.10 = 1;$$

откуда

$$l'.10.le = 1, \text{ слѣд.}$$

$$le = \frac{1}{l'.10} = 0{,}43429\ldots.$$

Отыскавъ этому логариѳму, по обыкновеннымъ таблицамъ, соотвѣтствующее число, получимъ

$$0{,}4342944819 = le = l.2{,}71828\ldots..$$

слѣд.

$$e = 2.71828 \ldots\ldots$$

И такъ *по обыкновеннымъ таблицамъ, модуль* $\frac{1}{l'.10} = 0{,}434 \ldots\ldots$ *выражаетъ логариѳмъ основанія Неперовой системы.*

Теперь, кажется, довольно знаемъ, какъ вычисляются логариѳмы всѣхъ чиселъ (§ 131 и 132), и какъ, изъ построенной уже таблицы, составляется множество другихъ системъ, и хотя въ Алгебрѣ излагаются еще несравненно простѣйшіе и сокращеннѣйшіе способы, но за всѣмъ этимъ, надо сознатся, что величайшаго бы труда стоило, если бы мы при каждомъ требованіи вопроса, стали вычислять логариѳмы; воизбѣжаніе сего, какъ уже видѣли, въ § 124, и составлены усиліями *Непера*, *Брига*, *Флака*, *Пезенаса*, *Шервика*, *Мутона* и другихъ таблицы логариѳмовъ.

§ 133.

И такимъ образомъ, наконецъ, пришли къ главной цѣли нашей, — къ вычисленію ариѳметическихъ уравненій четвертаго и послѣдняго вида. Мы показали (§§ 124, 131, 132) способъ рѣшенія уравненія $a^x = s$, и вывели изъ него теорію логариѳмовъ; теперь же, когда таблицы логариѳмовъ построины, можемъ употребить логариѳмы для рѣшенія подобныхъ уравненій. Возмемъ

$$3^x = 15,$$

для котораго въ § 132 нашли $x = 2\ 46$ вѣрно до 0,01. Принявъ логариѳмы, обѣихъ частей даннаго уравненія, получимъ

$$1.3^x = 1.15, \text{ или } x\,1.3 = 1.15, \text{ откуда}$$

$$x = \frac{1.15}{1.8}.$$

Чтобъ окончить рѣшеніе, отыскиваемъ въ таблицахъ, въ столбцѣ, означенномъ буквою N (nombres), число 15 и противъ него логариѳмъ его 1,17609126; тамъ же находимъ логариѳмъ 0,47712125 числа 3; послѣ чего, подставивъ найденныя логариѳмы въ результатъ $x = \frac{1.15}{1.3}$, получимъ

$$x = \frac{1.15}{1.3} = \frac{1,17609126}{0,47712125} = 2,4649759\ldots.$$

Рѣшить $3^x = 81$. Вывожу

$$x\,1.3 = 1.81, \text{ и}$$

$$x = \frac{1.81}{1.3} = \frac{1,90848502}{0,47712125} = 4 + \frac{1}{23856062}$$

Сдѣсь слишкомъ малая дробь $\frac{1}{23856062}$ отбрасывается; ибо она произходитъ отъ того, что логариѳмы никогда небываютъ точны; и такъ $x = 4$; въ самомъ дѣлѣ $3^4 = 81$.

Еще рѣшить $359^x = 754$. Такъ же получимъ

$$x = \frac{1.754}{1.359} = \frac{2,87737135}{2,55509445} = 1,126135\ldots\ldots$$

Для упражненія предлагаемъ еще уравненія

$$5^x = 5793 \ldots\ldots\ldots x = 5{,}383498$$

$$\left(\frac{9}{3}\right)^x = \frac{781}{51} \ldots\ldots\ldots x = 2{,}483814$$

Легко примѣтить, что результаты $x = \frac{1}{13} \cdot 1.15$, $x = \frac{1}{1.359} \cdot 1{,}754 \ldots\ldots$, рѣшенныхъ уравненій, тѣмъ только отличаются отъ общаго результата $x = \frac{1}{1b} \cdot 1k$, служащаго для перехода отъ одной таблицы къ другой, что въ послѣднемъ, модуль $\frac{1}{1b}$ есть величина постоянная для всѣхъ возможныхъ вычисленій, какой либо системы, въ то время, какъ у первыхъ $\frac{1}{1.3}$, $\frac{1}{1.359}$, ... онъ, въ каждомъ вопросѣ, принимаетъ различный видъ; или правильнѣе, постояненъ *исключительно* для одного только извѣстнаго случая. Почему $\frac{1}{1.3}$, $\frac{1}{1.359}$, . . . не неправильно назвать *частными* модулями, для отличія отъ общаго $\frac{1}{1b}$.

§ 135.

Преимущества Бриговой системы. Приступая къ изслѣдованію свойствъ системы логариѳмовъ, имѣющей основаніемъ число 10, полагаемъ, что предъ нами лежитъ книга съ вычисленными уже логариѳмами, въ системѣ. И такъ, принимая за основаніе число 10, получимъ

$$l.1 = 0$$
$$l.10 = 1$$
$$l.100 = l.10^2 = 2$$
$$l.1000 = l.10^3 = 3$$
$$l.10000 = l.10^4 = 4$$

вообще

$$l.10^n = n.$$

Изъ сего видно, что логариѳмы чиселъ, содержащихся между 1 и 10 (т. е., состоящихъ или изъ одной простой цыфры безъ правильной дроби, или съ послѣднею) суть дроби; посему и обратно, дробному логариѳму соотвѣтствуетъ или просто одна цѣлая цыфра, или цѣлая — съ дробью.

Логариѳмы чиселъ, содержащихся между 10 и 100 суть больше 1 и меньше 2 т. е. 1-ца съ *дробью;* — содержащихся между 100 и 1000 суть >2 и <3, или $2+$ *дробь;* — содержащихся между 1000 и 10000 суть >3 и <4, или $3+$ *дробь* и т. д. Дроби, входящія въ составъ логариѳмовъ, обыкновенно представляются точными или приближенными *десятичными* дробями. Цѣльная часть логариѳма называется *характеристикою.* На основаніи сказаннаго слѣдуетъ вообще, что логариѳмъ числа, состоящаго изъ одной цыфры, или

$$l.(1 \text{ *цыф.*}) = \textit{дроби}$$
$$l.(2 \text{ *цыф.*}) = 1 + \textit{дробь}$$
$$l.(3 \text{ *цыф.*}) = 2 + \textit{дробь}$$
$$l.(4 \text{ *цыф.*}) = 3 + \textit{дробь}.$$

Вообще

$$l.(n \text{ *цыф.*}) = (n-1) + \textit{дробь}.$$

Слѣд. *характеристика логариѳма, соотвѣтствующаго цѣлаго, или смѣшаннаго числа, всегда равна числу цыфръ цѣлыхъ, безъ одной*; потому что дробной части логариѳма — соотвѣтствуетъ одна цѣлая цыфра. Такъ, характеристика логариѳма числа 56734 и $56734\frac{3156}{4915}$ будетъ 4.

