ОБРАЩЕНІЕ ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

М. А. Тихомандрицкаго.

ХАРЬКОВЪ.
Въ Университетской Типографіи.
1885.

Напечатано по распоряженію Правленія Императорскаго Харьковскаго Университета.

Ректоръ *И. Щелковъ.*

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Основаніе теоріи абелевыхъ интеграловъ, достигшей уже въ настоящее время значительнаго развитія, положено самимъ безсмертнымъ Абелемъ, — однимъ изъ величайшихъ математиковъ всѣхъ временъ — *знаменитою теоремою, носящею его имя.* Вскорѣ однако послѣ опубликованія своей теоремы*) Абель умеръ, какъ будто онъ хотѣлъ сдѣлать только то, чего никто не могъ, предоставивъ остальную работу другимъ, какъ сказалъ Якоби на своей лекціи, посвященной этой теоремѣ: Abel starb unmittelbar nach der Bekanntmachung seines Theorems, als hätte er nur das thun wollen, was keiner vermochte und dann die übrige Arbeit andern überlassen**), выразивъ этими словами признаніе какъ важнаго значенія самой теоремы, такъ равно и геніальности ея автора.

Первыми изъ этихъ другихъ, которымъ принадлежитъ честь разработки теоремы Абеля, въ частномъ случаѣ — гиперэллиптическихъ интеграловъ, были самъ *Якоби* и работавшій надъ тѣмъ-же предметомъ подъ его руководствомъ *Ришело.* Большой мемуаръ Абеля, посвященный выводу этой теоремы, озаглавленный: «Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue des fonctions transcendantes»***), представленный имъ въ парижскую академію 30 октября 1826 г., былъ напечатанъ въ Mémoires présentés par les savants étrangers à l'Académie des sciences de Paris только въ 1841 г.****) и сдѣлался общеизвѣстнымъ такимъ образомъ значительно позже работъ Якоби и Ришело, слѣдовавшихъ за вышеупомянутыми сообщеніями Абеля въ 3. и 4. томахъ журнала Креля, хотя опередилъ ихъ какъ общностью

---

*) J. Crelle Bd. 3. *Abel*, Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes.

J. Crelle Bd. 4. 6-го янв. 1829 г. Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes.

**) Записано въ 1835 — 36 г. Розентайномъ; лекція 69.

***) *Мемуаръ XII новаго изданія* Oeuvres complètes de N. H. Abel *подъ редакціей* Sylow et Lie. Christiania. 1881. T. I.

****) Почему и не могъ попасть въ первое изданіе его Oeuvres complètes, подъ редакціей его учителя и друга Holmboë, 1839 г.

изслѣдованія, такъ и тѣмъ, что, по сдѣланному въ первый разъ Sylow'ымъ замѣчанію, содержитъ въ себѣ опредѣленіе того, играющаго важную роль въ теоріи абелевыхъ интеграловъ, числа, которое Риманъ обозначалъ впослѣдствіи чрезъ p, Клебшъ назвалъ родомъ (Geschlecht), а Вейерштрассъ рангомъ, именно — числа линейно независимыхъ интеграловъ перваго рода, зависящихъ отъ ирраціональности, опредѣляемой общимъ алгебраическимъ уравненіемъ: $f(x,y)=0$. Но, конечно, это произошло вслѣдствіе различія научныхъ направленій обоихъ великихъ математиковъ: въ то время какъ Абель стремился къ бо̀льшей общности результатовъ, Якоби избиралъ для своихъ изысканій конкретные случаи, чтобы достигнуть бо̀льшей ясности представленій, что̀ онъ прямо выразилъ на одной изъ своихъ лекцій того-же курса: «Es weniger darauf ankommt eine möglichst-grosse Allgemeinheit zu erreichen, als vielmehr mit beschränkten Resultaten eine klare Vorstellung der Sache zu verbinden»*). Вѣрный этому принципу во всѣхъ своихъ ученыхъ работахъ, Якоби ограничился изслѣдованіемъ гиперэллиптическихъ интеграловъ (ультраэллиптическихъ по Лежандру) и, — по собственнымъ его словамъ**) — лично и чрезъ посредство Ришело сдѣлалъ для этой теоріи *почти то-же самое, что Лежандръ для теоріи эллиптическихъ функцій.*

Истолковавъ значеніе абелевой теоремы вообще, изъ одного частнаго случая онъ вывелъ, ограничиваясь, какъ сказано сейчасъ, гиперэллиптическими интегралами и притомъ случаемъ, когда полиномъ подъ квадратнымъ корнемъ имѣетъ только вещественные корни, соотношенія между періодами каждаго интеграла 1. рода и такимъ образомъ опредѣлилъ число независимыхъ періодовъ интеграловъ этого рода, затѣмъ изъ общаго случая теоремы, показавъ предварительно, что каждый гиперэллиптическій интегралъ можетъ, благодаря многоперіодичности своей, принимать при данномъ верхнемъ предѣлѣ всякое значеніе, и слѣдовательно, что между значеніями каждаго такого интеграла въ отдѣльности и его предѣломъ нѣтъ такой зависимости, по которой можно бы одну величину принимать за функцію другой, онъ вывелъ правильную постановку вопроса объ обращеніи гиперэллиптическихъ интеграловъ, получившаго съ тѣхъ поръ названіе задачи Якоби, которая и составляетъ предметъ *настоящаго сочиненія.* Затѣмъ онъ вывелъ изъ теоремы Абеля *теорему сложенія абелевыхъ функцій*; кромѣ того доказалъ теорему о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ интегралахъ 3. рода. Ришело кромѣ того, а также и Hermite, затронули вопросъ о преобразованіи гиперэллиптическихъ интеграловъ, сдѣлавшійся потомъ предметомъ изысканій Кёнигсбергера, Краузе и нѣкоторыхъ другихъ.

Но, правильно поставивъ вопросъ объ обращеніи гиперэллиптическихъ интеграловъ, Якоби не рѣшилъ однако своей задачи. Первыя рѣшенія, почти одновременно, но совершенно не-

---

*) Лекція 69-я того-же курса.

**) Тамъ-же.

зависимо другъ отъ друга были получены *Гёпелемъ**), умершимъ незадолго до появленія въ печати его изслѣдованія, и *Розенгайномъ***) при помощи функціи двухъ перемѣнныхъ, представляющей обобщеніе якобіевскихъ ϑ — функцій, чрезъ распространеніе на нихъ того способа перехода отъ ϑ къ интеграламъ, которому слѣдовалъ Якоби въ своихъ лекціяхъ объ эллиптическихъ трансцендентныхъ; изъ упомянутыхъ работъ послѣдняя, т. е. Розенгайна, стоитъ ближе къ нимъ. Этотъ способъ рѣшенія задачи до-сихъ-поръ однако не былъ распространенъ далѣе какъ на абелевы интегралы 3-го ранга: и это послѣднее было сдѣлано, при помощи однако римановской теоріи абелевыхъ интеграловъ, *Веберомъ* въ его «Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlechte 3» (H. Weber, Berlin. Reimer 1876) и *F. Schottky* — «Abriss einer Theorie der Abelschen Functionen von drei Variabeln» (Leipzig. Teubner. 1880), въ которой послѣдній переходитъ отъ общихъ Θ — функцій Вейерштрасса къ абелевымъ интеграламъ, по пути, подобному пути Гёпеля и Розейгайна. Съ помощію теоріи ϑ — функцій рѣшена была задача Якоби (хотя и не изъ нея выведена) и не только для гиперэллиптическихъ интеграловъ, но и для абелевыхъ интеграловъ вообще, притомъ безъ всякихъ вычисленій, рядомъ однихъ только умозаключеній на основаніи принципа Дирихлэ *Риманомъ*. Интересно, что Якоби какъ будто предвидѣлъ это уже въ 1835 г.: «Diese Theorie muss durch einfache Betrachtungen durchgeführt werden, und man wird in ihrer Ausbildung keine Rechnung mehr brauchen, welche durch die Intensität der Gedanke ersetzt wird. Diese Theorie muss daher nothwendig der Glanzpunkt der Mathematik werden, weil hier die Resultate ohne Rechnung unmittelbar zur Anschauung gelangen»***). *Но если теорія Римана и оправдала предвидѣніе Якоби* и, вызвавъ удивленіе современниковъ, надолго завладѣла умами многихъ математиковъ, и не одной только Германіи, то, съ другой стороны, чрезвычайная сжатость и главнымъ образомъ синтетическій способъ изложенія добытыхъ ретультатовъ затруднили для многихъ пониманіе особенно первой части мемуара Римана****); возникло кромѣ того сомнѣніе въ самомъ принципѣ Дирихлэ, на которомъ у него все основано. Это вызвало, съ одной стороны, комментаріи его учениковъ и послѣдователей, изъ которыхъ я назову только Прима, Неймана, Роха, Кёнитсбергера, Вебера, Томэ, — съ другой стороны заставило Клебша и Гордана выбрать новый путь для рѣшенія того-же вопроса, путь геометрическій, и тѣмъ положить начало геометрической школѣ функціональ-теоретиковъ, къ которымъ должно также отнести Noether'a, Brill'я,

---

*) *Goepel*, Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis. J. Crelle, Bd. 35; p. 277.

**) *G. Rosenhain*, Mémoires sur les fonctions de deux variables et à 4 periodes qui sont les inverses des intégrales ultraelliptiques de la 1-re classe. 1851.

***) Та-же 69 лекція.

****) *Riemann*, Theorie der Abelschen Functionen. J. Crelle, Bd. 54.

Клейна, Линдемана. Въ числѣ побужденій къ избранію другого пути для рѣшенія задачи Якоби, Клебшъ и Горданъ въ предисловіи къ своей Theorie der Abelschen Functionen (Leipzig, Teubner. 1866) кромѣ трудности пониманія римановой теоріи абелевыхъ интеграловъ, происходящей отъ того, что у Римана функціи не выводятся аналитически, а строятся синтетически, выставляютъ также и то обстоятельство, что ϑ — функціи у него не вытекаютъ изъ самихъ интеграловъ, но берутся, такъ-сказать, со стороны готовыми; это-же считаетъ слабымъ пунктомъ римановой теоріи и Нейманъ, прекрасно изложившій эту теорію примѣнительно къ гиперэллиптическимъ интеграламъ въ своихъ: « Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abelschen Integrale ». (Leipzig, 1865. Teubner). Въ теоріи Клебша и Гордана переходъ отъ интеграловъ къ ϑ — функціямъ совершается чрезъ посредство интеграловъ 3. рода, которые приводятъ ихъ къ теоріи вспомогательныхъ функцій $T_{\xi\eta}(x)$. Теорія этихъ функцій однако столь сложна, что Бріо въ своей « Theorie des fonctions Abéliennes » (Paris, 1879. Gauthier-Villars), изложивъ первую часть во многомъ схоже съ Клебшемъ и Горданомъ, съ того момента какъ слѣдовало совершить переходъ отъ интеграловъ къ ϑ, послѣдовалъ за Риманомъ.

Но, въ то время, какъ Гёпель и Розенгайнъ рѣшали задачу Якоби обратнымъ способомъ, исходя изъ свойствъ обобщенной на многія перемѣнныя ϑ — функціи Якоби, и нѣсколько ранѣе того какъ Риманъ опубликовалъ свою теорію абелевыхъ интеграловъ, построенную съ помощію принципа Дирихлэ, Вейерштрассъ вывелъ теорію гиперэллиптическихъ интеграловъ — притомъ какого угодно ранга — прямо изъ абелевой теоремы. Первыя указанія на полученные имъ результаты мы находимъ въ статьѣ: « Beitrag zur Theorie der Abelschen Integrale », помѣщенной въ Programm des Gymnasiums zu Braunsberg für das Jahr 1849, посвященной главнымъ образомъ выводу соотношенія между періодами интеграловъ перваго и втораго рода; болѣе подробное сообщеніе о томъ-же сдѣлано имъ въ 47 т. журнала Креля въ статьѣ подъ заглавіемъ: « Zur Theorie der Abelschen Functionen ». Затѣмъ въ 52 т. того-же журнала помѣщенъ имъ неоконченный мемуаръ подъ заглавіемъ: « Theorie der Abelschen Functionen », въ которомъ мы находимъ доказательства только нѣкоторыхъ предложеній; наиболѣе же важный пунктъ этого мемуара, по мнѣнію самого Вейерштрасса, это есть доказательство синектичности функцій $\overset{\rho}{\underset{1}{x_i}}$ отъ $\overset{\rho}{\underset{1}{u_k}}$ *), опредѣляемыхъ системою дифференціальныхъ уравненій якобіевой задачи:

$$\sum_{i=1}^{i=\rho} \int_{a_{2i-1}}^{x_i} d\mathrm{I}_k = du_k$$

---

*) Систему величинъ $u_1, u_2, \ldots u_\rho$ мы короче будемъ представлять такъ: $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$.

(гдѣ $\overset{x_i}{\underset{a_{i-1}}{\mathrm{I}_k}}$ означаетъ интегралъ перваго рода), — основанное на абелевой теоремѣ. Что-же касается до формулъ, сообщенныхъ въ 47 т. Креля, дающихъ *выраженія частныхъ производныхъ* отъ логариѳма абелевыхъ функцій по u_k чрезъ интегралы 2. рода, аналогичныя которымъ въ теоріи эллиптическихъ функцій даютъ естественный переходъ отъ интеграловъ къ Θ — функціямъ какъ-скоро доказана синектичность верхняго предѣла x интеграла какъ функціи отъ значеній его u, какъ то мною показано въ замѣткахъ, помѣщенныхъ въ XXII и XXV т. Math. Ann. и въ Сообщеніяхъ харьковскаго математическаго общества, то этотъ выводъ никогда не былъ имъ опубликованъ, хотя въ прежнее время сообщался *имъ на лекціяхъ*. Но эти самыя формулы представляли для меня наибольшій интересъ, такъ-какъ давали для болѣе общаго класса интеграловъ гиперэллиптическихъ то, что было мною найдено для интеграловъ эллиптическихъ, именно естественный переходъ отъ интеграловъ къ Θ.

Интересъ мой къ нимъ еще увеличился, когда во встрѣченныхъ мною въ Лейпцигѣ запискахъ, составленныхъ по лекціямъ Вейерштрасса объ гиперэллиптическихъ и абелевыхъ интегралахъ, я нашелъ оправданіе моего ожиданія, что именно интегралы 2. рода ведутъ къ рѣшенію задачи Якоби и для абелевыхъ интеграловъ вообще, къ чему пришелъ въ свою очередь независимо отъ Вейерштрасса и Нӧтеръ, разработывая клебшевскую теорію абелевыхъ интеграловъ*). Такимъ образомъ задача, которую я себѣ поставилъ, оказалась уже давно рѣшенною въ самомъ общемъ видѣ Вейерштрассомъ и вновь недавно Нӧтеромъ. Однако даже въ самой Германіи далеко не всѣ даже спеціалисты знакомы съ теоріей Вейерштрасса, благодаря тому, что она распространялась только посредствомъ его *лекцій по этому предмету, читаемыхъ имъ притомъ не каждый годъ; между-тѣмъ-какъ это* та теорія, которой суждено сдѣлаться господствующей, какъ самой естественной и простой; а потому весьма желательно, чтобы проф. Вейерштрассъ рѣшился наконецъ издать свои лекціи какъ по теоріи гиперэллиптическихъ и абелевыхъ интеграловъ, такъ и по общей *теоріи аналитическихъ функцій, такъ-какъ на предложеніяхъ этой послѣдней основана и* первая. Пока однако это желаніе весьма многихъ математиковъ не будетъ исполнено, я полагаю, что предлагаемое сочиненіе — результатъ моего знакомства съ мемуарами и лекціями ак. Вейерштрасса, а также и работами другихъ спеціалистовъ по тому-же предмету — въ которомъ *я намѣренъ показать переходъ отъ гиперэллиптическихъ интеграловъ* къ Θ — функціямъ, не будетъ сочтено излишнимъ, по-крайней-мѣрѣ въ нашей математи-

---

*) 1) *Zur Reduction algebraischer Differential-ausdrücke auf die Normalformen.* 2) Ueber die algebraische Differentialausdrucke. 2-te Note. 3) 3-te Note Vortsetzung. 4) Ueber das Jacobi'sche Umkehrproblem. (*Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen*, 1883—84).

ческой литературѣ, въ которой, кромѣ прекрасной диссертаціи проф. Поссе: «О функціяхъ ϑ и о задачѣ Якоби», посвященной гиперэллиптическимъ интеграламъ 2. ранга, не имѣется вовсе сочиненій объ абелевыхъ интегралахъ. При этомъ я долгомъ считаю предупредить читателя, чтобы онъ не ожидалъ встрѣтить здѣсь воспроизведеніе лекцій ак. Вейерштрасса, на каковое я и не имѣлъ-бы права. Какъ вся теорія аналитическихъ функцій проф. Вейерштрасса построена на разложеніяхъ въ ряды по степенямъ независимыхъ перемѣнныхъ, такъ въ-частности и теорія абелевыхъ интеграловъ въ его лекціяхъ строится на формѣ разложенія въ ряды вблизи критическихъ точекъ, между-тѣмъ-какъ формулы статьи его, помѣщенной въ 47 т. ж. Креля, ясно показываютъ, что тѣ-же результаты могутъ быть получены и безъ посредства рядовъ. Добиться такого вывода этихъ формулъ было мнѣ очень желательно, такъ-какъ, по моему мнѣнію, разложеніе въ ряды должно быть употребляемо только тогда, когда нѣтъ другихъ болѣе простыхъ средствъ; но удалось сдѣлать это лишь тогда, когда вслѣдствіе моей просьбы проф. Вейерштрассъ указалъ, какой частный случай абелевой теоремы онъ разумѣлъ въ § 4 статьи 47 т. ж. Креля при выводѣ формулъ (32)—(35); послѣ того этотъ выводъ получился почти само-собою. Я даже думаю, что мои вычисленія должны быть проще прежнихъ вейерштрассовскихъ — иначе онъ давно бы могъ ихъ публиковать или вновь найдти, если они затерялись, — и это, я думаю, вслѣдствіе того, что я не счелъ нужнымъ вводить его функцій $al\,(u_1 \ldots u_\rho)$ и проч. въ получаемыя формулы, а удовольствовался функціей $\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_\rho)$, гдѣ $x_1,\ x_2, \ldots x_\rho$ верхніе предѣлы интеграловъ, которая представилась само-собою. Вотъ въ чемъ состоятъ эти вычисленія. Прежде всего выводятся изъ самихъ дифференціальныхъ уравненій задачи Якоби выраженія частныхъ производныхъ по u_k отъ x_i; затѣмъ: 1) отъ $\log\varphi(x)$, 2) отъ суммъ интеграловъ 2. рода, 3) отъ такихъ-же суммъ интеграловъ 3. рода — выраженія — чрезъ самихъ $\overset{\rho}{\underset{1}{x_i}}$. Выраженія эти частныхъ производныхъ отъ $\log\varphi(x)$ и суммъ интеграловъ 3. рода таковы, что съ помощію вышеупомянутаго частнаго случая абелевой теоремы тотчасъ преобразуются въ разности двухъ суммъ интеграловъ 2. рода $+$ еще одинъ интегралъ 2. рода. Частныя производныя по u_k отъ суммъ интеграловъ 2. рода, входящія въ эти формулы, въ свою очередь такъ выражаются чрезъ x_i, что сразу видно, что эти суммы суть частныя производныя по u_k отъ одной и той-же функціи этихъ перемѣнныхъ. Интегрируя такое выраженіе $d\log\varphi(a)$ чрезъ эти суммы интеграловъ 2. рода и переходя потомъ отъ логариѳма къ числу, мы получаемъ новую функцію, которая оказывается при изслѣдованіи ея конечною и однозначною для всякихъ системъ значенія $\overset{\rho}{\underset{1}{u_k}}$ и заключаетъ въ себѣ какъ частный случай и $Al(u_1 \ldots u_\rho)$ Вейерштрасса и $\Theta(u_1 \ldots u_\rho)$

Якоби. Изъ самаго ея опредѣленія, сейчасъ упомянутаго, весьма просто получаются функціональныя уравненія въ числѣ 2ρ, которымъ она удовлетворяетъ. Изъ этихъ уравненій получаются основныя свойства этихъ функцій, съ помощію которыхъ, при посредствѣ теоремы Фурье, получаются и аналитическія выраженія ея. Что-же касается до рѣшенія задачи Якоби, то при самомъ началѣ вычисленія получается уравненіе степени ρ, корни котораго суть $\overset{\rho}{\underset{1}{x_i}}$, тогда-какъ коэффиціенты выражаются чрезъ Θ; соотвѣтственныя значенія $\sqrt{R(x_i)}$, получаются чрезъ вставку x_i въ цѣлую функцію степени $\rho - 1$, коэффиціенты которой также выражаются чрезъ $\Theta(u_1 \ldots u_\rho)$.

Изложенное сейчасъ составляетъ сущность содержанія IV и V главъ предлагаемаго сочиненія. Этимъ двумъ главамъ я счелъ однако нужнымъ, въ тѣхъ видахъ, чтобы сдѣлать свое сочиненіе доступнымъ и не спеціалистамъ, предпослать: первую главу, въ которой установляю типы интеграловъ трехъ родовъ, къ которымъ можетъ быть сведенъ всякій гиперэллиптическій интегралъ; вторую — посвященную выводу соотношеній между періодами интеграловъ 1. и 2. рода и самой періодичности — выводу, основанному на мало извѣстной теоріи примъ-функцій Вейерштрасса (сущность этой главы заимствована мною изъ лекцій Вейерштрасса, но изложена иначе при посредствѣ римановой поверхности; полученные же результаты были имъ ранѣе опубликованы); и третью, посвященную выводу абелевой теоремы сперва по Вейерштрассу, потомъ по Абелю и Якоби, въ которой въ заключеніе разбирается вышеупомянутый частный случай абелевой теоремы. Вторая и третья глава такимъ образомъ содержатъ кромѣ того существенно необходимое для послѣднихъ главъ, а вторая, сверхъ того, для многихъ можетъ представить по употребленному методу нѣчто новое. Конечно, тѣ-же соотношенія между интегралами 1. и 2. рода можно получить также и съ помощію интегрированія по контуру той односвязной поверхности, въ которую Риманъ превращаетъ многосвязную поверхность, представляющую развѣтвленіе $\sqrt{R(x)}$, подобно тому какъ онъ нашелъ соотношенія между періодами интеграловъ 1. рода; но тогда надо было бы напередъ вывести періодичность интеграловъ всѣхъ трехъ родовъ, тогда-какъ у Вейерштрасса она есть слѣдствіе выраженія интеграловъ 1., 2., а также и 3. рода чрезъ логариѳмы примъ-функцій, однозначныхъ на всей римановой поверхности, съ помощію которыхъ, какъ-сказано, легко получаются соотношенія между періодами интеграловъ 1. и 2. рода. Вейерштрассъ въ своихъ лекціяхъ обходится безъ римановой поверхности, пользуясь формою разложенія въ ряды примъ-функціи вблизи критическихъ точекъ; но мы предпочли прибѣгнуть къ римановой поверхности потому, что съ помощію ея выигрывается ясность представленій и краткость выраженій (почему въ первой главѣ даемъ объ ней краткое, но, полагаемъ, достаточно ясное понятіе).

Послѣ того какъ показанъ переходъ отъ интеграловъ къ Θ, весьма интересно и важно показать обратный переходъ отъ Θ къ интеграламъ: чрезъ это вопросъ объ обращенiи гиперэллиптическихъ интеграловъ получаетъ, такъ-сказать, округленность, лучше обнаружится внутренняя глубокая связь между тѣми и другими трансцендентными; это однако представляетъ пока большiя техническiя трудности, которыя еще неизвѣстно когда будутъ преодолѣны, а потому, не желая, чтобы полученные результаты неопредѣленное время оставались подъ спудомъ безъ всякой пользы для отечественныхъ любителей математики, изъ которыхъ многiе, можетъ быть, окажутся счастливѣе меня въ преслѣдованiи одинакихъ цѣлей, я рѣшаюсь издать то, что мною уже сдѣлано, чтобы привлечь русскiя силы къ изученiю этого интереснаго предмета и вмѣстѣ съ тѣмъ облегчить имъ приступъ къ этому изученiю. Если эта цѣль моя будетъ хотя отчасти достигнута, то я сочту свое время и трудъ не даромъ потраченными.

Остается сказать два слова о томъ, почему я счелъ нужнымъ на первый разъ ограничиться одними гиперэллиптическими интегралами. Причинъ къ тому нѣсколько: во 1-хъ, общая теорiя абелевыхъ интеграловъ во многихъ пунктахъ требуетъ еще переработки въ видахъ упрощенiя, и хотя я намѣренъ попытать свои силы надъ этою задачей, но это требуетъ еще времени; во 2-хъ, по отношенiю къ гиперэллиптическимъ интеграламъ всѣ вычисленiя могутъ быть доведены до конца, чрезъ что прiобрѣтается такъ-сказать осязательность рѣшенiя, тогда-какъ въ общей теорiи абелевыхъ интеграловъ по самой общности мы осуждены оставаться въ области отвлеченныхъ представленiй, къ которымъ и нужно приготовиться разсмотрѣнiемъ конкретныхъ случаевъ; чрезъ что, въ 3-хъ, теорiя гиперэллиптическихъ интеграловъ по отношенiю къ теорiи общихъ абелевыхъ интеграловъ прiобрѣтаетъ пропедевтическое значенiе; наконецъ, въ 4-хъ, гиперэллиптическiе интегралы во всѣхъ рангахъ, какъ то ясно выразилъ въ первый разъ Веберъ, представляютъ не частный случай общихъ абелевыхъ интеграловъ, но особенный, нѣкоторымъ образомъ исключительный, требующiй поэтому особеннаго разсмотрѣнiя, причемъ и самый способъ этого разсмотрѣнiя немного измѣняется (ибо въ этомъ случаѣ критическiя точки играютъ въ нѣкоторомъ смыслѣ большую роль, чѣмъ въ общемъ), что однако отнюдь не отнимаетъ у этого случая его пропедевтическаго значенiя. Эти именно причины и заставили меня ограничиться на первый разъ гиперэллиптическими интегралами.

М. Тихомандрицкiй.

Парижъ.
$18\frac{28}{\text{III}}85$ г.

ОБРАЩЕНІЕ

ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

ГЛАВА I.

Приведеніе гиперэллиптическихъ интеграловъ къ интеграламъ 3 родовъ. Различные типы этихъ интеграловъ.

1. Означая чрезъ $R(x)$ полиномъ степени n большей 4, неимѣющій кратныхъ корней, чрезъ $F(x, \sqrt{R(x)})$ раціональную функцію отъ x и $\sqrt{R(x)}$, и взявъ интегралъ отъ этой функціи:

$$\int F(x, \sqrt{R(x)})\,dx, \tag{1}$$

мы будемъ имѣть самый общій гиперэллиптическій интегралъ. Если n четное число: $n = 2\varrho + 2$, то этотъ интегралъ всегда можно съ помощію раціональной подстановки преобразовать въ другой, зависящій отъ корня квадратнаго изъ полинома нечетной степени $2\varrho + 1$; для этого достаточно знать только одинъ корень полинома $R(x)$. Дѣйствительно, съ помощію строки Тэйлора:

$$R(x) = R(x - \alpha + \alpha) = R(\alpha) + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{R^{(h)}(\alpha)}{h!}\,(x-\alpha)^h \tag{2}$$

имѣемъ

$$R(x) = (x-\alpha)^n \left\{ \frac{R(\alpha)}{(x-\alpha)^n} + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{R^{(h)}(\alpha)}{h!}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{n-h}} \right\}; \tag{3}$$

полагая теперь

$$\frac{1}{x-\alpha} = z,$$

слѣдовательно

$$x = \alpha + \frac{1}{z},$$

мы можемъ (3) такъ представить:

$$R(x) = R\left(\alpha + \frac{1}{z}\right) = z^{-n}\left\{R(\alpha)z^n + \sum_{h=1}^{h=n}\frac{R^{(h)}(\alpha)}{h!}z^{n-h}\right\}. \qquad (5)$$

Здѣсь подъ $\sum$ старшій членъ степени $n-1$ относительно z; слѣдовательно если α есть корень уравненія

$$R(x) = 0,$$

то въ (5) первый членъ въ скобкахъ $\{\ \}$ исчезаетъ, и мы, согласно сказанному, будемъ имѣть въ этихъ скобкахъ полиномъ степени $n-1$, слѣдовательно нечетной степени, если $n = 2\varrho + 2$; означимъ его чрезъ $R_1(z)$, положивъ:

$$R_1(z) = \sum_{h=1}^{h=n}\frac{R^{(h)}(\alpha)}{h!}z^{n-h}.$$

Такъ какъ изъ (4):

$$dx = -\frac{dz}{z^2}, \qquad (6)$$

то вводя z вмѣсто x съ помощію подстановки (4) въ интегралъ (1), на основаніи (5) и (6) будемъ имѣть:

$$\int F(x, \sqrt{R(x)})\,dx = -\int F\left(\alpha + \frac{1}{z}, \frac{\sqrt{R_1(z)}}{z^{\varrho+1}}\right)\frac{dz}{z^2} = \int \Phi(z, \sqrt{R_1(z)})\,dz,$$

гдѣ Φ раціональная функція отъ z и $\sqrt{R_1(z)}$, что и требовалось доказать. На основаніи этого впредь мы всегда будемъ принимать $n = 2\varrho + 1$, что представляетъ много удобствъ (какъ то замѣтилъ уже Якоби) при выводѣ всей теоріи этихъ интеграловъ изъ теоремы Абеля, что мы имѣемъ въ виду.

2. Общій видъ $F(x, \sqrt{R(x)})$, какъ извѣстно, такой:

$$\Phi(x) + \frac{f(x)}{\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ $\Phi(x)$ и $f(x)$ раціональныя функціи x; потому интегралъ (1) разобьется на два такимъ образомъ:

$$\int F(x, \sqrt{R(x)})\,dx = \int \Phi(x)\,dx + \int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

изъ которыхъ очевидно только второй будетъ гиперэллиптическимъ, а потому мы и ограничимся впредь разсмотрѣніемъ интеграловъ только этого послѣдняго типа.

3. Такъ какъ всякую раціональную функцію можно представить въ такомъ видѣ:

$$f(x) = \sum A_m x^m + \sum B_{k,p} \frac{1}{(x-a_k)^p},$$

гдѣ первая сумма распространяется на цѣлыя значенія m, вторая на такія же k и p; то интегралъ $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ разобьется на сумму такихъ:

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \sum A_m \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \sum B_{k,p} \int \frac{dx}{(x-a_k)^p \sqrt{R(x)}}.$$

Всѣ эти интегралы заключаются какъ частные случаи въ такомъ:

$$\int \frac{(x-a)^m\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \tag{1}$$

если принять, что m можетъ получать и цѣлыя отрицательныя значенія, и что a можетъ быть также $=0$. Но изъ числа интеграловъ вида (1), зависящихъ отъ опредѣленнаго a, линейно независимыхъ только $2\varrho+1$, а если a есть корень полинома $R(x)$, то 2ϱ.

Дѣйствительно, дифференцируя $(x-a)^m\sqrt{R(x)}$ по x, будемъ имѣть:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big((x-a)^m \sqrt{R(x)}\Big) = \frac{(x-a)^{m-1}}{2\sqrt{R(x)}}\Big(2mR(x) + (x-a)R'(x)\Big);$$

разлагая выраженіе въ скобкахъ по степенямъ $(x-a)$ по строкѣ Тэйлора, мы можемъ этому тождеству дать такой видъ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big((x-a)^m \sqrt{R(x)}\Big) = \sum_{k=0}^{k=2\varrho+1} (2m+k)\,\frac{R^{(k)}(a)}{k!}\,\frac{(x-a)^{m+k-1}}{2\sqrt{R(x)}}; \tag{2}$$

интегрируя его, получимъ:

$$(x-a)^m\sqrt{R(x)}+C=\sum_{k=0}^{k=2\rho+1}(2m+k)\,\frac{R^{(k)}(a)}{k!}\int\frac{(x-a)^{m+k-1}\,dx}{2\sqrt{R(x)}} \tag{3}$$

Чрезъ последовательное примѣненіе этого линейнаго соотношенія между $2\varrho+2$ послѣдовательными интегралами (если $R(a)$ не $=0$) мы можемъ интегралы (1) въ случаѣ $m>0$ свести къ 2ϱ интеграламъ того-же вида, для которыхъ $m=0,1,2\ldots2\varrho-1$. Точно также съ помощію (3) всѣ интегралы (1), въ которыхъ $m<0$ можно выразить линейно чрезъ тѣ-же сейчасъ упомянутые интегралы съ присоединеніемъ къ нимъ еще интеграла, для котораго $m=-1$, именно

$$\int\frac{dx}{(x-a)\,2\sqrt{R(x)}}\,. \tag{4}$$

Этотъ же послѣдній не можетъ быть уже сведенъ къ тѣмъ, для которыхъ $m=0,1,2\ldots$ $\ldots2\varrho-1$, потому что въ уравненіе (3) онъ или вовсе не входитъ, или входитъ рядомъ съ другими вида (1), для которыхъ $m<0$; дѣйствительно, для того чтобы въ уравненіи (3) былъ одинъ членъ съ отрицательною степенью отъ $x-a$ подъ знакомъ $\int$, необходимо положить $m=0$: тогда членъ вида (4) будетъ соотвѣтствовать $k=0$; но въ разсматриваемомъ случаѣ его коэффиціентъ будетъ имѣть множителемъ $2m+k=0$, и слѣдовательно этотъ интегралъ (4) уйдетъ изъ уравненія (3). Исключеніе будетъ для $a=a_i$, корню уравненія $R(x)=0$; тогда, вслѣдствіе того, что

$$R(a_i)=0\,,$$

первый членъ второй части равенства обратится въ нуль, такъ что для $a=a_i$ мы будемъ имѣть линейное соотношеніе между $2\varrho+1$ интегралами, вслѣдствіе чего каждый можетъ быть выраженъ чрезъ 2ϱ интеграловъ; интегралъ же

$$\int\frac{dx}{(x-a_i)\,2\sqrt{R(x)}} \tag{5}$$

мы встрѣтимъ въ первый разъ для $m=-1$, $k=1$ рядомъ съ интегралами вида (1), для которыхъ $m\geq0$; слѣдовательно въ разсматриваемомъ случаѣ: $a=a_i$, $R(a_i)=0$, интегралы (5) по виду одинакіе съ (4) сводятся при посредствѣ алгебраическихъ функцій къ 2ϱ интеграламъ, для которыхъ $m=0,1,2\ldots2\varrho-1$.

4. Интегралы вида (1) предыдущаго §, для $m = 0, 1, 2 \ldots 2\varrho - 1$ распадаются на двѣ группы: къ одной относятся тѣ, для которыхъ $m = 0, 1, 2 \ldots \varrho - 1$; къ другой тѣ, для которыхъ $m = \varrho, \varrho + 1 \ldots 2\varrho - 1$. Интегралы первой группы:

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}, \int \frac{(x-a)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}, \int \frac{(x-a)^2\,dx}{2\sqrt{R(x)}} \ldots \int \frac{(x-a)^{\varrho-1}\,dx}{2\sqrt{R(x)}}, \tag{1}$$

равно какъ и всякая линейная комбинація ихъ, или вообще интегралъ

$$\int \frac{f(x)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}, \tag{2}$$

гдѣ $f(x)$ означаетъ теперь полиномъ степени не выше $\varrho - 1$ (такъ какъ онъ всегда представляетъ линейную функцію интеграловъ (1)), называются интегралами перваго рода. Характеристическое ихъ свойство это то, что они всегда конечны, какое бы значеніе x ни имѣлъ. Это ясно для конечныхъ значеній x, отличныхъ отъ корней уравненія $R(x) = 0$; для послѣднихъ же слѣдуетъ изъ формы разложенія $\frac{1}{\sqrt{R(x)}}$ вблизи $x = a_i$; дѣйствительно

$$\frac{1}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{(x-a_i)R_1(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x-a_i}} \frac{1}{\sqrt{R_1(x)}},$$

гдѣ $R_1(x) = R(x) : (x - a_i)$; но второй множитель, какъ остающійся конечнымъ для значеній x близкихъ къ a_i, разложится въ рядъ съ цѣлыми положительными степенями отъ $x - a_i$; слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\frac{1}{\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x-a_i}} \left(\frac{1}{\sqrt{R'(a_i)}} + B(x-a_i) + C(x-a_i)^2 + \ldots \right); \tag{3}$$

(ибо $R_1(a_i) = R'(a_i)$) слѣдовательно

$$\int \frac{f(x)\,dx}{2\sqrt{R(x)}} = \frac{f(a_i)}{\sqrt{R'(a_i)}} \int \frac{dx}{2\sqrt{x-a_i}} + K,$$

гдѣ K означаетъ члены съ высшими степенями отъ $x - a_i$, или

$$\int \frac{f(x)\,dx}{2\sqrt{R(x)}} = \frac{f(a_i)}{\sqrt{R'(a_i)}} \sqrt{x-a_i} + K, \tag{4}$$

откуда и слѣдуетъ сказанное. Въ случаѣ x безконечно большаго, положимъ

$$x = \frac{1}{t^2}; \tag{5}$$

тогда

$$R(x) = \frac{1}{t^{4\varrho+2}} \mathfrak{R}(t), \tag{6}$$

гдѣ $\mathfrak{R}(t)$ полиномъ степени $4\varrho + 2$; такъ какъ изъ (5) имѣемъ $dx = -2\frac{dt}{t^3}$, то будетъ

$$\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = -\frac{t^{2\varrho-2}\,dt}{\sqrt{\mathfrak{R}(t)}}. \tag{7}$$

Точно также

$$f(x) = \frac{1}{t^{2m}} f_1(t),$$

гдѣ $f_1(t)$ полиномъ степени $2m$. Такимъ образомъ будетъ

$$\int \frac{f(x)\,dx}{2\sqrt{R(x)}} = -\int \frac{t^{2\varrho-2m-2} f_1(t)\,dt}{\sqrt{\mathfrak{R}(t)}}. \tag{8}$$

Подинтегральное выраженіе остается конечнымъ для $t = 0$, пока

$$2\varrho - 2m - \geq 2\ 0,$$

т. е. пока $m \leqq \varrho - 1$. Такимъ образомъ дѣйствительно интегралы перваго рода остаются всегда конечными.

Но отсюда же видно также, что интегралы

$$\int \frac{(x-a)^{\varrho}\,dx}{2\sqrt{R(x)}},\ \int \frac{(x-a)^{\varrho+1}\,dx}{2\sqrt{R(x)}}, \ldots\ldots \int \frac{(x-a)^{2\varrho-1}\,dx}{2\sqrt{R(x)}}, \tag{9}$$

или, общѣе, интегралы вида:

$$\int \frac{F(x)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}, \tag{10}$$

гдѣ $F(x)$ означаетъ полиномъ степени $\geqq \varrho$, которые всегда могутъ быть представлены линейною функціею интеграловъ (9) и (1), — интегралы второго рода, оставаясь конечными для $x = a_i$ $(R(a_i) = 0)$, обращаются алгебраически въ ∞ для $x = \infty$.

5. Интегралы вида:

$$\int\frac{dx}{(x-a)2\sqrt{R(x)}}\qquad(1)$$

суть интегралы третьяго рода. Характеристическое ихъ свойство то, что они обращаются *логариѳмически* въ ∞ *для* $x=a$, съ какимъ бы знакомъ $\sqrt{R(a)}$ ни взяли. Дѣйствительно, если $\sqrt{R(a)}$ не $=0$, что мы теперь и предполагаемъ, то $\frac{1}{\sqrt{R(x)}}$ вблизи $x=a$ остается конечнымъ, а потому разлагается въ такой рядъ:

$$\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}+A(x-a)+B(x-a)^2+\ldots..;\qquad(2)$$

вслѣдствіе этого будетъ

$$\int\frac{dx}{(x-a)2\sqrt{R(x)}}=\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\log(x-a)+\mathrm{const}+A(x-a)+\frac{B}{2}(x-a)^2+\ldots\qquad(3)$$

откуда и вытекаетъ сказанное. Если интегралъ (1) умножимъ на $2\sqrt{R(a)}$, то получимъ интегралъ третьяго рода, обращающійся въ безконечность какъ $\log(x-a)$ при $x=a$, какъ то показываетъ **(3)**; именно, интегралъ

$$\int\frac{2\sqrt{R(a)}}{x-a}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}};\qquad(4)$$

Якоби принималъ за типъ интеграла 3. рода половину этого. Точно также для $x=a$ и $\sqrt{R(x)}|_{x=a}=\sqrt{R(a)}$ будетъ обращаться въ безконечность какъ $\log(x-a)$ и интегралъ

$$\int\frac{\sqrt{R(a)}+\sqrt{R(x)}}{x-a}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}\qquad(5)$$

Римана. Для $x=a$ и $\sqrt{R(x)}|_{x=a}=-\sqrt{R(a)}$ *онъ однако останется конечнымъ*, ибо

$$\frac{\sqrt{R(a)}+\sqrt{R(x)}}{x-a}=\frac{R(x)-R(a)}{x-a}\cdot\frac{1}{\sqrt{R(x)}-\sqrt{R(a)}},$$

а здѣсь для $x=a$ первый множитель остается конечнымъ, ибо можно напередъ сократить на $x-a$; второй же обращается въ $-\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}$. Но этотъ интегралъ обращается въ ∞

какъ $\log t$ для $t=0$, если $x-a=\frac{1}{t^2}$, что не трудно видѣть. Вычтя изъ интеграла (5) другой, полученный изъ него чрезъ перемѣну a на b, мы получимъ самый общій интегралъ третьяго рода, обращающійся логариѳмически въ ∞ въ двухъ совершенно произвольно выбранныхъ точкахъ $(a, \sqrt{R(a)})$ и $(b, \sqrt{R(b)})$, именно, интегралъ:

$$\Pi(x)_{ab} = \int \left\{ \frac{\sqrt{R(a)}+\sqrt{R(x)}}{x-a} - \frac{\sqrt{R(b)}+\sqrt{R(x)}}{x-b} \right\} \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}; \tag{6}$$

именно этотъ интегралъ обращается въ ∞ въ $(a, \sqrt{R(a)})$ какъ $\log(x-a)$ и въ $(b, \sqrt{R(b)})$ какъ $-\log(x-b)$. Такимъ образомъ мы видимъ, что всякій интегралъ третьяго рода обращается логариѳмически въ ∞ для двухъ системъ значеній x и $\sqrt{R(r)}$ или, иначе говоря, въ двухъ точкахъ Римановой поверхности*), и сумма коэффиціентовъ при $\log$ въ обоихъ разложеніяхъ равна нулю.

6. Если $a=a_i$, то интегралъ

$$\int \frac{dx}{(x-a_i)\,2\sqrt{R(x_i)}},$$

по сказанному въ предыдущемъ §, приводясь къ интеграламъ перваго и втораго рода + алгебраическая функція, будетъ обращаться въ $x=a_i$ въ ∞ алгебраически. Въ этомъ можно убѣдиться и посредствомъ разложенія (3) § 4, которое даетъ:

$$\int \frac{dx}{(x-a_i)\,2\sqrt{R(x)}} = \int \frac{dx}{2(x-a_i)\sqrt{(x-a_i)}} \left(\frac{1}{\sqrt{R'(a_i)}} + B(x-a_i) + \ldots \right) =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{x-a_i}} \frac{1}{\sqrt{R(a_i)}} + B\sqrt{x-a_i} + \frac{2C}{3}(x-a_i)\sqrt{x-a_i} + \ldots \tag{2}$$

откуда и видно сказанное.

Дифференцируя по a интегралъ (4) предыдущаго § m разъ, получимъ интегралъ, обращающійся алгебраически въ ∞ въ произвольной точкѣ $(a, \sqrt{R(a)})$. Изъ интеграловъ этого рода отмѣтимъ только первый въ этомъ ряду, интегралъ, получающійся чрезъ дифференцированіе по a одинъ разъ:

$$\frac{d}{da} \int \frac{2\sqrt{R(a)}}{x-a} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}.$$

---

*) См. § 8.

Что этотъ интегралъ обращается алгебраически въ безконечность, можно убѣдиться двоякимъ образомъ: во 1-хъ, съ помощію равенства (3) § 3, которое для $m=1$ принимаетъ такой видъ:

$$\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a}+C=-2R(a)\int\frac{dx}{(x-a)^2 2\sqrt{R(x)}}-R'(a)\int\frac{dx}{(x-a)2\sqrt{R(x)}}+$$

$$+\sum_{k=3}^{k=2\rho+1}(k-2)\frac{R^{(k)}(a)}{k!}\int\frac{(x-a)^{k-2}dx}{2\sqrt{R(x)}}, \tag{4}$$

гдѣ первые два члена могутъ быть такъ преобразованы:

$$-2\sqrt{R(a)}\left\{\int\frac{\sqrt{R(a)}}{(x-a)^2}\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}+\int\frac{R'(a)}{2\sqrt{R(a)}}\frac{dx}{(x-a)2\sqrt{R(x)}}\right\}=$$

$$=-2\sqrt{R(a)}\frac{\partial}{\partial a}\int\frac{\sqrt{R(a)}}{x-a}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}};$$

внося это въ (4), будемъ имѣть:

$$\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a}+C=-2\sqrt{R(a)}\frac{\partial}{\partial a}\int\frac{\sqrt{R(a)}}{x-a}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}+$$

$$+\sum_{k=3}^{k=2\rho+1}(k-2)\frac{R^{(k)}(a)}{k!}\int\frac{(x-a)^{k-2}dx}{2\sqrt{R(x)}}, \tag{5}$$

откуда и слѣдуетъ сказанное. Во 2-хъ, съ помощію разложенія въ рядъ: мы имѣемъ

$$\frac{\partial}{\partial a}\int\frac{\sqrt{R(a)}}{x-a}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=\int\frac{\sqrt{R(a)}}{(x-a)^2}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}+$$

$$+\frac{R'(a)}{2\sqrt{R(a)}}\int\frac{dx}{(x-a)2\sqrt{R(x)}}; \tag{6}$$

но

$$\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}=\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}+A(x-a)+B(x-a)^2+\ldots;$$

слѣдовательно

$$\int\frac{\sqrt{R(a)}}{(x-a)^2}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-a)^2}+A\sqrt{R(a)}\int\frac{dx}{x-a}+B_1\int dx+\ldots=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{x-a}+\text{Const}+B_1(x-a)+\frac{C_1}{2}(x-a)^2+\ldots+A\sqrt{R(a)}\log(x-a),$$

и

$$\int\frac{R'(a)}{2\sqrt{R(a)}}\cdot\frac{dx}{(x-a)2\sqrt{R(x)}}=\frac{R'(a)}{2\sqrt{R(a)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\int\frac{dx}{x-a}+$$

$$+A\frac{R'(a)}{2\sqrt{R(a)}}\int dx+\frac{R'(a)}{2\sqrt{R(a)}}B\int(x-a)\,dx+\ldots=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{R'(a)}{R(a)}\log(x-a)+\text{Const}+A\frac{R'(a)}{2\sqrt{R(a)}}(x-a)+\ldots$$

Внося это въ (6) и замѣчая, что

$$A=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\right)_{x=a}=-\frac{1}{4}\frac{R'(a)}{R(a)\sqrt{R(a)}},$$

мы увидимъ, что $\log(x-a)$ будетъ имѣть коэффиціентомъ нуль, и потому будетъ

$$\frac{\partial}{\partial a}\int\frac{\sqrt{R(a)}}{x-a}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}=-\frac{1}{2}\frac{1}{x-a}+\text{Const}+b(x-a)+\ldots,$$

слѣдовательно $=\infty^1$ для $x=a$.

7. Линейно-независимыхъ интеграловъ 1. рода ϱ, какъ то видно изъ ряда (1) § 4. Якоби бралъ именно этотъ рядъ при $a=0$, т. е. систему интеграловъ

$$\int\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},\int\frac{xdx}{2\sqrt{R(x)}},\int\frac{x^2dx}{2\sqrt{R(x)}}\ldots\int\frac{x^{\varrho-1}dx}{2\sqrt{R(x)}}\tag{1}$$

за нормальную систему интеграловъ 1. рода. Но очевидно можно принять за нормальную вообще такую систему:

$$\begin{array}{l}\displaystyle\int(a_1+b_1x+c_1x^2+\ldots+g_1x^{\varrho-1})\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}\\ \displaystyle\int(a_2+b_2x+c_2x^2+\ldots+g_2x^{\varrho-1})\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \displaystyle\int(a_\varrho+b_\varrho x+c_\varrho x^2+\ldots+g_\varrho x^{\varrho-1})\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},\end{array}\tag{2}$$

гдѣ a_i, $b_i \dots g_i$ суть произвольныя количества, подчиненныя только одному условію, чтобы опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & g_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & g_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots & g_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_\rho & b_\rho & c_\rho & \dots & g_\rho \end{vmatrix} \tag{3}$$

не былъ равенъ нулю, потому, что тогда не только интегралы (2) могутъ быть выражены чрезъ интегралы (1), но и эти послѣдніе чрезъ интегралы (2). Въ частности этому условію удовлетворяетъ нормальная система интеграловъ перваго рода Вейерштрасса, къ объясненію которой и переходимъ, такъ какъ мы намѣрены на ней остановить свой выборъ въ виду тѣхъ удобствъ вычисленія, которыя она представляетъ, предпославъ этому однако объясненіе Римановой поверхности для функцій, зависящихъ отъ $\sqrt{R(x)}$.

8. Предположимъ, что *полиномъ $R(x)$ разложенъ на линейные множители такимъ образомъ*:

$$R(x) = A_0(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2\rho}), \tag{1}$$

причемъ обозначеніе корней такъ выбрано, что въ случаѣ вещественности всѣхъ

$$a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_{2\rho}\,; \tag{2}$$

въ случаѣ же мнимости нѣкоторыхъ или всѣхъ, этому закону подчинены вещественныя ихъ части, а когда два корня имѣютъ одинаковую вещественную часть, то этому-же закону подчинены мнимыя части этихъ корней. Проведемъ линіи изъ ∞ въ a_0, изъ a_1 въ a_2, изъ a_3 въ a_4, ... изъ a_{2k-1} въ a_{2k}, ... изъ $a_{2\rho-1}$ въ $a_{2\rho}$, и означимъ ихъ по порядку чрезъ

$$l_0, l_1, l_2, l_3, \dots l_k \dots l_\rho. \tag{3}$$

Каждой изъ этихъ линій припишемъ опредѣленное направленіе, именно отъ первой точки къ послѣдней, какъ сказано, т. е. для l_k изъ a_{2k-1} въ a_{2k}, и такое направленіе будемъ называть прямымъ, противоположное—обратнымъ; для линіи l_0 прямое будетъ отъ ∞ къ a_0. Возьмемъ какую либо точку x_0 въ области, лежащей справа отъ прямого направленія *ломанной линіи, составленной изъ линіи l_k и промежуточныхъ между ними*, и изъ двухъ значеній $\sqrt{R(x)}$ въ этой точкѣ выберемъ одно, которое означимъ чрезъ $+\sqrt{R(x_0)}$. Если теперь въ какую либо точку линіи l_k придемъ разъ съ правой, другой разъ съ лѣвой стороны по пути не пересѣкающему ни одну изъ линій $l_0, l_1, \dots l_{2\varrho}$, то получимъ значенія $\sqrt{R(x)}$ равныя, но съ противными знаками. Дѣйствительно: чтобы съ правой стороны, напр., перейти на лѣвую не пересѣкая линію l_k, мы должны дойти съ точкою x до конца этой линіи, a_{2k} напр., обогнуть его по кругу очень малаго радіуса и затѣмъ идти по другой сторонѣ линіи l_k въ точку противоположную данной. Но когда мы опишемъ окружность около a_{2k} какъ центра, аргументы всѣхъ множителей полинома $R(x)$ вернутся къ прежнему своему значенію за исключеніемъ множителя $x - a_{2k}$, аргументъ котораго увеличится на $2\pi i$; слѣдовательно аргументъ всего полинома $R(x)$ тоже увеличится на $2\pi i$, а аргументъ корня $\sqrt{R(x)}$ на πi, вслѣдствіе чего онъ получитъ на лѣвой сторонѣ противный знакъ. Но такъ какъ въ каждой точкѣ x корень $\sqrt{R(x)}$ имѣетъ лишь два противоположныя значенія, то это значеніе будетъ какъ разъ то, которое онъ получитъ въ соотвѣтственной точкѣ правой стороны, если къ ней подойдти по прежнему-же пути, исходя изъ x_0 съ противоположнымъ значеніемъ корня, т. е. взявъ $-\sqrt{R(x_0)}$ вмѣсто $+\sqrt{R(x_0)}$. Такимъ образомъ мы видимъ, что если мы примемъ двѣ совпадающія плоскости за носителей (Träger) — одну тѣхъ значеній $\sqrt{R(x)}$, которыя получаются въ каждой точкѣ плоскости чрезъ непрерывное продолженіе, если изъ x_0 выйти съ $+\sqrt{R(x_0)}$, — другую — если выйдти изъ нея съ $-\sqrt{R(x_0)}$, и двигаться не пересѣкая линій l_k ($k = 1, 2, \dots \varrho$), то по обѣ стороны каждой такой линіи значенія $\sqrt{R(x)}$ будутъ противоположныя въ одномъ листѣ, и равныя въ разныхъ; т. е. значеніе корня $\sqrt{R(x)}$ на право въ верхнемъ листѣ будетъ то же самое, какъ налѣво въ нижнемъ, и на оборотъ, такъ что по этимъ линіямъ будетъ существовать переходъ изъ одной плоскости въ другую накрестъ, если смотрѣть со стороны плоскости перпендикулярной къ линіи l_k. Такая поверхность, состоящая изъ двухъ листовъ съ переходами накрестъ изъ одного въ другой по переходнымъ линіямъ l_k, называется двулиственною Римановой поверхностью, представляющею развѣтвленіе $\sqrt{R(x)}$. Не имѣя намѣренія основать теорію гиперэллиптическихъ интеграловъ на Римановыхъ началахъ, мы тѣмъ не менѣе не хотимъ лишить себя и читателей того удобства, которое представляетъ эта поверхность для легчайшаго представленія хода измѣненія функцій, зависящихъ отъ корня $\sqrt{R(x)}$, и для болѣе краткаго выраженія предложеній.

9. Положимъ теперь:

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_3)\dots.(x - a_{2\varrho-1}) \tag{1}$$

$$Q(x) = A_0(x - a_0)(x - a_2)\dots.(x - a_{2\varrho}), \tag{2}$$

слѣдовательно

$$R(x) = P(x)\,Q(x)\,. \qquad (3)$$

За полиномы $\varrho - 1$ степени, о которыхъ было сказано въ § 7, Вейерштрассъ принимаетъ ϱ *полиномовъ*

$$\frac{P(x)}{x - a_{2k-1}}\,. \qquad (k = 1, 2, \ldots \varrho) \qquad (4)$$

Что эти полиномы удовлетворяютъ условію быть линейно-независимыми, нетрудно провѣрить. Въ самомъ дѣлѣ, пусть между этими ϱ полиномами имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$C_1 \frac{P(x)}{x - a} + C_2 \frac{P(x)}{x - a_3} + \ldots + C_\rho \frac{P(x)}{x - a_{2\rho-1}} = 0\,; \qquad (5)$$

полагая здѣсь $x = a_{2k-1}$, мы получимъ

$$C_k P'(a_{2k-1}) = 0,$$

откуда слѣдуетъ, такъ какъ $P'(a_{2k-1})$ отлично отъ нуля, что

$$C_k = 0\,, \quad (k = 1, 2, \ldots \varrho)\,,$$

т. е. соотношеніе (5) возможно только, если всѣ C_k равны нулю. Для системы этихъ ϱ интеграловъ введемъ сокращенное обозначеніе, положивъ:

$$\mathrm{I}_k\Big|_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta \frac{P(x)}{x - a_{2k-1}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}\,. \qquad (6)$$

Если въ такомъ интегралѣ замѣнимъ a_{2k-1} величиною a, отличною отъ корней полинома $R(x)$, то будемъ имѣть интегралъ третьяго рода, въ чемъ легко убѣдиться, ибо $\dfrac{P(x)}{2\sqrt{R(x)}}$ разложится для значеній x близкихъ къ a въ рядъ съ одними положительными степенями отъ $x - a$, причемъ коэффиціентомъ при $\log(x - a)$ будетъ $\dfrac{P(a)}{2\sqrt{R(a)}}$. Поэтому интегралъ, получаемый чрезъ умноженіе теперь разсматриваемаго на $\dfrac{2\sqrt{R(a)}}{P(a)}$, будетъ обращаться въ ∞ для $x = a$ точь въ точь какъ $\log(x - a)$. Этотъ-же интегралъ будетъ обращаться въ ∞ какъ $-\log(x - a)$ въ $x = a$, $\sqrt{R(x)} = -\sqrt{R(a)}$, какъ нетрудно видѣть.

Такой интегралъ Вейерштрассъ принималъ въ прежнихъ своихъ работахъ за нормальный интегралъ третьяго рода. Для него мы введемъ тоже упрощенное обозначеніе, положивъ:

$$2\,\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{III}}}{}^{\circ}_{a} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2\sqrt{R(a)}}{P(a)}\,\frac{P(x)}{x-a}\,\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}, \qquad (7)$$

причемъ a будемъ называть параметромъ.

Нетрудно убѣдиться, что этотъ интегралъ только на линейную функцію интеграловъ 1. рода отличается отъ интеграловъ 3. рода Якобіевскаго типа ((4) § 5). Дѣйствительно:

$$\frac{2\sqrt{R(a)}}{x-a} = \frac{2\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\frac{P(a)}{x-a} = -\frac{2\sqrt{R(a)}}{P(a)}\left(\frac{P(x)-P(a)}{x-a} - \frac{P(x)}{x-a}\right);$$

но

$$\frac{P(x)-P(a)}{x-a}\cdot\frac{1}{P(x)} = \sum_{k=1}^{k=\rho}\frac{P(a)}{P'(a_{2k-1})(a-a_{2k-1})}\cdot\frac{1}{x-a_{2k-1}};$$

слѣдовательно

$$\frac{P(x)-P(a)}{x-a} = \sum_{k=1}^{k=\rho}\frac{P(a)}{P'(a_{2k-1})(a-a_{2k-1})}\cdot\frac{P(x)}{x-a_{2k-1}}, \qquad (8)$$

и

$$\frac{2\sqrt{R(a)}}{x-a} = \frac{2\sqrt{R(a)}}{P(a)}\,\frac{P(x)}{x-a} - \sum_{k=1}^{k=\rho}\frac{2\sqrt{R(a)}}{P'(a_{2k-1})(a-a_{2k-1})}\cdot\frac{P(x)}{x-a_{2k-1}}.$$

Потому Якобіевскій интегралъ 3. рода такъ выразится чрезъ Вейерштрассовскій:

$$\int\frac{2\sqrt{R(a)}}{x-a}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \int\frac{2\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\frac{P(x)}{x-a}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} -$$

$$-\sum_{k=1}^{k=\rho}\frac{2\sqrt{R(a)}}{P'(a_{2k-1})(a-a_{2k-1})}\cdot\int\frac{P(x)}{x-a_{2k-1}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}.$$

Придавая къ половинѣ (7) $\frac{1}{2}\log(x-a)$, получимъ интегралъ:

$$\int_{\alpha}^{k}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\frac{P(x)}{\sqrt{R(a)}}\right)\frac{dx}{x-a}, \tag{10}$$

который тоже въ $x=a$ будетъ обращаться въ безконечность какъ $\log(x-a)$, если $\sqrt{R(x)}=\sqrt{R(a)}$; но онъ будетъ оставаться конечнымъ, когда для $x=a$ будетъ $\sqrt{R(x)}=-\sqrt{R(a)}$, и подобно Римановскому будетъ обращаться въ ∞ какъ $-\log t$, если $x-a=\frac{1}{t^2}$, для $t=0$ $(x=\infty)$; ибо первое слагаемое подъ интеграломъ такъ обращается въ ∞ для $x=\infty$, тогда какъ второе остается конечнымъ.

Болѣе общій интегралъ 3. рода получимъ придавъ къ (7) линейную функцію интеграловъ 1. рода:

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{III}}}{}_a=\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{III}}}{}_a^0+\sum_{k=1}^{k=p}C_k\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{I}}}{}_k \tag{11}$$

Также можно обобщить и интегралъ (10).

Интегралъ (7), умноженный на $\sqrt{a-a_{2k-1}}$, переходитъ, когда сдѣлается $a=a_{2k-1}$, въ интегралъ $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{I}}}{}_k\times 2\sqrt{\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}}$; изъ него же нетрудно вывести и тѣ интегралы втораго рода, которые обращаются въ ∞ въ точкахъ a_{2k-1}. Вычтя $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{I}}}{}_k\times\frac{2\sqrt{R(a)}}{P(a)}$ изъ (7), мы будемъ имѣть интегралъ тоже 3. рода:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{2\sqrt{R(a)}}{P(a)}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-a_{2k-1}}\right)\frac{P(x)\,dx}{2\sqrt{R(x)}}=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\frac{2\sqrt{R(a)}}{P(a)}}{a-a_{2k-1}}\cdot\frac{P(x)}{(x-a)(x-a_{2k-1})}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}.$$

Помножая его на $\frac{1}{\sqrt{a-a_{2k-1}}}$ и подводя a къ a_{2k-1}, въ предѣлѣ получимъ интегралъ втораго рода, обращающійся въ ∞ въ a_{2k-1}, именно

$$\int_{\alpha}^{\beta}2\sqrt{\frac{Q(a_{k-1})}{P'(a_{2k-1})}}\frac{P(x)}{(x-a_{2k-1})^2}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}.$$

Для интеграла, получаемаго отсюда чрезъ умноженіе на $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}}$, слѣдовательно тоже 2. рода, мы введемъ такое знакоположеніе:

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\Pi}}{}^{0}_{k} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})} \cdot \frac{P(x)}{(x-a_{2k-1})^2} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} \,. \tag{12}$$

Нетрудно провѣрить, что этотъ интегралъ обращается алгебраически въ ∞ въ $x=a_{2k-1}$. Дѣйствительно, какъ въ § 6, мы имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} &\int \frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})} \frac{dx}{(x-a_{2k-1})\sqrt{x-a_{2k-1}}} \cdot \frac{\frac{P(x)}{x-a_{2k-1}}}{2\sqrt{R_1(x)}} = \\ = &\int \frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})} \frac{dx}{(x-a_{2k-1})^{3/2}} \cdot \left(\frac{P'(a_{2k-1})}{2\sqrt{R_1(a_{2k-1})}} + A'(x-a_{2k-1}) + B'(x-a_{2k-1})^2 + \ldots\right) = \\ &= \frac{Q(a_{2k-1})}{\sqrt{R_1(a_{2k-1})}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{x-a_{2k-1}}} + A_1\sqrt{x-a_{2k-1}} + B_1(x-a_{2k-1})^{3/2} + \ldots + \text{const.} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

откуда и видно сказанное.

Интеграловъ (12) всего ϱ, ибо $k=1, 2, \ldots \varrho$.

Свойства интеграловъ 2. рода (12) не измѣнятся отъ прибавки къ нимъ линейной функціи интеграловъ 1. рода, взятыхъ между тѣми-же предѣлами; такимъ образомъ получаемъ слѣдующую систему ϱ болѣе общихъ интеграловъ 2. рода того же типа:

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\Pi}}{}_{k} = \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\Pi}}{}^{0}_{k} + \sum_{l=1}^{l=\varrho} c_{kl} \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{I}}}{}_{l} \,. \tag{14}$$

Впослѣдствіи особенно важною для насъ окажется та система интеграловъ этого рода, въ которой произвольность постоянныхъ c_{kl} ограничена условіемъ:

$$c_{kl} = c_{lk} \,. \tag{15}$$

ГЛАВА II.

Примъ-функціи; періоды.

10. Представивъ Вейерштрассовскій интеграндъ 3. рода такимъ образомъ:

$$\frac{1}{x-a}\sqrt{\frac{Q(a)}{P(a)}}\cdot\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}},$$

продифференцируемъ его по a; мы получимъ

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x-a}\sqrt{\frac{Q(a)}{P(a)}}\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}\right)=\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x-a}\sqrt{\frac{Q(a)}{P(a)}}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}\left(\frac{1}{(x-a)^2}\sqrt{\frac{Q(a)}{P(a)}}+\frac{1}{x-a}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P(a)}{Q(a)}}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{Q(a)}{P(a)}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}\sqrt{\frac{P(a)}{Q(a)}}\left(\frac{1}{(x-a)^2}\frac{Q(a)}{P(a)}+\frac{1}{2}\frac{1}{x-a}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{Q(a)}{P(a)}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}\sqrt{\frac{P(a)}{Q(a)}}\left(\frac{1}{(x-a)^2}\cdot\frac{Q(a)}{P(a)}+\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{Q(a)}{(x-a)P(a)}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}\sqrt{\frac{P(a)}{Q(a)}}\left(\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{Q(a)}{(x-a)P(a)}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q(a)}{(x-a)P(a)}\right)\right);$$

итакъ

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x-a}\sqrt{\frac{Q(a)}{P(a)}}\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}\right)=\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}\sqrt{\frac{P(a)}{Q(a)}}\left(\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{Q(a)}{(x-a)P(a)}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q(a)}{(x-a)P(a)}\right)\right).\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Перемѣняя здѣсь x на a, и наоборотъ, и вычитая полученный такимъ образомъ результатъ изъ первоначальнаго, получимъ такое тождество:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x-a}\sqrt{\frac{Q(a)}{P(a)}}\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{a-x}\sqrt{\frac{Q(x)}{P(x)}}\sqrt{\frac{P(a)}{Q(a)}}\right)=\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}\sqrt{\frac{P(a)}{Q(a)}}\left\{\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{Q(a)}{(x-a)P(a)}-\frac{Q(x)}{(x-a)P(x)}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q(a)}{(x-a)P(a)}-\frac{Q(x)}{(x-a)P(x)}\right)\right\}.\end{aligned}\right|(2)$$

Но

$$\frac{Q(x)}{(x-a)P(x)}=A_0+\frac{Q(a)}{P(a)}\frac{1}{x-a}+\sum_{k=1}^{k=\rho}\frac{Q(a)_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})(a_{2k-1}-a)}\frac{1}{x-a_{2k-1}};$$

отсюда

$$\frac{Q(a)}{(x-a)P(a)}-\frac{Q(x)}{(x-a)P(x)}=\sum_{k=1}^{k=\rho}\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\frac{1}{a-a_{2k-1}}\cdot\frac{1}{x-a_{2k-1}}-A_0 \tag{3}$$

внося это во (2), получимъ тождество, которое безъ труда представится такъ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\frac{P(x)}{x-a}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{P(x)}\cdot\frac{P(a)}{a-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\right)=\\&=\sum_{k=1}^{k=\rho}\left\{\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{P(x)}{(x-a_{2k-1})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\times\frac{P(a)}{a-a_{2k-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}-\right.\\&\left.-\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{P(a)}{(a-a_{2k-1})}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\times\frac{P(x)}{x-a_{2k-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Придавая къ этому тождеству очевидное тождество

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{x-a}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{a-x}\right)=0,$$

мы можемъ дать ему такой видъ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial a}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{1}{x-a}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(x)}}{P(x)}\cdot\frac{P(a)}{\sqrt{R(a)}}\right)\frac{1}{a-x}\right]=\\&=\sum_{k=1}^{k=\rho}\left\{\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{P(x)}{(x-a_{2k-1})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\times\frac{P(a)}{a-x_{2k-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}-\right.\\&\left.-\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{P(a)}{(a-a_{2k-})_1^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\times\frac{P(x)}{x-a_{2k-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\right\},\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

гдѣ въ первой части имѣемъ производныя интегранда **3.** рода **(10) § 9.** Это тождество можно обобщить, вводя въ него обобщенные интегранды **2.** рода, о которыхъ упомянуто въ концѣ § 9, такъ что оно приметъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial a}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{1}{x-a}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(x)}}{P(x)}\cdot\frac{P(a)}{\sqrt{R(a)}}\right)\frac{1}{a-x}\right]=\\
&=\sum_{k=1}^{k=\rho}\left\{\left(\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{P(x)}{(x-a_{2k-1})^2}\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}+\sum_{l=1}^{l=\rho}c_{kl}\frac{P(x)}{x-a_{2l-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{P(x)}}\right)\frac{P(a)}{x-a_{2k-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}-\right.\\
&\left.-\left(\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{P(a)}{(a-a_{2k-1})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}+\sum_{l=1}^{l=\rho}c_{kl}\frac{P(a)}{a-a_{2l-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\right)\frac{P(x)}{x-a_{2k-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\right\};
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

дѣйствительно, прибавленная ко второй части (5) сумма

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\sum_{l=1}^{l=\rho}c_{kl}\left(\frac{P(x)}{x-a_{2l-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\cdot\frac{P(a)}{a-a_{2k-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}-\frac{P(a)}{a-a_{2l-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\cdot\frac{P(x)}{x-a_{2k-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{k=\rho}\sum_{l=1}^{l=\rho}\left(c_{kl}-c_{lk}\right)\frac{P(a)}{a-a_{2k-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\cdot\frac{P(x)}{x-a_{2l-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(x)}}=0\,,$$

если только произвольныя постоянныя c_{kl} подчинимъ условiю (15) предыдущаго §.

Чрезъ интегрированiе этого тождества получаются важные результаты для теорiи гиперэллиптическихъ интеграловъ. Этотъ прiемъ употреблялъ уже Абель; онъ былъ извѣстенъ и Якоби, который имъ пользовался для вывода теоремы о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ гиперэллиптическихъ интегралахъ 3. рода (см. § 16), какъ то видно изъ письма его къ Эрмиту отъ 6 августа 1848 г. (*Jacobi's* Werke, Bd. II. p. 117); въ этой формѣ тождество (5) впервые получено Вейерштрассомъ, въ «Beitrag zur Theorie der Abel'schen Integrale», помѣщенномъ въ Braunsberger Program 1849 г., по способу нѣсколько отличному отъ изложеннаго здѣсь.

11. Такъ какъ результаты, получаемые такимъ образомъ будутъ зависѣть отъ выбраннаго пути интегрированiя, какъ то покажетъ послѣдующее изслѣдованiе, то, чтобы имѣть опредѣленные результаты, надо избрать опредѣленные пути; мы выберемъ ихъ такимъ образомъ. Окружимъ каждую линiю перехода l_k сомкнутою кривою, которая бы не пересѣкала ни одной линiи перехода, не заключала бы внутри себя никакой другой линiи перехода кромѣ l_k, а также не имѣла бы кратныхъ точекъ, и означимъ ее чрезъ A_k. Такихъ линiй будетъ ρ, соотвѣтственно линiямъ перехода $l_1, l_2, \ldots l_\rho$. Эти линiи проведемъ всѣ въ верх-

немъ листѣ Римановой поверхности. Затѣмъ, изъ какой либо точки линіи A_k, лежащей вправо отъ l_k, проведемъ кривую чрезъ линію перехода l_k въ нижній листъ и по нему до такой же линіи l_0, чрезъ которую въ верхній листъ въ исходную точку на A_k; притомъ такъ, чтобы эта линія не пересѣкала ни остальныхъ линій перехода, ни линіи A_g ($g = 1, 2, \ldots \ldots k-1, k+1 \ldots \varrho$), ни прочихъ линій ей подобныхъ. Такую линію назовемъ B_k. Линіямъ A_k и B_k припишемъ опредѣленныя направленія, именно такія, чтобы въ частяхъ, лежащихъ справа отъ переходныхъ линій, онѣ были бы одинаковы съ направленіемъ, принятымъ за прямое для этихъ переходныхъ линій; противоположное этому направленіе будемъ называть обратнымъ.

12. Выбранные нами пути интегрированія могутъ быть однако безконечно измѣняемы безъ измѣненія величины нашихъ интеграловъ, какъ то извѣстно изъ теоріи функцій комплексной перемѣнной, лишь бы только они продолжали обладать описанными свойствами, а для интеграла 3. рода еще не переходили-бы чрезъ точку $x = a$, $\sqrt{R(x)} = \sqrt{R(a)}$, въ которой онъ дѣлается безконечнымъ. Значенія интеграла 3. рода по двумъ простымъ путямъ, между которыми находится такая точка, будутъ различаться на $2\pi i$. Дѣйствительно, вблизи такого значенія $(x, \sqrt{R(x)})$, нашъ интегралъ третьяго рода имѣетъ видъ

$$\log(x-a) + \psi(x)$$

гдѣ $\psi(x)$ означаетъ рядъ, расположенный по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $x - a$, сходящійся внутри нѣкоторой области, окружающей точку $x = a$. Если x опишетъ окружность достаточно малаго радіуса вокругъ $x = a$, — достаточно малаго, чтобы не выйти изъ упомянутой области сходимости ряда, то $\log(x-a)$ получитъ приращеніе $2\pi i$, тогда какъ $\psi(x)$ вернется къ прежнему своему значенію; слѣдовательно и весь нашъ интегралъ получитъ приращеніе $2\pi i$, когда верхній предѣлъ его x опишетъ окружность достаточно малаго радіуса вокругъ $x = a$. Но теперь путь, имѣющій отъ себя эту точку влѣво, можетъ быть чрезъ непрерывное измѣненіе, не нарушающее предыдущихъ требованій, преобразованъ въ другой, имѣющій эту точку справа отъ себя, + сомкнутый путь вокругъ точки a; этотъ же послѣдній, какъ мы сейчасъ видѣли, даетъ интегралу приращеніе $2\pi i$. Такимъ образомъ значеніе интеграла получаемое по пути, имѣющему точку a влѣво, болѣе на $2\pi i$ того, которое получается по другому пути, имѣющему эту точку отъ себя вправо. [При переходѣ чрезъ точку $(a, -\sqrt{R(a)})$ результатъ будетъ противоположный для интеграла 3. рода (7) § 9, т. е. $-2\pi i$, ибо въ ней этотъ интегралъ обращается въ ∞ какъ $-\log(x-a)$, что не трудно видѣть; тоже и для интеграловъ 3. рода Якобіевскаго типа]. Имѣя это въ виду, мы можемъ каждый путь A_k стянуть такъ, чтобы онъ плотно облегалъ линію l_k съ обѣихъ сторонъ; такимъ образомъ онъ будетъ состоять изъ проходимаго впередъ и назадъ отрѣзка прямой $a_{2k-1}-a_{2k}$, — назадъ съ противнымъ знакомъ, + два интеграла по безконечно малымъ кругамъ вокругъ точекъ a_{2k-1} и a_{2k}. Послѣднiе безконечно малы для всѣхъ нашихъ интеграловъ исключая II_k, который обращается въ ∞ въ a_{2k-1}; а потому при разсмотрѣнiи всѣхъ *прочихъ интеграловъ ихъ можно отбросить, и такимъ образомъ интегралъ по A_k приведется* къ удвоенному интегралу по l_k отъ a_{2k-1} до a_{2k}, со знакомъ для $\sqrt{R(x)}$, какой онъ имѣетъ на правой сторонѣ этой линiи. Означая интегралы по пути A_k для интеграловъ перваго рода I_h чрезъ $\omega_{h,k}$; для интеграловъ второго рода II_h чрезъ $\eta_{h,k}$; для интеграловъ третьяго рода III_a чрезъ $\zeta_{a,k}$ мы будемъ такимъ образомъ имѣть:

$$\omega_{h,k}=2\underset{a_{2k-1}}{\overset{a_{2k}}{\mathrm{I}}}{}_h\,;\quad \eta_{h,k}=2\underset{a_{2k-1}}{\overset{a_{2k}}{\mathrm{II}}}{}_h\,;\quad \zeta_{a,k}=2\underset{a_{2k-1}}{\overset{a_{2k}}{\mathrm{III}}}{}_a\,; \qquad (1)$$

исключенiе составляетъ интегралъ II_k, для котораго такое преобразованiе пути A_k невозможно, такъ какъ $\underset{a_{2k-1}}{\overset{a_{2k}}{\mathrm{II}}}{}_k=\infty$. Но этотъ интегралъ $\eta_{k,k}$ можетъ быть выраженъ чрезъ остальные, именно $\eta_{k,h}$ (h не $=k$) и интегралъ отъ a_0 до ∞ на основанiи слѣдующаго.

13. Изъ теорiи функцiй комплексной перемѣнной извѣстно, что интегралъ по пути, который можетъ быть стянутъ въ одну точку, не переходя чрезъ критическiя точки (точки развѣтвленiя a_0, a_1,...a_ρ, и точка a для интеграла 3. рода), равенъ нулю (теорема Коши). Съ другой стороны (по Neumann'у), можно построить сферу дiаметра равнаго единицѣ, касающуюся въ $x=0$ къ нижнему листу двулиственной Римановой поверхности для $\sqrt{R(x)}$, и точки этой поверхности перенести на поверхность сферы по прямымъ, соединяющимъ ихъ съ полюсомъ сферы дiаметрально противоположнымъ точкѣ касанiя ея съ нижнею плоскостью Римановой поверхности; тогда получится двулиственная Риманова сфера (введенная Neumann, Vorlesungen über Riemenn's Theorie der Abel'schen Integrale. Leipzig. Teubner, 1866 г.), на которой переходными линiями будутъ дуги l'_0, l'_1,...l'_ρ, въ которыя проэктируются линiи l_0, l_1,...l_ρ; при этомъ точка $0'$, противоположная 0 точкѣ касанiя сферы къ плоской Римановой поверхности, будетъ такою-же точкою развѣтвленiя сферы, какъ и a'_0, a'_1...$a'_{2\rho}$, проэкцiи точекъ a_0, a_1...$a_{2\rho}$. На этой сферѣ, линiя прилегающая съ обѣихъ сторонъ къ дугамъ l'_0, l'_1...l'_ρ (исключенiе для l_k для II_k: къ этой упомянутая кривая не должна прилегать въ концахъ ея) и промежуточнымъ, ихъ соединяющимъ, въ верхнемъ листѣ, образуетъ сомкнутую кривую, которую можно стянуть въ одну точку, не переходя чрезъ точки развѣтв-

ленія; и только для интеграловъ 3. рода (7) § 9, при этомъ придется перейти чрезъ точку $(a, +\sqrt{R(a)})$. Поэтому интегралъ по такой кривой будетъ $=0$ для интеграловъ 1. и 2. рода и $=2\pi i$ для интеграловъ 3. рода. При этомъ части, соотвѣтствующія линіямъ промежуточнымъ между переходными, выпадутъ, такъ какъ эти части пути проходятся въ противоположныхъ направленіяхъ съ однимъ и тѣмъ-же значеніемъ $\sqrt{R(x)}$; поэтому останется:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\omega_{h,k}+2\mathop{\mathrm{I}}\limits_{\infty}^{a_0}{}_h=0\\[2ex]
\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\eta_{h,k}+2\mathop{\mathrm{II}}\limits_{\infty}^{a_0}{}_h=0\\[2ex]
\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\zeta_{a,k}+2\mathop{\mathrm{III}}\limits_{\infty}^{a_0}{}_a=2\pi i.
\end{array}\right\} \qquad (2)$$

Изъ этихъ уравненій имѣемъ на основаніи (1):

$$\mathop{\mathrm{I}}\limits_{a_0}^{\infty}{}_h=\sum_{k=1}^{k=\rho}\mathop{\mathrm{I}}\limits_{a_{2k-1}}^{a_{2k}}{}_h \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2}\eta_{h,h}=\mathop{\mathrm{II}}\limits_{a_0}^{\infty}{}_h-\sum_{k=1}^{k=h-1}\mathop{\mathrm{II}}\limits_{a_{2k-1}}^{a_{2k}}{}_h-\sum_{k=h+1}^{k=\rho}\mathop{\mathrm{II}}\limits_{a_{2k-1}}^{a_{2k}}{}_h \qquad (4)$$

$$\mathop{\mathrm{III}}\limits_{a_0}^{\infty}{}_a=\sum_{k=1}^{k=\rho}\mathop{\mathrm{III}}\limits_{a_{2k-1}}^{a_{2k}}{}_a+\pi i. \qquad (5)$$

Второе изъ нихъ и есть обѣщанная въ концѣ предыдущаго § формула; она позволяетъ вычислить $\eta_{h,h}$, такъ какъ его нельзя выразить, какъ другіе, интеграломъ, взятымъ между точками a_{2h-1} и a_{2h}.

14. Переходя къ интеграламъ по пути B_k, и стягивая этотъ путь такъ, чтобы онъ облегалъ плотно рядъ линій l_g отъ a_0 до a_{2k-1} съ промежуточными, мы замѣчаемъ, что отъ a_0 до

a_{2k} путь B_k будетъ идти въ верхнемъ листѣ, отъ a_{2k} до a_0 въ нижнемъ; слѣдовательно, части пути, соотвѣтствующія переходнымъ линіямъ l_g, дадутъ въ суммѣ каждая нуль, тогда какъ части, соотвѣтствующія промежуточнымъ между l_g, дадутъ каждая величину двойную интеграла, взятаго отъ начала до конца этого промежутка, причемъ знакъ $\sqrt{R(x)}$ будетъ отвѣчать верхнему листу. Такимъ образомъ будемъ имѣть, означая интегралы по пути B_k тѣми буквами, какъ по пути A_k, и отличая только знакомъ ($'$), слѣдующія формулы:

$$\omega'_{h,k} = 2\sum_{g=1}^{g=k} \overset{a_{2g-1}}{\underset{a_{2g-2}}{\mathrm{I}}}{}_h; \qquad (1)$$

$$\eta'_{h,k} = 2\sum_{g=1}^{g=k} \overset{a_{2g-1}}{\underset{a_{2g-2}}{\mathrm{II}}}{}_h; \qquad (2)$$

$$\zeta'_{a,k} = 2\sum_{g=1}^{g=k} \overset{a_{2g-1}}{\underset{a_{2g-2}}{\mathrm{III}}}{}_a; \qquad (3)$$

изъ этихъ формулъ (2) имѣетъ силу только пока $k < h$; если-же $k = h$, то послѣдній членъ въ верхнемъ предѣлѣ будетъ обращаться въ ∞; слѣдовательно въ случаѣ $k = h$ при разсмотрѣніи интеграловъ II_h нельзя путь B_h стянуть около линій переходовъ и промежуточныхъ между ними на пространствѣ отъ a_0 до a_{2h-1}; но въ этомъ случаѣ можно путь B_h стянуть около остальной части линій переходовъ и промежуточныхъ между ними на пространствѣ отъ a_{2h} до $-\infty$. Но только теперь направленіе преобразованной линіи B_h будетъ уже въ нижнемъ листѣ совпадать съ направленіемъ переходныхъ линій, тогда какъ въ верхнемъ будетъ противоположно; по этому предъ корнемъ надобно взять знакъ —, и такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$\eta'_{h,h} = -2\sum_{g=h}^{g=\rho-1} \overset{a_{2g+1}}{\underset{a_{2g}}{\mathrm{II}}}{}_h - 2\overset{-\infty}{\underset{a_{2\rho}}{\mathrm{II}}}{}_h. \qquad (4)$$

То же самое, что нетрудно усмотрѣть, будетъ имѣть мѣсто, когда $k > h$, и мы точно также будемъ имѣть для $k > h$ такую формулу для вычисленія $\eta'_{h,k}$:

$$\eta'_{h,k} = -2\sum_{g=k}^{g=\rho-1} \overset{a_{2g+1}}{\underset{a_{2g}}{\mathrm{II}}}{}_h - 2\overset{-\infty}{\underset{a_{2\rho}}{\mathrm{II}}}{}_h. \qquad (5)$$

15. Кромѣ опредѣленныхъ интеграловъ, разсмотрѣнныхъ въ предыдущихъ двухъ параграфахъ, въ послѣдующемъ будутъ играть большую роль интегралы 1. и 2. рода, взятые въ верхнемъ листѣ отъ которой нибудь изъ точекъ развѣтвленія до $x = \infty$. Такой путь всегда можно замѣнить другимъ идущимъ, отъ данной точки развѣтвленія по правой сторонѣ переходныхъ линій, въ направленіи однако обратномъ, до ∞ (исключая интегралъ 2. рода, обращающійся въ ∞ въ этой точкѣ или въ которой нибудь изъ предшествующихъ, т. е. съ меньшимъ нумеромъ). Для этихъ опредѣленныхъ интеграловъ введемъ такое обозначеніе:

$$\overset{2k-1}{K}_h = \overset{\infty}{\underset{a_{2k-1}}{\mathrm{I}}}_h \,; \qquad \overset{2k}{K}_h = \overset{\infty}{\underset{a_{2k}}{\mathrm{I}}}_h \,; \tag{1}$$

$$\overset{2k-1}{J}_h = \overset{\infty}{\underset{a_{2k-1}}{\mathrm{II}}}_h \,; \qquad \overset{2k}{J}_h = \overset{\infty}{\underset{a_{2k}}{\mathrm{II}}}_h \,. \tag{2}$$

На основаніи только что объясненнаго преобразованія пути интегрированія будемъ имѣть:

$$\overset{2k-1}{K}_h = \sum_{g=k}^{g=1} \overset{a_{2g-1}}{\underset{a_{2g-1}}{\mathrm{I}}}_h + \sum_{g=k}^{g=2} \overset{a_{2g-3}}{\underset{a_{2g-1}}{\mathrm{I}}}_h + \overset{\infty}{\underset{a_0}{\mathrm{I}}}_h \,;$$

на основаніи (3) § 13 вторую часть можно такъ представить:

$$\overset{2k-1}{K}_h = \sum_{g=k}^{g=\rho} \overset{a_{2g}}{\underset{a_{2g-1}}{\mathrm{I}}}_h - \sum_{g=1}^{g=k} \overset{a_{2g-1}}{\underset{a_{2g-1}}{\mathrm{I}}}_h$$

т. е. по (1) §§ 13 и 14:

$$\overset{2k-1}{K}_h = \sum_{g=k}^{g=\rho} \frac{1}{2}\,\omega_{h,g} - \frac{1}{2}\,\omega'_{h,k} \,. \tag{3}$$

Точно также

$$\overset{2k}{K}_h = \sum_{g=k}^{g=1} \overset{a_{2g-1}}{\underset{a_{2g}}{\mathrm{I}}}_h + \sum_{g=k}^{g=1} \overset{a_{2g-1}}{\underset{a_{2g-1}}{\mathrm{I}}}_h + \overset{\infty}{\underset{a_0}{\mathrm{I}}}_h \,;$$

или на основаніи (3) § 13:

$$\overset{2k}{K}_h = \sum_{g=k+1}^{g=\rho} \mathrm{I}_{h\,a_{2g-1}}^{\;a_{2g-1}} - \sum_{g=1}^{g=k} \mathrm{I}_{h\,a_{2g-1}}^{\;a_{2g-1}},$$

т. е. по (1) §§ 13 и 14:

$$\overset{2k}{K}_h = \sum_{g=k+1}^{g=\rho} \frac{1}{2}\,\omega_{h,g} - \frac{1}{2}\,\omega'_{h,k}\,. \tag{4}$$

Совершенно такимъ же образомъ получатся для интеграловъ 2. рода при $k < h$, при помощи (2) § 13, (1) § 12 и (2) § 14, слѣдующія двѣ формулы:

$$\overset{2k-1}{J}_h = \sum_{g=k}^{g=\rho} \frac{1}{2}\,\eta_{h,g} - \frac{1}{2}\,\eta'_{h,k}; \tag{5}$$

$$\overset{2k}{J}_h = \sum_{g=k+1}^{g=\rho} \frac{1}{2}\,\eta_{h,g} - \frac{1}{2}\,\eta'_{h,k}\,. \tag{6}$$

Когда $k > h$, тогда путь идущій отъ a_{2k-1} (или a_{2k}) къ ∞ нельзя заставить слѣдовать по линіи (a_{2k}) $a_{2k-1} \ldots a_1\, a_0\, \infty$, потому что пришлось бы переходить чрезъ безконечное значеніе интеграла; но въ этомъ случаѣ можно его заставить идти отъ a_{2k-1} или отъ a_{2k} къ $a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2} \ldots a_{2\rho} - \infty$. Такимъ образомъ будетъ:

$$\overset{2k-1}{J}_h = \prod_{a_{2k-1}}^{\infty}{}_h = \sum_{g=k}^{g=\rho} \prod_{a_{2g-1}}^{a_{2g}}{}_h + \sum_{g=k}^{g=\rho-1} \prod_{a_{2g}}^{a_{2g+1}}{}_h + \prod_{a_{2\rho}}^{-\infty}{}_h;$$

$$\overset{2k}{J}_h = \prod_{a_{2k}}^{\infty}{}_h = \sum_{g=k}^{g=\rho-1} \prod_{a_{2g}}^{a_{2g-1}}{}_h + \sum_{g=k+1}^{g=\rho} \prod_{a_{2g-1}}^{a_{2g}}{}_h + \prod_{a_{2\rho}}^{-\infty}{}_h;$$

на основаніи же (1) § 13 и (5) § 14 это такъ представится:

$$\overset{2k-1}{J}_h = \sum_{g=k}^{g=\rho} \frac{1}{2}\,\eta_{h,g} - \frac{1}{2}\,\eta'_{h,k}; \tag{7}$$

$$\overset{2k}{J}_h = \sum_{g=k+1}^{g=\rho} \frac{1}{2}\eta_{h,g} - \frac{1}{2}\eta'_{h,k}; \tag{8}$$

формулы совершенно тождественныя съ (5) и (6) соотвѣтственно.