И обратно, по извѣстной характеристикѣ всегда можно опредѣлить число цыфръ соотвѣтствующаго числа. На прим., если характеристика 5, то число содержится между 10^5 и 10^6 или составлено изъ 6 цыфръ.

Также логариѳму, коего характеристика равна нулю, соотвѣтствующее число будетъ такое, у котораго цѣльная часть состоитъ изъ одной простой цыфры.

§ 136.

Когда извѣстенъ логариѳмъ числа, то приложивъ къ характеристикѣ 1, 2, 3 .... единицы, получимъ логариѳмъ числа въ 10, 100, 1000 .... разъ большаго. Это ясно изъ предыдущаго §. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ, что какого либо числа a, логариѳмъ есть $m+\frac{z}{x}$, т. е. $la=m+\frac{z}{x}$ по § 125, имѣемъ

$$l.10.a=l.10+la=1+m+\frac{z}{x}$$

$$l.100.a=l.100+la=2+m+\frac{z}{x}$$

$$l.1000.=l.1000+la=3+m+\frac{z}{x}$$

вообще

$$l.10^n. = l.10^n + la = n + m + \frac{z}{x}$$

слѣд. достаточно къ данному логариѳму $m + \frac{z}{x}$, числа а, придать n единицъ, чтобъ получить логариѳмъ числа въ 10^n разъ большаго а; эти единицы, какъ цѣлыя, обыкновенно прикладываются къ характеристикѣ, десятичная же часть остается постоянною.

И обратно, чтобъ получить соотвѣтствующее число $a . 10^n$ логариѳма $n + m + \frac{z}{x}$, коего характеристика противъ даннаго логариѳма $m + \frac{z}{x}$ больше n единицами, то достаточно соотвѣтствующее число а, логариѳма $m + \frac{z}{x}$ умножить на 10^n, т. е. на единицу съ такимъ числомъ нулей, сколько въ характеристикѣ прибавлено новыхъ единицъ.

§ 137.

Равномѣрно если а есть цѣлое число, состоящее изъ нѣсколькихъ порядковъ единицъ, такъ что если $la = m + \frac{z}{x}$, то уменьшая а, въ 10, 100, 1000...... разъ, будетъ

$$l\frac{a}{10} = la - l.10 = m + \frac{z}{x} - 1 = (m-1) + \frac{z}{x}$$

$$l\frac{a}{100} = la - l.100 = m + \frac{z}{x} - 2 = (m-2) + \frac{z}{x}$$

$$l\frac{a}{1000} = la - l.1000 = m + \frac{z}{x} - 3 = (m-3) + \frac{z}{x}$$

вообще

$$l\frac{a}{10^n}=la-l.10^n=m+\frac{z}{x}-n=(m-n)+\frac{z}{x}$$

И такъ, чтобъ получить логариөмъ числа, въ 10^n разъ меньшаго а, то достаточно изъ характеристики логариөма $m+\frac{z}{x}$, числа а, вычесть n единицъ, десятичная же часть логариөма остается безъ перемѣны.

Обратно, чтобъ получить соотвѣтствующее число $\frac{a}{10^n}$ логариөма $(m-n)+\frac{z}{x}$, т. е., коего характеристика противъ даннаго логариөма $m+\frac{z}{x}$, меньше n единицами, то достаточно соотвѣтствующее число а, логариөма $m+\frac{z}{x}$, уменьшить въ 10^n разъ, т. е. раздѣлить на единицу съ такимъ числомъ нулей, сколько изъ характеристики даннаго логариөма отнято единицъ.

Такъ $l\cdot 25685=4+$*дробь;* изобразивъ эту дробь чрезъ $\frac{z}{x}$, будетъ $l\cdot 25685=4+\frac{z}{x}$. Раздѣляя же число 25685 постепенно на 10, 100, 1000 . . . . ., получимъ десятичныя дроби:

$$\frac{25685}{10}=2568{,}5$$

$$\frac{25685}{100}=256{,}89$$

$$\frac{25685}{1000}=25{,}685$$

$$\frac{25685}{10000}=2{,}5685$$

Взявъ, каждаго изъ сихъ чиселъ, логариѳмъ, и выписавъ первоначально данное число, будетъ

$$l.25685=4+\frac{z}{x}$$

$$l.2568,5=l\frac{25685}{10}=l.25685-l.10=4+\frac{1}{x}-1=3+\frac{z}{x}$$

$$l.256,85=l\frac{25685}{100}=l.25685-l.100=4+\frac{z}{x}-2=2+\frac{z}{x}$$

$$l.25,685=l\frac{25685}{1000}=l.25685-l.1000=4+\frac{z}{x}-3=1+\frac{z}{x}$$

$$l.2,5685=l\frac{25685}{10000}=l.25685-l.10000=4+\frac{z}{x}-4=\frac{z}{x}\ldots\ldots(a)$$

Изъ сего видимъ, что

1.) Если дано соотвѣтствующее число и его логариѳмъ, то уменьшая характеристику послѣдняго 1, 2, 3... единицами, должно для полученія соотвѣтствующихъ чиселъ, новыхъ логариѳмовъ, въ данномъ числѣ переставить запятую влѣво на 1, на 2, 3 . . . . цыѳры (§ 100).

2.) И обратно, увеличивая данной десятичной дроби 2,5685, логариѳмъ $\frac{z}{x}$, цѣлыми числами 1, 2, 3...., то для полученія соотвѣтствующихъ чиселъ, новыхъ логариѳмовъ, должно въ данной десятичной дроби перенести запятую вправо на 1, 2, 3 . . . . цыѳры.

3.) Перенося, въ данномъ соотвѣтствующемъ числѣ, запятую на 1, 2, 3 . . . . . знака *вправо*, для полученія, симъ новымъ числамъ, соотвѣтствующихъ логариѳмовъ, должно къ характеристикѣ даннаго логариѳма придать 1, 2, 3 . . . . единицы.