Когда же $k=h$, то $\overset{\infty}{\underset{a_{2h-1}}{\Pi_h}}$ обращается въ безконечность; но для $k=h$ роль этихъ интеграловъ принимаетъ на себя въ дальнѣйшемъ выраженіе, получаемое отъ придачи $\frac{1}{2}\eta_{h,h}$, опредѣляемаго формулою (4) § 14, къ $\overset{2h}{J}_h$, ($\overset{2k}{J}_h$ — очевидно сохраняетъ конечное значеніе для $k=h$); потому мы знакъ $\overset{2h\text{-}1}{J}_h$ опредѣлимъ теперь не какъ интегралъ Π_h отъ a_{2h-1} до ∞, но прямо этимъ выраженіемъ, положивъ:

$$\overset{2h\text{-}1}{J}_h = \sum_{g=h}^{g=\rho} \frac{1}{2}\eta_{h,g} - \frac{1}{2}\eta'_{h,h}, \tag{9}$$

что тождественно съ (7), если въ немъ принять $k=h$.

16. Проинтегрируемъ теперь тождество (5) § 10 по x отъ η до ξ и по a отъ β до α по путямъ, не пересѣкающимъ другъ друга и не проходящимъ чрезъ точки развѣтвленія; мы получимъ тогда слѣдующее тождество:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_\eta^\xi \left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(\alpha)}}{P(\alpha)}\cdot\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{1}{x-\alpha} - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(\beta)}}{P(\beta)}\cdot\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{1}{x-\beta}\right)dx \\
-&\int_\beta^\alpha \left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(\xi)}}{P(\xi)}\cdot\frac{P(a)}{\sqrt{R(a)}}\right)\frac{1}{a-\xi} - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(\eta)}}{P(\eta)}\cdot\frac{P(a)}{\sqrt{R(a)}}\right)\frac{1}{a-\eta}\right)da = \\
&= \sum_{k=1}^{k=\rho}\left\{\int_\eta^\xi \frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{P(x)}{(x-a_{2k-1})^2}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} \times \int_\beta^\alpha \frac{P(a)}{a-a_{2k-1}}\cdot\frac{da}{2\sqrt{R(a)}} - \right. \\
&\left. - \int_\beta^\alpha \frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{P(a)}{(a-a_{2k-1})^2}\cdot\frac{da}{2\sqrt{R(a)}} \times \int_\eta^\xi \frac{P(x)}{x-a_{2k-1}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Въ первой части имѣемъ интегралы 3. рода; изъ нихъ первый обращается логариөмически въ ∞ въ точкахъ $(\alpha, \sqrt{R(\alpha)})$ и $(\beta, \sqrt{R(\beta)})$; второй также въ $(\xi, \sqrt{R(\xi)})$ и $(\eta, \sqrt{R(\eta)})$, какъ то слѣдуетъ изъ сказаннаго въ § 9 про интегралъ (10). Этотъ характеръ они сохранятъ, если къ первому изъ нихъ придать вторую половину суммы второй части (1), а ко второму первую.

Сдѣлавъ это, мы будемъ имѣть на основаніи (1):

$$\left.\begin{aligned}&\int_\eta^\xi\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(\alpha)}}{P(\alpha)}\cdot\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{1}{x-\alpha}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(\beta)}}{P(\beta)}\cdot\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{1}{x-\beta}\right)dx+\sum_{k=1}^{k=\rho}\overset{\alpha}{\underset{\beta}{\mathrm{II}}}_k\cdot\overset{\xi}{\underset{\eta}{\mathrm{I}}}_k=\\&=\int_\beta^\alpha\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(\xi)}}{P(\xi)}\cdot\frac{P(a)}{\sqrt{R(a)}}\right)\frac{1}{a-\xi}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(\eta)}}{P(\eta)}\cdot\frac{P(a)}{\sqrt{R(a)}}\right)\frac{1}{a-\eta}\right)da+\sum_{k=1}^{k=\rho}\overset{\xi}{\underset{\eta}{\mathrm{II}}}_k\cdot\overset{\alpha}{\underset{\beta}{\mathrm{I}}}_k\end{aligned}\right\}(2)$$

Интегралъ первой части есть 3. рода, обращающійся логариөмически въ ∞ въ точкахъ $(x=\alpha,\ \sqrt{R(x)}=\sqrt{R(\alpha)})$ и $(x=\beta,\ \sqrt{R(x)}=\sqrt{R(\beta)})$ и въ нуль, когда $\xi=\eta$. Означая такой интегралъ чрезъ $\overset{\xi}{\underset{\eta}{\mathrm{III}}}_{\alpha\beta}$, мы можемъ полученное равенство короче такъ написать:

$$\overset{\xi}{\underset{\eta}{\mathrm{III}}}_{\alpha\beta}=\overset{\alpha}{\underset{\beta}{\mathrm{III}}}_{\xi\eta}, \tag{3}$$

ибо интегралъ второй части (2) получается изъ интеграла первой части чрезъ перемѣну ролей (ξ, η) съ одной стороны, и (α, β) — съ другой. Это равенство (3) выражаетъ теорему о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ разсматриваемомъ интегралѣ 3. рода, который называется нормальнымъ; теорема эта состоитъ въ томъ, что значеніе нормальнаго интеграла 3. рода не измѣнится, если предѣлы сдѣлаемъ параметрами, а параметры предѣлами. При этомъ, разумѣется, предполагается, что пути, ведущіе отъ η къ ξ и отъ α къ β, не пересѣкаются и не проходятъ чрезъ точки развѣтвленія.

17. Взявъ теперь отъ (6) интегралъ по x по пути A_h, другой разъ по пути B_h, получимъ слѣдующія два равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial a}\int\limits_{(A_h)}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{dx}{x-a}=\\
&=\sum_{k=1}^{k=\rho}\left\{\eta_{kh}\cdot\frac{P(a)}{a-a_{2k-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}-\omega_{kh}\left(\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{P(a)}{(a-a_{2k-1})^2}\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}+\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\sum_{l=1}^{l=\rho}c_{kl}\frac{P(a)}{a-a_{2l-1}}\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\right)\right\}
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial a}\int\limits_{(B_h)}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{dx}{x-a}=\\
&=\sum_{k=1}^{k=\rho}\left\{\eta'_{hk}\cdot\frac{P(a)}{a-a_{2k-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}-\omega'_{kh}\left(\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{P(a)}{(a-a_{2k-1})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}+\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\sum_{l=1}^{l=\rho}c_{kl}\frac{P(a)}{a-a_{2l-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\right)\right\}.
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

Эти два равенства, въ которыхъ $h=1,2\ldots\rho$, опредѣляютъ 2ρ новыхъ трансцендентныхъ функцій отъ a, имѣющихъ алгебраическую производную, но съ трансцендентными коэффиціентами. Проинтегрируемъ ихъ по a отъ $a=\alpha_0$ до $a=\alpha$; будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}
&\int\limits_{(A_h)}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(\alpha)}}{P(\alpha)}\cdot\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{dx}{x-\alpha}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(\alpha_0)}}{P(\alpha_0)}\cdot\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{dx}{x-\alpha_0}\right)=\\
&\qquad=\sum_{k=1}^{k=\rho}\left\{\eta_{kh}\,\mathrm{I}_{k}\Big|_{\alpha_0}^{\alpha}-\omega_{kh}\,\mathrm{II}_{k}\Big|_{\alpha_0}^{\alpha}\right\}
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\limits_{(B_h)}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(\alpha)}}{P(\alpha)}\cdot\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{dx}{x-\alpha}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(\alpha_0)}}{P(\alpha_0)}\cdot\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{dx}{x-\alpha_0}\right)=\\
&\qquad+\sum_{k=1}^{k=\rho}\left\{\eta'_{kh}\,\mathrm{I}_{k}\Big|_{\alpha_0}^{\alpha}-\omega'_{kh}\,\mathrm{II}_{k}\Big|_{\alpha_0}^{\alpha}\right\}.
\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Положимъ сперва, что α_0 находится внутри кривой A_h, и что интегралъ берется по пути, который пробѣгаетъ α, идя отъ α_0 къ α. Если α лежитъ также внутри равно какъ и весь путь интегрированія, то въ лѣвой части равенства (3) будемъ имѣть функцію, конечную, непрерывную и однозначную отъ α на всей Римановой поверхности за исключеніемъ линіи A_k, которая обращается въ нуль въ $\alpha = \alpha_0$ и вблизи $\alpha = a_{2l-1}$ ($l = 1, 2, 3 \ldots . \varrho$) имѣетъ характеръ $\frac{1}{\sqrt{\alpha - a_{2l-1}}}$, какъ нетрудно видѣть. При переходѣ чрезъ A_k извнутри наружу эта функція получитъ приращеніе $-2\pi i$, какъ то слѣдуетъ изъ сказаннаго въ § 12. Такъ какъ путь A_k не устраняетъ возможности, благодаря многосвязности Римановой поверхности, для точки α очутиться опять внутри кривой A_k, не переходя ея въ противоположномъ направленіи (что имѣло бы послѣдствіемъ увеличеніе значенія функціи на $2\pi i$), то мы усматриваемъ отсюда, такъ какъ этотъ процессъ можетъ повторяться сколько угодно разъ, что наша функція въ каждой точкѣ Римановой поверхности для $\sqrt{R(x)}$ имѣетъ безконечный рядъ значеній, различающихся на кратное отъ $2\pi i$. Слѣдовательно, если мы возьмемъ эту функцію показателемъ числа $e = 2,71828\ldots$, то получимъ новую трансцендентную функцію;—мы ее означимъ чрезъ $E(\alpha, \alpha_0)_h$, такъ что будетъ:

$$\mathbf{E}_{(\alpha,\, \alpha_0)_h} = e^{\int\limits_{(A_k)} ((\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(\alpha)}}{P(\alpha)} \frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right) \frac{dx}{x - \alpha} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(\alpha_0)}}{P(\alpha_0)} \frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right) \frac{dx}{x - \alpha_0})} \tag{5}$$

—которая будетъ конечною, однозначною и непрерывною на всей Римановой поверхности за *исключеніемъ корней уравненія*

$$P(\alpha) = 0,$$

которые будутъ для нея существенно-особыя точки, такъ какъ въ нихъ она будетъ принимать всякое значеніе благодаря множителю $e^{\frac{1}{\sqrt{\alpha - a_{2l-1}}}}$, который она имѣетъ вблизи $\alpha = a_{2l-1}$, какъ то слѣдуетъ изъ сказаннаго немного выше; кромѣ того она будетъ $= 1$ при $\alpha = \alpha_0$.

Подобнымъ образомъ путь B_h даетъ новую трансцендентную съ такими-же свойствами, именно:

$$\mathbf{E}'_{(\alpha,\, \alpha_0)_h} = e^{\int\limits_{(B_h)} ((\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(\alpha)}}{P(\alpha)} \cdot \frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right) \frac{dx}{x - \alpha} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(\alpha_0)}}{P(\alpha_0)} \cdot \frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right) \frac{dx}{x - \alpha_0})} \tag{6}$$

18. Съ помощію этихъ трансцендентныхъ уравненія (3) и (4) предыдущаго § можно такъ представить:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\left\{\eta_{kh}\overset{\alpha}{\underset{\alpha_0}{\mathrm{I}_k}}-\omega_{kh}\overset{\alpha}{\underset{\alpha_0}{\mathrm{II}_k}}\right\}=\log\mathrm{E}(\alpha,\alpha_0)_h \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\left\{\eta'_{hk}\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{\mathrm{I}_k}}-\omega'_{hk}\overset{\alpha}{\underset{\alpha}{\mathrm{II}_k}}\right\}=\log\mathrm{E}'(\alpha,\alpha_0)_h \qquad (2)$$

каковыхъ уравненій будетъ 2ϱ, ибо $h=1, 2,\dots\varrho$.

Здѣсь подъ $\log E(\alpha,\alpha_0)_h$ разумѣется главное значеніе его, т. е. то, которое обращается въ нуль, когда $\alpha=\alpha_0$, и слѣдовательно $E(\alpha,\alpha_0)_h=1$. То же самое значеніе принимаемъ и для $\log E'(\alpha,\alpha_0)_h$ въ уравненіи (2).

19. Этими равенствами мы воспользуемся прежде всего, слѣдуя Вейерштрассу въ его лекціяхъ (функціи E и E' Вейерштрассъ называетъ примъ-функціями; есть и другого рода примъ-функціи, какъ увидимъ ниже), чтобы вывести соотношенія между ω_{kh}, η_{kh}, ω'_{kh}, η'_{kh} $(k,h=1,2,\dots\varrho)$. Если заставимъ α описать какой-нибудь путь A_g, то такъ какъ послѣдній не пересѣкаетъ пути A_h, $(h=1, 2,\dots g-1, g+1,\dots\varrho)$, $\log E(\alpha,\alpha_0)_h$ вернется къ своему значенію, тогда какъ интегралы $\overset{\alpha}{\underset{\alpha_0}{\mathrm{I}_k}}$ и $\overset{\alpha}{\underset{\alpha_0}{\mathrm{II}_k}}$ получатъ соотвѣтственно приращенія ω_{kg} и η_{kg}. Отсюда слѣдуетъ такое соотношеніе:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}(\eta_{kh}\,\omega_{kg}-\omega_{kh}\,\eta_{kg})=0. \qquad (1)$$

Точно также заставивъ α во (2) уравненіи предыдущаго параграфа описать путь B_g $(h=1, 2,\dots g-1, g+1,\dots\varrho)$, мы получимъ:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}(\eta'_{kh}\,\omega'_{kg}-\omega'_{kh}\,\eta'_{kg})=0. \qquad (2)$$

Если теперь заставимъ въ (1) уравненіи того-же § α описать путь B_g, причемъ $g \gtrless h$, то какъ пути A_h и B_g при $g \gtrless h$ не пересѣкаются, мы опять получимъ:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho} (\eta_{kh}\,\omega'_{kg} - \omega_{kh}\,\eta'_{kg}) = 0. \tag{3}$$

Если же, въ томъ же уравненіи, заставимъ α описать путь B_h, который пересѣкаетъ A_h, начавъ именно отъ этой линіи; то, такъ какъ на правой сторонѣ A_h значеніе $\log E(\alpha,\alpha_0)_h$ менѣе чѣмъ на лѣвой на $2\pi i$ по § 17, мы получимъ такое соотношеніе:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho} (\eta_{kh}\omega'_{kh} - \omega_{kh}\eta'_{kh}) = -2\pi i. \tag{4}$$

20. *Отсюда легко вывести подобныя соотношенія между опредѣленными интегралами, разсмотрѣнными* въ § 15. Просуммируемъ уравненіе (1) по g отъ m до ϱ и вычтемъ изъ результата (3) для $g=m$, если m не $=h$, и (4), если $m=h$; на основаніи формулъ (3) и (5) § 15 по раздѣленіи на 2 получимъ:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho} \left(\eta_{kh} \overset{2m-1}{K}_k - \omega_{kh} \overset{2m-1}{J}_k \right) = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{k=\rho} \left(\eta_{km} \overset{2m-1}{K}_k - \omega_{km} \overset{2m-1}{J}_k \right) = +\pi i. \tag{2}$$

Если бы суммированіе начали не отъ m, а отъ $m+1$, то на основаніи (4) и (6) § 15 получили бы слѣдующее:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho} \left(\eta_{kh} \overset{2m}{K}_k - \omega_{kh} \overset{2m}{J}_k \right) = 0 \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{k=\rho} \left(\eta_{km} \overset{2m}{K}_k - \omega_{km} \overset{2m}{J}_k \right) = +\pi i. \tag{4}$$

Написавъ теперь (3) и (4) предыдущаго § такъ:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}(\eta'_{kh}\omega_{kg}-\omega'_{kh}\eta_{kg})=0 \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}(\eta'_{kh}\alpha_{kh}-\omega'_{kh}\eta_{kh})=+2\pi i, \tag{6}$$

просуммировавъ первое по g отъ m до ϱ и вычтя ихъ суммы затѣмъ (2), мы получимъ по раздѣленіи на 2: если $h<m$:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\Big(\eta'_{kh}\overset{2m\text{-}1}{K}_k-\omega'_{kh}\overset{2m\text{-}1}{J}_k\Big)=0\,, \tag{7}$$

если же $h\geqq m$:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\Big(\eta'_{kh}\overset{2m\text{-}1}{K}_k-\omega'_{kh}\overset{2m\text{-}1}{J}_k\Big)=+\pi i, \tag{8}$$

такъ какъ въ число слагаемыхъ попадетъ и (6).

Если бы мы начали суммированіе по g съ $m+1$, то точно также получили бы въ случаѣ $h\leqq m$:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\Big(\eta'_{kh}\overset{2m}{K}_h-\omega'_{kh}\overset{2m}{J}_k\Big)=0, \tag{9}$$

а когда $h>m$, то

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\Big(\eta'_{kh}\overset{2m}{K}_k-\omega'_{kh}\overset{2m}{J}_k\Big)=+\pi i, \tag{10}$$

по той же причинѣ.

Просуммируемъ теперь уравненіе (1) этого § по h отъ n до ϱ и изъ результата вычтемъ (7) или (8), смотря по тому будетъ-ли $n<m$ или $\geqq m$; по раздѣленіи на 2, будемъ имѣть:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\left(\overset{2n-1}{J_k}\,\overset{2m-1}{K_k}-\overset{2n-1}{K_k}\,\overset{2m-1}{J_k}\right)=+\frac{\pi}{2}i \qquad (n<m) \qquad (11)$$

такъ какъ въ число слагаемыхъ попадетъ и (2), и

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\left(\overset{2n-1}{J_k}\,\overset{2m-1}{K_k}-\overset{2n-1}{K_k}\,\overset{2m-1}{J_k}\right)=-\frac{\pi}{2}i. \qquad (n>m) \qquad (12)$$

Если бы суммировали по h отъ $n+1$, то получили бы такія формулы:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\left(\overset{2n}{J_k}\,\overset{2m-1}{K_k}-\overset{2n}{K_k}\,\overset{2m-1}{J_k}\right)=+\frac{\pi}{2}i, \qquad n<m; \qquad (13)$$

и

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\left(\overset{2n}{J_k}\,\overset{2m-1}{K_k}-\overset{2n}{K_k}\,\overset{2m-1}{J_k}\right)=-\frac{\pi}{2}i \qquad n\geqq m. \qquad (14)$$

Поступая также съ формулами (3) и (4), (9) и (10), мы получили бы слѣдующее:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\left(\overset{2n-1}{J_k}\,\overset{2m}{K_k}-\overset{2n-1}{K_k}\,\overset{2m}{J_k}\right)=+\frac{\pi}{2}i \qquad n\leqq m; \qquad (15)$$

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\left(\overset{2n-1}{J_k}\,\overset{2m}{K_k}-\overset{2n-1}{K_k}\,\overset{2m}{J_k}\right)=-\frac{\pi}{2}i; \qquad n>m; \qquad (16)$$

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\left(\overset{2n}{J_k}\,\overset{2m}{K_k}-\overset{2n}{K_k}\,\overset{2m}{J_k}\right)=+\frac{\pi}{2}i; \qquad n<m; \qquad (17)$$

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\left(\overset{2n}{J_k}\,\overset{2m}{K_k}-\overset{2n}{K_k}\,\overset{2m}{J_k}\right)=-\frac{\pi}{2}i; \qquad n>m; \qquad (18)$$

Формулы (11)—(18) могутъ быть собраны въ одну слѣдующую:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\left(\overset{p}{J}_k\overset{q}{K}_k-\overset{p}{K}_k\overset{q}{J}_k\right)\begin{aligned}&=+\frac{\pi}{2}i \qquad && p<q\\ &=-\frac{\pi}{2}i && p>q.\end{aligned}\Bigg\} \qquad (19)$$

Это соотношенiе найдено Вейерштрассомъ и сообщено, безъ полнаго однако доказательства, въ статьѣ «Zur Theorie der Abel'schen Functionen». Crelle, Bd. 47. Изъ нихъ тамъ выведены другiя подобныя соотношенiя между интегралами отъ a_{2k-1} до a_{2k} и отъ a_{2k} до a_{2k+1}, которыя раньше были имъ строго и элементарно доказаны въ упомянутой выше статьѣ, помѣщенной въ Braunsberger Programm 1849. Изъ этихъ соотношенiй можно вывести всѣ выведенныя нами въ послѣднихъ двухъ §§ по способу, позднѣе употреблявшемуся имъ на лекцiяхъ по гиперэллиптическимъ и Абелевымъ интеграламъ, откуда мы этотъ способъ и заимствовали. Сейчасъ упомянутыя нами соотношенiя между интегралами вдоль линiй l_k и промежуточныхъ между ними намъ далѣе не понадобятся, а потому мы на нихъ и не будемъ *останавливаться*.

21. Съ помощiю выведенныхъ въ § 19 соотношенiй легко докажется, что опредѣлитель системы 2ϱ уравненiй (1) и (2) § 18, составленный изъ η и ω, не $=0$. Дѣйствительно, не трудно убѣдиться, что опредѣлитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}
\eta_{1,1} & \eta_{2,1} & \eta_{3,1} & \cdots & \eta_{\rho,1} & -\omega_{1,1} & -\omega_{2,1} & -\omega_{3,1} & \cdots & -\omega_{\rho,1}\\
\eta'_{1,1} & \eta'_{2,1} & \eta'_{3,1} & \cdots & \eta'_{\rho,1} & -\omega'_{1,1} & -\omega'_{2,1} & -\omega'_{3,1} & \cdots & -\omega'_{\rho,1}\\
\eta_{1,2} & \eta_{2,2} & \eta_{3,2} & \cdots & \eta_{\rho,2} & -\omega_{1,2} & -\omega_{2,2} & -\omega_{3,2} & \cdots & -\omega_{\rho,2}\\
\eta'_{1,2} & \eta'_{2,2} & \eta'_{3,2} & \cdots & \eta'_{\rho,2} & -\omega'_{1,2} & -\omega'_{2,2} & -\omega'_{3,2} & \cdots & -\omega'_{\rho,2}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\eta_{1,\rho} & \eta_{2,\rho} & \eta_{3,\rho} & \cdots & \eta_{\rho,\rho} & -\omega_{1,\rho} & -\omega_{2,\rho} & -\omega_{3,\rho} & \cdots & -\omega_{\rho,\rho}\\
\eta'_{1,\rho} & \eta'_{2,\rho} & \eta'_{2,\rho} & \cdots & \eta'_{\rho,\rho} & -\omega'_{1,\rho} & -\omega'_{2,\rho} & -\omega'_{3,\rho} & \cdots & -\omega'_{\rho,\rho}
\end{vmatrix}$$

равенъ такому

$$\begin{vmatrix}
\omega_{1,1} & \omega_{2,1} & \omega_{3,1} & \cdots & \omega_{\rho,1} & \eta_{1,1} & \eta_{2,1} & \eta_{3,1} & \cdots & \eta_{\rho,1} \\
\omega'_{1,1} & \omega'_{2,1} & \omega'_{3,1} & \cdots & \omega'_{\rho,1} & \eta'_{1,1} & \eta'_{2,1} & \eta'_{3,1} & \cdots & \eta'_{\rho,1} \\
\omega_{1,2} & \omega_{2,2} & \omega_{3,2} & \cdots & \omega_{\rho,2} & \eta_{1,2} & \eta_{2,2} & \eta_{3,2} & \cdots & \eta_{\rho,2} \\
\omega'_{1,2} & \omega'_{2,2} & \omega'_{3,2} & \cdots & \omega'_{\rho,2} & \eta'_{1,2} & \eta'_{2,2} & \eta'_{3,2} & \cdots & \eta'_{\rho,2} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
\omega_{1,\rho} & \omega_{2,\rho} & \omega_{3,\rho} & \cdots & \omega_{\rho,\rho} & \eta_{1,\rho} & \eta_{2,\rho} & \eta_{3,\rho} & \cdots & \eta_{\rho,\rho} \\
\omega'_{1,\rho} & \omega'_{2,\rho} & \omega'_{3,\rho} & \cdots & \omega'_{\rho,\rho} & \eta'_{1,\rho} & \eta_{2,\rho} & \eta'_{3,\rho} & \cdots & \eta'_{\rho,\rho}
\end{vmatrix};$$

дѣйствительно послѣдній получается изъ перваго чрезъ ρ круговыхъ перестановокъ столбцевъ и умноженіе послѣ того ρ первыхъ столбцевъ на (-1); чрезъ это величина его не измѣняется, знакъ же будетъ одинаковъ съ результатомъ умноженія первоначальнаго на

$$(-1)^{\rho(2\rho-1)+\rho} = (-1)^{2\rho^2} = +1,$$

т. е. тоже останется безъ перемѣны. Помножая теперь первый опредѣлитель на второй по правиламъ умноженія опредѣлителей, мы будемъ имѣть на основаніи равенствъ (1) — (4) § 19:

$$\begin{vmatrix}
0 & -2\pi i & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
+2\pi i & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2\pi i & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & +2\pi i & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -2\pi i \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & +2\pi i & 0
\end{vmatrix} = (2\pi i)^{2\rho} = \\ = (-1)^{\rho}(2\pi)^{2\rho}$$

т. е.

$$\Delta = \pm (2\pi i)^{\varrho}, \tag{1}$$

слѣдовательно Δ отлично отъ нуля, что и требовалось доказать.

22. Переходимъ теперь къ выраженію интеграловъ 1. и 2. рода чрезъ примъ-функціи, что возможно послѣ того какъ доказано, что

$$\Delta \text{ не } = 0.$$

Помножая уравненіе (1) § 18 на λ'_{gh}, а (2) того-же § на $-\lambda_{gh}$ и, сложивши, суммируя по h отъ 1 до ϱ, получимъ результатъ, который легко такъ представится:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k=\varrho}\Big\{\overset{\alpha}{\underset{\alpha_0}{\mathrm{I}}}{}_k \sum_{h=1}^{h=\varrho}\left(\eta_{kh}\lambda'_{gh}-\eta'_{kh}\lambda_{gh}\right)-\overset{\alpha}{\underset{\alpha_0}{\mathrm{II}}}{}_k \sum_{h=1}^{h=\varrho}\left(\omega_{kh}\lambda'_{gh}-\omega'_{hh}\lambda_{gh}\right)\Big\} &= \\ =\sum_{h=1}^{h=\varrho}\Big\{\lambda'_{gh}\log \mathrm{E}\left(\alpha,\alpha_0\right)_h-\lambda_{gh}\log \mathrm{E}'\left(\alpha,\alpha_0\right)_h\Big\}&.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Полагая

$$\sum_{h=1}^{h=\varrho}\left(\eta_{kh}\lambda'_{gh}-\eta'_{kh}\lambda_{gh}\right)\begin{aligned}&=0 \qquad k\lessgtr g\\ &=1 \qquad k=g\end{aligned} \tag{2}$$

$$\sum_{h=1}^{h=\varrho}\left(\omega_{kh}\lambda'_{gh}-\omega'_{kh}\lambda_{gh}\right)=0, \tag{3}$$

будемъ имѣть систему уравненій, откуда найдутся λ'_{gh} и λ_{gh} $(h=1,2,\dots\varrho)$ слѣдующимъ образомъ. Помножая (2) на ω_{kl}, (3) на $-\eta_{kl}$ и по сложеніи суммируя по k, будемъ имѣть:

$$\sum_{h=1}^{h=\varrho}\Big\{\lambda'_{gh}\sum_{k=1}^{k=\varrho}\left(\omega_{kl}\eta_{kh}-\eta_{kl}\omega_{kh}\right)-\lambda_{gh}\sum_{k=1}^{k=\varrho}\left(\omega_{kl}\eta'_{kh}-\eta_{kl}\omega'_{kh}\right)\Big\}=\omega_{gl},$$

что, на основаніи (1), (3) и (4) § 19, приведется къ такому:

$$-\lambda_{gl}.2\pi i=\omega_{gl},$$

отвуда

$$\lambda_{gl} = -\frac{\omega_{gl}}{2\pi i}. \tag{4}$$

Помножая (2) на ω'_{kl}, (3) на $-\eta'_{kl}$ и, сложивши, суммируя по k, получимъ:

$$\sum_{h=1}^{h=\rho}\left\{ \lambda'_{gh} \sum_{k=1}^{k=\rho}\left(\omega'_{kl}\eta_{kh} - \eta'_{kl}\omega_{kl} \right) - \lambda_{gh} \sum_{k=1}^{k=\rho}\left(\omega'_{kl}\eta'_{kh} - \eta'_{kl}\omega'_{kh} \right)\right\} = \omega'_{gl},$$

что, на основаніи (2), (3) и (4), приведется къ такому:

$$\lambda'_{gl}(-2\pi i) = \omega'_{gl},$$

отвуда

$$\lambda'_{gl} = -\frac{\omega'_{gl}}{2\pi i}. \tag{5}$$

Внося эти значенія въ (1), получимъ:

$$\mathop{\mathrm{I}_g}\limits_{\alpha_0}^{\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{h=1}^{h=\rho}\left(\omega_{gh}\log \mathbf{E}'(\alpha,\alpha_0)_h - \omega'_{gh}\log \mathbf{E}(\alpha,\alpha_0)_h \right), \tag{6}$$

внося же во (2) и (3) слѣдующія соотношенія:

$$\sum_{h=1}^{h=\rho}\left(\omega_{gh}\eta'_{kh} - \omega'_{gh}\eta_{kh} \right) \begin{matrix} = 0 & \quad g \gtrless k \\ = 2\pi i & \quad g = k \end{matrix} \tag{7}$$

$$\sum_{h=1}^{h=\rho}\left(\omega_{gh}\omega'_{kh} - \omega'_{gh}\omega_{kh} \right) = 0. \tag{8}$$

Послѣднее соотношеніе Риманомъ получено съ помощію интегрированія по контуру той односвязной поверхности, въ которую преобразуется его поверхность для $\sqrt{R(x)}$ сѣченіями, проведенными по линіямъ A_k и B_k ($k = 1, 2, \ldots \varrho$) и соединительными C_k между A_{k+1} и B_k. Если въ (1) λ_{gh} и λ'_{gh} подчинимъ условіямъ:

$$\sum_{h=1}^{h=\rho}\left(\eta_{kh}\lambda'_{gh}-\eta'_{kh}\lambda_{gh}\right)=0, \tag{9}$$

$$\sum_{h=1}^{h=\rho}\left(\omega_{kh}\lambda'_{gh}-\omega'_{kh}\lambda'_{gh}\right)\begin{matrix}=0\\=-1;\end{matrix}\qquad\begin{matrix}k\gtrless g\\k=g\end{matrix} \tag{10}$$

то, помножая первое на $+\omega_{gl}$, второе на $-\eta_{gl}$ и по сложеніи суммируя по k, получимъ, на основаніи (1), (3) и (4) § 19:

$$-2\pi i.\lambda_{gl}=+\eta_{gl},$$

откуда

$$\lambda_{gl}=-\frac{\eta_{gl}}{2\pi i}; \tag{11}$$

помножая (9) на ω'_{gl}, (10) на $-\eta'_{gl}$, получимъ, на основаніи (2), (3) и (4) § 19, слѣдующее:

$$-2\pi i.\lambda'_{gl}=+\eta'_{gl},$$

откуда

$$\lambda'_{gl}=-\frac{\eta'_{gl}}{2\pi i}. \tag{12}$$

Внося это значеніе въ (1), получимъ:

$$\prod_{\alpha_0}^{\alpha}{}_g=\frac{1}{2\pi i}\sum_{h=1}^{h=\rho}\left(\eta_{gh}\log\mathbf{E}'(\alpha,\alpha_0)_h-\eta'_{gh}\log\mathbf{E}(\alpha,\alpha_0)_h\right); \tag{13}$$

внося же въ (9) и (10) слѣдующія соотношенія:

$$\sum_{h=1}^{h=\rho}\left(\eta_{gh}\eta'_{kh}-\eta'_{gh}\eta_{kh}\right)=0 \tag{14}$$

$$\sum_{h=1}^{h=\rho}\left(\omega_{kh}\eta'_{gh}-\omega'_{kh}\eta_{gh}\right)\begin{matrix}=0\\=2\pi i\end{matrix}\qquad\begin{matrix}k\gtrless g\\k=g\end{matrix} \tag{15}$$

изъ которыхъ послѣднее, впрочемъ, есть повтореніе (7).

23. Изъ этихъ выраженій интеграловъ 1. и 2. рода чрезъ примъ-функціи сейчасъ вытекаетъ ихъ періодичность. Чрезъ всякое данное положеніе точки α можно провести какъ кривую A_h, такъ и кривую B_h. Положимъ, что точка α станетъ двигаться въ прямомъ направленіи по A_h и опишетъ полный кругъ на ней: тогда она совершитъ переходъ изъ внѣшней области B_h во внутреннюю, перейдетъ, иначе говоря, съ правой стороны B_h на лѣвую; потому функція $\log E'(\alpha,\alpha_0)_h$ получитъ приращеніе $2\pi i$, тогда-какъ всѣ прочія *вернутся къ прежнему значенію; слѣдовательно интегралъ*

$$\mathop{\mathrm{I}_k}\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \text{ получитъ приращеніе } \omega_{kh}; \qquad (1)$$

а

$$\mathop{\mathrm{II}_k}\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \text{ получитъ приращеніе } \eta_{kh}. \qquad (2)$$

Если мы заставимъ точку α пробѣгать путь B_h въ прямомъ направленіи, то она перейдетъ съ лѣвой стороны пути A_h на правую, изъ внутренней области во внѣшнюю, слѣдовательно функція $\log E(\alpha,\alpha_0)_h$ получитъ приращеніе $-2\pi i$, тогда-какъ прочія вернутся къ прежнему своему значенію; отсюда слѣдуетъ, что интегралъ

$$\mathop{\mathrm{I}_k}\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \textit{ получитъ приращеніе } \omega'_{kg}, \qquad (3)$$

а

$$\mathop{\mathrm{II}_k}\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \text{ получитъ приращеніе } \eta'_{kg}. \qquad (4)$$

Если бы точка α описала путь B_h или A_h въ обратномъ направленіи, то, какъ легко видѣть, интегралы получили бы тѣ-же приращенія, но съ противнымъ знакомъ.

Теперь, такъ-какъ всякій другой сомкнутый путь можетъ быть приведенъ къ нѣкоторой послѣдовательности путей A_h и B_h ($h=1,2,\ldots\varrho$), пройденныхъ въ прямомъ направленіи, или обратномъ, то мы заключаемъ, что всѣ значенія, какія можетъ имѣть интегралъ 1. или 2. рода, могутъ быть представлены формулами:

$$\overset{\alpha}{\underset{\alpha_0}{\mathbf{I}}}_k + \sum_{g=1}^{g=\rho}\left(m_g \omega_{kg} + n_g \omega_{kg} \right); \tag{5}$$

$$\overset{\alpha}{\underset{\alpha_0}{\mathbf{II}}}_k + \sum_{g=1}^{g=\rho}\left(m_g \eta_{kg} + n'_g \eta'_{gk} \right); \tag{6}$$

гдѣ m_g и n_g цѣлыя, положительныя или отрицательныя, числа, или нуль, а интегралы взяты по какому-нибудь опредѣленному пути. Каждому такому сложному сомкнутому пути соотвѣтствуетъ особая примъ-функція $E(x)$, которая представится такъ:

$$E(x) = \prod_{g=1}^{g=\rho}\left[E(\alpha, \alpha_0)_g \right]^{m_g} . \left[E'(\alpha, \alpha_0)_g \right]^{n_g}, \tag{7}$$

какъ то слѣдуетъ изъ опредѣленія функцій $E(\alpha, \alpha_0)_g$ и $E'(\alpha, \alpha_0)_g$ уравненіями (5) и (6) § 17.

24. Съ помощію уравненія (1) § 16 можно и интегралъ 3. рода выразить чрезъ примъ-функціи, если къ видамъ ихъ, намъ уже знакомымъ изъ предыдущаго, присоединить еще новый видъ. Въ сейчасъ упомянутомъ уравненіи, если мы будемъ въ немъ только ξ считать за перемѣнное, второй членъ первой части, именно:

$$\int_\beta^\alpha \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(\xi)}}{P(\xi)} \cdot \frac{P(a)}{\sqrt{R(a)}} \right) \frac{da}{a-\xi} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(\eta)}}{P(\eta)} \cdot \frac{P(a)}{\sqrt{R(a)}} \right) \frac{da}{a-\eta} \right], \tag{1}$$

будетъ функція отъ ξ непрерывная и однозначная на всей Римановой поверхности за исключеніемъ линіи интегрированія $\overrightarrow{\beta\alpha}$, при переходѣ чрезъ которую слѣва направо интегралъ получаетъ приращеніе $-2\pi i$, какъ то слѣдуетъ изъ § 12, и въ концахъ которой, точкахъ α и β, обращается логариѳмически въ ∞, въ первой какъ $\log(\alpha - \xi)$ при $\xi = \alpha$, второй какъ $-\log(\beta - \xi)$ при $\xi = \beta$; для $\xi = \eta$ обращается въ нуль, въ корняхъ же уравненія $P(\xi) = 0$ обращается въ ∞ какъ $\frac{1}{\sqrt{\xi - a_{2k-1}}}$. Поэтому функція, опредѣляемая равенствомъ:

$$\mathbf{E}(\xi;\alpha,\beta)=e^{\int_\beta^\alpha\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(\xi)}}{P(\xi)}\cdot\frac{P(a)}{\sqrt{R(a)}}\right)\frac{da}{a-\xi}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(\eta)}}{P(\eta)}\cdot\frac{P(a)}{a-\eta}\right)\frac{da}{a-\eta}\right)}$$

будетъ однозначна, конечна и непрерывна на всей Римановой поверхности для $\sqrt{R(x)}$, исключая тѣхъ значеній ξ, для которыхъ $P(\xi)=0$, и которыя будутъ для нея существенно особенными, такъ какъ она будетъ въ нихъ принимать всякое значеніе, благодаря множителю $e^{\frac{1}{\sqrt{\xi-a_{2k-1}}}}$, который отдѣляется отъ нея вблизи этихъ значеній, и $\xi=\beta$, гдѣ она будетъ обращаться въ ∞^1 (какъ $\frac{1}{\beta-\xi}$ для $\xi=\beta$); въ точкѣ $\xi=\alpha$ она будетъ $=0^1$ (какъ $(\alpha-\xi)$ для $\xi=\alpha$); въ точкѣ $\xi=\eta$ будетъ $=1$. Эти свойства для нея характеристичны и вполнѣ ее опредѣляютъ до множителя, который будетъ примъ-функція перваго рода. Дѣйствительно, еслибы $\bar{E}(\xi;\alpha\beta)$ была другая функція того же рода, то частное

$$\frac{\bar{E}(\xi;\alpha,\beta)}{E(\xi;\alpha,\beta)} \tag{3}$$

было бы функціей однозначной, конечной и непрерывной на всей Римановой поверхности, за исключеніемъ корней $P(\xi)=0$, которые будутъ для нея существенно-особыя точки; слѣдовательно эта функція есть примъ-функція перваго рода, обращающаяся въ единицу для $\xi=\eta$.

Означая ее чрезъ $E(\xi;\eta)$, будемъ имѣть:

$$\overline{\mathbf{E}}(\xi;\alpha,\beta)=\mathbf{E}(\xi;\alpha,\beta)\times\mathbf{E}(\xi;\eta). \tag{4}$$

25. Вводя въ уравненіе (1) § 16 эту новую примъ-функцію, а также выражая интегралы 1. и 2. рода чрезъ примъ-функціи перваго рода, обращающіяся въ единицу $\xi=\eta$, и принимая во вниманіе соотношенія (1)—(4) § 19, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}&\int_\eta^\xi\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(\alpha)}}{P(\alpha)}\cdot\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{dx}{x-\alpha}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(\beta)}}{P(\beta)}\cdot\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{dx}{x-\beta}\right)=\\&\qquad\qquad=\log\mathbf{E}(\xi,\alpha,\beta)+\\&+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{k=\rho}\left\{\log\frac{E(\alpha;\eta)_k}{E(\beta;\eta)_k}\log\mathbf{E}'(\xi;\eta)_k-\log\frac{E'(\alpha;\eta)_k}{E'(\beta;\eta)_k}\log\mathbf{E}(\xi;\eta)_k\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Формула эта дана Вейерштрассомъ въ его лекціяхъ. **Изъ этой формулы видно, что, благодаря первому члену ея, всякая простая сомкнутая кривая вокругъ** α **или** β **даетъ интегралу приращеніе** $\pm 2\pi i$; **если же** ξ **опишетъ** A_h, **то приращеніе интеграла будетъ**

$$\log \frac{E(\alpha,\eta)_h}{E(\beta,\eta)_h}\,; \tag{2}$$

а если ξ **опишетъ** B_h, **то**

$$\log \frac{E'(\alpha:\eta)_h}{E'(\beta,\eta)_h}\,. \tag{3}$$

По формуламъ (1) и (2) § 18, если тамъ принять $\alpha_0=\eta$, **и (3) и (4) § 17 это такъ представится:**

$$\log \frac{E(\alpha,\eta)_h}{(E\beta,\eta)_h} = \sum_{k=1}^{k=\rho}\Big(\eta_{kh}\mathop{\mathrm{I}}\limits_{\beta}^{\alpha}{}_k - \omega_{kh}\mathop{\mathrm{II}}\limits_{\beta}^{\alpha}{}_k\Big) = \mathop{\mathrm{III}}\limits_{(A_h)}{}_{\alpha\beta} \tag{4}$$

$$\log \frac{E'(\alpha,\eta)_h}{E'(\beta,\eta)_h} = \sum_{k=1}^{k=\rho}\Big(\eta'_{kh}\mathop{\mathrm{I}}\limits_{\beta}^{\alpha}{}_k - \omega'_{kh}\mathop{\mathrm{II}}\limits_{\beta}^{\alpha}{}_k\Big) = \mathop{\mathrm{III}}\limits_{(B_h)}{}_{\alpha\beta} \tag{5}$$

гдѣ

$$\mathop{\mathrm{III}}\limits_{(A_h)}{}_{\alpha\beta} = \int\limits_{(A_h)}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(\alpha)}}{P(\alpha)}\cdot\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{dx}{x-\alpha} - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(\beta)}}{P(\beta)}\cdot\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{dx}{x-\beta}\right) \tag{6}$$

$$\mathop{\mathrm{III}}\limits_{(B_h)}{}_{\alpha\beta} = \int\limits_{(B_h)}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(\alpha)}}{P(\alpha)}\cdot\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{dx}{x-\alpha} - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(\beta)}}{P(\beta)}\cdot\frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{dx}{x-\beta}\right) \tag{7}$$

т. е. интегралъ $\mathrm{III}_{\alpha\beta}$ **имѣетъ** $2\varrho+1$ **періодовъ:**

$$2\pi i,\ \mathop{\mathrm{III}}\limits_{(A_h)}{}_{\alpha\beta},\ \mathop{\mathrm{III}}\limits_{(B_h)}{}_{\alpha\beta}\,.$$

$$(h=1,\,2,\,\ldots\,\varrho).$$

ГЛАВА III.

Теорема Абеля.

26. Чрезъ примъ-функціи 2. рода можно выразить и алгебраическую функцію $F(x,\sqrt{R(x)})$, однозначную на Римановой поверхности для $\sqrt{R(x)}$. Общій видъ такой функціи есть:

$$y=\frac{f_1(x)+f_2(x)\sqrt{R(x)}}{F_1(x)+F_2(x)\sqrt{R(x)}}$$

(что можетъ быть приведено и къ виду § 2); значенія x, для которыхъ это выраженіе принимаетъ данное значеніе y, найдутся изъ уравненія:

$$(f_1(x)-yF_1(x))^2-(f_2(x)-yF_2(x))^2R(x)=0, \tag{2}$$

а соотвѣтственныя значенія $\sqrt{R(x)}$ изъ уравненія:

$$\sqrt{R(x)}=-\frac{f_1(x)-yF_1(x)}{f_2(x)-yF_2(x)}. \tag{3}$$

Для всякаго конечнаго значенія y изъ уравненія (2) найдется одинаковое число соотвѣтственныхъ значеній x, и по нимъ изъ уравненія (3) соотвѣтственное число значеній $\sqrt{R(x)}$ — первое, разумѣется, принимая во вниманіе кратность корня уравненія (2). Значенія x, для которыхъ $y=0$, найдутся изъ уравненія

$$(f_1(x))^2-(f_2(x))\,R(x)=0, \tag{4}$$

значенія, для которыхъ $y=\infty$, изъ уравненія

$$(F_1(x))^2-(F_2(x))^2R(x)=0. \tag{5}$$

Если степень этихъ уравненій та же, что и уравненія (2), то очевидно, что наша функція и нулевыя, и безконечныя значенія будетъ принимать въ одинаковомъ числѣ точекъ Римановой поверхности — *принимая въ разсчетъ кратность* корней, въ томъ же именно, какъ и каждое изъ конечныхъ. Если же напримѣръ степень уравненія (4) ниже степени уравненія (2), то въ случаѣ одинаковой четности это можетъ быть только на четное число — пусть $2p$; но тогда степень уравненія (6) будетъ та же, что и уравненія (2), что нетрудно видѣть; слѣдовательно въ (1) степень числителя будетъ ниже степени знаменателя на p единицъ; потому, если сдѣлаемъ подстановку $x = \frac{1}{t^2}$, то числитель будетъ содержать t^{2p} общимъ множителемъ, слѣдовательно будетъ нулемъ порядка $2p$ для $t = 0$ или $x = \infty$. Слѣдовательно въ этомъ случаѣ $x = \infty$, будучи $2p$-кратнымъ корнемъ функціи (1), будетъ своею кратностію дополнять число нулей до числа значеній x, для которыхъ функція принимаетъ всякое другое значеніе, конечное и безконечное. Точно также, если степени уравненій (2) и (4) различной четности, напр. уравненіе (2) четной степени, а уравненіе (4) нечетной, то уравненіе (4) будетъ имѣть корней на $2p+1$ менѣе чѣмъ (2); но въ этомъ случаѣ степень $(f_2(x))^2$ будетъ ниже степени $(F_1(x))^2$ на $2(p+\varrho+1)$, и слѣдовательно $f_2(x)$ ниже $F_1(x)$ на $(p+\varrho+1)$. Означая чрезъ n степень $F_1(x)$, будемъ слѣдовательно имѣть $n-p-\varrho-1$ для степени $f_2(x)$. Полагая $x = \frac{1}{t^2}$ въ (1), мы выведемъ въ знаменателѣ за скобки $\left(\frac{1}{t}\right)^{2n}$, въ числителѣ же $\left(\frac{1}{t}\right)^{2(n-p-\varrho-1)+2\varrho+1} = \left(\frac{1}{t}\right)^{2n-2p-1}$; слѣдовательно степень t^{2p+1} перейдетъ въ числитель общимъ множителемъ. Такимъ образомъ y будетъ $= 0^{2p+1}$ для $t = 0$; слѣдовательно и въ этомъ случаѣ $x = \infty$ будетъ своею кратностію восполнять недостающее число нулей функціи (1) до того числа значеній x, въ которыхъ она принимаетъ всякое другое значеніе конечное и безконечное. Также разберется случай, когда уравненіе (2) нечетной степени, а (4) четной. Совершенно такимъ же образомъ убѣдимся, что въ случаѣ, когда степень уравненія (5) ниже степени уравненія (2), недостающее число безконечностей функціи (1) будетъ восполняться кратностію значенія $x = \infty$, для котораго функція эта будетъ обращаться въ безконечность. Такимъ образомъ, мы видимъ, что, принимая во вниманіе порядокъ p каждаго нуля 0^p и порядокъ q каждой безконечности ∞^q, мы можемъ сказать, что функція (1) принимаетъ всякое значеніе, конечное, нуль или безконечное, въ одинаковомъ числѣ точекъ Римановой поверхности. Для этого числа существуетъ низшій предѣлъ. Число различныхъ значеній x, при которыхъ раціональная функція отъ x и $\sqrt{R(x)}$ принимаетъ какое либо опредѣленное значеніе, не можетъ быть меньше $\varrho + 1$. Дѣйствительно, за общій видъ $F(x, \sqrt{R(x)})$ можно принять такой:

$$y = \frac{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{R(x)}}{\Theta(x)}, \qquad (6)$$

гдѣ $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\Theta(x)$ не имѣютъ общаго дѣлителя (ибо на такой всегда можно сократить напередъ), но $\varphi(x)$, $R(x)$ и $\Theta(x)$ могутъ его имѣть, и пусть это будетъ $\chi(x)$, такъ что

$$\varphi(x)=\chi(x)\varphi_1(x),$$

$$R(x)=\chi(x)R_1(x),$$

$$\Theta(x)=\chi(x)\Theta_1(x);$$

въ этомъ случаѣ выраженіе можно сократить на $\sqrt{\chi(x)}$, и мы будемъ имѣть:

$$y=\frac{\varphi_1(x)\sqrt{\chi(x)}+\psi(x)\sqrt{R_1(x)}}{\Theta_1(x)\sqrt{\chi(x)}}.$$

Значенія x, соотвѣтствующія данному значенію y, найдутся изъ уравненія:

$$(\varphi_1(x)-y\Theta_1(x))^2\chi(x)-(\psi(x))^2R_1(x)=0;$$

послѣ чего значеніе $\sqrt{\frac{R_1(x)}{\chi(x)}}$ изъ уравненія:

$$\left(y-\frac{\varphi_1(x)}{\Theta_1(x)}\right):\frac{\psi(x)}{\Theta_1(x)}=\sqrt{\frac{R(x)}{\chi(x)}}; \tag{9}$$

степень же уравненія (8) самая низшая получится, когда $\varphi_1(x), \Theta_1(x)$ и $\psi(x)$ будутъ постоянныя, а $\chi(x)$ и $R_1(x)$ одно степени ϱ, другое $\varrho+1$; отсюда и слѣдуетъ сказанное.

27. Раціональная функція на обыкновенной плоскости опредѣляется вполнѣ по ея нулямъ и безконечностямъ; точно также и функція (1) предыдущаго §; разница однако между ними только та, что нули и безконечности раціональной функціи могутъ быть заданы вполнѣ произвольно лишь бы въ одинаковомъ числѣ; тогда какъ для нашей функціи—однозначной на Римановой поверхности для $\sqrt{R(x)}$—только часть ихъ можетъ быть задана произвольно; остальные же тогда опредѣлятся по нимъ. Дѣйствительно, это легко вывести сперва для цѣлой функціи x и $\sqrt{R(x)}$, которой всѣ ∞ лежатъ, слѣдовательно, въ безконечности, и которая получается изъ (1) если въ ней принять $F_1(x)=1$, $F_2(x)=0$; тогда будетъ

$$y=f_1(x)+f_2(x)\sqrt{R(x)}. \tag{1}$$

Нулевыя значенія этой функціи найдутся изъ уравненія:

$$(f_1(x))^2-(f_2(x))^2R(x)=0. \tag{2}$$

Если это уравненіе четной степени $2n$, то значитъ, степень $f_1(x)$ въ уравненіи (2) есть преобладающая и слѣдовательно n, такъ что наивысшая возможная для $f_2(x)$ степень будетъ $\frac{1}{2}(2n-2\varrho-1-1)=n-\varrho-1$. Такимъ образомъ $f_1(x)$ будетъ имѣть всего $n+1$ коэффиціентовъ, $f_2(x)$ $n-\varrho$; поэтому если отбросить одинъ, какъ общій множитель первой части уравненія (2), то оно будетъ имѣть всего $2n-\varrho$ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, а потому только $2n-\varrho$ корней его и можно задать по произволу, равно какъ и соотвѣтствующія значенія $\sqrt{R(x)}$; тогда какъ изъ $2n-\varrho$ линейныхъ уравненій относительно $2n-\varrho$ отношеній коэффиціентовъ $f_1(x)$ и $f_2(x)$ къ одному изъ нихъ:

$$f_1(x_i)+f_2(x_i)\sqrt{R(x_i)}=0\ ^{(*)} \tag{3}$$

эти послѣднія и опредѣлятся; послѣ этого, раздѣливъ первую часть уравненія (2), въ которомъ все будетъ уже извѣстно, на $\prod\limits_{i=1}^{i=2n-\varrho}(x-x_i)$, мы получимъ въ частномъ уравненіе:

$$\varphi(x)=\Big[\,(f_1(x))^2-(f_2(x))^2R(x)\,\Big]:\prod_{i=1}^{i=2n-\varrho}(x-x_i)=0\,, \tag{4}$$

котораго корни будутъ остальными корнями уравненія (2). Такимъ образомъ эти вполнѣ опредѣляются по $2n-\varrho$ первымъ; соотвѣтствующія значенія $\sqrt{R(x)}$ найдутся тогда изъ уравненія:

$$f_2(x_j)+f_2(x_j)\sqrt{R(x_j)}=0 \tag{5}$$

по формулѣ

$$\sqrt{R(x_j)}=-\frac{f_1(x_j)}{f_2(x_j)}\,. \tag{6}$$

Точно также, если степень уравненія (2) нечетная $2n+1$, то второй членъ будетъ преобладающимъ, и потому степень $f_2(x)$ будетъ $\frac{1}{2}(2n+1-2\varrho-1)=n-\varrho$; наивысшая возможная степень для $f_1(x)$ будетъ поэтому n; такимъ образомъ общее число коэффиціентовъ обѣихъ функцій, уменьшенное на единицу, будетъ $2n-\varrho+1$; поэтому столько кор-

---

[*] Если x_h есть k—кратный корень, то къ уравненію, получаемому отъ вставки x_h вмѣсто x, сюда нужно присоединить $k-1$ уравненій, получаемыхъ отъ приравниванія нулю результата такой же вставки x_h вмѣсто x въ $k-1$ производныхъ отъ $f_1(x)+f_2(x)\sqrt{R(x)}$.

ней можно задать произвольно, остальные же ϱ по нимъ опредѣлятся совершенно также какъ и въ предыдущемъ частномъ случаѣ.

Итакъ, дѣйствительно, въ случаѣ цѣлой функціи x и $\sqrt{R(x)}$ ϱ нулей ея опредѣлятся по остальнымъ нулямъ и безконечностямъ. Въ случаѣ дробной функціи предположимъ сперва, что всѣ ея безконечности лежатъ въ конечномъ и всѣ даны. Тогда можно по предыдущему найти такую цѣлую функцію x и $\sqrt{R(x)}$, которой эти безконечности будутъ нулями; для этого стоитъ только степени $F_1(x)$ и $F_2(x)$ выбрать достаточно высокими, именно: если m данное число безконечностей, то когда $m+\varrho$ четное число, взять $\frac{1}{2}(m+\varrho)$ для степени $F_1(x)$ и $\frac{1}{2}(m+\varrho-2\varrho-2)=\frac{1}{2}(m-\varrho-2)=\frac{1}{2}(m-\varrho)-1$ для степени $F_2(x)$; если же $m+\varrho$ число нечетное, то для $F_2(x)$ взять степень $=\frac{1}{2}(m+\varrho-2\varrho-1)=$ $=\frac{1}{2}(m-\varrho-1)$, а для $F_1(x)$ степень $\frac{1}{2}(m+\varrho-1)$. Въ обоихъ случаяхъ функція $F_1(x)+F_2(x)\sqrt{R(x)}$ будетъ имѣть еще ϱ корней. Если бы p безконечностей изъ всего числа лежало въ ∞, то въ случаѣ $m-p+\varrho$ четнаго слѣдуетъ взять $\frac{1}{2}(m-p+\varrho)$ для степени $F_1(x)$ и слѣдовательно $\frac{1}{2}(m-p-\varrho-1)$ для степени $F_2(x)$; если же $m-p+\varrho$ число нечетное, то слѣдуетъ взять $\frac{1}{2}(m-p-\varrho-1)$ для степени $F_2(x)$ и $\frac{1}{2}(m-p+\varrho-1)$ для степени $F_1(x)$, и опредѣлить эти функціи такъ, чтобы $F_1(x)+F_2(x)\sqrt{R(x)}$ обращалась въ нуль въ $m-p$ заданныхъ безконечностяхъ дли искомой дробной функціи, которыя лежатъ въ конечномъ. Эта функція будетъ обращаться въ нуль, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, еще въ ϱ точкахъ. Присоединяя ихъ въ обоихъ случаяхъ къ $m-\varrho$ заданнымъ нулямъ искомой дробной функціи, мы опредѣлимъ по этимъ даннымъ функцію $f_1(x)+f_2(x)\sqrt{R(x)}$, которая обращалась бы въ нуль въ этихъ m точкахъ. Но по предыдущему эта функція будетъ обращаться въ нуль еще въ ϱ точкахъ; отсюда и слѣдуетъ сказанное выше, что изъ полнаго числа нулей и безконечностей ϱ опредѣляются по остальнымъ. Легко видѣть, что, въ случаѣ, когда p нулей лежатъ въ безконечности, функція $F_1(x)+F_2(x)\sqrt{R(x)}$ опредѣляется какъ въ первомъ случаѣ; функція же $f_1(x)+f_2(x)\sqrt{R(x)}$ должна быть опредѣлена теперь по даннымъ $m-p-\varrho$, лежащимъ въ конечномъ нулямъ, съ присоединеніемъ къ нимъ еще тѣхъ ϱ нулей $F_1(x)+F_2(x)\sqrt{R(x)}$, которые опредѣляются по заданнымъ.

28. **Пусть** $F(x, \sqrt{R(x)})$ **раціональная функція** x **и** $\sqrt{R(x)}$;

$$\begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots. x_r \text{ ея нули, а} \\ y_1, y_2, \ldots. y_r \text{ ея безконечности.} \end{array} \qquad (1)$$

Всегда можно составить примъ-функціи $E(\alpha; x_h, y_h)$ по (2) § 24, которыя будутъ обращаться въ нуль въ x_h, въ безконечность въ y_h (въ рядахъ (1) нѣкоторые изъ x_g могутъ быть равны между собою, равно какъ и нѣкоторые y_g), и кромѣ того въ единицу для $x = \eta$, $\sqrt{R(x)} = \sqrt{R(\eta)}$. Составивъ произведеніе изъ этихъ примъ-функцій $E(x; x_h, y_h)$ и раздѣливъ его на $F(x, \sqrt{R(x)}) : F(\eta, \sqrt{R(\eta)})$, получимъ функцію:

$$\frac{F(\eta, \sqrt{R(\eta)}) \cdot \prod_{h=1}^{h=r} E(x; x_h, y_h)}{F(x, \sqrt{R(x)})}, \qquad (2)$$

которая будетъ конечна и однозначна на всей Римановой поверхности за исключеніемъ точекъ a_{2k-1} $(k = 1, 2, \ldots. \varrho)$, которыя будутъ для нея существенно особенными, и которая будетъ $= 1$ для $x = \eta$, $\sqrt{R(x)} = \sqrt{R(\eta)}$. Слѣдовательно это будетъ функція $E(x)$, которая $= 1$ для $x = \eta$. Но всегда можно по (4) § 24 такъ опредѣлить $E(x; x_r, y_r)$, измѣняя путь интегрированія, отъ котораго она зависитъ, что она будетъ содержать въ себѣ множителемъ $E(x)$. Тогда написавъ что $(2) = E(x)$, можно будетъ обѣ части сократить на $E(x)$. Предположивъ, слѣдовательно, что (2) уже раздѣлено на $E(x)$, мы будемъ имѣть, что оно $= 1$; слѣдовательно получается такой результатъ:

$$F(x, \sqrt{R(x)}) = F(\eta, \sqrt{R(\eta)}) \prod_{h=1}^{h=r} E(x; x_h, y_h), \qquad (3)$$

гдѣ $r - 1$ путей интегрированія совершенно произвольны и только послѣдній опредѣляется по нимъ. Предложеніе это принадлежитъ Вейерштрассу и изложено имъ въ его лекціяхъ, причемъ распространено на Абелевы интегралы вообще.

Отсюда онъ само собою получаетъ теорему Абеля. Возьмемъ логариѳмъ отъ обѣихъ частей (3); тогда по (2) § 24 мы будемъ имѣть такой результатъ:

$$\log \frac{F(x, \sqrt{R(x)})}{F(\eta, \sqrt{R(\eta)})} = \sum_{h=1}^{h=r} \int_{y_h}^{x_h} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(x)}}{P(x)} \cdot \frac{P(a)}{\sqrt{R(a)}} \right) \frac{da}{a - x} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(\eta)}}{P(\eta)} \cdot \frac{P(a)}{\sqrt{R(a)}} \right) \frac{da}{a - \eta} \right) (4)$$

который и выражаетъ теорему Абеля для интеграловъ третьяго рода. Если примемъ здѣсь $\varkappa = x$, $\sqrt{R(\varkappa)} = -\sqrt{R(x)}$, то получимъ результатъ такой:

$$\sum_{h=1}^{h=r} \int_{\gamma_h}^{x_h} \frac{\sqrt{R(x)}}{P(x)} \; \frac{P(a)}{a-x} \cdot \frac{da}{\sqrt{R(a)}} = \log \frac{F(x, \sqrt{R(x)})}{F(x, -\sqrt{R(x)})} \tag{5}$$

или, если примемъ для F форму (1) § 26 и раздѣлимъ на 2:

$$\sum_{h=1}^{h=r} \int_{\gamma_h}^{x_h} \frac{\sqrt{R(x)}}{P(x)} \cdot \frac{P(a)}{a-x} \cdot \frac{da}{2\sqrt{R(a)}} = \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{f_1(x)+f_2(x)\sqrt{R(x)}}{F_1(x)+F_2(x\sqrt{R(x)}} \cdot \frac{F_1(x)-F_2(x)\sqrt{R(x)}}{f_1(x)-f_2(x)\sqrt{R(x)}} \right\} \tag{6}$$

что̀ выражаетъ теорему для интеграловъ 3. рода Вейерштрассовскаго типа, которые мы въ § 9 обозначили чрезъ Ш_a. Отсюда можно вывести и теорему Абеля для интеграловъ 1. и 2. рода, какъ увидимъ ниже; прежде однакоже, въ виду фундаментальнаго значенія Абелевой теоремы для теоріи Абелевыхъ интеграловъ вообще, мы дадимъ здѣсь еще выводъ Абелевой теоремы, принадлежащій самому Абелю.

29. Предполагая въ уравненіи (2) § 26 y измѣняющимся отъ ∞ до 0, мы заставимъ корни этого уравненія, которые означимъ чрезъ $z_1\ z_2 \ldots z_r$ (если степень этого уравненія есть r) измѣняться отъ $y_1\ y_2 \ldots y_r$ (корней уравненія (5) того же §) до $x_1, x_2 \ldots x_r$ (корней уравненія (4) того-же §). Означимъ для краткости первую часть уравненія (2), если въ немъ вмѣсто x написать z, какъ представителя измѣняющихся корней $z_1\ z_2 \ldots z_r$, чрезъ $\Phi(z, y)$, такъ что

$$\Phi(z,y) = (f_1(z) - yF_1(z))^2 - (f_2(z) - yF_2(z))^2 R(z) = 0, \tag{1}$$

а первую производную по z чрезъ $\Phi'(z)$; тогда, дифференцируя это уравненіе по y какъ независимой перемѣнной, мы получимъ:

$$\Phi'(z)\,dz - 2\left[(f_1(z) - yF_1(z))F_1(z) - (f_2(z) - yF_2(z))F_2(z)R(z) \right] dy = 0,$$

откуда

$$dz = \frac{2\left[(f_1(z) - yF_1(z))F_1(z) - (f_2(z) - yF_2(z))F_2(z)R(z)\right] dy}{\Phi'(z)}$$

или умножая числителя и знаменателя на $f_1(z) - yF_1(z)$:

$$dz = \frac{2[(f_1(z) - yF(z))^2 F_1(z) - (f_2(z) - yF_2(z))(f_1(z) - yF_1(z))F_2(z)R(z)]dy}{(f_1(z) - yF(z))\Phi'(z)};$$

на основанiи (1) это можно такъ представить:

$$dz = \frac{f_2(z) - yF_2(z)}{f_1(z) - yF_1(z)} \cdot 2R(z) \frac{f_2(z)F_1(z) - f_1(z)F_2(z)}{\Phi'(z)} dy,$$

а это на основанiи (3) § 26 такимъ образомъ:

$$dz = -2\sqrt{R(z)} \frac{f_2(z)F_1(z) - f_1(z)F_2(z)}{\Phi'(z)} dy,$$

или

$$\frac{dz}{2\sqrt{R(z)}} = -\frac{f_2(z)F_1(z) - f_1(z)F_2(z)}{\Phi'(z)} dy; \tag{2}$$

помножая это на $\frac{P(z)}{z-a}$ и, по перемѣнѣ z на z_h, суммируя по h отъ 1 до r, получимъ:

$$\sum_{h=1}^{h=r} \frac{P(z_h)}{z_h - a} \cdot \frac{dz_h}{2\sqrt{R(z_h)}} = \sum_{h=1}^{h=r} \frac{[f_2(z_h)F_1(z_h) - f_1(z_h)F_2(z_h)]P(z_h)}{\Phi'(z_h)(a - z_h)} dy. \tag{4}$$

Степень выраженiя въ скобкахъ [ ], которое равно

$$(f_2(z_h) - yF_2(z_h))F_1(z_h) - (f_1(z_h) - yF_1(z_h))F_2(z_h),$$

будетъ не выше $r - \varrho - 1$; дѣйствительно, если r четное, то $f_1(z) - yF_1(z)$ въ уравненiи (1) будетъ степени $\frac{r}{2}$, и слѣдовательно которая нибудь изъ функцiй $f_1(z)$ и $F_1(z)$ будетъ этой степени; второй членъ въ уравненiи (1) будетъ тогда низшей степени, и потому $f_2(z) - yF_2(z)$ степени не выше $\frac{r}{2} - \varrho - 1$; слѣдовательно, предполагая, что степени функцiй достигаютъ своихъ maximum'овъ, мы получимъ только $r - \varrho - 1$.

Точно также если r нечетное число, то $f_2(z) - yF_2(z)$ будетъ степени $\frac{r-1}{2} - \varrho$, и потому которая нибудь изъ функцiй $f_2(z)$ и $F_2(z)$ будетъ этой степени; наивысшая же степень, возможная тогда для $f_1(z) - yF_1(z)$, будетъ $\frac{r-1}{2}$; предполагая, что степени всѣхъ функцiй достигаютъ своихъ maximum'овъ, мы получимъ опять $z - 1 - \varrho$, что и требовалось доказать.

Такъ какъ степень $P(z)$ есть ϱ, то мы заключаемъ отсюда, что коэффиціентъ при dy во второй части уравненія будетъ представлять разложеніе на частныя дроби такой функціи:

$$\frac{P(a)[f_2(a)F_1(a)-f_1(a)F_2(a)]}{(f_1(a)-yF_1(a))^2-(f_2(a)-yF_2(a))^2R(a)}.$$

Такимъ образомъ будетъ:

$$\sum_{h=1}^{h=r}\frac{P(z_h)}{z_h-a}\cdot\frac{dz_h}{2\sqrt{R(z_h)}}=\frac{P(a)[f_2(a)F_1(a)-f_1(a)F_2(a)]dy}{(f_1(a)-yF_1(a))^2-(f_2(a)-yF_2(a))^2R(a)}. \qquad (4)$$

Но вторую часть здѣсь можно такъ представить:

$$\frac{P(a)}{\sqrt{R(a)}}\,\frac{\dfrac{[f_2(a)F_1(a)-f_1(a)F_2(a)]}{(f_1(a)-yF_1(a))^2}\sqrt{R(a)}\,dy}{1-\left(\dfrac{f_2(a)-yF_2(a)}{f_1(a)-yF_1(x)}\sqrt{R(a)}\right)^2}=\frac{P(a)}{\sqrt{R(a)}}\,\frac{dz}{1-z^2}=\frac{P(a)}{2\sqrt{(a)}}\,d\log\frac{1+z}{1-z},$$

если

$$z=\frac{f_2(a)-yF_2(a)}{f_1(a)-yF_1(a)}\sqrt{R(a)}; \qquad (5)$$

слѣдовательно, (4) приметъ такой видъ:

$$\sum_{h=1}^{h=r}\frac{P(z_h)}{z_h-a}\cdot\frac{dz_h}{2\sqrt{(z_h)}}=\frac{P(a)}{2\sqrt{R(a)}}\,d\log\frac{1+z}{1-z},$$

откуда, интегрируя по y отъ ∞ до 0 и имѣя въ виду, что по (5) для $y=\infty$, $z=$ $=\dfrac{F_2(a)}{F_1(a)}\sqrt{R(a)}$, а для $y=0$, $z=\dfrac{f_2(a)}{f_1(a)}\sqrt{R(a)}$, мы получимъ:

$$\sum_{h=1}^{h=r}\int_{y_h}^{x_h}\frac{P(z_h)}{z_h-a}\cdot\frac{dz_h}{2\sqrt{R(z_h)}}=\frac{P(a)}{2\sqrt{R(a)}}\log\left(\frac{f_1(a)+f_2(a)\sqrt{R(a)}}{f_1(a)-f_2(a)\sqrt{R(a)}}\cdot\frac{F_1(a)-F_2(a)\sqrt{R(a)}}{F_1(a)+F_2(a)\sqrt{R(a)}}\right). \qquad (6)$$

Подъ log разумѣется здѣсь главное его значеніе.

30. Изъ только что полученной нами формулы получается теорема Абеля для интеграловъ 1. рода: полагая $a = a_{2k-1}$, направо мы получимъ нуль, налѣво же интегралы перваго рода $\overset{x_h}{\underset{y_h}{\mathrm{I}_k}}$; слѣдовательно

$$\sum_{h=1}^{h=r} \overset{x_h}{\underset{y_h}{\mathrm{I}}}{}_k = 0\,. \qquad (1)$$

Вычитая только что полученный результатъ изъ (6) и раздѣляя на $P(a)$ обѣ части, мы будемъ имѣть:

$$\sum_{h=1}^{h=r} \int_{y_h}^{x_h} \frac{a - a_{2k-1}}{P(a)} \cdot \frac{P(z_h)}{(z_h - a)(z_h - a_{2k-1})} \cdot \frac{dz_h}{2\sqrt{R(z_h)}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{R(a)}} \log \left(\frac{f_1(a) + f_2(a)\sqrt{R(a)}}{f_1(a) - f_2(a)\sqrt{R(a)}} \cdot \frac{F_1(a) - F_2(a)\sqrt{R(a)}}{F_1(a) + F_2(a)\sqrt{R(a)}} \right). \qquad (2)$$

Для значенiй a очень близкихъ къ a_{2k-1}, вторую часть можно разложить въ рядъ такимъ образомъ:

$$\frac{1\,.\,2}{2\sqrt{R(a)}} \left(\frac{f_2(a)\sqrt{R(a)}}{f_1(a)} + \frac{1}{3}\left(\frac{f_2(a)\sqrt{R(a)}}{f_1(a)} \right)^3 + \ldots - \frac{F_2(a)\sqrt{R(a)}}{F_1(a)} - \frac{1}{3}\left(\frac{F_2(a)\sqrt{R(a)}}{F_1(a)} \right)^3 - \ldots \right) =$$

$$= \frac{f_2(a)\,F_1(a) - f_1(a)\,F_2(a)}{f_1(a)\,.\,F_1(a)} + \frac{1}{3}\left(\left(\frac{f_2(a)}{f_1(a)} \right)^3 - \left(\frac{F_2(a)}{F_1(a)} \right)^3 \right) R(a) + \text{ и т. д.,}$$

гдѣ остальные члены содержатъ множителями положительныя степени $R(a)$, а потому начиная со второго всѣ обратятся въ нуль, когда a сдѣлается $= a_{2k-1}$. Въ этомъ случаѣ, слѣдовательно, равенство (2) по умноженiи его еще на $Q(a_{2k-1})$ обратится въ такое:

$$\sum_{h=1}^{h=r} \overset{x_h}{\underset{y_h}{\mathrm{II}}}{}^0_k = Q(a_{2k-1}) \frac{f_2(a_{2k-1})\,F_1(a_{2k-1}) - f_1(a_{2k-1})\,F(a_{2k-1})}{f_1(a_{2k-1})\,F_1(a_{2k-1})}, \qquad (3)$$

которое выражаетъ теорему Абеля для интеграловъ 2. рода Вейерштрассовскаго типа.

Здѣсь мы предполагали, что ни $f_1(a_{2k-1})$ не $=0$, ни $F_1(a_{2k-1})$ не $=0$; если же $f_1(a_{2k-1}) = 0^1$ и $F_1(a_{2k-1}) = 0^1$, то надо log во (2) разложить такъ:

$$\frac{1}{2\sqrt{R(a)}}\log\left(\frac{f_2(a)\sqrt{R(a)}+f_1(a)}{f_2(a)\sqrt{P(a)}-f_1(a)}\cdot\frac{F_2(a)\sqrt{R(a)}-F_1(a)}{F_2(a)\sqrt{P(a)}+F_1(a)}\right)=$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{R(a)}}\left\{\frac{f_1(a)}{f_2(a)\sqrt{R(a)}}+\frac{1}{3}\left(\frac{f_1(a)}{f_2(a)\sqrt{R(a)}}\right)^3+\ldots-\frac{F_1(a)}{F_2(a)\sqrt{R(a)}}-\frac{1}{3}\left(\frac{F_1(a)}{F_2(a)\sqrt{R(a)}}\right)^3-\ldots\right\}=$$

$$=\frac{1}{R(a)}\left(\frac{f_1(a)}{f_2(a)}-\frac{F_1(a)}{F_2(a)}\right)+\frac{1}{3}\,\frac{1}{R(a)}\left(\left(\frac{f_1(a)}{f_2(a)}\right)^3-\left(\frac{F_1(a)}{F_2(a)}\right)^3\right)+\ldots$$

Здѣсь во всѣхъ членахъ можно сократить на $a-a_{2k-1}$, причемъ только въ первомъ не останется этого множителя; тогда какъ во всѣхъ остальныхъ будутъ продолжать входить его положительныя степени множителемъ; поэтому остальные всѣ обратятся въ нуль, когда сдѣлается $a=a_{2k-1}$, тогда какъ первый приметъ видъ:

$$\frac{1}{R'(a_{2k-1})}\left(\frac{f'_1(a_{2k-1})}{f_2(a_{2k-1})}-\frac{F'_1(a_{2k-1})}{F_2(a_{2k-1})}\right).$$

Поэтому, помножая въ (2) опять все на $Q(a_{2k-1})$, мы получимъ для разсматриваемаго случая:

$$\sum_{h=1}^{h=r}\overset{x_h}{\underset{y_h}{\Pi}}{}^{0}_{k}=\frac{f'_1(a_{2k-1})F_2(a_{2k-1})-F'_1(a_{2k-1})f_2(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})f_2(a_{2k-1})F_2(a_{2k-1})}. \tag{4}$$

Подобнымъ образомъ можно получить теорему Абеля и для другихъ случаевъ, которые могутъ представиться. Замѣтимъ только еще, что, разлагая обѣ части (6) предъидущаго параграфа по нисходящимъ степенямъ a и сравнивая коэффиціенты одинаковыхъ степеней a въ обѣихъ частяхъ, мы будемъ имѣть и теорему Абеля для тѣхъ интеграловъ 2. рода, которые обращаются въ ∞ только въ безконечности.

Формулы (3) и (4) останутся вѣрными и тогда, когда мы замѣнимъ спеціальные интегралы 2. рода $\Pi^{(0)}_k$ общими Π_k, такъ какъ добавочные члены въ первой части на основаніи (1) этого § отдѣльно обращаются въ нуль:

$$\sum_{h=1}^{h=r}\overset{x_h}{\underset{y_h}{\Pi}}{}_{k}=\sum_{h=1}^{h=r}\overset{x_h}{\underset{y_h}{\Pi}}{}^{0}_{k}+\sum_{l=1}^{l=\rho}c_{kl}\sum_{h=1}^{h=r}\overset{x_h}{\mathrm{I}}{}_{l}=\sum_{h=1}^{h=r}\overset{x_h}{\underset{y_h}{\Pi}}{}^{0}_{k}. \tag{5}$$

Наконецъ, помножая обѣ части (6) предыдущаго § на $\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}$, получимъ и теорему Абеля для интеграловъ 3. рода Вейерштрассовскаго типа:

$$\sum_{h=1}^{h=r}\int_{\gamma_h}^{x_h}\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\frac{P(z_h)}{z_h-a}\cdot\frac{dz_h}{2\sqrt{R(z_h)}}=\frac{1}{2}\log\left(\frac{f_1(a)+f_2(a)\sqrt{R(a)}}{f_1(a)-f_2(a)\sqrt{R(a)}}\cdot\frac{F_1(a)-F_2(a)\sqrt{R(a)}}{F_1(a)+F_2(a)\sqrt{R(a)}}\right),\quad(6)$$

которая отъ (6) § 28 отличается только обозначеніемъ.

Здѣсь опять налѣво можно на основаніи (1) замѣнить интегралъ 3. рода болѣе общимъ, *такъ что будетъ:*

$$\sum_{h=1}^{h=r}\overset{x_h}{\underset{\gamma_h}{\mathrm{III}}}{}_a=\frac{1}{2}\log\left(\frac{f_1(a)+f_2(a)\sqrt{R(a)}}{f_1(a)-f_2(a)\sqrt{R(a)}}\cdot\frac{F_1(a)-F_2(a)\sqrt{R(a)}}{F_1(a)+F_2(a)\sqrt{R(a)}}\right).\quad(7)$$

Такъ какъ интегралы Якобіевскаго типа отличаются отъ Вейерштрассовскихъ на линейную функцію интеграловъ перваго рода, то по (1) этого § мы прямо можемъ въ послѣднемъ равенствѣ налѣво Вейерштрассовскіе интегралы 3. рода замѣнить Якобіевскими. Дифференцируя по a равенство (6), получимъ и теорему Абеля для интеграловъ 2. рода, получаемыхъ чрезъ эту операцію изъ интеграловъ 3. рода (см. § 6).

*То обстоятельство, что теорема Абеля для интеграловъ 2. рода не имѣетъ такого изящ*наго вида, какъ для интеграловъ 1. и 3. родовъ, выражаясь различными формулами въ различныхъ частныхъ случаяхъ, было вѣроятно причиною того, что они вообще менѣе другихъ удостоивались вниманія, между тѣмъ именно чрезъ нихъ простѣйшимъ образомъ рѣшается задача Якоби.

31. Теорема Абеля, выраженная предыдущими формулами, можетъ быть словами такъ выражена:

1) Сумма интеграловъ 1. рода, взятыхъ отъ значеній, въ которыхъ нѣкоторая раціональная функція x и $\sqrt{R(x)}$ обращается въ ∞^1 до значеній, въ которыхъ та же функція обращается въ нуль 0^1, по путямъ, изъ которыхъ всѣ за исключеніемъ одного послѣдняго произвольны, равна нулю.

2) Сумма интеграловъ 2. рода, взятыхъ между тѣми же предѣлами и по тѣмъ же путямъ, равна алгебраической функціи отъ значенія $(x, \sqrt{R(x)})$, для котораго этотъ интегралъ обращается въ безконечность.

3) Сумма интеграловъ 3. рода, взятыхъ между тѣми-же предѣлами и по тѣмъ-же путямъ, равна логариѳму частнаго значеній той функціи, которая въ нижнихъ предѣлахъ интеграловъ обращается въ ∞^1, а въ верхнихъ въ 0^1, для значенія x въ тѣхъ точкахъ Римановой поверхности, въ которыхъ этотъ интегралъ 3. рода обращается въ ∞.

Абелева теорема обратима, какъ впервые замѣтилъ Вейерштрассъ (впрочемъ это замѣтилъ и Риманъ независимо отъ него), т. е. всегда существуетъ такая раціональная функція x и $\sqrt{R(x)}$, которая въ нижнихъ предѣлахъ интеграловъ обращается въ ∞^1, а въ верхнихъ въ 0^1, если сумма каждыхъ интеграловъ 1. рода, взятыхъ отъ первыхъ предѣловъ до вторыхъ, равна нулю,— если только число такихъ интеграловъ не менѣе $\varrho+1$. Дѣйствительно, всегда можно построить функцію $E(x;\ x_h,\ y_h)$, обращающуюся въ ∞^1 въ нижнемъ предѣлѣ y_h интеграла и въ 0^1 въ верхнемъ x_h; причемъ пути интегрированія отъ y_h до x_h могутъ быть выбраны произвольно для всѣхъ этихъ функцій, за исключеніемъ послѣдней; тогда произведеніе этихъ функцій $E(x;\ x_h,\ y_h)$ и будетъ по (3) § 7 искомая алгебраическая функція, хотя и въ трансцендентномъ видѣ.

Изъ второго вывода Абелевой теоремы вытекаетъ, что она остается въ силѣ, если вмѣсто тѣхъ значеній x, въ которыхъ функція (1) § 26 обращается въ ∞ и 0, мы выберемъ тѣ, въ которыхъ она принимаетъ какія либо 2 значенія y_0 и y_1, такъ что, если $y_i^{(0)}$ тѣ значенія x, въ которыхъ разсматриваемая функція $=y_0$, а $x_i^{(0)}$ тѣ въ которыхъ она $=y_1$, то будемъ имѣть:

$$\sum_{h=1}^{h=r}\int_{y_{h^{(0)}}}^{x_{h^{(0)}}} \mathrm{I}_k = 0; \qquad (1) \qquad\qquad \sum_{h=1}^{h=r}\int_{y_{h^{(0)}}}^{x_{h^{(0)}}} \mathrm{III}_a = \qquad (2)$$

$$= \frac{1}{2}\log\left\{\frac{f_1(a)-y_1F_1(a)+(f_2(a)-y_1F_2(a))\sqrt{R(a)}}{f_1(a)-y_1F_1(a)-(f_2(a)-y_1F_2(a))\sqrt{R(a)}}\cdot\frac{f_1(a)-y_0F_1(a)-(f_2(a)-y_0F_2(a))\sqrt{R(a)}}{f_1(a)-y_0F_1(a)+(f_2(a)-y_0F_2(a))\sqrt{R(a)}}\right\};$$

изъ послѣдней можно вывести и формулу для интеграловъ 2. рода.

32. Въ заключеніе этой главы разберемъ тотъ частный случай Абелевой теоремы, на которомъ все основано будетъ въ слѣдующей главѣ.

Пусть требуется найти функцію, которая обращалась бы въ 0^1 для

$$x=\infty,\ a_0\,a_1\,a_2\,\ldots\ldots a_{2\varrho}, \qquad (1)$$

и въ ∞^1 для

$$x=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots x_\varrho;\ x'_0,\ x'_1,\ x'_2,\ \ldots\ldots x'_\varrho\,. \qquad (2)$$

Изъ послѣднихъ величинъ только $\varrho+2$, напр. первыя, вмѣстѣ съ соотвѣтственными знаками у корня $\sqrt{R(x)}$ могутъ быть даны произвольно. Искомая функція будетъ имѣть видъ:

$$y = \frac{C\sqrt{R(x)}}{\psi(x) - \sqrt{R(x)}}\,, \tag{3}$$

гдѣ $\psi(x)$ полиномъ степени $\varrho+1$. Дѣйствительно, чтобы y былъ равенъ нулю для $R(x)=0$, $f_1(x)$ въ общемъ выраженіи y (1) § 26 должно дѣлиться на $R(x)$; взявъ тогда $\sqrt{R(x)}$ за скобки, получимъ выраженіе такого вида:

$$y = \sqrt{R(x)}\,\frac{f_3(x)\sqrt{R(x)} + f_2(x)}{F_1(x) + F_2(x)\sqrt{R(x)}}\,,$$

или, переводя ирраціональность въ знаменатель:

$$y = \sqrt{R(x)}\,\frac{\theta(x)}{\Phi_1(x) + \Phi_2(x)\sqrt{R(x)}}\,;$$

но такъ-какъ y долженъ обращаться въ нуль только для $R(x)=0$ и притомъ въ нуль перваго порядка, то для всѣхъ корней $\theta(x)=0$ знаменатель долженъ обращаться въ нуль при обоихъ знакахъ корня; для этого-же $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ должны дѣлиться на $\theta(x)$, такъ что будетъ по сокращеніи на $\theta(x)$:

$$y = \sqrt{R(x)}\,\frac{1}{\mathfrak{F}_1(x) + \mathfrak{F}_2(x)\sqrt{R(x)}}\,. \tag{4}$$

Здѣсь же $\mathfrak{F}_2(x)$ должно быть постоянное, а $\mathfrak{F}_1(x)$ полиномъ степени $\varrho+1$, для того, чтобы уравненіе

$$(\mathfrak{F}_1(x))^2 - (\mathfrak{F}_2(x))^2 R(x) = 0$$

могло имѣть корнями только члены ряда (2), число которыхъ $2\varrho+2$. Помножая числитель и знаменатель въ (4) на C и полагая, что всегда возможно, $C\mathfrak{F}_2(x) = -1$, и $C\mathfrak{F}_1(x) = \psi(x)$, и будемъ имѣть выраженіе (3) для y.