4.) И обратно, перенося, въ данномъ соотвѣтствующемъ числѣ запятую на 1, 2, 3 . . . . знака *влѣво*, для полученія, симъ новымъ числамъ, соотвѣтствующихъ логариѳмовъ, должно изъ характеристики даннаго логариѳма отнять 1, 2, 3 . . . . единицы.

5.) Вообще для опредѣленія логариѳма десятичной смѣшанной дроби, должно отбросить запятую, и потомъ, отыскавъ логариѳмъ этого числа, какъ цѣлаго, вычесть изъ характеристики столько единицъ, сколько въ числѣ было десятичныхъ.

6) Десятичная, или вообще говоря, дробная часть $\frac{z}{x}$ логариѳма неизменяется, какъ бы непереставляли запятую, а только характеристика соотвѣтственно увеличивается или уменьшается числами 1, 2, 3, ...

§ 138.

Продолжая далѣе дѣлить число 52685 на 100000, 1000000, 10000000, ... , получимъ

$$\frac{52685}{100000} = 0{,}52685$$

$$\frac{52685}{1000000} = 0{,}052685$$

$$\frac{52685}{10000000} = 0.0052685$$

и проч.

чего, взявъ логариѳмы, имѣемъ

$$l.0.52685 = l\frac{52685}{100000} = 4 + \frac{z}{x} - 5 = -1 + \frac{z}{x}$$

$$l.0{,}052686 = l\,\frac{52685}{1000000} = 4 + \frac{z}{x} - 6 = -2 + \frac{z}{x}$$

$$l\cdot 0{,}0052685 = l\,\frac{52685}{10000000} = 4 + \frac{z}{x} - 7 = -3 + \frac{z}{x}$$

и проч.

т. е. *правильныхъ десятичныхъ дробей характеристика логариѳмовъ всегда отрицательная, а десятичная часть положительная.* Эти логариѳмы изображаются такъ: $\overline{1}+\frac{z}{x}$, $\overline{2}+\frac{z}{x}$, $\overline{3}+\frac{z}{x}$ . . . . . и вообще $\overline{n}+\frac{z}{x}$ есть логариѳмъ правильной десятичной дроби, который показываетъ, что если найдется соотвѣтствующее число, десятичной части $\frac{z}{x}$ логариѳма, какъ величины постоянной, неизмѣняющейся, и оное уменьшится въ 10^n разъ, т. е. раздѣлится на единицу съ такимъ числомъ нулей, сколько отрицательная характеристика имѣетъ единицъ, (или все тоже, если перенесется запятая влѣво, чрезъ столько цыфръ, сколько въ отрицательной характеристикѣ единицъ), то въ результатѣ получится соотвѣтствующее число, логариѳма $\overline{n}+\frac{z}{x}$.

И обратно, *отрицательная характеристика, (поданный соотвѣтствующей десятичной дроби) опредѣляется числомъ нулей до запятой и + единица; или все тоже, — числомъ недостающихъ десятичныхъ цыфръ до запятой и + единица.* Для опредѣленія же десятичной части логариѳма, должно въ данной дроби десятичныя цыфры принять за цѣлыя числа: тогда соотвѣтствующій, въ таблицахъ, логариѳмъ безъ характеристики и будетъ искомимъ.

§ 139.

И такъ изъ послѣднихъ трехъ §§ видѣли, что какъ бы неизменяли характеристику, дѣйствіемъ сложенія, или вычитанія, по десятичная часть логариѳма всегда остается постоянною; по этому, чтобъ данныхъ логариѳмовъ

$$n+\frac{z}{x}$$

$$(n-m)+\frac{z}{x}$$

$$\bar{n}+\frac{z}{x}$$

опредѣлить соотвѣтствующія числа, то первоначально должно найти оныя для десятичной части логариѳма, т. е. для $\frac{z}{x}$, какъ постоянной величины, а потомъ найденное число, судя по характеристикѣ, или увеличить, или уменьшить въ 10^n разъ; и такъ вся трудность состоитъ въ опредѣленіи соотвѣтствующаго числа, логариѳму $\frac{z}{x}$.

Трудность эта уничтожается тѣмъ замѣчаніемъ (§ 135), что дробному логариѳму $\frac{z}{x}$ вообще соотвѣтствуетъ такое число, въ которомъ цѣльная часть состоитъ изъ одной простой цыѳры; въ самомъ дѣлѣ, взявъ выводъ (a) § 137:

$$\text{l}.2{,}6585=\text{l}\frac{26585}{10000}=26585-\text{l}.10000=4+\frac{z}{x}-4=\frac{z}{x},$$

показанное замѣчаніе становится очевиднымъ; ибо изъ него прямо усматриваемъ, что соотвѣтствующее число для десятичной части логариѳма $\frac{z}{x}$ есть 2,6585; и чтобъ получить оное, то должно: *найдя логариѳму* $\frac{z}{x}$, *соотвѣтствующее въ таблицахъ цѣлое число*, какъ бы оно велико небыло, *раздѣлить его на единицу съ такимъ числомъ нулей, сколько въ немъ цыфръ безъ одной;* или все тоже, *поставить предъ послѣднею, съ лѣвой руки, цыфрою запятую;* послѣ чего вычисленіе окончить легко, помноживъ, или раздѣливъ выводъ на 10^n, смотря по значенію данной характеристики.

Примѣчаніе. Поставляемъ разъ и на всегда за правило, чтобы, опредѣляя соотвѣтствующее число для десятичной части логариѳма, брать изъ таблицъ его съ большимъ числомъ цыфръ; ибо этимъ назначимъ крайнюю степень его точности. Например, взявъ, за соотвѣтствующее число, логариѳма $\frac{z}{x}$, изъ таблицъ 26, по уменьшеніи его на 10 выйдетъ 2,6; на противъ, взявъ 26585, выйдетъ 2,6585 и второе противу перваго будетъ точнѣе на 0,0585.

Вотъ всѣ преимущества системы, имѣющей основаніемъ логариѳмовъ число 10, предъ всѣми другими.

Употребленіе таблицъ логариѳмовъ.

§ 140.

Въ таблицахъ нельзя помѣстить логариѳмовъ всѣхъ чиселъ, то включаютъ только логариѳмы цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до извѣстнаго предѣла (Коллетовы доходятъ до 108,000); по сему для употребленія логариѳмовъ въ численныхъ выкладкахъ, должно умѣть: 1) *опредѣлить* *логариѳмъ даннаго числа;* 2) *опредѣлить число соотвѣтствующее данному логариѳму.*

1. *Опредѣлить логариѳмъ даннаго числа.*

Сначала разсмотримъ цѣлыя числа. Если данное число не болѣе 108000, то отыскиваютъ число въ таблицахъ, въ столбцѣ, означенномъ буквою N (nombres) и противъ него находятъ логариѳмъ его.