Что касается до полинома $\psi(x)$, который имѣетъ видъ:

$$\psi(x) = b_0 + b_{1,}x + b_2x^2 + \ldots. + b_\varrho x^\varrho + b_{\varrho+1}x^{\varrho+1},$$

то коэффиціенты его найдутся изъ $\varrho+2$ уравненій, получаемыхъ отъ приравниванія нулю результата вставки $x_0, x_1, x_2 \ldots x_\varrho; x'_0$ вмѣсто x въ $\psi(x) - \sqrt{R(x)}$, — уравненій такихъ:

$$\psi(x_j)-\sqrt{R(x_j)}=0. \tag{5}$$

Число этихъ уравненій уменьшится на единицу и самыя уравненія упростятся, если $x'_0=a_{2k-1}$ — частный случай, который и служитъ основаніемъ въ дальнѣйшемъ и которымъ мы потому и ограничимся здѣсь. Въ этомъ случаѣ будетъ:

$$\psi(x)=(x-a_{2k-1})\psi_1(x)\,, \tag{6}$$

гдѣ

$$\psi_1(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_\rho x^\rho. \tag{7}$$

Уравненіе $\psi^2(x)-R(x)=0$, котораго корнями суть $x_0, x_1 \ldots x_\rho; x'_0 x'_1 \ldots x'_\rho$, принимаетъ теперь, по освобожденіи отъ корня $x'_0=a_{2k-1}$, такой видъ:

$$\psi_1^2(x)(x-a_{2k-1})-R_1(x)=0\,, \tag{8}$$

гдѣ

$$R_1(x)=\frac{R(x)}{x-a_{2k-1}}\cdot \tag{9}$$

33. Вмѣсто уравненій (5) мы будемъ имѣть теперь такую систему, къ которой присоединяемъ еще уравненіе (7), опредѣляющее символъ $\psi_1(x)$;

$$\left.\begin{array}{l}
c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_\rho x^\rho-\qquad\psi_1(x)=0\\
c_0+c_1x_0+c_2x_0^2+\ldots+c_\rho x_0^\rho-\sqrt{\dfrac{R_1(x_0)}{x_0-a_{2k-1}}}=0\\
c_0+c_1x_1+c_2x_1^2+\ldots+c_\rho x_1^\rho-\sqrt{\dfrac{R_1(x_1)}{x_1-a_{2k-1}}}=0\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
c_0+c_1x_\rho+c_2x_\rho^2+\ldots+c_\rho x_\rho^\rho-\sqrt{\dfrac{R_1(x_\rho)}{x_\rho-a_{2k-1}}}=0\,,
\end{array}\right\} \tag{1}$$

гдѣ изъ двухъ значеній корня нужно подразумѣвать то, на которомъ мы останавливаемъ свой выборъ. Исключая $c_0, c_1, \ldots c_\rho, -1$ изъ этихъ уравненій, будемъ имѣть:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \ldots\ldots & x^\rho & \psi_1(x) \\ 1 & x_0 & x_0^{\;2} & x_0^{\;3} & \ldots\ldots & x_0^{\;\rho} & \sqrt{\dfrac{R_1(x_0)}{x_0-a_{2k-1}}} \\ 1 & x_1 & x_1^{\;2} & x_1^{\;3} & \ldots\ldots & x_1^{\;\rho} & \sqrt{\dfrac{R_1(x_1)}{x_1-a_{2k-1}}} \\ 1 & x_2 & x_2^{\;2} & x_2^{\;3} & \ldots\ldots & x_2^{\;\rho} & \sqrt{\dfrac{R_1(x_2)}{x_2-a_{2k-1}}} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_\rho & x_\rho^{\;2} & x_\rho^{\;3} & \ldots\ldots & x_\rho^{\;\rho} & \sqrt{\dfrac{R_1(x_\rho)}{x_\rho-a_{2k-1}}} \end{vmatrix} = 0, \qquad (2)$$

откуда найдемъ:

$$\psi_1(x) = -\sum_{j=0}^{j=\rho} \frac{\Delta_j}{\Delta} \sqrt{\frac{R_1(x_j)}{x_j-a_{2k-1}}}, \qquad (3)$$

гдѣ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\;2} & \ldots\ldots & x_0^{\;\rho} \\ 1 & x_1 & x_1^{\;2} & \ldots\ldots & x_1^{\;\rho} \\ 1 & x_2 & x_2^{\;2} & \ldots\ldots & x_2^{\;\rho} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_\rho & x_\rho^{\;2} & \ldots\ldots & x_\rho^{\;\rho} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

и

$$\Delta_j = (-1)^{j+1} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots\ldots & x^\rho \\ 1 & x_0 & x_0^{\;2} & \ldots\ldots & x_0^{\;\rho} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_{j-1} & x^2_{j-1} & \ldots\ldots & x^\rho_{j-1} \\ 1 & x_{j+1} & x^2_{j+1} & \ldots\ldots & x^\rho_{j+1} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_\rho & x_\rho^{\;2} & \ldots\ldots & x_\rho^{\;\rho} \end{vmatrix}; \qquad (5)$$

но какъ извѣстно

$$\Delta = \prod_{1}^{\varrho}{}_{ik}(x_i - x_k)\,; \qquad \begin{pmatrix} i = 1,2 \;\ldots\; \varrho - 1, \varrho \\ k = 0,1,2 \ldots i - 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

слѣдовательно

$$\Delta_j = \frac{(-1)^{j+1}(x_0 - x)(x_1 - x)\ldots(x_{j-1} - x)(x_{j+1} - x)\ldots(x_\varrho - x)\prod_{1}^{\varrho}{}_{ik}(x_i - x_k)}{(x_i - x_0)(x_j - x_1)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_{j+1} - x_j)\ldots(x_\varrho - x_j)}$$

и потому

$$\frac{\Delta_j}{\Delta} = -\frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\ldots(x - x_\varrho)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_\varrho)}\,;$$

или

$$\frac{\Delta_j}{\Delta} = -\frac{\psi_1(x) : (x - x_j)}{\psi'_1(x_j)}\,, \tag{7}$$

ибо

$$\psi_1(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_\varrho).$$

Положивъ въ интересахъ дальнѣйшаго

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_\varrho), \tag{8}$$

будемъ имѣть

$$\psi_1(x) = (x - x_0)\varphi(x); \tag{9}$$

и слѣдовательно

$$\frac{\Delta_j}{\Delta} = -\frac{\varphi(x)(x - x_0) : (x - x_j)}{\varphi'(x_j)(x_j - x_0)} = -\frac{\varphi(x)(x - x_0)}{\varphi'(x_j)(x_j - x_0)(x - x_j)}\,. \tag{10}$$

Вносяэто въ (3), получимъ:

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}\sqrt{\frac{R_1(x_0)}{x_0 - a_{2k-1}}} + \sum_{i=1}^{i=\varrho}\frac{\varphi(x)(x - x_0)\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(x_i - x_0)(x - x_i)(x_i - a_{2k-1})}\,, \tag{11}$$

гдѣ передъ $\sqrt{}$ нужно разумѣть тѣ знаки ихъ, какъ и выше. Такъ какъ

$$\frac{x-x_0}{(x_i-x_0)(x-x_i)}=\frac{1}{x-x_i}-\frac{1}{x_0-x_i},$$

то это можно еще такъ представить:

$$\psi_1(x)=\frac{\varphi(x)\sqrt{R(x_0)}}{\varphi(x_0)(x_0-a_{2k-1})}+\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(x_i-a_{2k-1})}\left(\frac{\varphi(x)}{x-x_i}-\frac{\varphi(x)}{x_0-x_i}\right). \tag{12}$$

Этотъ полиномъ принимаетъ болѣе простой видъ, когда $x_0=\infty$, или $x_0=a_\alpha$, гдѣ a_α который нибудь изъ корней полинома $R_1(x)$; слѣдовательно α не $=2k-1$. Въ первомъ случаѣ будетъ:

$$\psi_1(x)=\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{\varphi(x)\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(x-x_i)(x_i-a_{2k-1})}, \tag{13}$$

во второмъ:

$$\psi_1(x)=\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{\varphi(x)(x-a_\alpha)\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(x_i-a_\alpha)(x-x_i)(x_i-a_{2k-1})}, \tag{14}$$

или

$$\psi_1(x)=\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(x_i-a_{2k-1})}\left(\frac{\varphi(x)}{x-x_i}-\frac{\varphi(x)}{a_\alpha-x_i}\right). \tag{15}$$

34. Въ случаѣ, когда $x_0=\infty$, когда слѣдовательно $\psi_1(x)$ выражается формулою (13), между двумя группами остальныхъ корней уравненія (8) § 32: $x_1, x_2, \ldots x_\rho$ и $x'_1, x'_2 \ldots x'_\rho$ существуетъ интересное соотношеніе. Пусть

$$\varphi_1(x)=(x-x'_1)(x-x'_2)\ldots.(x-x'_\rho); \tag{1}$$

тогда мы будемъ имѣть такое тождество:

$$\left(\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(x_i-a_{2k-1})}\cdot\frac{\varphi(x)}{x-x_i}\right)^2(x-a_{2k-1})-R_1(x)\equiv-\varphi(x).\varphi_1(x). \qquad (2)$$

Полагая здѣсь $x=a_{2k-1}$, мы получимъ:

$$-R_1(a_{2k-1})=-\varphi(a_{2k-1})\varphi_1(a_{2k-1}),$$

или, такъ какъ

$$R_1(a_{2k-1})=R'(a_{2k-1}),$$

$$\varphi(a_{2k-1})\varphi_1(a_{2k-1})=R'(a_{2k-1}), \qquad (3)$$

откуда

$$\varphi_1(a_{2k-1})=\frac{R'(a_{2k-1})}{\varphi(a_{2k-1})}, \qquad (4)$$

формула аналогичная формулѣ

$$y-a_i=\frac{R'(a_i)}{x-a_i}$$

въ нашей замѣткѣ «Выводъ основныхъ формулъ теоріи эллиптическихъ интеграловъ независимо отъ канонической формы подъинтегральной функціи». (Сообщенія и протоколы засѣданій харьковскаго математическаго общества 1883 г. II кн.) или «Ueber das Umkehrproblem der Elliptischen Integrale. 2 Note. Math. Ann. Bd. 25 (то-же на русскомъ языкѣ въ «Сообщеніяхъ и протоколахъ» за 1884 г. III кн.). Полагая $x=a_{2l-1}$ во (2), легко получимъ оттуда:

$$\varphi_1(a_{2l-1})=\varphi(a_{2l-1})(a_{2k-1}-a_{2l-1})\left(\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(a_{2l-1}-x)(a_{2k-1}-x_i)}\right)^2. \qquad (5)$$

35. Переходъ отъ значеній x, гдѣ y обращается въ ∞, къ тѣмъ, въ которыхъ онъ обращается въ нуль, вслѣдствіе того, что получается чрезъ непрерывное измѣненіе y отъ ∞ до 0, совершается такимъ образомъ, что опредѣленное значеніе первой категоріи переходитъ въ опредѣленное второй; тѣмъ не менѣе въ уравненіяхъ, выражающихъ теорему Абеля, мы можемъ установить произвольное соотвѣтствіе этихъ величинъ. Дѣйствительно, если на самомъ дѣлѣ y_h переходитъ въ x_h, и y_g въ x_g, то, соединивъ y_h и y_g произвольнымъ путемъ и прибавивъ къ суммѣ интеграловъ интегралъ того же вида разъ взятый по этому пути отъ y_h къ y_g, другой отъ y_g къ y_h, мы сумму очевидно не измѣнимъ; но теперь мы можемъ соединить первый изъ нихъ съ интеграломъ отъ y_g до x_g такъ, что получится интегралъ отъ y_h до x_g, второй съ интеграломъ отъ y_h до x_h такъ, что получится интегралъ отъ y_g до x_h; чрезъ повтореніе такой операціи можно установить какое угодно соотвѣтствіе между предѣлами интеграловъ (Клебшъ и Горданъ). По этому въ нашемъ частномъ случаѣ мы можемъ установить такое соотвѣтствіе:

$$\left.\begin{array}{l} \text{для } y=0:\ \ x=a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2k-2} \infty\ a_{2k} \ldots a_{2\rho-1} a_{2\rho} \\ \qquad y=\infty:\ x=x_0, x_1, x'_1 x_2 \ldots x'_{k-1}, x_k, x'_k \ldots x_\rho \quad x'_\rho, \end{array}\right\} \tag{1}$$

корень же $x=a_{2k-1}$, независящій отъ y самъ себѣ соотвѣтствуетъ, и такъ какъ онъ не измѣняется вовсе, то интегралъ отъ a_{2k-1} до a_{2k-1} равенъ нулю и ему соотвѣтствующій членъ выпадаетъ, вслѣдствіе чего мы его и не будемъ писать. Что же касается до знаковъ $\sqrt{R(x'_j)}$, то по (5) § 32 они получатся изъ такой формулы:

$$\sqrt{R(x'_j)}=\frac{\varphi(x_j)(x_j-a_{2k-1})\sqrt{R(x_0)}}{\varphi(x_0)(x_0-a_{2k-1})}+\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{\varphi(x_j)(x_j-x_0)(x_j-a_{2k-1})\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(x_i-(x_0)x_j-x_i)(x_i-a_{2k-1})}. \tag{2}$$

Ниже мы будемъ однако подъ $\sqrt{R(x'_j)}$ разумѣть противоположное значеніе; тогда по (1), (4), (5) и (6) § 30, принимая при этомъ предъ $\sqrt{R(x_i)}$ знакъ $+$, предъ $\sqrt{R(x_0)}$ знакъ $-$, перемѣняя порядокъ предѣловъ и имѣя въ виду, что теперь

$$F'_1(a_{2k-1})=\psi'(a_{2k-1})=\psi_1(a_{2k-1}),$$

по (6) § 32, мы получимъ слѣдующія формулы:

$$\sum_{i=1}^{i=k-1}\overset{x_i}{\underset{a_{2i-1}}{\mathbf{I}}}_h+\overset{x_k}{\underset{\infty}{\mathbf{I}}}_h+\sum_{i=k+1}^{i=\rho}\overset{x_i}{\underset{a_{2i-1}}{\mathbf{I}}}_h-\overset{x_0}{\underset{a_0}{\mathbf{I}}}_h-\sum_{j=1}^{j=\rho}\overset{x'_j}{\underset{a_{2j}}{\mathbf{I}}}=0 \qquad [h=1,2,\ldots\rho] \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{i=k-1}\overset{x_i}{\underset{a_{2i-1}}{\mathbf{II}}}_k+\overset{x_k}{\underset{\infty}{\mathbf{II}}}_k+\sum_{i=k+1}^{i=\rho}\overset{x_i}{\underset{a_{2i-1}}{\mathbf{II}}}_k-\overset{x_0}{\underset{a_0}{\mathbf{II}}}_k-\sum_{j=1}^{j=\rho}\overset{x'_j}{\underset{a_{2j}}{\mathbf{II}}}_k=-\frac{\psi_1(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})} \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{i=k-1}\underset{a_{2i-1}}{\overset{x_i}{\mathrm{III}}}_a+\underset{\infty}{\overset{x_k}{\mathrm{III}}}_a+\sum_{i=k+1}^{i=\rho}\underset{a_{2i-1}}{\overset{x_i}{\mathrm{III}}}_a-\underset{a_0}{\overset{x_0}{\mathrm{III}}}_a-\sum_{j=1}^{j=\rho}\underset{a_{2j}}{\overset{x_j}{\mathrm{III}}}_a=$$

$$=\frac{1}{2}\log\left\{\frac{\sqrt{R(a)}+\psi_1(a)(a-a_{2k-1})}{\sqrt{R(a)}-\psi_1(a)(a-a_{2k-1})}\right\}, \qquad (5)$$

гдѣ

$$\psi_1(x)=-\frac{\varphi(x)\sqrt{R(x_0)}}{\psi(x_0)(x_0-a_{2k-1})}+\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{\varphi(x)(x-x_0)\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(x_i-x_0)(x-x_i)(x_i-a_{2k-1})}=$$

$$=-\frac{\varphi(x)\sqrt{R(x_0)}}{\varphi(x_0)(x_0-a_{2k-1})}+\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(x_i-a_{2k-1})}\left(\frac{\varphi(x)}{x-x_i}-\frac{\varphi(x)}{x_0-x_i}\right). \qquad (6)$$

36. Для $x_0=\infty$ первое равенство обратится въ такое:

$$\sum_{i=\rho}^{i=k-1}\underset{a_{2k-1}}{\overset{x_i}{\mathrm{I}}}_h+\underset{\infty}{\overset{x_k}{\mathrm{I}}}_h+\sum_{i=k+1}^{i=\rho}\underset{a_{2k-1}}{\overset{x_i}{\mathrm{I}}}_h-\underset{a_0}{\overset{\infty}{\mathrm{I}}}_h-\sum_{j=1}^{i=\rho}\underset{a_{2j}}{\overset{x''_j}{\mathrm{I}}}_h=0 \qquad [h=1,2,\ldots\varrho] \qquad (1)$$

или, [такъ какъ на основанiи (3) § 13 и (1) § 15:

$$\underset{\infty}{\overset{x_k}{\mathrm{I}}}_h=\underset{a_{2k-1}}{\overset{x_k}{\mathrm{I}}}_h-\underset{a_{2k-1}}{\overset{\infty}{\mathrm{I}}}_h=\underset{a_{2k-1}}{\overset{x_k}{\mathrm{I}}}_h-\overset{2k-1}{K}_h,$$

$$\underset{a_0}{\overset{\infty}{\mathrm{I}}}_h+\sum_{j=1}^{j=\rho}\underset{a_{2j}}{\overset{x''_j}{\mathrm{I}}}_h=\sum_{j=1}^{j=\rho}\left(\underset{a_{2j-1}}{\overset{a_{2j}}{\mathrm{I}}}_h+\underset{a_{2j}}{\overset{x''_j}{\mathrm{I}}}_h\right)=\sum_{j=1}^{j=\rho}\underset{a_{2j-1}}{\overset{x''_j}{\mathrm{I}}}_h,]$$

$$\sum_{i=1}^{i=\rho}\underset{a_{2k-1}}{\overset{x_j}{\mathrm{I}}}_h-\overset{2k-1}{K}_h=\sum_{j=1}^{j=\rho}\underset{a_{2j-1}}{\overset{x''_j}{\mathrm{I}}}_h; \qquad (2)$$

второе въ такое:

$$\sum_{i=1}^{i=\rho}\mathop{\Pi}\limits_{a_{2k-1}}^{x_i}{}_k+\mathop{\Pi}\limits_{\infty}^{x_k}{}_k+\sum_{i=k+1}^{i=\rho}\mathop{\Pi}\limits_{a_{2i-1}}^{x_i}{}_k-\mathop{\Pi}\limits_{a_0}^{\infty}{}_k-\sum_{j=1}^{j=\rho}\mathop{\Pi}\limits_{a_{2j}}^{x''_j}{}_k=$$

$$=-\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{1}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{\varphi(a_{2k-1})\sqrt{R(x_1)}}{\varphi'(x_i)(a_{2k-1}-x_i)(x_i-a_{2k-1})} \tag{3}$$

или, такъ какъ первая часть =

$$=\sum_{i=1}^{i=\rho}\mathop{\Pi}\limits_{\infty}^{x_i}{}_k-\sum_{j=1}^{j=\rho}\mathop{\Pi}\limits_{\infty}^{x''_i}{}_k+\sum_{j=1}^{j=k-1}\mathop{\Pi}\limits_{a_{2j-1}}^{a_{2j}}{}_k+\mathop{\Pi}\limits_{\infty}^{a_{2k}}{}_k+\sum_{j=k+1}^{j=\rho}\mathop{\Pi}\limits_{a_{2j-1}}^{a_{2j}}{}_k-\mathop{\Pi}\limits_{a_0}^{\infty}{}_k,$$

а по (4) § 13

$$\mathop{\Pi}\limits_{a_0}^{\infty}{}_k-\sum_{j=1}^{j=k-1}\mathop{\Pi}\limits_{a_{2j-1}}^{a_{2j}}{}_k-\sum_{j=k+1}^{j=\rho}\mathop{\Pi}\limits_{a_{2j-1}}^{a_{2j}}{}_k=\frac{1}{2}\eta_{kk},$$

и по § 15

$$\mathop{\Pi}\limits_{a_{2k}}^{\infty}{}_k+\frac{1}{2}\eta_{kk}=\overset{2k-1}{J_k}, \tag{4}$$

въ слѣдующее:

$$\overset{2k-1}{J_k}-\sum_{i=1}^{i=\rho}\mathop{\Pi}\limits_{\infty}^{x_i}{}_k+\sum_{j=1}^{j=\rho}\mathop{\Pi}\limits_{\infty}^{x''_j}{}_k=\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{1}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{\varphi(a_{2k-1})\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(a_{2k-1}-x_i)(x_i-a_{2k-1})}. \tag{5}$$

Если въ (3) предыдущаго § положимъ $x_0=a_{2l-1}$, то, такъ какъ

$$\mathop{I}\limits_{a_0}^{a_{2l-1}}{}_h=\mathop{I}\limits_{a_0}^{\infty}{}_h-\mathop{I}\limits_{a_{2l-1}}^{\infty}{}_h=\mathop{I}\limits_{a_0}^{\infty}{}_h-\overset{2l-1}{K_h},$$

послѣ преобразованій, приведшихъ отъ (1) ко (2), получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=\rho}\overset{x_i}{\underset{a_{2i-1}}{\mathrm{I}}}{}_h+\overset{2l\text{-}1}{K}_h-\overset{2k\text{-}1}{K}_h=\sum_{j=\rho}^{j=\rho}\overset{x'''_j}{\underset{a_{2j-1}}{\mathrm{I}}}{}_h, \tag{6}$$

гдѣ вмѣсто x'_j написано x'''_j, такъ какъ въ этой формулѣ онъ будетъ имѣть значеніе отличное отъ того, которое имѣлъ во (2). Если то же сдѣлаемъ въ (4) предыдущаго §, то будемъ имѣть

$$\sum_{i=1}^{i=k-1}\overset{x_i}{\underset{a_{2i-1}}{\mathrm{II}}}{}_k+\overset{x_k}{\underset{\infty}{\mathrm{II}}}{}_k+\sum_{i=k+1}^{i=\rho}\overset{x_i}{\underset{a_{2i-1}}{\mathrm{II}}}{}_k-\overset{a_{2l-1}}{\underset{a_0}{\mathrm{II}}}{}_k-\sum_{j=1}^{j=\rho}\overset{x'''_j}{\underset{a_{2j}}{\mathrm{II}}}{}_k=$$

$$=-\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{1}{P'(a_{2k-1})}\,\frac{\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(x_i-a_{2k-1})}\left(\frac{\varphi(a_{2k-1})}{a_{2k-1}-x_i}-\frac{\varphi(a_{2k-1})}{a_{2l-1}-x_i}\right)$$

вычитая отсюда (3), получимъ:

$$\overset{\infty}{\underset{a_0}{\mathrm{II}}}{}_k-\overset{a_{2l-1}}{\underset{a_0}{\mathrm{II}}}{}_k-\sum_{j=1}^{j=\rho}\overset{x'''_j}{\underset{a_{2j}}{\mathrm{II}}}{}_k+\sum_{j=1}^{j=\rho}\overset{x'''_j}{\underset{a_{2j}}{\mathrm{II}}}{}_k=\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{1}{P'(a_{2k-1})}\,\frac{\varphi(x_{2k-1})\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(x_i-a_{2k-1})(a_{2l-1}-x_i)}$$

или такъ

$$\overset{\infty}{\underset{a_0}{\mathrm{II}}}{}_k-\overset{a_{2l-1}}{\underset{a_0}{\mathrm{II}}}{}_k=\overset{\infty}{\underset{a_{2l-1}}{\mathrm{II}}}{}_h=\overset{2l\text{-}1}{J}_k$$

$$\overset{2l\text{-}1}{J}_k-\sum_{j=1}^{j=\rho}\overset{x'''_j}{\underset{\infty}{\mathrm{II}}}{}_k+\sum_{j=1}^{j=\rho}\overset{x_i}{\underset{\infty}{\mathrm{II}}}{}_k=\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{1}{P'(a_{2k-1})}\,\frac{\varphi(a_{2k-1})\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(x_i-a_{2k-1})(a_{2l-1}-x_i)}. \tag{7}$$

Наконецъ, положимъ $x=a$ въ (3) и (4) § 35; означая теперь чрезъ $x^{(\mathrm{IV})}_j$ то, во что обратится x'_j, и вычитая изъ него (1) сего §, мы получимъ результатъ, который легко такъ представится:

$$\overset{\infty}{\underset{a}{\mathrm{I}}}{}_h+\sum_{j=1}^{j=\rho}\overset{x''_i}{\underset{a_{2j-1}}{\mathrm{I}}}{}_h-\sum_{j=1}^{j=\rho}\overset{x^{(\mathrm{IV})}_j}{\underset{a_{2j-1}}{\mathrm{I}}}{}_h=0$$

или

$$\sum_{j=1}^{j=\rho} \mathop{\mathrm{I}}\limits_{a_{2j-1}}^{x'_i}{}_h + \mathop{\mathrm{I}}\limits_{a}^{\infty}{}_h = \sum_{j=1}^{j=\rho} \mathop{\mathrm{I}}\limits_{a_{2j-1}}^{x^{(\mathrm{IV})}_j}{}_h \cdot \tag{8}$$

Равенство (4) § 35 при помощи (12) § 33 приметъ сперва такой видъ:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{i=k-1} \mathop{\mathrm{II}}\limits_{a_{2i-1}}^{x_i}{}_k + \mathop{\mathrm{II}}\limits_{\infty}^{x_k}{}_k + \sum_{i=k+1}^{i=\rho} \mathop{\mathrm{II}}\limits_{a_{2i-1}}^{x_i}{}_k - \mathop{\mathrm{II}}\limits_{a_0}^{a}{}_k - \sum_{j=1}^{j=\rho} \mathop{\mathrm{II}}\limits_{a_{2j}}^{x^{(\mathrm{IV})}_j}{}_h = \\ &= \frac{\varphi(a_{2k-1})\sqrt{R(a)}}{P'(a_{2k-1})\varphi(a)(a-a_{2k-1})} - \sum_{i=1}^{i=\rho} \frac{1}{P'(a_{2k-1})} \frac{\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(x_i-a_{2k-1})} \left(\frac{\varphi(a_{2k-1})}{a_{2k-1}-x_i} - \frac{\varphi(a_{2k-1})}{a-x_i}\right);\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

вычитая отсюда (3) этого §, послѣ подобныхъ преобразованій, какъ и при выводѣ (7), получимъ:

$$\mathop{\mathrm{II}}\limits_{a}^{\infty}{}_k - \sum_{j=1}^{j=\rho} \mathop{\mathrm{II}}\limits_{\infty}^{x^{(\mathrm{IV})}_j}{}_k + \sum_{j=1}^{j=\rho} \mathop{\mathrm{II}}\limits_{\infty}^{x''_j}{}_k = \frac{\varphi(a_{2k-1})\sqrt{R(a)}}{P'(a_{2k-1})\varphi(a-a_{2k-1})} + \sum_{l=1}^{i=\rho} \frac{1}{P'(a_{2k-1})} \cdot \frac{\varphi(a_{2k-1})\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(x_i-a_{2k-1})(x-x_i)} \cdot$$

37. Въ виду того, что въ формулахъ (5), (7) и (9) предыдущаго § въ первой части входитъ разность двухъ суммъ, мы можемъ ихъ представить еще такъ:

$$\overset{2k\text{-}1}{J_k} + \left(C_k - \sum_{j=1}^{i=\rho} \mathop{\mathrm{II}}\limits_{\infty}^{x_j}{}_k\right) - \left(C_k - \sum_{j=1}^{i=\rho} \mathop{\mathrm{II}}\limits_{\infty}^{x_j}{}_k\right) = \sum_{i=1}^{i=\rho} \frac{1}{P'(a_{2k-1})} \cdot \frac{\varphi(a_{2k-1})\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(a_{2k-1}-x_i)(x_i-a_{2k-1})}; \tag{1}$$

$$\overset{2l\text{-}1}{J_k} + \left(C_k - \sum_{j=1}^{j=\rho} \mathop{\mathrm{II}}\limits_{\infty}^{x'''_j}{}_k\right) - \left(C_k - \sum_{j=1}^{i=\rho} \mathop{\mathrm{II}}\limits_{\infty}^{x''_j}{}_h\right) = \sum_{i=1}^{i=\rho} \frac{1}{P'(a_{2k-1})} \cdot \frac{\varphi'(a_{2k-1})\sqrt{R(x_t)}}{\varphi'(x_1)(x_i-a_{2k-1})(a_{2l-1}-x_i)}; \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathop{\mathrm{II}}\limits_{a}^{\infty}{}_k + \left(C_k - \sum_{j=1}^{j=\rho} \mathop{\mathrm{II}}\limits_{\infty}^{x^{(\mathrm{IV})}_j}{}_k\right) - \left(C_k - \sum_{j=1}^{j=\rho} \mathop{\mathrm{II}}\limits_{\infty}^{x''_j}{}_k\right) = \\ &= \frac{\varphi(a_{2k-1})\sqrt{R(a)}}{P'(a_{2k-1})\varphi(a)(a-a_{2k-1})} + \sum_{i=1}^{i=\rho} \frac{1}{P'(a_{2k-1})} \cdot \frac{\varphi(a_{2k-1})\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(x_i-a_{2k-1})(a-x_i)} \cdot\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Предыдущая формула можетъ разсматриваться какъ частный случай послѣдней для $a=a_{2l-1}$; точно такую же, какъ она, получимъ для $a=a_{2l}$.

Для интеграловъ Π_h, гдѣ h не $=k$, теорема Абеля выражается другими формулами; но мы на нихъ не будемъ останавливаться, такъ какъ въ дальнѣйшемъ онѣ намъ не понадобятся.

ГЛАВА IV.

Задача Якоби.

38. Если представимъ уравненіе (1) § 30 въ такомъ видѣ:

$$\sum_{i=1}^{i=\varrho} \underset{y_i}{\overset{x_i}{\mathbf{I}_k}} = -\sum_{i=\varrho+1}^{i=r} \underset{y_i}{\overset{x_i}{\mathbf{I}_h}}, \quad (h=1,2\ldots\varrho) \qquad (1)$$

то изъ теоремы Абеля слѣдуетъ, что какъ скоро даны всѣ y_h и всѣ x_h направо, то изъ уравненія степени ϱ найдутся и всѣ x_h налѣво. Если положимъ:

$$u_h = -\sum_{i=\varrho+1}^{i=r} \underset{y_i}{\overset{x_i}{\mathbf{I}_h}}, \qquad (h=1,2\ldots\varrho) \qquad (2)$$

то уравненіе (1) можно такъ представить:

$$\sum_{i=1}^{i=\varrho} \underset{y_i}{\overset{x_i}{\mathbf{I}_h}} = u_h, \qquad (h=1,2,\ldots\varrho) \qquad (3)$$

гдѣ u_h извѣстно. Такимъ образомъ въ настоящемъ случаѣ, когда u_h даны формулами (2), мы имѣемъ возможность найти x_h, опредѣляемыя уравненіями (3), по теоремѣ Абеля, изъ уравненія, коэффиціенты котораго зависятъ отъ тѣхъ же величинъ, чрезъ которыя выражены по (2) величины u_h. Спрашивается, нельзя ли найти аналитическія выраженія коэффиціентовъ этого уравненія прямо чрезъ u_h, и притомъ не только въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ, когда имѣются ихъ выраженія (2), но и вообще, когда даны только уравненія (3)? Въ рѣшеніи этого вопроса и состоитъ задача объ обращеніи Абелевыхъ интеграловъ. Такая постановка вопроса принадлежитъ Якоби, почему и *задача эта называется Якобіевою задачею. Якоби показалъ для случая $\varrho = 2$, что для* гиперэллиптическихъ интеграловъ невозможна та постановка вопроса объ обращеніи интеграловъ, которая дала столь блестящіе результаты въ теоріи эллиптическихъ интеграловъ, потому что каждый гиперэллиптическій интегралъ для каждаго значенія x можетъ принимать всякое значеніе, слѣдовательно и наоборотъ каждому значенію интеграла можетъ отвѣчать всякое значеніе его верхняго предѣла. Клебшъ и Горданъ въ своей «Theorie der Abelschen Functionen» (Leipzig. 1866. B. G. Teubner) это доказательство Якоби *распространили на какіе угодно Абелевы интегралы для какого угодно ϱ.* Заимствуемъ цѣликомъ изъ ихъ книги это доказательство.

39. Лемма. Даны $q-1$ рядовъ, каждый изъ q вещественныхъ величинъ:

$$\left.\begin{array}{llll}
a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \ldots\ldots & a_q^{(1)} \\
a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \ldots\ldots & a_q^{(1)} \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
a_1^{(q-1)} & a_2^{(q-1)} & \ldots\ldots & a_q^{(q-1)};
\end{array}\right\} \qquad (1)$$

тогда всегда возможно опредѣлить q цѣлыхъ чиселъ, положительныхъ или отрицательныхъ: $m_1, m_2, \ldots.. m_q$, такимъ образомъ, что $q-1$ выраженій

$$\left.\begin{array}{l}
Q^{(1)} = m_1 a_1^{(1)} + m_2 a_2^{(1)} + \ldots.. + m_q a_q^{(1)} \\
Q^{(2)} = m_1 a_1^{(2)} + m_2 a_2^{(2)} + \ldots.. + m_q a_q^{(2)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Q^{(q-1)} = m_1 a_1^{(q-1)} + m_2 a_2^{(q-1)} + \ldots + m_q a_q^{(q-1)}
\end{array}\right\} \qquad (2)$$

будутъ соотвѣтственно менѣе, чѣмъ сколько угодно малыя величины:

$$\varepsilon^{(1)}\ \varepsilon^{(2)} \ldots.. \varepsilon^{(q-1)}.$$

Мы предположимъ, что предложеніе это доказано, если за q принять числа 1, 2,, .. $(q-1)$ и докажемъ, что оно будетъ имѣть мѣсто въ такомъ случаѣ и для самого q.

Между величинами $a_q^{(1)}$, $a_q^{(2)} \dots a_q^{(q-1)}$ (послѣдняго столбца подъ (1)) по крайней мѣрѣ одна будетъ отлична отъ нуля; пусть это $a_q^{(q-1)}$. Составимъ выраженія:

$$\left.\begin{array}{l} Q^{(1)} - Q^{(q-1)} \dfrac{a_q^{(1)}}{a_q^{(q-1)}} \\[2ex] Q^{(2)} - Q^{(q-1)} \dfrac{a_q^{(2)}}{a_q^{(q-2)}} \\[2ex] \dots\dots\dots\dots \\[2ex] Q^{(q-2)} - Q^{(q-1)} \dfrac{a_q^{(q-2)}}{a_q^{(q-1)}} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

исключая m_q съ помощію послѣдняго изъ (2).

Въ этихъ выраженіяхъ, числомъ $q-2$, будетъ слѣдовательно только $q-1$ неизвѣстныхъ цѣлыхъ чиселъ, $m_1,\ m\ , \dots m_{q-1}$. Мы можемъ поэтому послѣднія такъ опредѣлить, что эти $q-2$ выраженія будутъ менѣе сколь угодно малыхъ данныхъ величинъ. Затѣмъ можно будетъ m_q такъ опредѣлить, что численное значеніе $\dfrac{Q^{(q-1)}}{a_q^{(q-1)}}$ будетъ $< \dfrac{1}{2}$. Такъ какъ численныя значенія выраженій (3) были менѣе сколь угодно малыхъ данныхъ величинъ, то теперь послѣ сказаннаго опредѣленія m_q, отъ котораго онѣ не зависятъ, мы видимъ, что $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}, \dots\dots, Q^{(q-2)}$ будутъ сколько угодно близки соотвѣтственно къ величинамъ $\dfrac{1}{2}\ a_q^{(1)}$, $\dfrac{1}{2}\ a_q^{(2)} \dots\dots \dfrac{1}{2}\ a_q^{(q-1)}$. Если численное значеніе $\dfrac{Q^{(q-1)}}{a_q^{(q-1)}}$ есть $\dfrac{1}{2} - \varepsilon$, и независимо отъ знака $Q^{(i)} - Q^{(q-1)} \dfrac{a_q^{(i)}}{a_q^{(q-1)}} = \varepsilon^{(i)}$, то численное значеніе $Q^{(i)}$ будетъ не болѣе $\varepsilon^{(i)} +$ $+ a_q^{(i)} \left(\dfrac{1}{2} - \varepsilon \right)$, или не болѣе $\varepsilon^{(i)} + \dfrac{1}{2} \sqrt{\left(a_q^{(i)} \right)^2}$. Если потому положить $\varepsilon^{(i)} = \dfrac{\sqrt{a_q^{(q-i)}}}{m}$, гдѣ m сколь угодно большое число, то мы будемъ имѣть окончательно, что

$$\left| Q^{(i)} \right| \stackrel{=}{<} \left| \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m} \right) a_q^{(i)} \right|,$$

(гдѣ $|a|$ обозначаетъ численное значеніе или модуль a по Вейерштрассу) для всякаго i, причемъ въ случаѣ, если которая нибудь изъ величинъ $a_q^{(1)}$, $a_q^{(2)}, \dots a_q^{(q-2)}$ безконечно мала, соотвѣтственное $Q^{(i)}$ должно принять менѣе всякой данной величины. Такимъ образомъ составленныя выраженія $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}, \dots Q^{(q-2)}$, $Q^{(q-1)}$ мы означимъ чрезъ $a_{q+1}^{(1)}$, $a_{q+1}^{(2)} \dots$ $\dots a_{q+1}^{(q-1)}$, такъ что будетъ:

$$\left| a_{q+1}{}^{(i)} \right| < \left| \frac{1}{2} a_q{}^{(i)} \right| (i=1,\ 2, \ldots q-1).$$

Если по крайней мѣрѣ одна изъ величинъ $a_{q+1}{}^{(i)}$ не безконечно мала, то можно точно также поступать съ выраженіями:

$$R^{(1)} \quad = n_2\, a_2{}^{(1)} + n_3 a_3{}^{(1)} \ldots\ldots + n_{q+1}\, a_{q+1}{}^{(1)}.$$

$$R^{(2)} \quad = n_2\, a_2{}^{(2)} + n_3 a_3{}^{(2)} \ldots\ldots + n_{q+1}\, a_{q+1}{}^{(2)}.$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$R^{(q-1)} = n_2\, a_2{}^{(q-1)} + n_3 a_3{}^{(q-1)} \ldots + n_{q+1}\, a_{q+1}{}^{(q-1)},$$

какъ выше съ выраженіями Q (2); т. е. можно цѣлыя числа n_h опредѣлить такимъ образомъ, что будетъ:

$$R^{(i)} < \frac{1}{2} a_{q+1}{}^{(i)} \qquad\qquad (i=1,\ 2 \ldots q-1)$$

или, если эти линейныя комбинаціи означить чрезъ $a_{q+2}{}^{(i)}$, что будетъ

$$a_{q+2}{}^{(i)} < \frac{1}{2} a_{q+1}{}^{(i)}; \qquad\qquad (i=1,\ 2, \ldots q-1),$$

причемъ, какъ скоро одна изъ величинъ $a_{q+1}{}^{(i)}$ будетъ безконечно малая, слѣдуетъ положить $a_{q+2}{}^{(i)}$ менѣе всякой данной величины.

Продолжая поступать такимъ образомъ, мы составимъ рядъ величинъ:

$$\begin{array}{llll} a_{q+1}{}^{(1)} & a_{q+2}{}^{(1)} & \ldots & a_{q+k}{}^{(1)} \\ a_{q+1}{}^{(2)} & a_{q+2}{}^{(2)} & \ldots\ldots & a_{q+k}{}^{(2)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{q+1}{}^{(q-1)} & a_{q+2}{}^{(q-1)} & \ldots & a_{q+k}{}^{(q-1)} \end{array}$$

изъ которыхъ каждая или безконечно мала, или менѣе половины непосредственно влѣво отъ нея стоящей. Этотъ процессъ можно продолжать до тѣхъ поръ, пока всѣ a послѣдняго столбца не сдѣлаются менѣе напередъ опредѣленныхъ величинъ.

Но теперь каждое a есть линейная функція съ цѣлыми коэффиціентами q величинъ a, которыя находятся влѣво отъ нея (приэтомъ схему надо съ лѣвой стороны дополнить данными a), и при этомъ коэффиціенты при всѣхъ a одного и того же столбца одинакіе. Поэтому можно и a послѣдняго столбца выразить чрезъ данныя линейно съ цѣлыми коэффиціентами, такъ что будетъ:

$$\begin{aligned}
a_{q+k}{}^{(1)} &= \mu_1 a_1{}^{(1)} + \mu_2 a_2{}^{(1)} + \ldots + \mu_q a_q{}^{(1)} \\
a_{q+k}{}^{(2)} &= \mu_1 a_1{}^{(2)} + \mu_2 a_2{}^{(2)} + \ldots + \mu_q a_q{}^{(2)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{q+k}{}^{(q-1)} &= \mu_1 a_1{}^{(q-1)} + \mu_2 a_2{}^{(q-1)} + \ldots + \mu_q a_q{}^{(q-1)},
\end{aligned}$$

гдѣ всѣ μ_k цѣлыя числа, и эти выраженія даютъ такимъ образомъ согласно требованію леммы линейныя съ цѣлыми коэффиціентами соединенія данныхъ a, численное значеніе которыхъ сдѣлано *сколь угодно малыми*.

Алгориѳмъ останавливается, когда всѣ величины a одного столбца сдѣлаются безконечно малыми, что мы прежде исключали, *но тогда мы уже имѣемъ соединенія требуемаго свойства*, такъ что нѣтъ надобности продолжать операцію дальше.

Такимъ образомъ мы доказали, что наше предложеніе имѣетъ мѣсто для q, если оно вѣрно для $q-1$. Остается его доказать для $q=2$, въ какомъ случаѣ оно такъ выразится:

Если a_1 и a_2 два вещественныя количества, то всегда можно найти такія два числа, что $m_1 a_1 + m_2 a_2$ будетъ менѣе сколь угодно малой напередъ заданной величины. Какъ въ этомъ случаѣ найти числа m_1 m_2 учитъ теорія непрерывныхъ дробей. Если $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$ численное значеніе $\frac{a_1}{a_2}$, и $\frac{\mu}{\nu}$, $\frac{\mu'}{\nu'}$ двѣ подходящія дроби отъ $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$, то извѣстно, что численное значеніе разности

$$\left|\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - \frac{\mu}{\nu}\right| < \frac{1}{\nu\nu'},$$

слѣдовательно и численное значеніе разности

$$\left|\nu(a_1) - \mu(a_2)\right| < \frac{(a_2)}{\nu'}.$$

Поэтому стоитъ только разложеніе въ непрерывную дробь продолжить до тѣхъ поръ, пока $\frac{(a_2)}{\nu'}$ *не сдѣлается столь малымъ, сколько нужно для того,* чтобы $|\nu(a_1) - \mu(a_2)|$ было менѣе напередъ предписанной величины. Такимъ образомъ предложеніе доказано вообще. Замѣтимъ еще, что въ послѣдующемъ между величинами a съ одинаковымъ верхнимъ значкомъ не имѣетъ мѣста линейное соотношеніе съ цѣлыми коэффиціентами. Поэтому вообще не встрѣтится линейныхъ соединеній, меньшихъ предписанной величины, которыя были бы равны нулю, что предполагало бы существованіе такого линейнаго соотношенія.

40. Возвращаясь теперь къ интеграламъ перваго рода и означая періоды котораго нибудь изъ нихъ I_h чрезъ

$$a_1+b_1\sqrt{-1},\ a_2+b_2\sqrt{-1},\ \ldots\ a_{2\rho}+b_{2\rho}\sqrt{-1},$$

мы будемъ имѣть самое общее выраженіе его значенія въ такомъ видѣ:

$$\mathbf{I}_h+\sum_{i=1}^{i=2\rho} m_i(a_i+b_i\sqrt{-1}),$$

гдѣ I_h означаетъ какое нибудь частное значеніе этого интеграла при дальныхъ предѣлахъ. Если $\rho>1$, то по предыдущей леммѣ можно числа m_i такъ опредѣлить, что суммы:

$$\sum_{i=1}^{i=2\rho} m_i a_i \text{ и } \sum_{i=1}^{i=2\rho} m_i b_i$$

будутъ сколь угодно малы. Слѣдовательно чрезъ надлежащее измѣненіе пути интегрированія можно какъ угодно измѣнить значеніе интеграла, такъ что имѣемъ предложеніе: Интегралъ 1. рода для $\rho>1$ при данныхъ предѣлахъ чрезъ надлежащее измѣненіе пути интегрированія можетъ принять всякое значеніе.

(Это предложеніе могло бы имѣть исключеніе только въ томъ случаѣ, если бы измѣненіе значенія интеграла I_h было бы не безконечно мало, но абсолютно нуль, т. е. если бы было

$$\sum_{i=1}^{i=2\rho} m_i a_i=0 \text{ и } \sum_{i=1}^{i=2\rho} m_i b_i=0$$

и слѣдовательно

$$\sum_{i=1}^{i=2\rho} m_i(a_i+b_i\sqrt{-1})=0,$$

но тогда нашъ интегралъ имѣлъ бы всего $2\varrho-1$ независимыхъ періодовъ (см. Клебшъ и Горданъ стр. 135)). Если же мы будемъ разсматривать не отдѣльно каждый интегралъ перваго рода, но всѣ ϱ интеграловъ $\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}$ $(k=1,2,\ldots\varrho)$, общее значеніе которыхъ чрезъ частное выразится по § 23 такимъ образомъ:

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}_k}}+\sum_{g=1}^{g=\varrho}(m_g\omega_{kg}+n_g\omega'_{kg}),\qquad (k=1,2,\ldots.\varrho)$$

причемъ всѣ будемъ брать по одному пути, такъ что во всѣхъ m_g и n_g будутъ означать для того-же g тѣ же цѣлыя числа, то этого нельзя будетъ сдѣлать. Дѣйствительно, если положимъ

$$\omega_{kg}=a_{kg}+b_{kg}\sqrt{-1}\,,\qquad \omega'_{kg}=a'_{kg}+b'_{kg}\sqrt{-1}\,,$$

то по леммѣ § 39 мы можемъ опредѣлить такія цѣлыя значенія для m_g и n_g $(g=1,2,\ldots\varrho)$, что $2\varrho-1$ изъ суммъ:

$$\sum_{g=1}^{g=\varrho}(m_g a_{kg}+n_g a'_{kg})\ \text{ и }\ \sum_{g=1}^{g=\varrho}(m_g b_{kg}+n_g b'_{kg})$$

сдѣлаются менѣе всякой напередъ заданной величины, какъ бы мала она ни была, но нельзя будетъ этого сдѣлать съ остальною, такъ какъ уже не останется ни одного m_g и n_g неопредѣленнымъ; естественнѣе, напротивъ, вмѣстѣ съ Клебшемъ и Гордапомъ ожидать, что послѣдняя сумма будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ большія числа понадобились для достиженія нашей цѣли по отношенію къ первымъ $2\varrho-1$ суммамъ.

Такимъ образомъ, если разсматривать не отдѣльно каждый интегралъ перваго рода, но всѣ ϱ независимые интегралы заразъ, предполагая ихъ взятыми между тѣми же предѣлами по одинаковому пути, то нельзя сказать, что всякая система значеній этихъ ϱ интеграловъ можетъ отвѣчать ихъ верхнему предѣлу. То же самое будетъ имѣть мѣсто, если мы будемъ разсматривать, какъ въ § 38, заразъ ϱ суммъ одинаковыхъ интеграловъ, взятыхъ между одинаковыми системами предѣловъ, потому что общее значеніе такой суммы опять таки выразится чрезъ частное какое-либо формулою:

$$u_k+\sum_{g=1}^{g=\varrho}(m_g\omega_{kg}+n_g\omega'_{kg}),\qquad (k=1,2,\ldots\varrho)$$

какъ нетрудно видѣть. Почему же не поставить вопросъ о нахожденіи x по уравненіямъ

$$\overset{x}{\underset{x_0}{\mathrm{I}}}{}_k = u_k\,?$$

Такую постановку вопроса сдѣлалъ Риманъ; но съ помощію теоремы Абеля для $r=\varrho+1$ всегда можно каждый изъ этихъ интеграловъ выразить суммою ϱ, и такимъ образомъ задачу *Римана свести на задачу Якоби, равно какъ и послѣднюю на первую.*

41. За произвольно выбранныя величины y_h въ уравненіи (3) § 38 мы примемъ, слѣдуя Вейерштрассу, величины a_{2h-1}, и слѣдовательно положимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=\varrho} \overset{x_i}{\underset{a_{2i-1}}{\mathrm{I}}}{}_k = u_k. \qquad (k=1,2,\ldots\varrho) \tag{1}$$

Эти уравненія опредѣляютъ систему величинъ $x_1, x_2 \ldots x_\varrho$ какъ однозначныя функціи перемѣнныхъ $\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}}$; ибо еслибы для другой системы $x'_1, x'_2, \ldots x'_\varrho$ имѣла бы мѣсто система

$$\sum_{i=1}^{i=\varrho} \overset{x'_i}{\underset{a_{2i-1}}{\mathrm{I}}}{}_k = u_k; \qquad (k=1,2,\ldots\varrho)$$

то, вычитая отсюда (1), мы получили бы

$$\sum_{i=1}^{i=\varrho} \overset{x'_i}{\underset{x_i}{\mathrm{I}}}{}_k = 0, \qquad (k=1,2,\ldots\varrho)$$

и тогда по § 28 можно было бы составить раціональную функцію x и $\sqrt{R(x)}$, которая въ ϱ мѣстахъ обращалась бы въ ∞^1 и слѣдовательно всякое значеніе принимало бы ϱ разъ, *тогда-какъ мы видѣли въ § 26, что это число значеній не можетъ быть меньше* $\varrho+1$ *).

Уравненія (1) можно замѣнить слѣдующею системою дифференціальныхъ уравненій, которую выписываемъ подробно:

---

*) *Вейерштрассъ, Лекціи.*

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{P(x_1)}{x_1-a_1}\cdot\frac{dx_1}{2\sqrt{R(x_1)}}+\frac{P(x_2)}{x_2-a_1}\cdot\frac{dx_2}{2\sqrt{R(x_2)}}+\ldots.+\frac{P(x_\rho)}{x_\rho-a_1}\cdot\frac{dx_\rho}{2\sqrt{R(x_\rho)}}=du_1\\
\frac{P(x_1)}{x_1-a_3}\cdot\frac{dx_1}{2\sqrt{R(x_1)}}+\frac{P(x_2)}{x_2-x_3}\cdot\frac{dx_2}{2\sqrt{R(x_2)}}+\ldots.+\frac{P(x_\rho)}{x_\rho-a_3}\cdot\frac{dx_\rho}{2\sqrt{R(x_\rho)}}=du_2\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
\frac{P(x_1)}{x_1-a_{2\rho-1}}\cdot\frac{dx_1}{2\sqrt{R(x_1)}}+\frac{P(x_2)}{x_2-a_{2\rho-1}}\cdot\frac{dx_2}{2\sqrt{R(x_2)}}+\ldots.+\frac{P(x_\rho)}{x_\rho-a_{2\rho-1}}\cdot\frac{dx_\rho}{2\sqrt{R(x_\rho)}}=du_\rho
\end{array}\right\}\quad(2)$$

и условіемъ, чтобы для $u_1=0,\ u_2=0,\ \ldots u_\rho=0$ было

$$x_1=a_1\ \ x_2=a_3\ \ldots.\ x_\rho=a_{2\rho-1}. \qquad (3)$$

Эта система уравненій опредѣляетъ $x_1, x_2, \ldots x_\rho$ функціями отъ $u_1, u_2, \ldots u_\rho$ и притомъ однозначными, какъ сейчасъ видѣли. Чтобы получить отсюда выраженія ихъ частныхъ производныхъ, напр. по u_k, мы должны положить равными нулю дифференціалы всѣхъ прочихъ независимыхъ перемѣнныхъ, а вмѣсто dx_h написать $\frac{\partial x_h}{\partial u_k}\,du_k$. Сокращая всѣ уравненія на du_k и полагая для краткости

$$\frac{P(x_i)}{2\sqrt{R(x_i)}}\,\frac{\partial x_i}{\partial u_k}=z_i\,, \qquad (4)$$

мы будемъ имѣть такую систему уравненій:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{z_1}{x_1-a_1}+\frac{z_2}{x_2-a_1}+\ldots.+\frac{z_h}{x_h-a_1}+\ldots.+\frac{z_\rho}{x_\rho-a_1}=0\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
\frac{z_1}{x_1-a_{2k-1}}+\frac{z_2}{x_2-a_{2k-1}}+\ldots.+\frac{z_h}{x_h-a_{2k-1}}+\ldots.+\frac{z_\rho}{x_\rho-a_{2k-1}}=1\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
\frac{z_1}{x_1-a_{2\rho-1}}+\frac{z_2}{x_2-a_{2\rho-1}}+\ldots.+\frac{z_h}{x_h-a_{2\rho-1}}+\ldots.+\frac{z_\rho}{x_\rho-a_{2\rho-1}}=0\,,
\end{array}\right\}\quad(5)$$

откуда и найдемъ

$$z_h=\frac{\Delta_h}{\Delta}\,, \qquad (6)$$

гдѣ

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 - a_1} & \cdots & \frac{1}{x_h - a_1} & \cdots & \frac{1}{x_\rho - a_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{x_1 - a_{2k-1}} & \cdots & \frac{1}{x_h - a_{2k-1}} & \cdots & \frac{1}{x_\rho - a_{2k-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{x_1 - a_{2\rho-1}} & \cdots & \frac{1}{x_h - a_{2\rho-1}} & \cdots & \frac{1}{x_\rho - a_{2\rho-1}} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

$$\Delta_h = \left| \begin{array}{ccccc} & & (h) & & \\ \frac{1}{x_1 - a_1} & \cdots & 0 & \cdots & \frac{1}{x_\rho - a_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{x_1 - a_{2k-1}} & \cdots & 1 & \cdots & \frac{1}{x_\rho - a_{2k-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{x_1 - a_{2\rho-1}} & \cdots & 0 & \cdots & \frac{1}{x_\rho - a_{2\rho-1}} \end{array} \right| . \tag{8}$$

Если въ Δ вычтемъ h-ый столбецъ изъ каждаго изъ остальныхъ, то знаменатели его сдѣлаются общими множителями знаменателей всѣхъ элементовъ своей строки каждый; вынеся ихъ за знакъ опредѣлителя, получимъ на h-омъ мѣстѣ столбецъ, составленный изъ единицъ; остальные столбцы будутъ имѣть общими множителями числителей своихъ элементовъ разности $x_h - x_i$; вынеся и ихъ за знакъ опредѣлителя, будемъ имѣть:

$$\Delta = \frac{(x_h - x_1)\ldots(x_h - x_{h-1})(x_h - x_{h+1})\ldots(x_h - x_\rho)}{(x_h - a_1)\ldots(x_h - a_{2k-1})\ldots(x_h - a_{2\rho-1})} \cdot \Delta', \tag{9}$$

гдѣ

$$\Delta' = \left| \begin{array}{ccccc} \frac{1}{x_1 - a_1} & \dots & \overset{(h)}{1} & \dots & \frac{1}{x_\rho - a_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{x_1 - a_{2k-1}} & \dots & 1 & \dots & \frac{1}{x_\rho - a_{2k-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{x_1 - a_{2\rho-1}} & \dots & 1 & \dots & \frac{1}{x_\rho - a_{2\rho-1}} \end{array} \right| .$$

Вычитая здѣсь k-ую строку изъ каждой изъ остальныхъ, точно также по вынесеніи за знакъ опредѣлителя общихъ множителей всѣхъ элементовъ какъ каждаго столбца, такъ и строки, мы получимъ, принимая во вниманіе (8):

$$\Delta' = \frac{(a_1 - a_{2k-1}) \dots (a_{2k-3} - a_{2k-1})(a_{2k+1} - a_{2k-1}) \dots (a_{2\rho-1} - a_{2k-1})}{(x_1 - a_{2k-1}) \dots (x_{h-1} - a_{2k-1})(x_{h+1} - a_{2k-1}) \dots (x_\rho - a_{2k-1})} \Delta_h .$$

Вновя это въ (9), и полагая для краткости

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_\rho) , \qquad (10)$$

мы будемъ имѣть:

$$\Delta = \frac{\phi'(x_h)}{P(x_h)} \cdot \frac{P'(a_{2k-1})}{\phi(a_{2k-1}) : (a_{2k-1} - x_h)} \cdot \Delta_h ;$$

отсюда и по (6):

$$\frac{\Delta_h}{\Delta} = z_h = \frac{P(x_h)}{\varphi'(x_h)} \cdot \frac{\phi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})(a_{2k-1} - x_h)} .$$

Вставляя сюда изъ (4) выраженіе z_h легко получимъ:

$$\frac{\partial x_h}{\partial u_k} = \frac{2\sqrt{R(x_h)}}{\varphi'(x_h)} \cdot \frac{\phi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})(a_{2k-1} - x_h)} . \qquad (11)$$

42. Вспомогательная функція $\varphi(x)$, опредѣленная уравненіемъ (10), симметричная относительно $x_1, x_2, \dots x_\rho$, чрезъ посредство этихъ функцій отъ $u_1, u_2 \dots u_\rho$ становится сама

функціей этихъ перемѣнныхъ и притомъ однозначною, содержа притомъ произвольный параметръ x. Возьмемъ частную производную отъ нея по u_k. Дифференцируя логариѳмически, будемъ имѣть:

$$\frac{\partial \log \varphi(x)}{\partial u_k} = \sum_{h=1}^{h=\rho} \frac{-1}{x-x_h}\,\frac{\partial x_h}{\partial u_k} = \sum_{h=1}^{h=\rho} \frac{1}{x_h-x}\,\frac{\partial x_h}{\partial u_k}; \tag{1}$$

внося сюда изъ **(11)** предыдущаго § выраженіе, полученное тамъ для $\frac{\partial x_h}{\partial u_k}$, будемъ имѣть:

$$\frac{\partial \log \varphi(x)}{\partial u_k} = 2\,\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})} \sum_{h=1}^{h=\rho} \frac{\sqrt{R(x_h)}}{\varphi'(x_h)(a_{2k-1}-x_h)(x_h-x)}. \tag{2}$$

Такъ-какъ

$$\frac{\partial \log \varphi(x)}{\partial u_k} = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \frac{\partial \varphi(x)}{\partial u_k},$$

то, помножая обѣ части на $\varphi(x)$, будемъ имѣть:

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial u_k} = 2\,\frac{\varphi(a_{2k-1})\varphi(x)}{P'(a_{2k-1})} \sum_{h=1}^{h=\rho} \frac{\sqrt{R(x_h)}}{\varphi'(x_h)(a_{2k-1}-x_h)(x_h-x)}. \tag{3}$$

Полагая здѣсь $x=a_{2l-1}$ и помножая обѣ части имѣющаго получиться результата на $\frac{1}{P'(a_{2l-1})}$, мы получимъ:

$$\frac{1}{P'(a_{2l-1})}\,\frac{\partial \varphi(a_{2l-1})}{\partial u_k} = -2\,\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})} \cdot \frac{\varphi(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})} \sum_{h=1}^{h=\rho} \frac{\sqrt{R(x_h)}}{\varphi'(x_h)(a_{2k-1}-x_h)(a_{2l-1}-x_h)}. \tag{4}$$

Такъ-какъ вторая часть этого равенства симметрична относительно k и l, то отсюда слѣдуетъ такое соотношеніе

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\varphi(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})}\right)}{\partial u_k} = \frac{\partial\left(\dfrac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\right)}{\partial u_l}, \tag{5}$$

которое показываетъ, что $\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}$ $(k=1,2,\ldots\varrho)$ суть частныя производныя по u_k нѣкоторой функціи этихъ перемѣнныхъ.

43. Чрезъ эти функціи $\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}$ можетъ быть выражена $\varphi(x)$ при какомъ угодно параметрѣ x. Дѣйствительно, изъ теоріи раціональныхъ дробей слѣдуетъ:

$$\frac{\varphi(x)}{P(x)}=1+\sum_{k=1}^{k=\varrho}\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{1}{x-a_{2k-1}}; \tag{1}$$

и потому

$$\varphi(x)=P(x)+\sum_{k=1}^{k=\varrho}\frac{\varphi\,(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{P(x)}{x-a_{2k-1}}. \tag{2}$$

Если въ $\varphi(x)$ положимъ $x=a_{2j}$ $(j=0,1,\ldots\varrho)$, то мы будемъ имѣть $\varrho+1$ новыхъ функцій, которыя выразятся чрезъ первыя, т. е. $\varphi(a_{2k-1})$ — линейнымъ образомъ; дѣйствительно, полагая это въ (1), будемъ имѣть:

$$\frac{\varphi(a_{2j})}{P(a_{2j})}=1+\sum_{k=1}^{k=\varrho}\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{1}{a_{2j}-a_{2k-1}}. \tag{3}$$

Полагая въ (1) $x=x_i$, будемъ имѣть:

$$0=1+\sum_{k=1}^{k=\varrho}\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\,\frac{1}{x_i-a_{2k-1}}, \tag{4}$$

а во (2):

$$P(x_i)+\sum_{k=1}^{k=\varrho}\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{P(x_i)}{x_i-a_{2k-1}}=0;$$

слѣдовательно $x_i(i=1,2,\ldots\varrho)$ суть корни уравненія степени ϱ относительно x:

$$P(x)+\sum_{k=1}^{k=\varrho}\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{P(x)}{x-a_{2k-1}}=0, \tag{5}$$

въ которомъ коэффиціенты суть однозначныя функціи отъ $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$, и именно частныя производныя по этимъ перемѣннымъ одной и той же функціи ихъ.

44. Представимъ уравненіе (11) § 41 такимъ образомъ:

$$\varphi'(x_h)\,\frac{\partial x_h}{\partial u_k} = 2\sqrt{R(x_h)}\cdot\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{-1}{x_h - a_{2k-1}}$$

и просуммируемъ по k; тогда, на основаніи (4) предыдущаго §, будемъ имѣть:

$$2\sqrt{R(x_h)} = \sum_{k=1}^{k=\rho}\varphi'(x_h)\,\frac{\partial x_h}{\partial u_k}; \tag{1}$$

но дифференцируя по u_k уравненіе

$$\varphi(x_h) = 0\,,$$

мы будемъ имѣть:

$$\left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_k}\right)_{x=x_h} + \varphi'(x_h)\,\frac{\partial x_h}{\partial u_k} = 0\,;$$

слѣдовательно, внося взятое отсюда выраженіе послѣдняго члена чрезъ первый въ (1), будемъ имѣть:

$$2\sqrt{R(x_h)} = -\sum_{k=1}^{k=\rho}\left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_k}\right)_{x=x_h}, \tag{2}$$

или, полагая

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{k=\rho}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_k}\,, \tag{3}$$

слѣдующее:

$$2\sqrt{R(x_h)} = -\psi(x_h)\,. \tag{4}$$

Эта функція $\psi(x)$ степени $\rho - 1$ относительно x; по (3) этого § и (2) предыдущаго § она такъ выразится чрезъ u_k $(k = 1, 2, \ldots \rho)$:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{k=\rho}\left(\sum_{l=1}^{l=\rho}\frac{\partial\left(\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\right)}{\partial u_l}\right)\frac{P(x)}{x - a_{2k-1}}\,. \tag{5}$$

Такимъ образомъ изъ уравненія (4) значенія $\sqrt{R(x)}$ для $x=x_h$ $(h=1, 2, \ldots \varrho)$ найдутся при посредствѣ цѣлой раціональной функціи, коэффиціенты которой суть тоже функціи $u_1, u_2, \ldots u_\rho$ и выражаются чрезъ частныя производныя тѣхъ-же функцій, чрезъ которыя выражаются и коэффиціенты уравненія (2), котораго корни суть $x_1, x_2, \ldots x_\rho$ *).

Такимъ образомъ задача Якоби будетъ рѣшена, если найдутся выраженія функціи $\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}$ чрезъ $u_1, u_2, \ldots u_\rho$.

45. Полагая теперь во (2) § 42 $x=a_{2k-1}$, $x=a_{2l-1}$, мы будемъ имѣть слѣдующія два равенства:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \log \varphi(a_{2k-1})}{\partial u_k}=\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\sum_{h=1}^{h=\rho}\frac{\sqrt{R(x_h)}}{\varphi'(x_h)(a_{2k-1}-x_h)(x_h-a_{2k-1})} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \log \varphi(a_{2l-1})}{\partial u_k}=\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\sum_{h=1}^{h=\rho}\frac{\sqrt{R(x_h)}}{\varphi'(x_h)(a_{2k-1}-x_h)(x_h-a_{2l-1})}. \qquad (2)$$

На основаніи формулъ (1) и (2) § 37 эти формулы могутъ быть такъ преобразованы: 1-я

$$\frac{\partial \log \sqrt{\varphi(a_{2k-1})}}{\partial u_k}=\overset{2k-1}{J_k}+\Big(C_k-\sum_{i=1}^{j=\rho}\overset{x_i}{\underset{\infty}{\mathrm{II}_k}}\Big)-\Big(C_k-\sum_{j=1}^{i=\rho}\overset{x''_j}{\underset{\infty}{\mathrm{II}_k}}\Big), \qquad (3)$$

гдѣ x''_j $(j=1, 2, \ldots \varrho)$ зависятъ отъ x_i $(i=1, 2, \ldots \varrho)$ въ силу уравненій (2) § 36, именно:

$$\sum_{i=1}^{i=\rho}\overset{x_i}{\underset{a_{2i-1}}{\mathrm{I}_h}}-\overset{2k-1}{K_h}=\sum_{j=1}^{j=\rho}\overset{x''_j}{\underset{a_{2j-1}}{\mathrm{I}_h}}; \qquad (h=1, 2, \ldots \varrho) \qquad (4)$$

и 2-я:

$$\frac{\partial \log \sqrt{\varphi(a_{2k-1})}}{\partial u_l}=\overset{2l-1}{J_k}+\Big(C_k-\sum_{j=1}^{j=\rho}\overset{x'''_j}{\underset{\infty}{\mathrm{II}_k}}\Big)-\Big(C_k-\sum_{j=1}^{j=\rho}\overset{x''_j}{\underset{\infty}{\mathrm{II}_k}}\Big), \qquad (5)$$

гдѣ x''_j имѣютъ то же значеніе, какъ и въ предыдущей формулѣ, а x'''_j опредѣляются по уравненіямъ (6) § 36, т. е.

---

*) *Вейерштрассъ* Cr. 52.

$$\sum_{i=1}^{i=\rho} \mathop{\mathbf{I}_h}\limits_{a_{2j-1}}^{x_i} + \overset{2l\text{-}1}{K_h} - \overset{2k\text{-}1}{K_h} = \sum_{j=1}^{j=\rho} \mathop{\mathbf{I}_h}\limits_{a_{2j-1}}^{x'''j} . \qquad (h=1, 2, \ldots \varrho) \qquad (6)$$

46. Но входящія въ это уравненіе суммы ϱ интеграловъ второго рода, какъ

$$\sum_{i=1}^{i=\rho} \mathop{\mathbf{II}_k}\limits_{\infty}^{x_i},$$

равно какъ и подобныя суммы интеграловъ 3. рода:

$$\sum_{i=1}^{i=\rho} \mathop{\mathbf{III}_a}\limits_{a_{2i-1}}^{x_i}$$

(7) § 9, или

$$\sum_{h=1}^{i=\rho} \int_{a_{2i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \frac{P(x_i)}{\sqrt{R(x_i)}}\right) \frac{dx_i}{x_i - a}$$

(10) § 9, будучи симметричными функціями $x_i (i=1, 2, \ldots\ldots \varrho)$, будутъ функціями отъ $u_k (k=1, 2, \ldots \varrho)$. Разсматривая эти суммы такимъ образомъ, мы введемъ для нихъ слѣдующія обозначенія:

$$\mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_k = \sum_{i=1}^{i=\rho} \mathop{\mathbf{II}}\limits_{\infty}^{x_i} . \qquad (1)$$

$$\mathbf{\Pi}\left(a; \overset{\rho}{\underset{1}{u_i}}\right) = \sum_{i=1}^{i=\rho} \mathop{\mathbf{III}_a}\limits_{a_{2i-1}}^{x_i} . \qquad (2)$$

$$\mathbf{\Pi}_1\left(a; \overset{\rho}{\underset{1}{u_i}}\right) = \sum_{i=1}^{i=\rho} \int_{a_{2i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \cdot \frac{P(x_i)}{P(a)}\right) \frac{dx_i}{x_i - a} . \qquad (3)$$

Введемъ теперь эти обозначенія въ уравненія (3) и (5) предыдущаго §. Если мы положимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=\rho} \overset{x_i}{\underset{a_{2i-1}}{\mathbf{I}_h}} = u_h\,, \qquad (h=1,2,\ldots\varrho) \qquad (4)$$

то (4) и (6) напишутся такъ:

$$\sum_{j=1}^{j=\rho} \overset{x''_i}{\underset{a_{2i-1}}{\mathbf{I}_h}} = u_h - \overset{2k\text{-}1}{K_h}\,, \qquad (h=1,2,\ldots\varrho) \qquad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{j=\rho} \overset{x'''_i}{\underset{a_{2i-1}}{\mathbf{I}_h}} = u_h + \overset{2l\text{-}1}{K_h} - \overset{2k\text{-}1}{K_h}; \quad (h=1,2,\ldots\varrho) \qquad (6)$$

откуда слѣдуетъ, что какими функціями $\overset{\rho}{\underset{1}{x_i}}$ суть отъ $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$, такими $\overset{\rho}{\underset{1}{x''_i}}$ будутъ отъ $u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \overset{2k\text{-}1}{K_h}$, а $\overset{\rho}{\underset{1}{x'''_i}}$ отъ $u_h + \overset{\rho}{\overset{2l\text{-}1}{\underset{1}{K_h}}} - \overset{2k\text{-}1}{K_h}$; поэтому уравненія (3) и (5) предыдущаго § по введеніи обозначенія (1) такъ представятся:

$$\frac{\partial \log \sqrt{\varphi(a_{2k-1})}}{\partial u_k} = \overset{2k\text{-}1}{J_k} + \left(C_k - \mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_k\right) - \left(C_k - \mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \overset{2k\text{-}1}{K_h}\right)_k\right), \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \log \sqrt{\varphi(a_{2k-1})}}{\partial u_l} = \overset{2l\text{-}1}{J_k} + \left(C_k - \mathbf{J}\left(u_h + \overset{\rho}{\overset{2l\text{-}1}{\underset{1}{K_h}}} - \overset{2k\text{-}1}{K_h}\right)_k\right) - \left(C_k - \mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \overset{2k\text{-}1}{K_h}\right)_k\right). \qquad (8)$$

Изъ этихъ уравненій первое по виду своему представляетъ частный случай послѣдняго, для $l=k$, хотя это послѣднее могло быть получено нами только съ помощію перваго.

Формулы (7) и (8) представляютъ полнѣйшую аналогію съ формулою (11) нашей второй замѣтки: Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale. 2. Note Math. Ann. B. XXV.

47. Подобными формулами можно выразить и частныя производныя отъ $\log\sqrt{\varphi(a)}$, гдѣ a какое угодно количество (въ частности $= a_{2j}$ $(j=0,1,2,\ldots\varrho)$), а также обѣихъ функцій (2) и (3) предыдущаго §. При этомъ мы встрѣтимъ формулы аналогичныя тѣмъ, которыя мы имѣемъ въ теоріи эллиптическихъ функцій (см. нашу замѣтку: Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale; Math. Ann. Bd. XXIII.; или замѣтку «О введеніи Θ-функцій въ теорію эллиптическихъ функцій» въ Сообщен. и протокол. засѣданій харьковскаго математическаго общества 1883 г. I, а также и слѣдующую статью тамъ же,

кн. II, «Выводъ основныхъ предложеній теоріи эллиптическихъ интеграловъ независимо отъ канонической формы подрадикальной функціи»).

По формулѣ (2) § 42 имѣемъ, полагая $x = a$:

$$\frac{\partial \log \sqrt{\varphi(a)}}{\partial u_k} = \frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})} \sum_{h=1}^{h=\rho} \frac{\sqrt{R(x_h)}}{\varphi'(x_h)(a_{2k-1}-x_h)(x_h-a)}; \qquad (1)$$

Далѣе, такъ какъ очевидно, по (3) и (2) предыдущаго §:

$$\frac{\partial \Pi_1(a\overset{\rho}{\underset{1}{;}}u_i)}{\partial u_k} = \frac{\partial \log \sqrt{\varphi(a)}}{\partial u_k} + \frac{\partial \boldsymbol{\Pi}(a\overset{\rho}{\underset{1}{;}}u_i)}{\partial u_k}, \qquad (2)$$

то остается найти производную

$$\frac{\partial \Pi(a\overset{\rho}{\underset{1}{;}}u_i)}{\partial u_k}.$$

Но изъ опредѣленія функціи ((2) предыдущаго § и (7) § 9) имѣемъ:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Pi}(a\overset{\rho}{\underset{1}{;}}u_i)}{\partial u_k} = \sum_{i=1}^{i=\rho} \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \cdot \frac{P(x_i)}{x_i-a} \cdot \frac{1}{2\sqrt{R(x_i)}} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_k};$$

подставляя сюда вмѣсто $\dfrac{\partial x_i}{\partial u_k}$ изъ (11) § 41, будемъ имѣть:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Pi}(a\overset{\rho}{\underset{1}{;}}u_i)}{\partial u_k} = \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \cdot \frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})} \sum_{i=1}^{i=\rho} \frac{P(x_i)}{\varphi'(x_i)(x_i-a)(a_{2k-1}-x_i)}. \qquad (3)$$

Входящая сюда сумма можетъ быть значительно упрощена. Мы имѣемъ послѣдовательно

$$\sum_{i=1}^{i=\rho} \frac{P(x_i)}{\varphi'(x_i)(x_i-a)(a_{2k-1}-x_i)} = \sum_{i=1}^{i=\rho} \frac{\dfrac{P(x_i)}{x_i-a_{2k-1}}}{\varphi'(x_i)(a-x_i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=\rho} \frac{(x_i-a_1)(x_i-a_3)\ldots(x_i-a_{2k-3})(x_i-a_{2k+1})\ldots(x_i-a_{2\rho-1})}{\varphi'(x_i)(a-x_i)} =$$

$$= \frac{(a-a_1)(a-a_3)\ldots(a-a_{2k-3})(a-a_{2k+1})\ldots(a-a_{2\rho-1})}{\varphi(a)} = \frac{P(a)}{\varphi(a)(a-a_{2k-1})}.$$

Внося это въ (3) получимъ окончательно:

$$\frac{\partial \varPi(a\overset{\rho}{\underset{1}{;}}u_i)}{\partial u_k}=\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{\sqrt{R(a)}}{\varphi(a)(a_{2k-1})}. \tag{4}$$

Обращаясь теперь къ уравненію (3) § 37, (2), (1), и (4) сего параграфа, мы можемъ последнее представить такъ:

$$\frac{\partial \varPi_1(a\overset{\rho}{\underset{1}{;}}u_i)}{\partial u_k}=\mathop{\Pi}_{a}^{\infty}{}_k+\Big(C_k-\sum_{j=1}^{j=\rho}\mathop{\Pi}_{\infty}^{x^{(IV)}_j}{}_k\Big)-\Big(C_k-\sum_{j=1}^{j=\rho}\mathop{\Pi}_{\infty}^{x''_j}{}_k\Big); \tag{5}$$

здѣсь x''_j имѣетъ значеніе (5) предыдущаго §, а $x^{(IV)}_j$ опредѣляются по (8) § 36, именно:

$$\sum_{j=1}^{j=\rho}\mathop{\mathrm{I}}_{a_{2j-1}}^{x^{(IV)}_j}{}_h=u_h+v_h-\overset{2k-1}{K_h}, \qquad (h=1,2\ldots\rho) \tag{6}$$

(гдѣ для краткости положено

$$\mathop{\mathrm{I}}_{a}^{\infty}{}_h=v_h\Big) \tag{7}$$

слѣдовательно суть такія функціи отъ $u_h+\underset{1}{\overset{\rho}{v_h}}-\overset{2k-1}{K_h}$, какъ первыя отъ $u_h\underset{1}{\overset{\rho}{-}}\overset{2k-1}{K_h}$, а потому, полагая еще

$$\mathop{\Pi}_{a}^{\infty}{}_k=\overset{a}{J_k}, \tag{8}$$

уравненіе (5) можемъ такъ представить:

$$\frac{\partial \varPi_1(a\overset{\rho}{\underset{1}{;}}u_i)}{\partial u_k}=\overset{a}{J_k}+\Big(C_k-\mathbf{J}\Big(u_h+\underset{1}{\overset{\rho}{v_h}}-\overset{2k-1}{K_h}\Big)\ \Big)-\Big(C_k-\mathbf{J}\Big(u_h\underset{1}{\overset{\rho}{-}}\overset{2k-1}{K_h}\Big)_k\Big) \tag{9}$$

формула встрѣченная нами въ лекціяхъ Вэйерштрасса объ Абелевыхъ интегралахъ. На основаніи (2) это можно и такъ написать:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\log\sqrt{\varphi(a)}}{\partial u_k}+\frac{\partial\Pi(a\overset{\rho}{\underset{1}{;}}u_i)}{\partial u_k}=\overset{a}{J}_k+\left(C_k-\mathbf{J}\left(u_h+\overset{\rho}{\underset{1}{v}}_h-\overset{2k-1}{\mathrm{K}}_h\right)_k\right)-&\\-\left(C_k-\mathbf{J}\left(u_h\overset{\rho}{\underset{1}{-}}\overset{2k-1}{K}_h\right)_k\right).&\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Обратившись теперь къ формуламъ §§ 35, 36, 37, мы замѣтимъ, что въ общей формулѣ (6) § 35, равно какъ и въ выведенныхъ изъ нея формулахъ слѣдующихъ §§ знакъ предъ $\sqrt{R(x_0)}$ принадлежитъ къ числу избираемыхъ произвольно. Если мы перемѣнимъ его на противный, то для $x_0=\infty$, $\psi_1(x)$ не измѣнится, слѣдовательно не измѣнятся и x''_j — корни уравненія $(\psi_1(x))^2(x-a_{2k-1})-R_1(x)=0$; но теперь уравненія (1) и (3) обратятся въ такія:

$$\sum_{i=1}^{i=k-1}\mathop{\mathrm{I}_h}\limits_{a_{2i-1}}^{x_i}+\mathop{\mathrm{I}_h}\limits_{\infty}^{x_k}+\sum_{i=k+1}^{i=\rho}\mathop{\mathrm{I}_h}\limits_{a_{2i-1}}^{x_i}+\mathop{\mathrm{I}_h}\limits_{a_0}^{\infty}-\sum_{j=1}^{j=\rho}\mathop{\mathrm{I}_h}\limits_{a_{2j}}^{x''_j}=0\qquad(11)$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=\rho}\mathop{\mathrm{II}_k}\limits_{a_{2i-1}}^{x_i}+\mathop{\mathrm{II}_k}\limits_{\infty}^{x_k}+\sum_{i=k+1}^{i=\rho}\mathop{\mathrm{II}_k}\limits_{a_{2i-1}}^{x_i}+\mathop{\mathrm{II}_k}\limits_{a_0}^{\infty}-\sum_{j=1}^{j=\rho}\mathop{\mathrm{II}_k}\limits_{a_{2j}}^{x''_j}=&\\=-\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{1}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{\varphi(a_{2k-1})\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(a_{2k-1}-x)(x_i-a_{2k-1})}.&\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

Равнымъ образомъ, положивъ $x_0=a$ и $\sqrt{R(x_0)}=-\sqrt{R(a)}$ въ (3) и (4) § 35, мы получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=k-1}\mathop{\mathrm{I}_h}\limits_{a_{2i-1}}^{x_i}+\mathop{\mathrm{I}_h}\limits_{\infty}^{x_k}+\sum_{i=k+1}^{i=\rho}\mathop{\mathrm{I}_h}\limits_{a_{2i-1}}^{x_i}+\mathop{\mathrm{I}_h}\limits_{a_0}^{a}-\sum_{j=1}^{j=\rho}\mathop{\mathrm{I}_h}\limits_{a_{2j}}^{x^{(\mathrm{IV})}_j}=0\qquad(13)$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=k-1}\mathop{\mathrm{II}_k}\limits_{a_{2i-1}}^{x_i}+\mathop{\mathrm{II}_k}\limits_{\infty}^{x_k}+\sum_{i=k+1}^{i=\rho}\mathop{\mathrm{II}_k}\limits_{a_{2i-1}}^{x_i}+\mathop{\mathrm{II}_k}\limits_{a_0}^{a}-\sum_{j=1}^{j=\rho}\mathop{\mathrm{II}_k}\limits_{a_{2j}}^{x^{(\mathrm{IV})}_j}=&\\=-\frac{\varphi(a_{2k-1})\sqrt{R(a)}}{P'(a_{2k-1})\varphi(a)(a-a_{2k-1})}-\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{1}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(x_i-a_{2k-1})}\left(\frac{\varphi(a_{2k-1})}{a_{2k-1}-x_i}-\frac{\varphi(a_{2k-1})}{a-x_i}\right).&\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Вычитая отсюда предыдущія соотвѣтственно, получимъ:

$$-\overset{\infty}{\underset{a}{\mathrm{I}}}_h+\sum_{i=1}^{i=\rho}\overset{x''_j}{\underset{a_{2j}}{\mathrm{I}}}_h-\sum_{j=1}^{j=\rho}\overset{x^{(\mathrm{v})}_j}{\underset{a_{2j}}{\mathrm{I}}}_h=0,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{j=\rho}\overset{x^{(\mathrm{v})}_j}{\underset{a_{2j-1}}{\mathrm{I}}}_h=\sum_{i=1}^{i=\rho}\overset{x''_j}{\underset{a_{2i-1}}{\mathrm{I}}}_h-\overset{\infty}{\underset{a}{\mathrm{I}}}_h, \qquad (15)$$

и

$$\left.\begin{aligned}&-\overset{\infty}{\underset{a}{\Pi}}_k+\sum_{j=1}^{j=\rho}\overset{x''_i}{\underset{\infty}{\Pi}}_k-\sum_{j=1}^{j=\rho}\overset{x^{(\mathrm{v})}_j}{\underset{\infty}{\Pi}}_k=\\&=-\frac{\varphi(a_{2k-1})\sqrt{R(a)}}{P'(a_{2k-1})\varphi(a)(a-a_{2k-1})}+\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{1}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{(a_{2k-1})\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(x_i-a_{2k-1})(a-x_i)}.\end{aligned}\right\}\ (16)$$

Но если x''_j теперь имѣютъ прежнее значеніе, то $\sum\limits_{i=1}^{i=\rho}\overset{x_j}{\underset{a_{2i-1}}{\mathrm{I}}}_h$ больше прежняго своего значенія на $2\overset{\infty}{\underset{a_0}{\mathrm{I}}}_h$, равно какъ и $\sum\limits_{j=1}^{j=\rho}\overset{x''_j}{\underset{\infty}{\Pi}}_k$ болѣе прежняго своего значенія на $2\overset{\infty}{\underset{a_0}{\Pi}}_k$, какъ то слѣдуетъ изъ сравненія (11) и (12) этого § съ (1) и (3) § 36. Слѣдовательно $\overset{\rho}{\underset{1}{x}}{}''_j$ теперь будутъ такими функціями отъ $u_h-\overset{\rho}{\underset{1}{K}}_h+2\overset{\infty}{\underset{a_0}{\mathrm{I}}}_h$, какъ прежде отъ $u_h\overset{\rho}{\underset{1}{-}}\overset{2k-1}{K_h}$, а $\overset{\rho}{\underset{1}{x}}{}^{(\mathrm{v})}_j$ такими же отъ $u_h-v_h\overset{\rho}{\underset{1}{-}}\overset{2k-1}{K_h}+2\overset{\infty}{\underset{a_0}{\mathrm{I}}}_h$, гдѣ $v_h\overset{\rho}{\underset{1}{=}}\overset{\infty}{\underset{a}{\mathrm{I}}}_h$, такъ что первая часть (16), если все выразить чрезъ $\overset{\rho}{\underset{1}{u}}_h$, такъ представится:

$$\begin{aligned}&-\overset{\infty}{\underset{a}{\Pi}}_k+\mathbf{J}\left(u_h-\overset{\overset{\rho}{2k-1}}{\underset{1}{K}}_h+2\overset{\infty}{\underset{a_0}{\mathrm{I}}}_h\right)_k-\mathbf{J}\left(u_h-v_h\overset{\rho}{\underset{1}{-}}\overset{2k-1}{K_h}+2\overset{\infty}{\underset{a_0}{\mathrm{I}}}_h\right)_k=\\&=-\overset{\infty}{\underset{a}{\Pi}}_k+\mathbf{J}\left(u_h\overset{\rho}{\underset{1}{-}}\overset{2k-1}{K_h}\right)-\mathbf{J}\left(u_h-\overset{\rho}{\underset{1}{v}}_h-\overset{2k-1}{K_h}\right)_k,\end{aligned}$$

(ибо каждый членъ съ J лѣвой части болѣе соотвѣтствующаго правой на ту же величину $2\overset{\infty}{\underset{a_0}{\Pi}}_k$, такъ какъ $2\overset{\infty}{\underset{a_0}{I}}_h$ есть періодъ). Такимъ образомъ (16) приметъ теперь слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned}-\overset{\infty}{\underset{a}{\prod}}{}_k+\Bigl(C_k-\mathbf{J}\bigl(u_h-\overset{\rho}{\underset{1}{v}}{}_h-\overset{2k\text{-}1}{K_h}\bigr)_k\Bigr)-\Bigl(C_k-\mathbf{J}\bigl(u_h\overset{\rho}{\underset{1}{-}}\overset{2k\text{-}1}{K_h}\bigr)_k\Bigr)=\\ =-\frac{\varphi(a_{2k-1})\sqrt{R(a)}}{P'(a_{2k-1})\varphi(a)(a-a_{2k-1})}+\sum_{j=1}^{j=\rho}\frac{1}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{\varphi(a_{2k-1})\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(x_i-a_{2k-1})(a-x_i)}\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

или

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\log\sqrt{R(a)}}{\partial u_k}-\frac{\partial\Pi(a\overset{\rho}{\underset{1}{;}}u_i)}{\partial u_k}=-\overset{a}{J}_k+\Bigl(C_k-\mathbf{J}\bigl(u_h-\overset{\rho}{\underset{1}{v}}{}_h-\overset{2k\text{-}1}{K_h}\bigr)_k\Bigr)-\\ -\Bigl(C_k-\mathbf{J}\bigl(u_h\overset{\rho}{\underset{1}{-}}\overset{2k\text{-}1}{K_h}\bigr)_k\Bigr);\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

гдѣ

$$\overset{a}{J}_k=\overset{\infty}{\underset{a}{\prod}}{}_k,\qquad(19)$$

какъ и въ (10). Взявъ полусумму и полуразность (10) и (18), получимъ:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\log\sqrt{\varphi(a)}}{\partial u_k}=\frac{1}{2}\Bigl(C_k-\mathbf{J}\bigl(u_h+\overset{\rho}{\underset{1}{v}}{}_h-\overset{2k\text{-}1}{K_h}\bigr)_k\Bigr)+\\ +\frac{1}{2}\Bigl(C_k-\mathbf{J}\bigl(u_h-\overset{\rho}{\underset{1}{v}}{}_h-\overset{2k\text{-}1}{K_h}\bigr)_k\Bigr)-\Bigl(C_k-\mathbf{J}\bigl(u_h\overset{\rho}{\underset{1}{-}}\overset{2k\text{-}1}{K_h}\bigr)_k\Bigr).\end{aligned}\qquad(20)$$

$$\frac{\partial\Pi(a\overset{\rho}{\underset{1}{;}}u_i)}{\partial u_k}=\overset{a}{J}_k+\frac{1}{2}\Bigl(C_k-\mathbf{J}\bigl(u_h+\overset{\rho}{\underset{1}{v}}{}_h-\overset{2k\text{-}1}{K_h}\bigr)_k\Bigr)-\frac{1}{2}\Bigl(C_k-\mathbf{J}\bigl(u_h-\overset{\rho}{\underset{1}{v}}{}_h-\overset{2k\text{-}1}{K_h}\bigr)_k\Bigr)\ (21)$$

48. Вычислимъ теперь частныя производныя функцій $J(\overset{\rho}{\underset{1}{u_i}})_k$, чрезъ которыя въ предыдущемъ мы выразили частныя производныя $\log\sqrt{\varphi(a)}$ и интегралъ 3. рода; сперва разсмотримъ частный видъ ихъ: $J(\overset{\rho}{\underset{1}{u_i}})^0{}_k$ (для котораго всѣ $c_{kh}=0$). Дифференцируя по u_l равенство, его опредѣляющее:

$$\mathbf{J}\left(\begin{matrix}\rho\\ u_i\\ 1\end{matrix}\right)^0_k=\sum_{k=1}^{k=\rho}\int_\infty^{x_i}\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{P(x_i)}{(x_i-a_{2k-1})^2}\cdot\frac{dx_i}{2\sqrt{R(x_i)}}, \tag{1}$$

получимъ на основаніи (11) § 41:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{J}\left(\begin{matrix}\rho\\ u_i\\ 1\end{matrix}\right)^0_k}{\partial u_l}&=\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{P(x_i)}{(x_i-a_{2k-1})^2}\cdot\frac{\varphi(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})\varphi'(x_i)(a_{2l-1}-x_i)}=\\ &=\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{\varphi(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})}\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{P(x_i):(x_i-a_{2k-1})}{\varphi'(x_i)}\cdot\frac{1}{(x_i-a_{2k-1})(a_{2l-1}-x_i)}.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Но

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{P(x_i):(x_i-a_{2k-1})}{\varphi'(x_i)}\cdot\frac{1}{(x_i-a_{2k-1})(a_{2l-1}-x_i)}=\\ &=\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{P(x_i):(x_i-a_{2k-1})}{\varphi'(x_i).(a_{2k-1}-a_{2l-1})}\left(\frac{1}{a_{2k-1}-x_i}-\frac{1}{a_{2l-1}-x_i}\right)=\\ &=\frac{1}{a_{2k-1}-a_{2l-1}}\left(\frac{P'(a_{2k-1})}{\varphi(a_{2k-1})}-\frac{P(a_{2l-1}):(a_{2l-1}-a_{2k-1})}{\varphi(a_{2l-1})}\right)=\\ &=\frac{1}{a_{2k-1}-a_{2l-1}}\cdot\frac{P'(a_{2k-1})}{\varphi(a_{2k-1})},\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ибо $P(a_{2l-1})=0$; потому (2) послѣ подстановки изъ (3) и сокращеній приметъ такой видъ:

$$\frac{\partial\mathbf{J}\left(\begin{matrix}\rho\\ u_i\\ 1\end{matrix}\right)^0_k}{\partial u_l}=\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2l-1})(a_{2k-1}-a_{2l-1})}\cdot\frac{\varphi(a_{2l-1})}{\varphi(a_{2k-1})}. \tag{4}$$

Дифференцируя (1) по u_k будемъ имѣть:

$$\frac{\partial \mathbf{J}\left(\begin{smallmatrix}\rho\\ u_i\\ 1\end{smallmatrix}\right)_k^0}{\partial u_k}=\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{P(x_i)}{(x_i-a_{2k-1})^2}\cdot\frac{1}{\varphi'(x_i)}\cdot\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})(a_{2k-1}-x_i)}; \tag{5}$$

но изъ уравненія (3) § 43 имѣемъ:

$$\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})(a_{2k-1}-x_i)}=1-\sum_{l=1}^{l=\rho}{}'\frac{\varphi(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})(x_i-a_{2l-1})}, \tag{6}$$

(гдѣ знакъ (′) при $\sum$ показываетъ, что при суммированіи выпускается членъ для котораго $l=k$). Внося отсюда вмѣсто первой части вторую въ (5), мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{J}\left(\begin{smallmatrix}\rho\\ u_i\\ 1\end{smallmatrix}\right)_k^0}{du_k}=\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\Bigg\{&\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{P(x_i):(x_i-a_{2k-1})}{\varphi'(x_i).(x_i-a_{2k-1})}+\\ &+\sum_{l=1}^{l=\rho}{}'\frac{\varphi(a_{2i-1})}{P'(a_{2l-1})}\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{P(x_i):(x_i-a_{2k-1})}{\varphi'(x_i)(x_i-a_{2k-1})(x_i-a_{2l-1})}\Bigg\};\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

но

$$\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{P(x_i):(x_i-a_{2k-1})}{\varphi'(x_i).(x_i-a_{2k-1})}=-\frac{P'(a_{2k-1})}{\varphi(a_{2k-1})},$$

$$\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{P(x_i):(x_i-a_{2k-1})}{\varphi'(x_i)(x_i-a_{2k-1})(x_i-a_{2l-1})}=\frac{P'(a_{2k-1})}{\varphi'(a_{2k-1})(a_{2k-1}-a_{2l-1})},$$

какъ то мы видѣли выше въ (3); слѣдовательно (7) приметъ по подстановкѣ такой видъ:

$$\frac{\partial \mathbf{J}\left(\begin{smallmatrix}\rho\\ u_i\\ 1\end{smallmatrix}\right)_k^0}{\partial u_k}=-\frac{Q(a_{2k-1})}{\varphi(a_{2k-1})}-\sum_{l=1}^{l=\rho}{}'\frac{Q(a_{2k-1})\varphi(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})(a_{2k-1}-a_{2l-1})\varphi(a_{2k-1})}. \tag{8}$$

Но теперь

$$\mathbf{J}\left(\begin{smallmatrix}\rho\\ u_h\\ 1\end{smallmatrix}\right)_k=\mathbf{J}\left(\begin{smallmatrix}\rho\\ u_h\\ 1\end{smallmatrix}\right)_k+\sum_{l=1}^{l=\rho}c_{kl}\sum_{i=1}^{i=\rho}\overset{x_i}{\underset{\infty}{\mathbf{I}}}{}_l=\mathbf{J}\left(\begin{smallmatrix}\rho\\ u_h\\ 1\end{smallmatrix}\right)_k^0+\sum_{l=1}^{l=\rho}c_{kl}\left(u_l-\sum_{i=1}^{i=\rho}\overset{2i-1}{K_l}\right); \tag{9}$$

а потому

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_k}{\partial u_k}&=\frac{\partial\mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)^0_k}{\partial u_l}+c_{kl}\\ \frac{\partial\mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_k}{\partial u_k}&=\frac{\partial\mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)^0_k}{\partial u_k}+c_{kk}\end{aligned}\right\}\quad .\qquad (10)$$

куда остается только вмѣсто первыхъ членовъ вторыхъ частей подставить ихъ выраженія изъ (4) и (8).