Пусть данное число 34735879, превышающее предѣлы таблицъ. Это число состоитъ изъ 8 цыѳръ, слѣд. характеристика его логариѳма есть 7 и остается только отыскать десятичную часть. Но изъ сказаннаго въ (§ 136 и 137) слѣдуетъ, что эта десятичная часть есть таже самая, какая и въ 1.34735,879 Пріуготовивъ такимъ образомъ число, т. е. *отдѣливъ съ правой руки столько цыфръ, чтобы остальная часть числа, съ лѣвой руки, находилась въ таблицахъ,* получимъ число, заключающееся между 34735 и 34736; и такъ, логариѳмъ его равенъ 1.34735 *съ частію разности* между 1.34735 и 1.34736. По таблицамъ 1.34735 = $\overline{54}07673$. (ненужно преписывать характеристику). Тамъ же находимъ, что 1.34736 = $\overline{54}07798$ (черты, проведенныя надъ обѣими логариѳмами, показываютъ равныя и ненужныя цыѳры); и разность между 1.34736 и 1.34735 есть 125 единицъ порядка 7-ой десятичной цыѳры.

Теперь, чтобъ получить ту часть разности, которая, бывъ приложена къ 5407673 давала бы логариѳмъ числа 34735,879, должно составить вопросъ: *если*

1-*ца разности* (между числами 34736 и 34735) *даетъ разность* 125 *десятимилліонныхъ* (между ихъ логариѳмами), *то* 0,879 *или* $\frac{1}{1000}$. 879 *разности* (между числами 37435,879 и 37435) *какую дастъ разность* (между ихъ логариѳмами)?

Очевидно *тысячную* долю 125, повторенную 879 разъ; посему 125 имѣемъ право раздѣлить на 1000 и частное умножить на 789 (§ 99), т. е. на разность чиселъ; и такъ

$$x = \frac{125}{1000} . 789 = \frac{109.875}{1000} = 109,875$$

слѣд. 109,875 или лучше 110 десятимилліонныхъ выражаетъ количество, какое должно придать къ 5407673. И такъ логариѳмъ даннаго числа есть 7,5407673.

Но чтобъ показанному рѣшенію дать *общее правило*, то возмемъ, составленный нами результатъ разности

$$x = \frac{125}{1000} . 879,$$

изъ коего имѣемъ

$$x = 125 \times 0,879$$

но 125 есть разность логариѳмовъ, а 0,879 разность чиселъ; слѣд., чтобъ получить ту часть разности, между логариѳмами, которая бывъ предана къ меньшему изъ двухъ послѣдовательныхъ, въ таблицѣ, логариѳмовъ, въ результатѣ давала бы искомый логариѳмъ даннаго числа, то должно найти: 1-е, *разность логариѳмовъ, послѣдовательныхъ соотвѣтствующихъ чиселъ, между коими совмѣщается данное число*; 2-е, *раз-*

ность, между даннымъ числомъ и ближайшимъ къ нему меньшимъ; и 3-е, *первый выводъ умножить на вторый.*

Въ Алгебрѣ доказано, что такое вычисленіе разности никогда небываетъ точно, но тѣмъ болѣе приближается къ истинѣ, чѣмъ данныя числа больше; такъ что приупотребленіи Коллетовыхъ таблицъ *погрѣшность* неимѣетъ вліянія на 7-ую десятичную цыфру, если данное число больше 10000. Вотъ почему нужно отдѣлять сколь возможно меньше цыфръ съ правой руки, когда данное число привышаетъ предѣлы таблицъ.

Показанныя вычисленія производятся слѣдующимъ порядкомъ.

Данное число, 34735879

отдѣля 3 цыфры справа, 34735,879

$$l.34736 = 5407798$$

$$l.34735 = 5407673$$

разность двухъ послѣдователь. логар. = 125

Данное число 34735,879

Ближайше меньшее 34735

разность = 0,879

произведеніе 125 × 0,879 = 109,875 = искомой разности.

Придавъ къ l.34735 = 5407673

разность 109,875 или....... 110

Сумма 5407783

слѣд. l.34735879 = 7,5407783

Дано еще число 7054039. Отдѣля въ немъ только 2 цыфры 70540,39

$$l.70540 = 8484355$$

разность табличная 64
разность чиселъ 0,39

произведеніе 24,18 или 24

Приложа къ l. 70540 = 8484355
найденную разность 24
получимъ въ суммѣ 8484379

Данное число имѣетъ 7 цыфръ; слѣ. l. 7054039 = 7,8484379.

Также найдется, что l. 70004739 = 7,8451274.

§ 141.

Опредѣлить число, соотвѣтствующее данному логариѳму.

Логариѳмъ можетъ быть положительнымъ и отрицательнымъ.

Если данъ положительный логариѳмъ, наприм., съ характеристикою 4, то отыскиваютъ его между логариѳмами чиселъ имѣющихъ 5 цыфръ, и если онъ находится въ таблицахъ, то выписываютъ прямо соотвѣтствующее ему число.

Если же этотъ логариѳмъ содержится между двумя послѣдовательными логариѳмами, въ такомъ случаѣ, искомое число равно меньшему изъ двухъ чиселъ, соотвѣтствующихъ симъ логариѳмамъ, съ *нѣкоторою дробью*, которую должно опредѣлить, покрайнѣй мѣрѣ, *приблизительно*.

Напримѣръ, данъ логариѳмъ 4,7325679, коего требуется найти соотвѣтствующее число. Въ таблицахъ ближайшій къ нему логариѳмъ есть 4,7325626, разность ихъ

53. Число соотвѣтствующее 4,7325626 есть 54021; разность между 1.54021 и 1.54022 равна 81. Приготовивъ такимъ образомъ данныя, составляемъ вопросъ: *если для разности* 81 (между двумя послѣдовательными логариѳмами) *есть разность* (между ихъ числамн) 1-ца, *то для разности* 53 (между даннымъ и ближайшимъ къ нему меньшимъ логариѳмомъ) *какая будетъ разность* (между ихъ числами)?

Очевидно 53 восемдесятъ первыхъ долей, или все тоже, эта разность будетъ въ 81 разъ меньше противъ 53 (§ 60), т. е.

$$x = \frac{53}{81} = 0,65 \text{ вѣрное до } 0,01$$

слѣд. 0,65 придавъ къ ближайшему меньшему числу 54021, будетъ 4,7325679 = 1.54021,65.

И такъ, чтобъ получить *ту часть разности, между числами,* которая, бывъ приложена къ ближайшему меньшему изъ двухъ послѣдовательныхъ, въ таблицѣ, чиселъ, въ результатѣ давала бы, даннаго логариѳма, искомое соотвѣтствующее число, должно найти 1-е *разность логариѳмовъ, между даннымъ и ближайшимъ къ нему меньшимъ;* 2-е *разность двухъ послѣдовательныхъ логариѳмовъ, между коими совмѣщается данный; и* 3-е *первый выводъ раздѣлить на вторый и отъ сего, полученную простую дробь обратить въ десятичную.*

Въ Алгебрѣ доказано, что такое вычисленіе разности имѣетъ *погрѣшность* вообще менѣе *сотыхъ* частей искомаго числа, если только оно больше 10000.

Показанное вычисленіе разности производится въ слѣдующемъ порядкѣ.

Данный логариѳмъ 4,7325679

Въ таблицахъ ближайшій къ нему

меньшій логариѳмъ 4,7325626

разность 53

соотвѣтствующее число логариѳму 4,7325626 есть 54021 и

l. 54022 = 4,7325707

l. 64021 = 4,7325626

разность 81

Частное $\frac{53}{81}$ = 0,65 вѣрное до 0,01.

Придавъ къ ближайшему меньшему числу . 54021

вычисленную разность 0,65

получимъ сумму 54021,65

слѣд. 4,7325679 = l. 54021,65

Также найдемъ, что 4,0794685 = l. 12007,94; вѣрное до 0,01.

Если характеристика логариѳма (положительнаго) меньше 4, то прикладываютъ къ ней надлежащее число единицъ, чтобъ, въ слѣдствіе примѣчанія, данныя числа были не меньше 10000; *потомъ отыскиваютъ число, соотвѣтствующее новому логариѳму*, и наконецъ дѣлятъ на 10, 100, 1000 . . . ., смотря потому, 1, 2, или 3 единицы были приложены къ характеристикѣ.

На прим., данъ логариѳмъ . 2,4567398

Приложивъ 2 единицы, будетъ . . . . 4,4567398 = l. 28624,63

Вѣрное до 0,01; слѣд. . . . 2,4567398 = l. 286,2463

Также найдемъ, что . . . . 0,3472586 = l. 2,224642.

Если же характеристика болѣе 4, то вычитаютъ излишнее число единицъ; и *опредѣливъ число соотвѣтствующее новому логариѳму*, умножаютъ оное на 10, 100, 1000 . . . ., смотря потому, 1, 2 или 3 единицы вычли изъ характеристики.

На прим., данъ логариѳмъ 7,6840567. Вычитая 3 единицы, будетъ 4,6840567 = l. 48312,19; слѣдственно 7,6840567 = l. 48312190 вѣрное до десятка (*въ этомъ случаѣ таблицы не могутъ дать ближайшаго числа*). Дано 13,7412769; будетъ 4,7412769 = l. 5511590; слѣд. 13,7412769 = l. 55115900000000; вѣрное *до одного десятка* милліоновъ.

§ 142.

Логариѳмы дробей. Если число составлено изъ цѣлаго числа съ дробью, то сначала цѣлое приводится въ смѣшанную дробь и потомъ вычитаютъ логариѳмъ знаменателя изъ логариѳма числителя. На прим.

$$l.\,359\,\frac{27}{43} = l.\,\frac{15464}{43} = 4{,}1893218 - 1{,}6334685 = 2{,}555353.$$

$$l.\,75{,}47325 = l.\,7547325 - 5 = 1{,}8777931$$

т. е. въ десятичной дроби, отбросивъ запятую отыскиваютъ логариѳмъ новаго числа, какъ цѣлаго, и потомъ вычитаютъ изъ характеристики столько единицъ сколько въ числѣ было десятичныхъ § 137.

Чтобъ опредѣлить логариѳмъ періодической дроби, то во первыхъ приводятъ ее въ обыкновенную, а потомъ поступаютъ, какъ выше показано. На примѣръ,

$$1.37,375375\ldots 1.37\frac{375}{999} = 1.\frac{36938}{999} = 1,5725856$$

Также

$$1.3,1430783078\ldots 1\frac{3142764}{999900} = 1,4973551.$$

§ 143.

Вопросъ: найти, помощію логариѳмовъ, правильной простой дроби равную десятичную, раздѣляется на двѣ части: *найти правильной простой дроби логариѳмъ, и посему логариѳму, отыскать десятичную дробь.*

Первый пріемъ. Пусть будетъ эта дробь, вообще изображена чрезъ $\frac{a}{b}$, коей, взявъ логариѳмъ, получимъ

$$1\frac{a}{b} = 1a - 1b$$

А какъ логариѳмъ числа a, меньше логариѳма b, слѣд. вторый нельзя вычесть изъ перваго, но дабы вычисленіе сдѣлать удобнымъ, придаютъ къ 1a столько единицъ, чтобъ изъ суммы можно было вычесть 1b; сдѣлавши это, и свершивши, на самомъ дѣлѣ, вычисленіе, изъ разности отымаютъ опять тоже самое число единицъ, (ибо количество непеременится, если къ нему приложится и въ тоже время отымется одно какое либо число § 27); и такъ, придавъ къ la — lb и въ тоже время, отнявъ n единицъ, получимъ

$$l\frac{a}{b} = la - lb + n - n = (la + n) - lb - n.$$

Примемъ, что $(la + n) - lb = \frac{z}{x}$, отъ чего выйдетъ

$$l\frac{a}{b} = \frac{z}{x} - n = \bar{n} + \frac{z}{x};$$

откуда соотвѣтствующую десятичную дробь, по § 138, опредѣлить легко.

Наприм., пусть требуется найти логариѳмомъ дроби $\frac{7}{9}$, а по логариѳму—десятичную дробь, равную $\frac{7}{9}$. Здѣсь тотчасъ усматриваемъ, что къ логариѳму числителя должно придать, а изъ логариѳма знаменателя вычесть 1-цу; и такъ

$$l\frac{7}{9} = l.7 + 1 - l.9 - 1.$$

Потомъ вычисляю:

$$\begin{array}{rr} & l.7 = 0,8450980 \\ & +1 \\ \hline & 1,8450980 \\ \text{вычтя} & l.9 = 0,9542425 \\ \hline & 0,8908555 \\ \text{еще вычтя} & 1 \\ \hline \end{array}$$

получимъ $l\frac{7}{9} = 0,8908555 - 1 = \bar{1},8908555$

Послѣ этого, найдя въ таблицахъ, приличиствующее число 77777, получимъ 7,7777—соотвѣтствующее дробной части логариѳма, (§ 139 примѣч.); по раздѣленіи чего еще 10, (соображаяся съ характеристикою), опредѣлимъ 0,77777, соотвѣтствующее число полному логариѳму $\bar{1}$,8908555; и такъ

$$\frac{7}{9} = 0,77777$$

т. е. получилась періодическая дробь.