Функцію $C_k-\mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_k$ мы будемъ всегда explicite такъ писать:

$$C_k-\mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_k=C'_k-\mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)^0_k-\sum_{l=1}^{l=\rho}c_{kl}\,u_l. \qquad (11)$$

гдѣ

$$C'_k=C_k+\sum_{l=1}^{l=\rho}c_{kl}\sum_{i=1}^{i=\rho}\overset{2i-1}{K_l}, \qquad (12)$$

въ дальнѣйшемъ опуская знакъ (′) надъ C. Ясно, что производныя функцій (11) лишь знакомъ *отличаются отъ производныхъ функцій (10).*

49. Прежде чѣмъ примѣнить эти формулы къ вычисленію производныхъ отъ тѣхъ $\mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_k$, которыя входятъ въ уравненія §§ 46 и 47, надобно обратить вниманіе на то, что перемѣна аргументовъ $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ на $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}-\overset{2k-1}{K_h}$ измѣнитъ функціи $\varphi(a_\alpha)$ въ другія. Въ § 34 мы нашли, что если въ общихъ формулахъ этого § и § 35 положить $x_0=\infty$, въ какомъ случаѣ x'_j общихъ формулъ перейдутъ въ x''_j формулъ § 36, именно опредѣлятся изъ (2) этого §, то, обозначая чрезъ $\varphi_1(x)$ то же что и въ (1) § 34, мы будемъ имѣть:

$$\varphi_1(a_{2k-1})=\frac{R'(a_{2k-1})}{\varphi(a_{2k-1})}, \qquad (1)$$

и

$$\varphi_1(a_{2l-1}) = \varphi(a_{2l-1})(a_{2k-1} - a_{2l-1})\left(\sum_{i=1}^{i=\rho} \frac{\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(a_{2l-1}-x_i)(a_{2k-1}-x_i)}\right)^2. \quad (2)$$

[Если, разсматривая $\varphi(a_{2k-1})$ какъ функцію отъ $\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_i}}\right)$, введемъ обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(a_{2k-1}) &= \varphi\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_i}}\right)_{2k-1} \\ \varphi(a_{2j}) &= \varphi\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_i}}\right)_{2j} \end{aligned}\right|$$

то (1) такъ представится, что нетрудно видѣть:

$$\varphi\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_i}} - \overset{2k-1}{K_i}\right)_{2k-1} = \frac{R'(a_{2k-1})}{\varphi\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_i}}\right)_{2k-1}};$$

отсюда чрезъ повтореніе той-же операціи, получимъ:

$$\varphi\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_i}} - 2\overset{2k-1}{K_i}\right)_{2k-1} = \varphi\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_i}}\right)_{2k-1},$$

т. е., что $2\overset{2k-1}{K_i}$ есть періодъ этой функціи отъ $\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_i}}\right)$, (аналогично съ тѣмъ, что мы показали въ нашей замѣткѣ «Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale». 2. Note. Math. Ann. Bd. XXV)].

Перемѣняя въ (4) и въ (8) предыдущаго § $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ на $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}} - \overset{2k-1}{K_h}$, мы получимъ слѣдующія формулы:

$$\frac{\partial \mathrm{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}} - \overset{2k-1}{K_h}\right)^0_k}{\partial u_l} = \frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2l-1})(a_{2k-1}-a_{2l-1})} \cdot \frac{\varphi_1(a_{2l-1})}{\varphi_1(a_{2k-1})}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial\mathbf{J}\Big(u_h\overset{\rho\ 2k-1}{\underset{1}{-}}K_h\Big)_k}{\partial u_k}=-\frac{Q(a_{2k-1})}{\varphi_1(a_{2k-1})}-\sum_{l=1}^{l=\rho}{}'\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2l-1})(a_{2k-1}-a_{2l-1})}\cdot\frac{\varphi_1(a_{2l-1})}{\varphi_1(a_{2k-1})}\,; \tag{4}$$

но по (1) и (2) имѣемъ:

$$\frac{\varphi(a_{2l-1})}{\varphi(a_{2k-1})}=(a_{2k-1}-a_{2i-1})\frac{\varphi(a_{2l-1})\varphi(a_{2k-1})}{R'(a_{2k-1})}\Bigg(\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(a_{2l-1}-x_i)(a_{2k-1}-x_i)}\Bigg)^2\,; \tag{5}$$

внося въ предыдущія, будемъ имѣть послѣ сокращеній:

$$\frac{\partial\mathbf{J}\Big(u_h\overset{\rho\ 2k-1}{\underset{1}{-}}K_h\Big)_k^0}{\partial u_l}=\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\,\frac{\varphi(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})}\Bigg(\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(a_{2k-1}-x_i)(a_{2i-1}-x_i)}\Bigg)^2 \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{J}\Big(u_h\overset{\rho\ 2k-1}{\underset{1}{-}}K_h\Big)_k^0}{\partial u_k}=-\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}-\\ -\sum_{l=1}^{l=\rho}{}'\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{\varphi(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})}\Bigg(\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(a_{2l-1}-x_i)(a_{2k-1}-x_i)}\Bigg)^2.\end{aligned}\right| \tag{7}$$

Послѣднее, по перенесеніи второго члена на-лѣво, на основаніи (8) можетъ быть такъ представлено:

$$\sum_{l=1}^{l=\rho}\frac{\partial\mathbf{J}\Big(u_h\overset{\rho\ 2k-1}{\underset{1}{-}}K_h\Big)_k^0}{\partial u_l}=-\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\,, \tag{8}$$

результатъ, имѣющій соотвѣтственную формулу въ теоріи эллиптическихъ функцій, гдѣ эллиптическая функція $k^2\sin^2\mathrm{am}\,u$ можетъ быть представлена производною по u отъ интеграла 2. рода: $\mathbf{J}(u)=\int_0^u k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,du$. Придавая къ обѣимъ частямъ равенства (6) по c_{kl}, а (7) по c_{kk}, на основаніи (10) предыдущаго §, получимъ выраженія производныхъ по u_l и u_k отъ функцій $\mathbf{J}\Big(u_h\overset{\rho\ 2k-1}{\underset{1}{-}}K_h\Big)_k$:

$$\frac{\partial \mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \overset{2k-1}{K}_h\right)_k}{\partial u_l} = \frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{\varphi(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})}\left(\sum_{i=1}^{i=\rho}\frac{\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(a_{2k-1}-x_i)(a_{2l-1}-x_i)}\right)^2 + c_{kl}, \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \overset{2k-1}{K}_h\right)_k}{\partial u_k} = -\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})} - \\ &-\sum_{l=1}^{l=\rho}{}' \frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{\varphi(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})}\left(\sum_{i=1}^{i=\rho}{}'\frac{\sqrt{R(x_i)}}{\varphi'(x_i)(a_{2k-1}-x_i)(a_{2l-1}-x_i)}\right)^2 + c_{kk}. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Для этихъ функцій уравненіе (8) принимаетъ такой видъ:

$$\sum_{l=1}^{l=\rho}\left(\frac{\partial \mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \overset{2k-1}{K}_h\right)_k}{\partial u_l} - c_{kl}\right) = -\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}. \qquad (11)$$

50. Но еще болѣе важный для нашей задачи результатъ вытекаетъ изъ формулы (6) или болѣе общей (9); вторая часть ихъ есть симметрическая функція отъ a_{2k-1} и a_{2l-1}; слѣдовательно отъ перестановки знаковъ k и l и лѣвая не должна измѣниться, т. е. должно быть

$$\frac{\partial \mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \overset{2k-1}{K}_h\right)_k}{\partial u_l} = \frac{\partial \mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \overset{2l-1}{K}_h\right)_l}{\partial u_k}, \qquad (1)$$

т. е. функціи

$$\mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \overset{2k-1}{K}_h\right)_k \qquad (k = 1, 2 \ldots \rho) \qquad (2)$$

суть частныя производныя одной и той же функціи перемѣнныхъ u_k $(k=1,2,\ldots\rho)$ соотвѣтственно по этимъ перемѣннымъ $\overset{\rho}{\underset{1}{u_k}}$.

Точно также и функціи

$$C_k - \mathbf{J}\left(u_k \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \overset{2k-1}{K}_h\right)_k \qquad (k = 1, 2, \ldots \rho) \qquad (3)$$

будутъ частными производными соотвѣтственно по u_k $(k=1,2,\ldots\varrho)$ нѣкоторой другой функціи, которую означимъ на-время такъ: $\varPhi\,(\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}})$, такъ что будетъ:

$$\varPhi(\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}})=\int\sum_{k=1}^{k=\varrho}\Big(C_k-\mathbf{J}\Big(u_h\overset{\varrho}{\underset{1}{-}}\overset{2k-1}{K_h}\Big)_k\Big)\,du_k+C. \tag{4}$$

51. Вводя эту функцію въ уравненіе (8) § 44, мы дадимъ ему такой видъ:

$$\frac{\partial\log\sqrt{\varphi(a_{2l-1})}}{\partial u}=\overset{2l-1}{J_k}+\frac{\partial\varPhi\Big(u_h\overset{\varrho}{\underset{1}{+}}K_h\Big)}{\partial u_k}-\frac{\partial\varPhi\Big(\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}}\Big)}{\partial u_k} \tag{1}$$

и слѣдовательно будемъ имѣть:

$$d\log\sqrt{\varphi(a_{2l-1})}=\sum_{k=1}^{k=\varrho}\overset{2l-1}{J_k}\,du_k+d\varPhi\Big(u_h\overset{\varrho}{\underset{1}{+}}\overset{2l-1}{K_h}\Big)-d\varPhi\Big(\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}}\Big). \tag{2}$$

Интегрируя это уравненіе отъ $u^{(0)}{}_h$ $(h=1,2,\ldots\varrho)$, и означая чрезъ $\varphi(a_{2k-1})_0$ значеніе $\varphi(a_{2k-1})$ для этихъ аргументовъ, мы будемъ имѣть:

$$\log\sqrt{\frac{\varphi(a_{2l-1})}{\varphi(a_{2l-1})_0}}=\sum_{k=1}^{k=\varrho}\overset{2l-1}{J_k}\,(u_k-u^{(0)}{}_k)+\varPhi\Big(u_h\overset{\varrho}{\underset{1}{+}}\overset{2l-1}{K_h}\Big)-\varPhi\Big(u^{(0)}\overset{\varrho}{\underset{1}{{}_h}}+\overset{2l-1}{K_h}\Big)-$$

$$-\Big(\varPhi\Big(\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}}\Big)-\varPhi\Big(\overset{\varrho}{\underset{1}{u^{(0)}{}_h}}\Big)\Big), \tag{3}$$

откуда, переходя отъ логариѳма къ числу, получаемъ:

$$\sqrt{\varphi(a_{2l-1})}=A_{2l-1}\frac{e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\varrho}\overset{2l-1}{J_k}\,u_k}\,.\,e^{\varPhi\Big(u_h\overset{\varrho}{\underset{1}{+}}\overset{2l-1}{K_h}\Big)}}{e^{\varPhi\Big(\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}}\Big)}}, \tag{4}$$

гдѣ

$$A_{2l-1} = \sqrt{\varphi(a_{2l-1})}_0 \frac{e^{\Phi\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u^{(0)}_h}}\right)}}{e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho} \overset{2l-1}{J_k} u^{(0)}_k} \cdot e^{\Phi\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u^{(0)}_h + \overset{2l-1}{K_h}}}\right)}}. \tag{5}$$

Форма уравненія (4) наводитъ на мысль ввести новую функцію тѣхъ же аргументовъ, полагая

$$e^{\Phi\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)} = \Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right). \tag{6}$$

Тогда (4) предыдущаго § такъ представится:

$$\log\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right) = \int \sum_{k=1}^{k=\rho}\left(C_k - \mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h - \overset{2k-1}{K_h}}}\right)_k\right) du_k + C, \tag{7}$$

что можетъ также служить опредѣленіемъ новой функціи. Если введемъ еще рядъ новыхъ функцій, зависящихъ отъ этой, положивъ

$$e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho} \overset{2l-1}{J_k} u_k} \Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h + \overset{2l-1}{K_h}}}\right) = \Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_{2l-1}, \tag{8}$$

то уравненіе (4) приметъ такой видъ:

$$\sqrt{\varphi(a_{2l-1})} = A_{2l-1} \frac{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_{2l-1}}{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}. \tag{9}$$

Постоянную A_{2l-1} можно выразить чрезъ Θ. Если положимъ всѣ $u_k = 0$, x_i обратятся въ a_{2k-1}, не принимая въ разсчетъ порядка; вслѣдствіе этого будетъ $\sqrt{\varphi(a_{2l-1})} = 0$; точно также будетъ по (8):

$$\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{0_h}}\right)_{2l-1} = \Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{\overset{2l-1}{K_h}}}\right) = 0^{1},$$

какъ увидимъ въ слѣдующей главѣ; что же касается до производныхъ отъ нихъ, то онѣ будутъ всѣ конечны. Если въ (4) § 41 обѣ части раздѣлимъ на $2\sqrt{\frac{\varphi(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})}}$, то будемъ имѣть:

$$\frac{\partial\sqrt{\frac{\varphi(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})}}}{\partial u_k}=-\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\sqrt{\frac{\varphi(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})}}\sum_{h=1}^{h=\rho}\frac{\sqrt{R(x_h)}}{(\varphi'(x_i))(a_{2k-1}-x_h)(a_{2l-1}-x_h)},$$

что можно и такъ представить:

$$\frac{\partial\sqrt{\frac{\varphi(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})}}}{\partial u_k}=-\sum_{h=1}^{h=\rho}\frac{\sqrt{R(x_h):(a_{2l-1}-x_h)}}{\varphi'(x_h)}\cdot\frac{\varphi(a_{2k-1}):(a_{2k-1}-x_h)}{P'(a_{2k-1})}\sqrt{\frac{\varphi(a_{2l-1}):(a_{2l-1}-x_h)}{P'(a_{2l-1})}},$$

и для $k=l$ отсюда

$$\frac{\partial\sqrt{\frac{\varphi(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})}}}{\partial u_l}=-\sum_{h=1}^{h=\rho}\frac{\sqrt{R(x_h):(a_{2l-1}-x_h)}}{\varphi'(x_h)}\cdot\frac{\varphi(a_{2l-1}):(a_{2l-1}-x_h)}{P'(a_{2l-1})}\sqrt{\frac{\varphi(a_{2l-1}):(a_{2l-1}-x_h)}{P'(a_{2l-1})}};$$

если теперь сдѣлаемъ $\overset{\rho}{\underset{1}{u_i}}=0$, то въ послѣдней формулѣ не обратится въ нуль только одинъ членъ для $h=g$, если это x_g, которое для $\overset{\rho}{\underset{1}{u_i}}=0$ обращается въ a_{2l-1}; въ первой же изъ этихъ формулъ всѣ члены обратятся въ нуль, такъ какъ и $\varphi(a_{2k-1}):(a_{2k-1}-x_g)=0$. Итакъ, не только всѣ производныя отъ $\sqrt{\frac{\varphi(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})}}$ остаются конечными, но, за исключеніемъ одной, даже всѣ обращаются въ 0; эта же послѣдняя будетъ $=i\sqrt{\frac{Q(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})}}$, такъ какъ будетъ $\varphi'(x_g)=P'(a_{2l-1})$ для $x_g=a_{2l-1}$, что не трудно видѣть; и такъ:

$$\left(\frac{\partial\sqrt{\frac{\varphi(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})}}}{\partial u_l}\right)_0=-i\sqrt{\frac{Q(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})}}, \qquad (10)$$

и слѣдовательно

$$\left(\frac{\partial\sqrt{\varphi(a_{2l-1})}}{\partial u_l}\right)_0=-i\sqrt{Q(a_{2l-1})}. \qquad (10')$$

Дифференцируя по u_l (9), будемъ имѣть:

$$\frac{\partial\sqrt{\varphi(a_{2l-1})}}{\partial u_l}=A_{2l-1}\left[\frac{1}{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}\frac{\partial\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_{2l-1}}{\partial u_l}-\frac{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_{2l-1}}{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}\frac{\partial\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}{\partial u_l}\right]; \qquad (11)$$

дифференцируя же (8) по u_l, получимъ:

$$e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\overset{2l-1}{J_k}u_k}.\,J_l\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}+\overset{2l-1}{K_h}\right)+e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\overset{2l-1}{J_k}u_k}\frac{\partial\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}+\overset{2l-1}{K_h}\right)}{\partial u_l}=$$

$$=\frac{\partial\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_{2l-1}}{\partial u_l} \qquad (12)$$

полагая здѣсь и въ (11) $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}=0$, получимъ изъ (11):

$$\left(\frac{\partial\sqrt{\varphi(a_{2l-1})}}{\partial u_l}\right)_0=A_{2l-1}\frac{1}{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{0_h}}\right)}\left(\frac{\partial\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{0_h}}\right)_{2l-1}}{\partial u_l}\right)_0, \qquad (13)$$

а изъ (12)

$$\left(\frac{\partial\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}+\overset{2l-1}{K_h}\right)}{\partial u_l}\right)_0=\left(\frac{\partial\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_{2l-1}}{\partial u_l}\right)_0. \qquad (14)$$

Если положимъ:

$$\frac{\partial\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}{\partial u_l}=\Theta'_l\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right), \qquad (15)$$

то изъ послѣдняго будемъ имѣть:

$$\left(\frac{\partial\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_{2l-1}}{\partial u_l}\right)_0=\Theta'_l\left(\overset{\overset{\rho}{2l\text{-}1}}{\underset{1}{K_h}}\right), \tag{16}$$

внося отсюда и изъ (10) въ (13), будемъ имѣть для опредѣленія A_{2l-1} уравненія:

$$-i\sqrt{Q(a_{2l-1})}=A_{2l-1}\frac{\Theta'_l\left(\overset{\overset{\rho}{2l\text{-}1}}{\underset{1}{K_h}}\right)}{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}\,. \tag{17}$$

Дѣля (9) на (17) получимъ:

$$\sqrt{-\frac{\varphi(a_{2l-1})}{Q(a_{2l-1})}}=\frac{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}{\Theta_l\left(\overset{\overset{\rho}{2l\text{-}1}}{\underset{1}{K_h}}\right)}\cdot\frac{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_{2l-1}}{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}\;; \tag{18}$$

умножая эти функціи на $\sqrt{-\frac{Q(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})}}$, получимъ выраженіе $\sqrt{\frac{\varphi(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})}}$ чрезъ Θ.

Есть еще $\rho+1$ подобныхъ равенствъ, дающихъ выраженія чрезъ $\Theta(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}})$ функцій, получаемыхъ изъ $\varphi(x)$ чрезъ положеніе $x=a_{2j}$, гдѣ $j=0, 1, 2,\ldots\rho$, о которыхъ было упомянуто въ концѣ § 42, (формула (3)). Дѣйствительно, если въ уравненіи (3) положить $a=a_{2j}$, то первый членъ второй части обратится въ нуль, а оставшійся сдѣлается по (2) § 42 для $x=a_{2j}$ равнымъ $\frac{\partial\log\sqrt{\varphi(a_{2j})}}{\partial u_k}$; затѣмъ $\underset{a}{\overset{\infty}{\Pi}}_k$ обратится въ $\underset{a_{2j}}{\overset{\infty}{\Pi}}_k=\overset{2j}{\mathrm{J}}_k$, $u_h+\overset{\rho}{\underset{1}{v_h}}-\overset{2k\text{-}1}{K_h}$ въ $u_h+\overset{\overset{\rho}{2j}}{\underset{1}{K_h}}-\overset{2k\text{-}1}{K_h}$, и слѣдовательно будемъ имѣть послѣ преобразованій подобныхъ прежнимъ:

$$\frac{\partial\log\sqrt{\varphi(a_{2j})}}{\partial u_k}=\overset{2j}{J}_k+\left(C_k-\mathbf{J}\left(u_h+\overset{\overset{\rho}{2j}}{\underset{1}{K_h}}-\overset{2k\text{-}1}{K_h}\right)_k\right)-$$

$$-\left(C_k-\mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}-\overset{2k\text{-}1}{K_h}\right)_k\right): \tag{19}$$

откуда получимъ также, какъ и формулу (9) этого §, такую формулу:

$$\sqrt{\varphi(a_{2j})} = A_{2j}\,\frac{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_{2j}}{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}\,, \tag{20}$$

гдѣ

$$A_{2j} = \sqrt{\varphi(a_{2j})_0}\,\frac{e^{\Phi\left(\overset{\rho}{\overset{(0)}{\underset{1}{u_h}}}\right)}}{e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho\ 2_j} J_k \overset{(0)}{u_h}}\cdot e^{\Phi\left(\overset{(0)}{u_k}\overset{\rho}{\underset{1}{+}}\overset{2_j}{K_h}\right)}} \tag{21}$$

и

$$\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_{2j} = e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho\ 2j} J_k u_k}\,\Theta\left(u_h\overset{\rho}{\underset{1}{+}}\overset{2_j}{K_h}\right). \tag{22}$$

Полагая $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}} = 0$ въ (20) и (22), будемъ имѣть $\Big($ такъ какъ $\varphi(a_{2j}) = P(a_{2j})$ для этихъ значеній $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\Big)$, слѣдующія равенства:

$$\sqrt{P(a_{2j})} = A_{2j}\,\frac{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{0_h}}\right)_{2j}}{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{0_h}}\right)} \tag{23}$$

и

$$\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{0_h}}\right)_{2j} = \Theta\left(\overset{\rho}{\overset{2j}{\underset{1}{K_h}}}\right),$$

слѣдовательно

$$1 = \frac{\Theta\left(\overset{\rho}{\overset{2j}{\underset{1}{\mathrm{K}_h}}}\right)}{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{0_h}}\right)_{2j}}\,; \tag{24}$$

дѣля (20) на произведеніе (23) и (24), получимъ:

$$\sqrt{\frac{\varphi(a_{2j})}{P(a_{2j})}}=\frac{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{0_h}}\right)}{\Theta\left(\overset{\rho}{\overset{2j}{\underset{1}{K_h}}}\right)}\cdot\frac{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_{2j}}{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}. \tag{25}$$

52. Интегрируя уравненія (9), (19) и (20) § 47 между тѣми же предѣлами, мы получимъ слѣдующія три формулы, принимая во вниманіе (7) предыдущаго §:

$$\prod_1\left(a;\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)=\sum_{k=1}^{k=\rho}\overset{a}{J_k}\,u_k+\log\frac{\Theta\left(u_h\overset{\rho}{\underset{1}{+}}v_h\right)}{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}+B, \tag{1}$$

гдѣ

$$B=\prod_1\left(a;\overset{\rho}{\underset{1}{u^{(0)}}}{}_h\right)-\sum_{k=1}^{k=\rho}\overset{a}{J_k}\,u^{(0)}{}_h-\log\frac{\Theta\left(u^{(0)}{}_h\overset{\rho}{\underset{1}{+}}v_h\right)}{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}; \tag{2}$$

далѣе

$$\log\sqrt{\frac{\varphi(a)}{P(a)}}=\frac{1}{2}\log C\frac{\Theta\left(u_h\overset{\rho}{\underset{1}{+}}v_h\right)\Theta\left(u_h\overset{\rho}{\underset{1}{-}}v_h\right)}{\Theta^2\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}, \tag{3}$$

откуда

$$\frac{\varphi(a)}{P(a)}=C\frac{\Theta\left(u_h\overset{\rho}{\underset{1}{+}}v_h\right)\cdot\Theta\left(u_h\overset{\rho}{\underset{1}{-}}v_h\right)}{\Theta^2\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)} \tag{4}$$

гдѣ

$$C=\frac{\varphi(a)_0}{P(a)}\cdot\frac{\Theta^2\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u^{(0)}}}{}_h\right)}{\Theta\left(u^{(0)}{}_h\overset{\rho}{\underset{1}{+}}v_h\right)\cdot\Theta\left(u^{(0)}{}_h\overset{\rho}{\underset{1}{-}}v_h\right)} \tag{5}$$

Если положимъ $\overset{\rho}{\underset{1}{u^{(0)}}}{}_i=0$, то будетъ

$$\varphi(a)_0 = P(a);$$

слѣдовательно (5) приметъ такой видъ:

$$C = \frac{\Theta^2\left(\overset{\rho}{\underset{1}{0_h}}\right)}{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{v_h}}\right)\cdot\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{-v_h}}\right)};$$

внося это въ (4), мы дадимъ ему такой видъ:

$$\frac{\varphi(a)}{P(a)} = \frac{\Theta^2\left(\overset{\rho}{\underset{1}{0_h}}\right)\Theta\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} v_h\right)\Theta\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} v_h\right)}{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{v_h}}\right)\cdot\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{-v_h}}\right)\Theta^2\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}. \tag{6}$$

Формула (6) соотвѣтствуетъ извѣстной формулѣ теоріи эллиптическихъ функцій (см. наши вышеупомянутыя замѣтки).

Наконецъ:

$$\prod\left(u \overset{\rho}{\underset{1}{;}} u_h\right) = \sum_{k=1}^{k=\rho} \overset{a}{J}_k u_h + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} v_h\right)}{\Theta\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} v_h\right)} + D, \tag{7}$$

гдѣ

$$D = \prod\left(a; \overset{\rho}{\underset{1}{u}}{}^{(0)}{}_h\right) - \sum_{k=1}^{k=\rho} \overset{a}{J}_k u^{(0)}{}_k - - \frac{1}{2}\log\frac{\Theta\left(u^{(0)}{}_k \overset{\rho}{\underset{1}{+}} v_k\right)}{\Theta\left(u^{(0)}{}_k \overset{\rho}{\underset{1}{-}} v_k\right)}, \tag{8}$$

или

$$\prod\left(a \overset{\rho}{\underset{1}{;}} u_h\right) - \prod\left(a; \overset{\rho}{\underset{1}{u}}{}^{(0)}{}_h\right) = \sum_{k=1}^{k=\rho} \overset{a}{J}_k\left(u_k - u^{(0)}{}_k\right) + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} v_h\right)\Theta\left(u^{(0)}{}_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} v_h\right)}{\Theta\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} v_h\right)\Theta\left(u^{(0)}{}_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} v_h\right)}. \tag{9}$$

Если $u^{(0)}{}_h = 0$, то эта формула упрощается такимъ образомъ:

$$\prod\left(a;\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)=\sum_{k=1}^{k=\rho}\overset{a}{J}_k u_k+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h+v_h}}\right)\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{-v_h}}\right)}{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h-v_h}}\right)\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{+v_h}}\right)}\,. \tag{10}$$

Мы увидимъ въ слѣдующей главѣ, что между $\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$ есть четныя; для такихъ

$$\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{-v_h}}\right)=\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{v_h}}\right);$$

тогда формулы (6) и (11) принимаютъ такой видъ:

$$\frac{\varphi(x)}{P(a)}=\frac{\Theta^2\left(\overset{\rho}{\underset{1}{0_h}}\right)\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h+v_h}}\right)\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h-v_h}}\right)}{\Theta^2\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)\cdot\Theta^2\left(\overset{\rho}{\underset{1}{v_h}}\right)}\,, \tag{11}$$

$$\prod\left(a;\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)=\sum_{k=1}^{k=\rho}J_k u_k+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h+v_h}}\right)}{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h-v_h}}\right)}\,. \tag{12}$$

53. Наконецъ можно и въ уравненіе (3) § 43 ввести эти функціи при помощи (9) § 51; будемъ имѣть тогда, умножая все на $\Theta^2\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$:

$$\Theta^2\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)+\sum_{k=1}^{k=\rho}A_{2k-1}\,\frac{\Theta^2\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_{2k-1}}{x-a_{2k-1}}=0 \tag{1}$$

или, внося сюда значенія A_{2l-1} изъ уравненія (17):

$$\Theta^2\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)-\sum_{k=1}^{k=\rho}\frac{Q(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}\cdot\frac{\Theta^2\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}{\Theta'^{\,2}_k\left(\overset{\rho}{\underset{1}{\overset{2k-1}{K_h}}}\right)}\cdot\frac{\Theta^2\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}{x-a_{2k-1}}=0; \tag{2}$$

внося выраженія $\sqrt{\frac{\varphi(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})}}$ чрезъ Θ въ (9) того же параграфа, получимъ и выраженіе функціи $\psi(x)$ чрезъ Θ.

Такимъ образомъ задача Якоби будетъ рѣшена при помощи $\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$, если мы найдемъ аналитическое выраженіе для этой функціи; но для этого надобно изслѣдовать ея свойства на основаніи самаго опредѣленія ея, что и будетъ составлять содержаніе слѣдующей главы.

ГЛАВА V.

Θ-ФУНКЦІИ.

54. Функція

$$C_k - \mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_k \qquad (1)$$

есть однозначная функція своихъ аргументовъ. Дѣйствительно, мы видѣли въ § 41, что система величинъ $\overset{\rho}{\underset{1}{x_i}}$ возвращается къ своимъ прежнимъ значеніямъ, какъ скоро $\overset{\rho}{\underset{1}{u_k}}$ принимаютъ послѣ измѣненій свои прежнія значенія — по-крайней-мѣрѣ, если не брать въ разсчетъ порядка; но измѣненіе порядка не можетъ повліять на величину такихъ суммъ, какъ

$$\sum_{i=1}^{i=\rho} \overset{x_i}{\underset{\infty}{\mathrm{II}}}{}_k, \qquad (2)$$

— это очевидно; но также и такихъ, какъ напр.

$$\sum_{j=1}^{j=\rho} \overset{x_j}{\underset{a_{2j}}{\mathrm{III}}}{}_a, \qquad (3)$$

ибо, если два верхніе предѣла перемѣнятся мѣстами, то, дополнивъ сумму интегралами, взятыми по произвольной кривой, соединяющей ихъ нижніе предѣлы — разъ въ одномъ направленіи, другой въ противоположномъ, мы можемъ возстановить нарушенное соотвѣтствіе предѣловъ, не измѣняя величины суммы интеграловъ. Случай же болѣе сложной перестановки предѣловъ всегда можетъ быть сведенъ на рядъ переложеній предѣловъ по два, а потому чрезъ повтореніе сейчасъ указаннаго пріема всегда можно и въ такихъ случаяхъ возстановить *нарушенное соотвѣтствіе*. *Итакъ, функція* (1) *есть однозначная функція своихъ аргументовъ.*

55. Она кромѣ того остается конечною, пока система значеній $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ отлична отъ значеній $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}} = 0$; въ этомъ случаѣ одинъ изъ x_i обращается въ a_{2k-1}, и потому одинъ изъ членовъ суммы (2) предыдущаго § обращается въ ∞^1, тогда-какъ прочіе остаются конечными, ибо *интегралы* 2. *рода* $\overset{x_i}{\underset{\infty}{\Pi_k}}$ *обращаются въ* ∞^1 *только тогда, когда* x_i *приходитъ въ* a_{2k-1}. Мы видѣли въ § 9, что вблизи $x_h = a_{2k-1}$ разложеніе интеграла $\overset{x_h}{\Pi^0_k}$ будетъ имѣть такой видъ:

$$\overset{x_h}{\Pi}{}^{0}_{k} = \frac{Q(a_{2k-1})}{2\sqrt{R'(a_{2k-1})}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{x_h - a_{2k-1}}} + A_1\sqrt{x_h - a_{2k-1}} + B_1(x_h - a_{2k-1})^{\frac{3}{2}} + \ldots + \text{const.} \qquad (1)$$

теперь

$$du_k = \sum_{i=1}^{i=\rho} \frac{P(x_i)}{x_i - a_{2k-1}} \cdot \frac{dx_i}{2\sqrt{R(x_i)}}; \qquad (2)$$

если вторую часть разложить по степенямъ $x_h - a_{2k-1}$, то только членъ для $i = h$ даетъ членъ съ отрицательною степенью отъ $\sqrt{x_h - a_{2k-1}}$, именно такой:

$$\frac{P'(a_{2k-1})}{\sqrt{R'(a_{2k-1})}} \cdot \frac{dx_h}{2\sqrt{x_h - a_{2k-1}}}; \qquad (3)$$

а потому перемножая оба разложенія (1) и (2) по степенямъ $\sqrt{x_h - a_{2k-1}}$, мы получимъ только одинъ членъ съ отрицательною степенью этой величины, именно:

$$-\frac{1}{2}\frac{dx_h}{x_h - a_{2k-1}},$$

котораго интегралъ есть

$$-\log\sqrt{x_h-a_{2k-1}}.$$

То-же самое будетъ имѣть мѣсто и относительно интеграла $\overset{x_h}{\Pi}_k$, который отъ предыдущаго отличается на линейную функцію всегда конечныхъ интеграловъ перваго рода.

Такимъ образомъ функція § 50:

$$\Phi\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)=\int\sum_{k=1}^{k=\rho}\left(C_k-\mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}-\overset{2k\text{-}1}{K_h}\right)_k\right)du_k+C, \qquad (5)$$

будетъ всегда конечною за исключеніемъ тѣхъ системъ значеній $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$, для которыхъ

$$\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}-\overset{2k\text{-}1}{K_h}=0, \qquad (6)$$

вблизи которыхъ она будетъ имѣть характеръ

$$\log\sqrt{x_h-a_{2k-1}}. \qquad (7)$$

Вслѣдствіе этого различныя значенія ея для каждой системы значеній $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ будутъ различаться на кратное отъ $2\pi i$.

То-же самое будетъ и съ функціей

$$\Phi\left(u_h+\overset{\rho}{\underset{1}{u^{(0)}}}_h\right)=\int\sum_{k=1}^{k=\rho}\left(C_k-\mathbf{J}\left(u_h+\overset{\rho}{\underset{1}{u^{(0)}}}_h-\overset{2k\text{-}1}{K_h}\right)_k\right)du_k+C, \qquad (8)$$

которая будетъ имѣть характеръ (7) для $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ близкихъ къ

$$\overset{2k\text{-}1}{K_h}-\overset{\rho}{\underset{1}{u^{(0)}}}_h. \qquad (9)$$

Если теперь положимъ (какъ въ § 51):

$$\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right) = e^{\Phi\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h + u^{(0)}{}_h}}\right)}, \qquad (10)$$

то будемъ имѣть въ $\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$ функцію конечную для всѣхъ системъ значеній $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ и обращающуюся въ 0' для значеній $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$, опредѣляемыхъ формулою (9).

Постоянную C всегда можно такъ опредѣлить, что $\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$ для $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}} = 0$ получитъ значеніе $\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{0_h}}\right)$, произвольно нами выбранное.

56. Если одной опредѣленной системѣ значеній $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ отвѣчаетъ одно опредѣленное значеніе $\overset{\rho}{\underset{1}{x_i}}$; то на-оборотъ этого не будетъ, и одной системѣ значеній $\overset{\rho}{\underset{1}{x_i}}$ будетъ отвѣчать безчисленное множество значеній $\overset{\rho}{\underset{1}{u_k}}$. Дѣйствительно $\overset{\rho}{\underset{1}{x_i}}$ могутъ вернуться къ прежнимъ своимъ значеніямъ, описавъ сомкнутые пути, вслѣдствіе чего каждый интегралъ, входящій въ сумму:

$$\sum_{i=1}^{i=\rho} \mathrm{I}_{a_{2i-1}}^{x_i}{}_h = u_h, \quad (h = 1, 2 \ldots . \varrho) \qquad (1)$$

и слѣдовательно и вся эта сумма получитъ приращеніе, которое представится формулою:

$$\overline{\omega}_h = \sum_{g=1}^{g=\rho} (m_g \omega_{hg} + n_g \omega'_{hg}), \quad (h = 1, 2, \ldots . \varrho) \qquad (2)$$

гдѣ m_g и n_g цѣлыя числа, положительныя или отрицательныя, такъ что одной системѣ значеній $\overset{\rho}{\underset{1}{x_i}}$ будетъ отвѣчать безчисленное множество системъ $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$, выражаемыхъ формулою:

$$u_h + \overline{\omega}_h = u_h + \sum_{g=1}^{g=\rho} (m_g \omega_{hg} + n_g \omega'_{hg}). \quad (h = 1, 2 \ldots . \varrho) \qquad (3)$$

Но въ этомъ случаѣ и интегралы 2. рода, а вслѣдствіе этого и ихъ сумма:

$$\sum_{i=1}^{i=\rho} \overset{x_i}{\underset{\infty}{\Pi}}{}_k \tag{4}$$

получатъ приращеніе, выражаемое формулою:

$$\overline{\eta}_k = \sum_{g=1}^{g=\rho} (m_g \eta_{kg} + n_g \eta'_{kg}) ; \tag{5}$$

слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} \overline{\omega}_h\right)_k = \overline{\eta}_k + \mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_k ,$$

и потому

$$C_k - \mathbf{J}\left(u_h + \overline{\omega}_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} u^{(0)}{}_h - K_h\right)^{2k\text{-}1}_k = -\overline{\eta}_k + C_k - \mathbf{J}\left(u_h + \overset{\rho}{\underset{1}{u}}{}^{(0)}{}_h - K_h\right)^{2k\text{-}1}_k . \tag{6}$$

Помножая это на du_k и суммируя, вслѣдствіе (8) и (10) предыдущаго § получимъ отсюда слѣдующее:

$$d\log\Theta\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} \overline{\omega}_h\right) = -\sum_{k=1}^{k=\rho} \overline{\eta}_k \, du_k + d\log\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right) . \tag{7}$$

Интегрируя это отъ $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}} = \overset{\rho}{\underset{1}{u}}{}^{(1)}{}_k$, послѣ перехода отъ логариѳма къ числу, получимъ:

$$\Theta\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} \overline{\omega}_h\right) = \overline{A}\, e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho} \overline{\eta}_k u_k} \,\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right) , \tag{8}$$

гдѣ

$$\overline{A} = \frac{\Theta\left(u^{(1)}{}_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} \overline{\varpi}_h\right)}{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u^{(1)}{}_h}}\right) e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho} \overline{\eta}_k u^{(1)}{}_k}}, \tag{9}$$

причемъ, само собою разумѣется, мы принимаемъ, что $\overset{\rho}{\underset{1}{u}}{}^{(1)}{}_h$ не $\equiv \overset{2k\text{-}1}{K_h} \overset{\rho}{\underset{1}{-}} u^{(0)}{}_h$. Эта величина $\overline{A}$ не зависитъ отъ $\overset{\rho}{\underset{1}{u}}{}^{(1)}{}_h$, (что собственно и выражаетъ равенство (8)), но она зависитъ отъ $\overset{\rho}{\underset{1}{\overline{\varpi}_h}}$. Постараемся найти ея выраженіе, свободное отъ $\overset{\rho}{\underset{1}{u}}{}^{(1)}{}_h$.