Пусть еще требуется найти логариѳмъ дроби $\frac{3}{7854}$, а по логариѳму десятичную дробь.

Здѣсь должно къ l.3 придать 4 единицы, а изъ l.7854 вычесть 4 единицы; и такъ

$$\mathrm{l}\,\frac{3}{7854} = \mathrm{l}.3 + 4 - \mathrm{l}.7854 - 4$$

Вычисляю:

$$\begin{array}{rr} & \mathrm{l}.3 = 0,4771212 \\ & 4 \\ \hline & 4,4771212 \\ \text{Вычтя } \mathrm{l}.7854 = & 3,8950909 \\ \hline & 0,5820303 \\ \text{еще, вычтя } 4 & \\ \hline \end{array}$$

$$\text{получаю} \quad \mathrm{l}\,\frac{3}{7854} = \bar{4},5820303$$

$$\text{но } 0,5820393 = \mathrm{l}.\,3,8197$$

$$\text{слѣд., } \bar{4},5820303 = \mathrm{l}.\,0,0008197$$

Правильной десятичной дроби логариѳмъ опредѣляется легко; ибо извѣстно, что (§ 138) отрицательная характеристика равна числу недостающихъ цыфръ до запятой и + единица, а десятичная часть логариѳма находится всѣми десятичными цыфрами данной дроби, принимаемыми за цѣлыя числа. Такъ,

$$1.4{,}734 = 0{,}6572283$$

$$1.0{,}4734 = \bar{1}{,}6572283$$

$$1.0{,}04734 = \bar{2}{,}6572283$$

$$1.0{,}004734 = \bar{3}{,}6572283$$

$$1.0{,}0004734 = \bar{4}{,}6572283$$

Второй пріемъ. Чтобъ простой правильной дроби, чрезъ логариѳмы, найти десятичную, ей равную, то увеличиваютъ только числителя 3 на 10000 (взявъ прежнюю дробь) и чрезъ то получаемъ дробь неправильную $\frac{3.(10000)}{7854}$ и

$$1\frac{3.(10000)}{7854} = 1.3 + 4 - 1.7854$$

Вычисливъ $1.3 + 4 = 4{,}4771212$

вычитаютъ $1.7854 = 3{,}8950909$

от чего $1\frac{3.(10000)}{7854} = 0{,}5820303$

Соотвѣтствующее число сему логариѳму есть 3,8197, слѣд.

$$\frac{3.(10000)}{8854} = 3{,}8197$$

откуда, по § 41, урав. (c)

$$\frac{3}{7854} = \frac{3{,}8197}{10000} = 0{,}00038197$$

Сей способъ отличается отъ перваго тѣмъ только, что здѣсь для опредѣленія десятичной дроби, равной $\frac{3}{8754}$, найденное соотвѣтствующее число 3,8197 уменьшили въ 10000 разъ,—судя по величинѣ дроби $\frac{3}{7854}$; въ то время, какъ въ первомъ способѣ, *тоже сдѣлали*, *судя по отрицательной характеристикѣ* $\bar{4}$. Вообще же оба способа одинаково просты и одинаковы строги.

Третій пріемъ. Или, чтобъ простой правильной дроби найти логариѳмъ, то вычитаютъ логариѳмъ числителя изъ логариѳма знаменателя; и въ этомъ случаѣ, десятичная часть логариѳма получается *отрицательною* (§ 128), потому что разность остается отъ логариѳма знаменателя, какъ вычитаемаго, которому присвоенъ знакъ —, (§ 27). Такъ,

$$1\frac{7}{9} = -(1.9 - 1.7) = -0,1091444$$

Чтобъ по этому логариѳму найти соотвѣтствующее число, которое должно выразится десятичною дробью, прикладываютъ къ логариѳму столько единицъ, чтобъ первый изъ вторыхъ можно было вычесть, потомъ свершивши дѣйствіе вычитанія, опять отымаютъ тоже число единицъ. Такъ

$$1\frac{7}{9} = +1 - 0,1091444 - 1 = 0,8908555 - 1 = \bar{1},8908555$$

опять вышелъ прежній логариѳмъ (т. е. какой найденъ по первому пріему), покоему, соотвѣтствующее число найти уже легко.

Отсюда видимъ, что первый пріемъ вычисленія сокращеннѣе и удобнѣе настоящаго, потому что симъ, получивши отрицательный логариѳмъ, мы не можемъ отыскать *прямо* соотвѣтствующаго числа, а первоначально должны *обратить* его въ логариѳмъ, коего бы характеристика была отрицательная, а десятичная часть положительная; словомъ, должны *перевести* на первый пріемъ вычисленія. Такимъ же образомъ если требуются найти соотвѣтствующія числа, логариѳмовъ:

$$— 1,1313556,$$
$$— 2,3247717,$$

то къ первому придавъ, и въ тоже время отнявъ число 2, а во второмъ — число 3, получимъ

$$2 — 1,1313556 — 2 = 0,8686444 — 2 = \bar{2},8689444$$
$$3 — 2,3247717 — 3 = 0,6752283 — 3 = \bar{3},6752283.$$

Десятичной части перваго логариѳма, соотвѣтствуетъ число 7,39, а втораго — числа 4,734; слѣд. всего логариѳма $\bar{2}$,8686443 искомое число есть $\frac{7,39}{100} = 0,0739$, а логариѳма $\bar{3}$,6752283 будетъ $\frac{4,734}{1000}$ или 0;004734.

Прибавленіе цѣлыхъ единицъ къ логариѳму, за примѣчаніемъ къ § 139, неназначается опредѣленно. На прим., положимъ требуется найти соотвѣтствующее число логариѳма — 2,4537875. Здѣсь можемъ приложить и 3, и 4, и 5, и 6, и 7 единицъ. Приложимъ 7, (чтобъ сдѣлать характеристику равную 4 (§ 140), т. е. вычтемъ данный логариѳмъ изъ 70000000. Получимъ 7 — 2,4537875 = 4,5462125 = 1·35173,25; но прикладывая къ характеристикѣ 7 единицъ (§ 137), мы умножили число на 10000000; слѣд., чтобы получить истинную величину искомаго числа, надобно перенесть запятую на 7 рядовъ влѣво, что даетъ — 2,4537875 = 1.0,003517325, вѣрпое до 0,000000001.

Изъ сего видимъ, что при отыскапіи чиселъ, соотвѣтствующихъ отрицательнымъ логариѳмамъ, ненужно находить разность (§ 141) между логариѳмами, ибо, цѣлое число, находимое въ таблицахъ, представляетъ желаемую степень вѣрности. Наприм.,

$$-0,981749=1.0,1042918$$

$$-3,2781036=1.0,00052710$$

Четвертый пріемъ. Есть еще способъ, по отрицательному логариѳму, *изображенному третьимъ способомъ*, находить соотвѣтствующее число. Пусть, наприм., данъ логариѳмъ — 2,3247717; замѣчая, что $1.1=0$, можемъ взять

$$1.1-2,3247717.$$

Назвавъ чрезъ x число, соотвѣтствующее логариѳму 2,3247717, будетъ $2,3247717=1.x$, вычтя же обѣ части послѣдняго выраженія изъ 1.1, получимъ

$$1.1-2,3247717=1.1-1x=1\frac{1}{x};\text{ т. е.}$$

$$1\frac{1}{x}=-2,3247717$$

Слѣд., чтобъ отыскать требуемое число, *достаточно раздѣлить единицу на число, соотвѣтствующее данному логариѳму, взятому безъ знака.* Но какъ x опредѣляется только приблизительно, и даже иногда весьма неудовлетворительно, по этому и частное отъ раздѣленія на сіе число, нельзя получить съ желаемою точностію, (какъ это легко увидѣть, раздѣливъ, въ самомъ дѣлѣ, 1-цу на соотвѣтствующее число 171,7 логариѳма 2,3247717 и, сравнивъ его съ тѣмъ же вычисленіемъ, по какому либо изъ предыдущихъ пріемовъ). Однакожъ въ вопросахъ, нетребующихъ большей точности, для скорости, иногда, употребляется и этотъ способъ. Вообще же, первый и вторый способъ вычисленія, *простѣе третьяго и строже четвертаго.*

§ 144.

При употребленіи логариѳмовъ часто случается дѣлать нѣсколько послѣдовательныхъ сложеній и вычитаній. Эти дѣйствія приводятся къ одному сложенію посредствомъ *ариѳметическаго дополненія логариѳмовъ.*

Ариѳметическимъ дополненіемъ логариѳма называется *число, составляющее съ этимъ логариѳмомъ* 10 *цѣлыхъ единицъ,* или число, которое получается чрезъ вычитаніе даннаго логариѳма изъ 10. Наприм., дополненіе логариѳма

3,4725843 есть $10 - 3{,}4725843 = 6{,}5274157$;

дополненіе $2{,}7325490 = 10 - 2{,}7325490 = 7{,}2674510$

Чтобы составить дополненіе, должно вычесть первую цыфру съ правой руки изъ 10, *всѣ же изъ* 9; если съ правой руки находятся нули, то они пишутся и въ дополненіи, которое посему можно писать прямо, взглянувъ на данный логариѳмъ, или по диктовкѣ онаго.

Найти число, выраженное чрезъ $l - l' + l'' - l''' + l^{IV} - l^{V} + \ldots$, гдѣ l, l'', l''' . . . суть логариѳмы, которыя надобно вычесть между собою.

Замѣтимъ, что это выраженіе (§ 33), можно представить въ видѣ

$$1 + 1'' + 1^{v} + (10 - 1') + (10 - 1''') + (10 - 1^{iv}) - 30, \text{ или}$$

$$1 + 1'' + 1^{v} + \textit{доп.}\, 1' + \textit{доп.}\, 1''' + \textit{доп.}\, 1^{iv} - 30;$$ т. е. *должно сложить логариѳмы слагаемые съ дополненіями логариѳмовъ вычитиемыхъ и вычесть изъ суммы столько разъ* 10, *сколько взято дополненій.*

По обыкновенному способу, составили бы сумму слагаемыхъ и сумму вычитаемыхъ членовъ, и вычли бы меньшую сумму изъ большей, слѣд. сдѣлали бы два сложенія и одно вычитаніе; между тѣмъ какъ здѣсь дѣлаемъ одно сложеніе, а вычисленіе дополненій такъ легко, что нельзя принимать этого за особое дѣйствіе.

Пусть, наприм., требуется отыскать $1.\frac{7}{15}$, имѣемъ

$$1.\frac{7}{15} = 1.7 - 1.15 = 1.7 + \textit{доп.}\, 1.15 - 10$$

$$
\begin{array}{rr}
 & 1.7 = 0{,}84509804 \\
 & \textit{доп.}\ 1.15 = 8{,}82390874 \\
\hline
 & 9{,}66900678 \\
\text{вычтя } 10\ldots\ldots & -\ 0{,}33099322 \\
\text{или}\ldots\ldots & -\ \bar{1}{,}66900678
\end{array}
$$

Сложивъ дополненіе 1.15 съ 1.7, что даетъ 9,66900678, изъ вывода должо вычесть 10 и это можно сдѣлать двоякимъ образомъ: или вычтя выводъ изъ 10 и приписывая къ остатку знакъ —, что даетъ — 0,33099322 (§ 143 третій пріемъ); или же вычтя 10 изъ одной характеристики 9, нетрогая десятичной, что даетъ $\bar{1}$,66900678 (первый пріемъ). Послѣдній способъ хотя и выгоднѣе, третьяго, но при употребленіи его, въ случаѣ умноженія, или дѣленія логариѳмовъ, гораздо сложнѣе третьяго, что видѣть можно изъ слѣдующцаго.

1-е, На прим., умноживъ логариѳмъ. . . . $\bar{3},4720563$
числомъ 8 8

для десятичной части получимъ . . . . . . $+ 3,7764504$
а для характеристики . . . . $\bar{24}$

что даетъ наконецъ. . . . . $\bar{21},7764504$

2-е, Если требуется раздѣлить логариѳмъ $\bar{3},4720563$ на 8, то дѣлятъ характеристику особо, а десятичную часть особо и первое частное вычитаютъ изъ втораго. Такъ,

$$\frac{\bar{3},4720563}{8} = \frac{0,4720563}{8} + \frac{\bar{3}}{8} = \frac{0,4720563}{8} - \frac{3}{8}$$

Вычисля, находимъ, $\frac{0,4720563}{8} = 0,0590070$; — $\frac{3}{8} = -0,375$; слѣд. $\frac{\bar{3},4720563}{8} = 0,0590070 - 0,375$. А какъ вычитаніе невозможно, то прикладываютъ къ уменьшаемому и къ вычитаемому столько единицъ, чтобъ можно было вывесть десятичную часть втораго изъ десятичной части перваго (§ 27, 11); приложивъ по 1-цѣ, получаемъ $1,0590070 - 1,375$, или $1,0590070 - 0.375 - 1 = 0,6840070 - 1 = \bar{1},06840070$; и такъ $\frac{\bar{3},4720563}{8} = \bar{1},06840070$.

Теперь покажемъ *приложеніе* сихъ дѣйствій.

§ 145.

Умноженіе и дѣленіе. Отыскать приближенную величину произведенія $\frac{31}{71} \times \frac{13}{12} \times \frac{47}{48}$.

Назвавъ чрезъ x это произведеніе, по (§ 127 и 129), имѣемъ

$$lx = (l.31 + l.13 + l.47) - (l.71 + l.12 + l.42)$$

$$\begin{aligned}
l.31 &= 1,49136169 \\
l.13 &= 1,11394335 \\
l.47 &= 1,67209786 \\
\textit{доп.}\ l.71 &= 8,12493874 \\
\textit{доп.}\ l.12 &= 8,92081875 \\
\textit{доп.}\ l.42 &= 8,31875876 \\
\hline
&\bar{1},64191915 = 29,64191915 - 30
\end{aligned}$$

прикладывая . . . 5

получимъ 4,64191915

4,6419192 = l.43844

разность. . . . . 89 | $\frac{89}{99} = 0,89$
табличная разность . . . 99

слѣд. 4,6419191 = l.43844,89 и требуемое произведеніе будетъ 0,4384489, до 0,0000001.

Составленіе степеней. При возвышеніи числа, въ какую ни есть степень, логариѳмъ его умножается на показателя степени; по этому, чтобъ получить выводъ, вѣрный до 7-й десятичной цыфры включительно, въ логариѳмѣ сего числа должно быть больше 7 десятичныхъ. Въ таблицахъ Коллета, послѣ обыкновенныхъ логариѳмовъ, помѣщены логариѳмы съ 20-ю десятичными; слѣд. всегда можно взять эти логариѳмы болѣе двумя или тремя цыфрами, противу обыкновенныхъ таблицъ.

Возвысить 29 ***въ*** 5-***ю степень***? будетъ

$$1.29^5 = 51.29$$

но

$$1.29 = 1,462397998$$

слѣд.

$$51.29 = 7,11989990$$

отнявъ 3 единицы . . . 3

получимъ . . . 4,31199000

4,3119868 = 1.20511

разность. . . 32 | 32

разность табличная . . 212 | 212 = 0,15

слѣд. 20511150 есть искомое число вѣрное до 10.

Вычислить $(2)^{64}$

Имѣемъ 1. 2 = 0,3010299956

посему 64. 1.2 = 19,2659197

отнявъ 5 единицъ 4,2659197

4,2679022 = 1.18446

разность- . . . . . 175 | 175

табличная разность . . . . . 235 | 235 = 0,74

И такъ 4,2659197 = 1.18446,74

слѣд. искомое число = 18446740000000000000, вѣрное до 10 *трилліоновъ*, т. е. 13 послѣднихъ цыфръ немогутъ быть помѣщены въ таблицахъ; но въ этихъ примѣрахъ предполагается, что желательно получить только понятіе о величинѣ числа, и мы видѣли съ какою скоростію это дѣлается.

Вычислить еще $\left(\frac{2}{3}\right)^{11}$

Съ дополненіями	*Безъ доп.* 3-мъ спос. § 143
$l.2 = 0{,}3010299956$	$l.3 = 0{,}4771212547$
доп. $l.3 = 9{,}5228787453$	$l.2 = 0{,}3010299956$
$l\frac{2}{3} = \bar{1}{,}8239087409$	$l\frac{2}{3} = -0{,}1760912591$
$11.l\frac{2}{3} = \bar{2}{,}0629961499$	$11.l\frac{2}{2} = -1{,}9370038510$
прилагая 6	прилагая 6
получимъ $4{,}0629961$	$4{,}0629961$

Этому логариѳму соотвѣтсвуетъ число 11561,02, слѣд. 0,01156102 есть искомое число, вѣрное до 0,00000001.

Извлеченіе корней. Для сего дѣйствія достаточно братъ логариѳмъ съ 7-ю десятичными.

Извлечь корень 7-й степени изъ 11562049.

$$\text{Имѣемъ } l\sqrt[7]{11562049} = \frac{l.11562049}{7}$$

$l.11620 =$	0652061	Разность таблич. 374
$l.11620{,}49 - l.11620 =$	183	разность чиселъ 0,49
$l.11620{,}49 =$	0652244	3366
слѣд. $l.1162049 =$	$6{,}0652244$	1496
$\frac{l.1162049}{7} =$	$0{,}8664606$	183,26
Прикладывая 4....	$4{,}8664606$	

$$4{,}8664506 = l.73529.$$

Разность . . . . 19 | $\frac{19}{59} = 0,32$
Разность табличная 59 |

И такъ $4,8664606 = \mathrm{l}.73529,32$

слѣд. искомый корень $= 7,352932$ вѣрно до 0,000001.

Вычислить $\sqrt[11]{\frac{13}{27}}$; $\mathrm{l}\sqrt[11]{\frac{13}{27}} = \frac{\mathrm{l}.13 - \mathrm{l}.27}{11}$

Съ дополненіями

$\mathrm{l}.13 = -1,11394335$

доп. $\mathrm{l}.27 = -8,56863624$

$\mathrm{l}\frac{13}{27} = \bar{+}, \quad 68257959 = -11 + 10,68257959$

$\frac{1}{11}.\mathrm{l}.\frac{13}{27} = \bar{1},97114360$

Прикадывая 5

получимъ $4,97114360 = \mathrm{l}.93571,49$.

Слѣд. искомый корень есть 0,9357149, вѣрное до 0,0000001.

Такимъ же образомъ найдемъ, что

$\sqrt[7]{\left(\frac{16}{9}\right)^5} = \bar{1},154118$; $(73)^7 = 11047390000000$; $(0,0457)^{11} = 0,000000000000000082984$.

Конецъ второй части.