57. Для другой системы періодовъ $\overset{\rho}{\underset{1}{\overline{\overline{\varpi}}_h}}$, разумѣя подъ $\overline{\overline{\varpi}}_h$ и $\overline{\overline{\eta}}_h$ слѣдующее:

$$\overline{\overline{\varpi}}_h = \sum_{g=1}^{g=\rho} (m'_g \omega_{hg} + n'_g \omega'_{hg}) \tag{1}$$

$$\overline{\overline{\eta}}_h = \sum_{g=1}^{g=\rho} (m'_g \eta_{hg} + n'_g \eta'_{hg}), \tag{2}$$

будемъ имѣть

$$\Theta\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} \overline{\overline{\varpi}}_h\right) = \overline{\overline{A}} e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho} \overline{\overline{\eta}}_k u_k} \Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right). \tag{3}$$

Перемѣняя здѣсь $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ на $u_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} \overline{\varpi}_h$ и перемножая полученный результатъ съ (8) предыдущаго §, по сокращеніи получимъ:

$$\Theta\left(u_h + \overset{\rho}{\underset{1}{\overline{\varpi}_h}} + \overline{\overline{\varpi}}_h\right) = \overline{A} \,.\, \overline{\overline{A}}\, e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho} [(\overline{\eta}_k + \overline{\overline{\eta}}_k) u_k + \overline{\overline{\eta}}_k \overline{\varpi}_k]} \Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right). \tag{4}$$

Съ другой стороны, давая прямо $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ приращеніе $\overline{\overline{\varpi}}_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} \overline{\varpi}_h$, и означая чрезъ $A^{=}$ коэффиціентъ A для этого случая, будемъ имѣть:

$$\Theta\left(u_h + \overset{\rho}{\underset{1}{\overline{\varpi}_h}} + \overline{\overline{\varpi}}_h\right) = \overline{A}^{=} e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}(\overline{\eta}_k + \overline{\overline{\eta}}_k)u_k} \Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right). \qquad (5)$$

Сравнивая (4) и (5) получимъ:

$$\overline{A}^{=} = \overline{A} . \overline{\overline{A}} e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\overline{\overline{\eta}}_k \overline{\varpi}_k}. \qquad (6)$$

Вторую часть этого равенства можно представить симметричнѣе, замѣчая, что

$$\overline{\overline{\eta}}_k \overline{\varpi}_k = \frac{1}{2}(\overline{\overline{\eta}}_k \overline{\varpi}_k + \overline{\eta}_k \overline{\overline{\varpi}}_k) + \frac{1}{2}(\overline{\overline{\eta}}_k \overline{\varpi}_k - \overline{\eta}_k \overline{\overline{\varpi}}_k); \qquad (7)$$

именно такъ:

$$\overline{A}^{=} = \overline{A} . \overline{\overline{A}} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}(\overline{\overline{\eta}}_k \overline{\varpi}_k + \overline{\eta}_k \overline{\overline{\varpi}}_k)} . e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}(\overline{\overline{\eta}}_k \overline{\varpi}_k - \overline{\eta}_k \overline{\overline{\varpi}}_k)}. \qquad (8)$$

Но

$$\overline{\overline{\eta}}_k \overline{\varpi}_k + \overline{\eta}_k \overline{\overline{\varpi}}_k = (\overline{\eta}_k + \overline{\overline{\eta}}_k)(\overline{\varpi}_k + \overline{\overline{\varpi}}_k) - \overline{\eta}_k \overline{\varpi}_k - \overline{\overline{\eta}}_k \overline{\overline{\varpi}}_k;$$

потому, внося вторую часть вмѣсто первой въ предыдущее равенство, мы легко приведемъ его къ такому виду:

$$\overline{A}^{=} e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}(\overline{\eta}_k + \overline{\overline{\eta}}_k)(\overline{\varpi}_k + \overline{\overline{\varpi}}_k)} =$$

$$= \overline{A} e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\overline{\eta}_k \overline{\varpi}_k} . \overline{\overline{A}} e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\overline{\overline{\eta}}_k \overline{\overline{\varpi}}_k} . e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}(\overline{\overline{\eta}}_k \overline{\varpi}_k - \overline{\eta}_k \overline{\overline{\varpi}}_k)}. \qquad (9)$$

Далѣе по (2), (5) предыдущаго §, (1) и (2) настоящаго, и на основанiи (1) и (4) § 19 имѣемъ:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}(\overline{\overline{\eta}}_k\overline{\varpi}_k-\overline{\eta}_k\overline{\overline{\varpi}}_k)=2\pi i\sum_{g=1}^{g=\rho}(m'_g n_g+m_g n'_g),$$

или, [такъ какъ

$$m'_g n_g+m_g n'_g=(m_g+m'_g)(n_g+n'_g)-m_g n_g-m'_g n'_g,]$$

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}(\overline{\overline{\eta}}_k\overline{\varpi}_k-\overline{\eta}_k\overline{\overline{\varpi}}_k)=2\pi i\sum_{g=1}^{g=\rho}(m_g+m'_g)(n_g+n'_g)-2\pi i\sum_{g=1}^{g=\rho}m_g n_g-2\pi i\sum_{g=1}^{g=\rho}m'_g n'_g;$$

внося это въ (9), мы легко дадимъ послѣднему такой видъ:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{A}=\,.\,e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\left[\frac{1}{2}(\overline{\eta}_k+\overline{\overline{\eta}}_k)(\overline{\varpi}_k+\overline{\overline{\varpi}}_k)+(m_k+m'_k)(n_k+n'_k)\pi i\right]}= \\ =\bar{A}\,e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\left(\frac{1}{2}\overline{\eta}_k\overline{\varpi}_k+m_k n_k\pi i\right)}.\,\overline{\overline{A}}\,e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\left(\frac{1}{2}\overline{\overline{\eta}}_k\overline{\overline{\varpi}}_k+m'_k n'_k\pi i\right)}.\end{array}\right\}\qquad(10)$$

Если положить теперь

$$\bar{A}\,e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\left(\frac{1}{2}\overline{\eta}_k\overline{\varpi}_k+m_k n_k\pi i\right)}=\varphi\left(m_h\overset{\rho}{\underset{1}{;}}n_h\right),\qquad(11)$$

то (10) короче такъ представится:

$$\varphi\left(m_h+m'_h\overset{\rho}{\underset{1}{;}}n_h+n'_h\right)=\varphi\left(m_h\overset{\rho}{\underset{1}{;}}n_h\right)\varphi\left(m'_h\overset{\rho}{\underset{1}{;}}n'_h\right).\qquad(12)$$

58. Это равенство выражаетъ основное свойство показательной функцiи; а потому можно положить:

$$\varphi\left(m_h \overset{\rho}{\underset{1}{;}} n_h\right) = e^{\sum\limits_{g=1}^{g=\rho}(A_k m_k + B_k n_k)} \,. \tag{1}$$

Здѣсь постоянныя $\overset{\rho}{\underset{1}{A_g}}$ и $\overset{\rho}{\underset{1}{B_g}}$ можно перемѣнить на другія α_l и β_l съ помощію подстановки:

$$\left.\begin{aligned} A_g &= \sum_{l=1}^{l=\rho}(\omega_{lg}\beta_l - \eta_{lg}\alpha_l) \\ B_g &= \sum_{l=1}^{l=\rho}(\omega'_{lg}\beta_l - \eta'_{lg}\alpha_l) \end{aligned}\right\} \quad (g = 1, 2, \ldots \rho), \tag{2}$$

такъ какъ опредѣлитель этой подстановки есть Δ § 21, относительно котораго было доказано, что онъ не $= 0$. Внося это въ показатель e въ (1), на основаніи (2) и (5) § 54 будемъ имѣть:

$$\sum_{g=1}^{g=\rho}(A_g m_g + B_g n_g) = \sum_{l=1}^{l=\rho}(\bar{\omega}_l \beta_l - \bar{\eta}_l \alpha_l) \,. \tag{3}$$

Здѣсь опять можно вмѣсто $\overset{\rho}{\underset{1}{\alpha_l}}$ и $\overset{\rho}{\underset{1}{\beta_l}}$ ввести новыя постоянныя, положивъ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_l &= \sum_{h=1}^{h=\rho}(\mu_h \omega_{lh} + \nu_h \omega'_{lh}) \\ \beta_l &= \sum_{h=1}^{h=\rho}(\mu_h \eta_{lh} + \nu_h \eta'_{lk}) \end{aligned}\right\} \quad (l = 1, 2, \ldots \rho), \tag{4}$$

ибо опредѣлитель этой подстановки опять тоже Δ § 21 (во второмъ его видѣ); тогда на основаніи (1) — (4) § 19 равенство (3) приметъ такой видъ:

$$\sum_{g=1}^{g=\rho}(A_g m_g + B_g n_g) = 2\pi i \sum_{h=1}^{h=\rho}(\mu_h \eta_h - \nu_h m_h) \,. \tag{5}$$

Слѣдовательно будетъ:

$$\varphi\left(\overset{\rho}{\underset{1}{m_h; n_h}}\right) = e^{2\pi i \sum\limits_{h=1}^{h=\rho}(m_h \nu_h - n_h \eta_h)} \quad . \qquad (6)$$

Вносся это въ уравненіе (11) § 55, мы получимъ оттуда искомое выраженіе для $\overline{A}$:

$$\overline{A} = e^{2\pi i \sum\limits_{h=1}^{h=\rho}(m_h \nu_h - n_h \mu_h)} . e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\left(\frac{1}{2}\overline{\eta}_k \overline{\omega}_k + m_k n_k \pi i\right)} . \qquad (7)$$

Это выраженіе содержитъ въ себѣ 2ρ неопредѣленныхъ величинъ $\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}}$ и $\overset{\rho}{\underset{1}{\nu_h}}$, соотвѣтственно такому же числу неопредѣленныхъ величинъ $\overset{\rho}{\underset{1}{C_k}}$ и $\overset{\rho}{\underset{1}{u}}{}^{(0)}{}_h$, входящихъ въ формулы (8) и (9) § 53, опредѣляющія $\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$.

Всѣ такія функціи, зависящія отъ однихъ и тѣхъ же интеграловъ $\overset{x}{\Pi}_k$ (т. е. для которыхъ c_{kl} имѣютъ опредѣленное значеніе), будутъ различаться только этими величинами; система ихъ поэтому называется характеристикою Θ-функціи. Удобно ввести ихъ въ самый знакъ функціи такимъ образомъ:

$$\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h; \mu_h, \nu_h}}\right). \qquad (7)$$

Введя это обозначеніе, равно какъ найденное въ (7) выраженіе коэффиціента $\overline{A}$, въ равенство (8) § 54, мы будемъ имѣть окончательно такое уравненіе:

$$\left.\begin{aligned} &\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h + \overline{\omega}_h; \mu_h, \nu_h}}\right) = \\ &= e^{2\pi i \sum\limits_{h=1}^{h=\rho}(m_h \nu_h - n_h \mu_h)} . e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}(\overline{\eta}_k(u_k + \frac{1}{2}\overline{\omega}_k) + m_k n_k \pi i)} \Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h; \mu_h, \nu_h}}\right). \end{aligned}\right\} (9)$$

Очевидно, что измѣненіе вещественной части элементовъ $\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}}$ и $\overset{\rho}{\underset{1}{\nu_h}}$ характеристики на цѣлое число не нарушитъ этого равенства, а потому всегда можно заключить ее въ предѣлахъ 0 и 1, исключая послѣдній, но не исключая первый.

59. Выведенное нами для $\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$ функціональное уравненіе (9) заключаетъ въ себѣ какъ частный случай слѣдующія 2ϱ уравненія, получаемыя изъ него, давая значенія равныя нулю всѣмъ m_g и n_g за исключеніемъ одного, полагаемаго $=1$:

$$\left.\begin{aligned}\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h+\omega_{hg};\mu_h,\nu_h}}\right)&=e^{+\nu_g 2\pi i}\cdot e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\eta_{kg}(u_k+\frac{1}{2}\omega_{kg})}\,\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h;\mu_h,\nu_h}}\right).\\ \Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h+\omega'_{hg};\mu_h,\nu_h}}\right)&=e^{-\mu_g 2\pi i}\cdot e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\eta'_{kg}(u_k+\frac{1}{2}\omega'_{kg})}\,\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h;\mu_h,\nu_h}}\right);\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$(g=1,2,\ldots.\varrho).$$

На-оборотъ изъ этихъ равенствъ можно получить равенство (9) § 56. Дѣйствительно, перемѣнивъ въ первомъ изъ нихъ $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ на $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h+\omega_{hg}}}$, тоже сдѣлавъ съ полученнымъ равенствомъ и повторивъ это дѣйствіе m_g разъ, перемножимъ всѣ полученные результаты; по сокращеніи, имѣя въ виду, что

$$\sum_{h=1}^{h=m_g}(2h-1)=m_g^{\,2},$$

мы получимъ:

$$\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h+m_g\omega_{hg};\mu_h,\nu_h}}\right)=e^{m_g\nu_g 2\pi i}\cdot e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}m_g\eta_{kg}(u_k+\frac{1}{2}m_{kg}\omega_{kg})}\,\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h;\mu_h,\nu_h}}\right);\quad(2)$$

точно также получимъ:

$$\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h+m_{g'}\omega_{hg'};\mu_h,\nu_h}}\right)=e^{m_{g'}\nu_{g'}2\pi i}\cdot e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}m_{g'}\eta_{kg'}(u_k+\frac{1}{2}m_{kg'}\omega_{kg'})}\,\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h;\mu_h,\nu_h}}\right).\quad(3)$$

Перемѣняя здѣсь $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ на $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h+m_g\omega_{hg}}}$ и перемножая съ предыдущимъ, по сокращеніи имѣя въ виду (1) § 19, получимъ:

$$\Theta\left(u_h + m_g\omega_{hg} + \overset{\rho}{\underset{1}{m}}_{g'}\omega_{hg'}; \mu_h, \nu_h\right) =$$

$$= e^{(m_g\nu_g + m_{g'}\nu_{g'})2\pi i}\, e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}(m_g\eta_{kg} + m_{g'}\eta_{kg'})(u_k + \frac{1}{2}(m_g\omega_{kg} + m_{g'}\omega_{kg'}))}\, \Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}; \mu_h, \nu_h\right).$$

Эта формула съ помощію пріема заключенія отъ n къ $n+1$ легко распространяется до такой:

$$\Theta\left(u_h + \overset{\rho}{\underset{1}{\tilde{\omega}_h}}; \mu_h, \nu_h\right) = e^{\sum\limits_{g=1}^{g=\rho} m_g\nu_g \,.\, 2\pi i}\, e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\tilde{\eta}_k(u_k + \frac{1}{2}\tilde{\omega}_k)}\, \Theta\left(u_h; \overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h\right), \quad (4)$$

гдѣ

$$\tilde{\omega}_h = \sum_{g=1}^{g=\rho} m_h\omega_{hg}; \qquad \tilde{\eta}_h = \sum_{g=1}^{g=\rho} m_h\eta_{kg}. \quad (5)$$

Точно также изъ второго изъ уравненій (1) выведется формула:

$$\Theta\left(u_h + \overset{\rho}{\underset{1}{\tilde{\omega}'_h}}; \mu_h, \nu_h\right) = e^{-\sum\limits_{g=1}^{g=\rho} n_g\mu_g \,.\, 2\pi i}\, e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\tilde{\eta}'_k(u_k + \frac{1}{2}\tilde{\omega}'_k)}\, \Theta\left(u_h; \overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h\right), \quad (6)$$

гдѣ

$$\tilde{\omega}'_h = \sum_{g=1}^{g=\rho} n_g\omega'_{kg}; \qquad \tilde{\eta}'_h = \sum_{g=1}^{g=\rho} n_h\eta'_{hg}. \quad (7)$$

Перемѣняя въ (6) $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ на $u_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} \tilde{\omega}_h$, перемножая съ (4) и сокращая, на основаніи (3) и (4) § 19 и имѣя въ виду, что

$$\tilde{\omega}_h + \tilde{\omega}'_h = \omega_h, \qquad \tilde{\eta}_h + \tilde{\eta}'_h = \bar{\eta}_h, \quad (8)$$

получимъ:

$$\left.\begin{array}{l}\Theta\left(u_h+\overset{\rho}{\underset{1}{\bar{\varpi}_h}};\mu_h,\nu_h\right)=\\ =e^{\sum\limits_{g=1}^{g=\rho}(m_g\nu_g-n_g\mu_g)2\pi i}\,e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}(\bar{\eta}_k(u_k+\frac{1}{2}\bar{\varpi}_k)+m_kn_k\pi i)}\,\Theta\left(u_h;\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}},\nu_h\right)\end{array}\right|\qquad(9)$$

что тождественно съ (9) § 56.

60. Перемѣнимъ здѣсь у m_g и n_g знаки на противные; мы будемъ имѣть:

$$\Theta\left(u_h-\overset{\rho}{\underset{1}{\bar{\varpi}_h}};\mu_h,\nu_h\right)=$$
$$=e^{-\sum\limits_{g=1}^{g=\rho}(m_g\nu_g-n_g\mu_g)2\pi i}\,e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}(-\bar{\eta}_k(u_k-\frac{1}{2}\bar{\varpi}_k)+m_kn_k\pi i)}\,\Theta\left(u_h;\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}},\nu_h\right);$$

перемѣнивъ здѣсь $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ на $-\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$, получимъ:

$$\left.\begin{array}{l}\Theta\left(-u_h-\overset{\rho}{\underset{1}{\bar{\varpi}_h}};\mu_h,\nu_h\right)=\\ =e^{-\sum\limits_{g=1}^{g=\rho}(m_g\nu_g-n_g\mu_g)2\pi i}\,e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}(\bar{\eta}_k(u_k+\frac{1}{2}\bar{\varpi}_k)+m_kn_k\pi i)}\,\Theta\left(-u_h;\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}},\nu_h\right).\end{array}\right\}\qquad(1)$$

Дѣля (9) предыдущаго § на только-что полученное, будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta\left(u_h+\overset{\rho}{\underset{1}{\bar{\varpi}_h}};\mu_h,\nu_h\right)}{\Theta\left(-u_h-\overset{\rho}{\underset{1}{\bar{\varpi}_h}};\mu_h,\nu_h\right)}=e^{2\sum\limits_{g=1}^{g=\rho}(m_g\nu_g-n_g\mu_g).2\pi i}\,\frac{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}};\mu_h,\nu_h\right)}{\Theta\left(-\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}};\mu_h,\nu_h\right)}.\qquad(2)$$

Если функція $\Theta\left(u_h;\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}},\nu_h\right)$ есть четная или нечетная, т. е. если

$$\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)=\pm\Theta\left(-\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right),\qquad(3)$$

то изъ (2) слѣдуетъ

$$e^{2\sum_{g=1}^{g=\rho}(m_g\nu_g - n_g\mu_g)2\pi i} = 1, \qquad (4)$$

и слѣд.

$$2\sum_{g=1}^{g=\rho}(m_g\nu_g - n_g\mu_g) = \text{цѣлому числу.} \qquad (5)$$

Такъ какъ $\overset{\rho}{\underset{1}{m_g}}$ и $\overset{\rho}{\underset{1}{n_g}}$ произвольныя цѣлыя числа, то отсюда слѣдуетъ, что $\overset{\rho}{\underset{1}{m_h}}$ и $\overset{\rho}{\underset{1}{\nu_h}}$ могутъ быть только четнымъ или нечетнымъ числомъ половинъ: $\frac{1}{2}$.

Имѣя въ виду выше сдѣланное замѣчаніе относительно вещественной части этихъ величинъ, мы заключаемъ отсюда, что для $\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$ четной или нечетной эти числа могутъ быть или $=0$, или $=\frac{1}{2}$. Въ этомъ случаѣ за характеристику принимаютъ обыкновенно систему числителей этихъ величинъ μ_h и ν_h, которыя будутъ состоять изъ чиселъ 0 или 1. *Такъ какъ каждое изъ чиселъ μ_h и ν_h можетъ принимать независимо отъ прочихъ оба* значенія 0 и $\frac{1}{2}$, то всѣхъ характеристикъ разсматриваемаго вида, а слѣд. и число самыхъ $\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$ четныхъ или нечетныхъ будетъ $2^{2\rho}=4^\rho$. *По примѣру Римана многіе обозначаютъ* функцію $\Theta\left(u_h;\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}},\nu_h\right)$ *въ этомъ случаѣ такимъ образомъ:*

$$\Theta\begin{bmatrix}\mu_1\mu_2\ldots\mu_\rho\\ \nu_1\nu_2\ldots\nu_\rho\end{bmatrix}(u_1u_2\ldots u_\rho), \qquad (6)$$

гдѣ μ_h и ν_h или 0 или 1.

61. Чтобы получить четную функцію $\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$ мы должны еще разъ вернуться къ функціи $\mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_k$, которую разсматривали въ началѣ этой главы.

Если мы въ уравненіяхъ, опредѣляющихъ $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$:

$$\sum_{i=1}^{i=\varrho} \overset{x_i}{\underset{a_{2i-1}}{\mathbf{I}}}{}_h = u_h, \qquad (h=1,2\ldots\varrho) \qquad (1)$$

перемѣнимъ знаки предъ $\sqrt{R(z_i)}$ $(i=1,2\ldots\varrho)$ на противные, слѣд. поведемъ $\overset{\varrho}{\underset{1}{z_i}}$ отъ $\overset{\varrho}{\underset{1}{a_{2i-1}}}$ по соотвѣтственнымъ путямъ въ другомъ листѣ Римановой поверхности до соотвѣтственныхъ точекъ ея $\overset{\varrho}{\underset{1}{x_i}}$, то $\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}}$ перемѣнятся на $-\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}}$, такъ какъ $\overset{\varrho}{\underset{1}{x_i}}$ остались тѣ же, а только $\sqrt{R(x_i)}$ $(i=1,2\ldots\ldots\varrho)$ перемѣнили знаки на противный; отсюда мы заключаемъ, что $\overset{\varrho}{\underset{1}{x_i}}$ суть четныя функціи отъ $\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}}$, а $\sqrt{R(x_i)}$ $(i=1,2\ldots\varrho)$ нечетныя. Если теперь мы обратимся къ выраженіямъ частныхъ производныхъ по $\overset{\varrho}{\underset{1}{u_l}}$ отъ $\mathbf{J}\left(\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}}\right)_k$ (формулы (4), (8), (10) § 48), то увидимъ, что и эти производныя суть четныя функціи отъ $\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}}$, ибо суть раціональныя симметрическія функціи $\overset{\varrho}{\underset{1}{x_i}}$; отсюда заключаемъ, что сами $\mathbf{J}\left(\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}}\right)_k$ будутъ нечетныя функціи, т. е. будетъ:

$$\mathbf{J}\left(-\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}}\right)_k = -\mathbf{J}\left(\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}}\right)_k. \qquad (2)$$

Въ этомъ можно убѣдиться еще и такимъ образомъ. Продолжимъ кривыя, по которымъ $\overset{\varrho}{\underset{1}{z_i}}$ переходятъ въ суммахъ

$$\sum_{i=1}^{i=\varrho} \overset{x_i}{\underset{a_{2i-1}}{\mathbf{I}}}{}_h = u_h \qquad (h=1,2\ldots\varrho) \qquad (3)$$

отъ нижняго предѣла до верхняго, до ∞, (которая на Неймановой двулиственной сферѣ представится одною точкою, которая будетъ точкою развѣтвленія) по кривымъ, лежащимъ въ томъ же листѣ сферы: интегралы суммъ

$$\sum_{i=1}^{i=\varrho} \overset{x_i}{\underset{\infty}{\mathbf{II}}}{}_k = \mathbf{J}\left(\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}}\right)_k \qquad (k=1,2\ldots\varrho) \qquad (4)$$

берутся по этимъ продолженіямъ путей интеграловъ первыхъ суммъ (3). Если вмѣсто $\overset{\rho}{\underset{1}{x_i}}$ возьмемъ соотвѣтственныя точки другого листа сферы, то всѣ пути съ соотвѣтственными продолженіями перейдутъ въ другой листъ, въ которомъ $\sqrt{R\left(\overset{\rho}{\underset{1}{x_i}}\right)}$ имѣютъ противное значеніе; отсюда слѣдуетъ, что обѣ суммы (3) и (4) одновременно перемѣнятъ свои знаки на противные, и, стало быть, $\mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_k$ есть нечетная функція отъ $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$.

Теперь, перемѣняя въ равенствѣ:

$$\mathbf{J}\left(u_k \overset{\rho}{\underset{1}{+}} \bar{\omega}_h\right)_k = \bar{\eta}_k + \mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_k,$$

$\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ на $u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h$, получимъ:

$$\mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h\right)_k = \bar{\eta}_k + \mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h\right)_k,$$

или

$$-\frac{1}{2}\bar{\eta}_k + \mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h\right)_k = \frac{1}{2}\bar{\eta}_k + \mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h\right)_k.$$

Перемѣняя здѣсь $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ на $-\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$, на основаніи (2) легко получимъ отсюда слѣдующее:

$$-\frac{1}{2}\bar{\eta}_k - \mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h\right)_k = \frac{1}{2}\bar{\eta}_k + \mathbf{J}\left(-u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h\right)_k,$$

или

$$\frac{1}{2}\bar{\eta}_k + \mathbf{J}\left(-u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \frac{1}{2}\omega_h\right)_k = -\left(\frac{1}{2}\bar{\eta}_k + \mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h\right)_k\right), \tag{5}$$

т. е. функція

$$\frac{1}{2}\bar{\eta}_k + \mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \frac{1}{2}\bar{\omega}_h\right)_k \tag{6}$$

есть нечетная функція своихъ аргументовъ $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$.

Эта функція представляетъ частный случай функціи

$$C_k - \mathbf{J}\Big(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h + u^{(0)}{}_h - \overset{2k-1}{K_h}}}\Big)_k, \qquad (7)$$

отъ которой она будетъ отличаться только множителемъ (-1), когда будетъ въ одно время:

$$\left.\begin{array}{l} u_h - K_h = -\frac{1}{2}\bar{\varpi}_h \\ C_k = -\frac{1}{2}\bar{\eta}_k \end{array}\right\} \begin{array}{l} (h = 1, 2 \ldots \varrho) \\ (k = 1, 2 \ldots \varrho), \end{array} \qquad (8)$$

и притомъ только тогда. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы имѣли:

$$C_k - \mathbf{J}\Big(\overset{\rho}{\underset{1}{-u_h + u^{(0)}{}_h - \overset{2k-1}{K_h}}}\Big)_k = -\Big(C_k - \mathbf{J}\Big(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h + u^{(0)}{}_h - \overset{2k-1}{K_h}}}\Big)_k\Big),$$

то, представивъ это на основаніи (2) такъ:

$$2C_k + \mathbf{J}\Big(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h - u^{(0)}{}_h + \overset{2k-1}{K_h}}}\Big)_k = \mathbf{J}\Big(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h + u^{(0)}{}_h - \overset{2k-1}{K_h}}}\Big)_k$$

или, перемѣняя $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ на $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h + u^{(0)}{}_h - K_h}}$:

$$2C_k + \mathbf{J}\Big(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\Big)_k = \mathbf{J}\Big(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h + 2(u^{(0)}{}_h - \overset{2k-1}{K_h})}}\Big)_k,$$

мы будемъ имѣть отсюда, что

$$\left.\begin{array}{r} 2(u^{(0)}{}_h - \overset{2k-1}{K_h}) = \bar{\bar{\varpi}}_h \\ 2C_k = \bar{\bar{\eta}}_k \end{array}\right\} \begin{array}{l} (h = 1, 2 \ldots \varrho) \\ (k = 1, 2 \ldots \varrho), \end{array}$$

т. е. что $\overset{\rho}{\underset{1}{u^{(0)}_h - \overset{2k-1}{K}_h}}$ и C_k суть, какъ и въ (8) соотвѣтственные полуперіоды интеграловъ перваго и второго рода. Въ частномъ случаѣ, когда $\overset{\rho}{\underset{1}{u^{(0)}_h}} = 0$, изъ нихъ слѣдуетъ для $\overset{\rho}{\underset{1}{C_k}}$ такое выраженіе:

$$C_k = -\overset{2k-1}{J}_k, \tag{3}$$

гдѣ $\overset{2k-1}{J}_k$ имѣетъ значеніе, опредѣляемое равенствомъ (9) § 15.

62. Пусть будетъ

$$d\Phi_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right) = -\sum_{k=1}^{k=\rho}\left(\overset{2k-1}{J}_k + \mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h - \overset{2k-1}{K}_h}}\right)_k\right) du_k, \tag{1}$$

при условіи

$$\Phi_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{0_h}}\right) = 0, \tag{2}$$

и

$$\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right) = e^{\Phi\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}; \tag{3}$$

изъ предыдущаго § слѣдуетъ, что функція $\Phi_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$, а слѣд. и $\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$ суть четныя функціи аргументовъ $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$, причемъ

$$\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{0_h}}\right) = 1. \tag{4}$$

Въ случаѣ, когда $\mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h - \overset{2k-1}{K}_h}}\right)_k$ обратятся въ $\mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h - \overset{2k-1}{K}_h}}\right)^0_k$, т. е. когда всѣ c_{kl} будутъ $=0$, функція (3) будетъ не что иное какъ функція $Al(u_1 u_2 \ldots u_\rho)$ Вейерштрасса.

Для этой функціи (3) всѣ элементы $\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}}$ и $\overset{\rho}{\underset{1}{\nu_h}}$ характеристики будутъ равны нулю. Для доказательства этого замѣтимъ сперва, что по § 55 будетъ:

$$\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)=0\,,$$

для ϱ системъ значеній $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$, получаемыхъ изъ:

$$u_h=\overset{2k-1}{K_h}\qquad(h=1\,,\,2\,....\,\varrho)\,,$$

давая k всѣ значенія отъ 1 до ϱ. Изъ формулы (9) § 58 слѣдуетъ, что это будетъ также для всѣхъ системъ значеній $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$, получаемыхъ такимъ же образомъ изъ

$$u_h=\overset{2k-1}{K_h}+\varpi_h\qquad(h=1\,,\,2\,....\,\varrho)$$

(что обыкновенно пишутъ такъ:

$$u_h\equiv\overset{2k-1}{K_h}\qquad(h=1\,,\,2\,....\,\varrho)\,,\tag{5}$$

опуская періодъ ϖ_h). Если въ равенствѣ (9) § 58 положить $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}=-\frac{1}{2}\varpi_h$, то оно приметъ такой видъ:

$$\Theta\left(\frac{1}{2}\varpi_h;\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}},\nu_h\right)=e^{2\pi i\sum\limits_{h=1}^{h=\rho}(m_h\nu_h-n_h\mu_h)}\,e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}m_kn_k\pi i}\,\Theta\left(-\frac{1}{2}\overset{\rho}{\underset{1}{\varpi_h}};\mu_h,\nu_h\right).$$

Если $\Theta\left(u_h;\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}},\nu_h\right)$ есть четная функція и $\frac{1}{2}\varpi_h$ не удовлетворяетъ сравненію (5), то будетъ

$$\Theta\left(\frac{1}{2}\varpi_h;\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}},\nu_h\right)=\Theta\left(-\frac{1}{2}\overset{\rho}{\underset{1}{\varpi_h}};\mu_h,\nu_h\right),$$

но не $=0$; и потому изъ предыдущаго будетъ слѣдовать:

$$e^{2\pi i\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}(m_h\nu_h-n_h\mu_h)}\,.\,e^{-\pi i\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}m_kn_k}=1\,.\tag{6}$$

Можно выбрать 2ϱ такихъ системъ значеній $\overset{\varrho}{\underset{1}{\varpi}}_h$, для которыхъ будетъ

$$\sum_{k=1}^{k=\varrho} m_k n_k = 0\,, \tag{7}$$

и слѣдовательно (6) приведется къ такому

$$\sum_{k=1}^{k=\varrho} (m_h \nu_h - n_h \mu_h) = \text{цѣлому числу}; \tag{8}$$

таковы именно будутъ двѣ группы:

$$\text{a)}\ \overline{\omega}_h = \omega_{hk} \qquad (h = 1, 2 \ldots. \varrho)\ [k = 1, 2 \ldots. \varrho];$$

(для этихъ $m_k = 1, m_g = 0\,(g \lesseqgtr k)$; $n_l = 0\ (l = 1, 2 \ldots. \varrho))$ и

$$\text{b)}\ \overline{\omega}_h = 2\overset{2k}{K}_h = \sum_{g=k+1}^{g=\varrho} \omega_{hg} - \omega'_{hk}\ (h = 1, 2 \ldots. \varrho)\ [k = 1, 2 \ldots. \varrho];$$

(для которыхъ $m_g = 0\ (g \gtrless k)$; $m_g = 1$; $n_k = -1$; $n_g = 0\ (g \gtrless k))$.

Не трудно убѣдиться, что эти значенія $\overline{\omega}_h$ не удовлетворяютъ (5), а также, что для нихъ будетъ имѣть мѣсто равенство (7). Но теперь (8) приведется для группы (a) къ такому:

$$\nu_k = \text{цѣлому числу}, \tag{9}$$

а для группы (b) къ слѣдующему:

$$\sum_{h=k+1}^{h=\varrho} \nu_h + \mu_k = \text{цѣлому числу}; \tag{10}$$

но какъ $\overset{\varrho}{\underset{1}{\mu}}_g$ и $\overset{\varrho}{\underset{1}{\nu}}_g$ могутъ быть или 0 или $\frac{1}{2}$, по выведенному въ § 61, то изъ (9) слѣдуетъ, что

$$\nu_k = 0 \quad (k = 1, 2 \ldots . \varrho), \tag{11}$$

и затѣмъ изъ (10), что

$$\mu_k = 0 \quad (k = 1, 2 \ldots . \varrho), \tag{12}$$

что и требовалось доказать. Легко видѣть, что

$$\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right) = \frac{\Theta\left(u_h; \overset{\rho}{\underset{1}{0_h}}, 0_h\right)}{\Theta\left(0_h; \overset{\rho}{\underset{1}{0_h}}, 0_h\right)}. \tag{13}$$

Функцію $\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$ мы будемъ называть основною Θ-функціей, потому что чрезъ нее могутъ быть выражены другія, при помощи нѣкотораго экспонентіальнаго множителя, какъ то будетъ показано въ слѣдующемъ §.

63. По (8) § 58 имѣемъ:

$$d\varPhi\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h + u^{(0)}_h}}\right) = \sum_{k=1}^{k=\rho}\left(C_k - \mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h + u^{(0)}_h}} - \overset{2k-1}{K_h}\right)_k\right) du_k,$$

но это можно такъ представить:

$$d\varPhi\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h + u^{(0)}_h}}\right) = \sum_{k=1}^{k=\rho}\left(C_k + J_k\right) du_k - \sum_{k=1}^{k=\rho}\left(J_k + \mathbf{J}\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h + u^{(0)}_h}} - \overset{2k-1}{K_h}\right)_k\right) du_k,$$

или по (1) предыдущаго §:

$$d\varPhi\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h + u^{(0)}_h}}\right) = \sum_{k=1}^{k=\rho}\left(C_k + J_k\right) du_k + d\varPhi_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h + u^{(0)}_h}}\right);$$

интегрируя это равенство отъ $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}} = 0$, мы получимъ:

$$\Phi\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} u^{(0)}{}_h\right) - \Phi\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u}}{}^{(0)}{}_h\right) = \sum_{k=1}^{k=\rho}\left(C_k + J_k\right)u_k + \Phi_0\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} u^{(0)}{}_h\right) - \Phi_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u}}{}^{(0)}{}_h\right).$$

Внося взятое отсюда выраженіе $\Phi\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} u^{(0)}{}_h\right)$ въ (10) § 58, легко получимъ такое равенство:

$$\frac{\Theta\left(u_h ; \overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h\right)}{\Theta\left(0_h ; \overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h\right)} = e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}(C_k + J_k)u_k} \frac{\Theta_0\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} u^{(0)}{}_h\right)}{\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u}}{}^{(0)}{}_h\right)}. \qquad (1)$$

Перемѣняя здѣсь $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ на $u_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} \overline{\omega}_h$, будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta\left(u_h + \alpha_h ; \overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h\right)}{\Theta\left(0_h ; \overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h\right)} = e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}(C_k + J_k)(u_k + \overline{\omega}_k)} \frac{\Theta_0\left(u_h + \overset{\rho}{\underset{1}{u}}{}^{(0)}{}_h + \overline{\omega}_h\right)}{\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u}}{}^{(0)}{}_h\right)}; \qquad (2)$$

но такъ какъ для $\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$ по доказанному въ предыдущемъ §: $\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}} = 0$, $\overset{\rho}{\underset{1}{\nu_h}} = 0$; то (9) § 58 будемъ имѣть:

$$\Theta_0\left(u_h + \overset{\rho}{\underset{1}{u}}{}^{(0)}{}_h + \overline{\omega}_h\right) = e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}(\overline{\eta}_k(u_k + u^{(0)}{}_k + \frac{1}{2}\overline{\omega}_k) + m_k n_k \pi i)} \Theta_0\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} u^{(0)}{}_h\right);$$

внося это во (2) и принявъ во вниманіе (1), по сокращеніи получимъ:

$$\Theta\left(u_h + \overset{\rho}{\underset{1}{\overline{\omega}_h}} ; \mu_h, \nu_h\right) = \qquad (3)$$

$$= e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}[(C_k + J_k)\overline{\omega}_k - \overline{\eta} u^{(0)}{}_k]} \; e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}(\overline{\eta}_k(u_k + \frac{1}{2}\overline{\omega}_k) + m_k n_k \pi i)} \; \Theta\left(u_h ; \overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h\right).$$

Полагая, что всегда возможно, какъ мы видѣли:

$$\left.\begin{aligned} u^{(0)}{}_k &= \sum_{h=1}^{h=\rho} (\mu_h \omega_{hk} + \nu_h \omega'_{kh}) \\ C_k + \overset{2k-1}{J}_k &= \sum_{h=1}^{h=\rho} (\mu_h \eta_{kh} + \nu_h \eta'_{kh}), \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

мы найдемъ отсюда характеристику $\left(\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h, \nu_h}}\right)$ нашей Θ-функціи, послѣ чего равенство (3) приведется къ виду (9) § 58. Внося изъ (4) въ (1), мы получимъ такое выраженіе $\Theta\left(u_h; \overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h\right)$ чрезъ основную:

$$\frac{\Theta\left(u_h; \overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h\right)}{\Theta\left(0_h; \overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h\right)} = e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho} \sum\limits_{h=1}^{h=\rho} (\mu_h \eta_{kh} + \nu_h \eta'_{kh}) u_k} \frac{\Theta_0\left(u_k + \sum\limits_{h=1}^{h=\rho} (\mu_h \overset{\rho}{\underset{1}{\omega_{kh}}} + \nu_h \omega'_{kh})\right)}{\Theta_0\left(\sum\limits_{h=1}^{h=\rho} (\mu_h \overset{\rho}{\underset{1}{\omega_{kh}}} + \nu_h \omega'_{kh})\right)}. \qquad (5)$$

64. Перемѣнимъ въ этомъ равенствѣ $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ на $u_h + \sum\limits_{l=1}^{l=\rho} \left(\mu'_l \overset{\rho}{\underset{1}{\omega_{hl}}} + \nu'_l \omega'_{hl}\right)$, и результатъ умножимъ въ обѣихъ частяхъ на

$$e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho} \sum\limits_{h=1}^{h=\rho} (\mu'_h \eta_{kh} + \nu'_h \eta'_{kh}) u_k},$$

послѣ легкихъ преобразованій мы получимъ тогда слѣдующее:

$$e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho} \sum\limits_{h=1}^{h=\rho} (\mu'_h \eta_{kh} + \nu'_h \eta'_{kh}) u_k} \frac{\Theta\left(u_h + \sum\limits_{l=1}^{l=\rho} (\mu'_l \overset{\rho}{\underset{1}{\omega_{hl}}} + \nu'_l \omega'_{hl}); \mu_h, \nu_h\right)}{\Theta\left(0_h; \overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h\right)} =$$

$$= e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\sum\limits_{h=1}^{h=\rho}((\mu_h+\mu'_h)\eta_{kh}+(\nu_h+\nu'_h)\eta'_{kh})u_k}\,\frac{\Theta_0\Bigl(u_k+\sum\limits_{h=1}^{h=\rho}((\mu_h+\mu'_h)\overset{\rho}{\underset{1}{\omega}}_{kh}+(\nu_h+\nu'_h)\omega'_{kh})\Bigr)}{\Theta_0\Bigl(\sum\limits_{h=1}^{h=\rho}((\mu_h+\mu'_h)\overset{\rho}{\underset{1}{\omega}}_{kh}+(\nu_h+\nu'_h)\omega'_{kh}\Bigr)}\times$$

$$\times e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\sum\limits_{h=1}^{h=\rho}(\mu_k\eta_{kh}+\nu_h\eta'_{kh})\cdot\sum\limits_{l=1}^{l=\rho}(\mu_l\omega_{kl}+\mu'_l\omega'_{kl})}\,\frac{\Theta_0\Bigl(\sum\limits_{h=1}^{h=\rho}(\mu'_h\omega_{kh}+\nu'_h\omega'_{kh})\overset{\rho}{\underset{1}{+}}\sum\limits_{h=1}^{h=\rho}(\mu_h\omega_{kh}+\nu_h\omega'_{kh})\Bigr)}{\Theta_0\Bigl(\sum\limits_{h=1}^{h=\rho}(\mu_h\omega_{kh}\overset{\rho}{\underset{1}{+}}\nu_h\omega'_{kh})\Bigr)}. \qquad (1)$$

Второй множитель второй части этого равенства по (5) предыдущаго § равенъ:

$$\frac{\Theta\Bigl(\sum\limits_{l=1}^{l=\rho}(\mu_l\omega_{kl}\overset{\rho}{\underset{1}{+}}\nu_l\omega'_{kl});\mu_h,\nu_h\Bigr)}{\Theta\Bigl(0;\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}},\nu_h\Bigr)}, \qquad (2)$$

первый же получится изъ второй части того-же равенства (8) предыдущаго § чрезъ перемѣну μ_h и ν_h соотвѣтственно на $\mu_h+\mu'_h$ и $\nu_h+\nu'_h$ и потому $=$

$$=\frac{\Theta\Bigl(u_h;\mu_h+\overset{\rho}{\underset{1}{\mu'_h}},\nu_h+\nu'_h\Bigr)}{\Theta\Bigl(0_h;\mu_h+\overset{\rho}{\underset{1}{\mu'_h}},\nu_h+\nu'_h\Bigr)}; \qquad (3)$$

внося (2) и (3) во вторую часть (1) вмѣсто имъ равныхъ, мы получимъ слѣдующую формулу:

$$\frac{\Theta\Bigl(u_h;\mu_h+\overset{\rho}{\underset{1}{\mu'_h}},\nu_h+\nu'_h\Bigr)}{\Theta\Bigl(0_h;\mu_h+\overset{\rho}{\underset{1}{\mu'_h}},\nu_h+\nu'_h\Bigr)}= \qquad (4)$$

$$= e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\sum\limits_{h=1}^{h=\rho}(\mu'_h\eta_{kh}+\nu'_h\eta'_{kh})u_k}\,\frac{\Theta\Bigl(u_h+\sum\limits_{l=1}^{l=\rho}(\mu'_h\omega_{hl}\overset{\rho}{\underset{1}{+}}\nu'_l\omega'_{hl});\mu_h,\nu_h\Bigr)}{\Theta\Bigl(\sum\limits_{l=1}^{l=\rho}(\mu_l\omega_{hl}\overset{\rho}{\underset{1}{+}}\nu_l\omega'_{hl});\mu_h,\nu_h\Bigr)},$$

которая показываетъ, что по тому же закону, по которому изъ $\Theta_0\Bigl(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\Bigr)$, т. е. съ характеристикою $\Bigl(\mu_h\overset{\rho}{\underset{1}{,}}\nu_h\Bigr)$, мы вывели $\Theta\Bigl(u_h;\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}},\nu_h\Bigr)$ — съ характеристикою $\Bigl(\mu_h\overset{\rho}{\underset{1}{,}}\nu_h\Bigr)$, по тому же закону мы можемъ изъ этой послѣдней вывести новую: $\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h;\mu_h+\mu'_h,\nu_h+\nu'_h}}\right)$, которой характеристика получается изъ характеристики первой чрезъ придачу $\overset{\rho}{\underset{1}{\mu'_h}}, \overset{\rho}{\underset{1}{\nu'_h}}$ къ соотвѣтственнымъ элементамъ ея.

65. Мы видѣли, что въ случаѣ четной или нечетной $\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h;\mu_h,\nu_h}}\right)$ элементы характеристики μ_h и ν_h будутъ вида $\frac{\alpha}{2}$, гдѣ $\alpha=0$, или $=1$. Въ этомъ случаѣ:

$$2\sum_{l=1}^{l=\rho}(\mu_l\omega_{hl}+\nu_l\omega'_{hl}) \qquad (h=1,2,\ldots\rho)$$

будетъ система періодовъ; а потому, примѣняя (9) § 56 къ $\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$, будемъ имѣть:

$$\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h+2\sum_{l=1}^{l=\rho}(\mu_l\omega_{hl}+\nu_l\omega'_{hl})}}\right)=$$

$$=e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\left\{\sum\limits_{h=1}^{h=\rho}2(\mu_h\eta_{kh}+\nu_h\eta'_{kh})(u_k+\sum\limits_{l=1}^{l=\rho}(\mu_l\omega_{kl}+\nu_l\omega'_{kl}))+2\mu_k 2\nu_k\pi i\right\}}\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right);$$

перемѣняя здѣсь $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ на $u_h-\sum\limits_{l=1}^{l=\rho}\overset{\rho}{\underset{1}{\left(\mu_l\omega_{hl}+\nu_l\omega'_{hl}\right)}}$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned}&\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h+\sum_{l=1}^{l=\rho}(\mu_l\omega_{hl}+\nu_l\omega'_{hl})}}\right)=\\ &=e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\left\{2\sum\limits_{h=1}^{h=\rho}(\mu_h\eta_{kh}+\nu_h\eta'_{kh})u_k+2\mu_k.2\nu_k.\pi i\right\}}\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h-\sum_{l=1}^{l=\rho}(\mu_l\omega_{hl}+\nu_l\omega'_{hl})}}\right)\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Перемѣняя $\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ на $-\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}$ въ (5) § 63, въ виду четности $\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$, мы будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta\left(-u_h\overset{\rho}{\underset{1}{;}}\mu_h,\nu_h\right)}{\Theta\left(0_h\overset{\rho}{\underset{1}{;}}\mu_h,\nu_h\right)}=e^{-\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\sum\limits_{h=1}^{h=\rho}(\mu_h\eta_{kh}+\nu_h\eta'_{kh})u_k}\,\frac{\Theta_0\left(u_k-\sum\limits_{h=1}^{h=\rho}(\mu_h\overset{\rho}{\underset{1}{\omega}}_{kh}+\nu_h\omega'_{kh})\right)}{\Theta_0\left(\sum\limits_{h=1}^{h=\rho}(\mu_h\overset{\rho}{\underset{1}{\omega}}_{kh}+\nu_h\omega'_{kh})\right)}\,;\qquad(2)$$

внося сюда вмѣсто $\Theta_0\left(u_h-\sum\limits_{h=1}^{h=\rho}(\mu_h\overset{\rho}{\underset{1}{\omega}}_{kh}+\nu_h\omega'_{kh})\right)$ его выраженіе изъ (1) и имѣя въ виду (5) § 63, мы получимъ:

$$\frac{\Theta\left(-u_h\overset{\rho}{\underset{1}{;}}\mu_h,\nu_h\right)}{\Theta\left(0_h\overset{\rho}{\underset{1}{;}}\mu_h,\nu_h\right)}=e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}2\mu_k\,.\,2\nu_k\pi i}\,\frac{\Theta\left(u_h\overset{\rho}{\underset{1}{;}}\mu_h,\nu_h\right)}{\Theta\left(0_h\overset{\rho}{\underset{1}{;}}\mu_h,\nu_h\right)},\qquad(3)$$

откуда слѣдуетъ, что $\Theta\left(u_h\overset{\rho}{\underset{1}{;}}\mu_h,\nu_h\right)$ будетъ четная функція или нечетная, смотря по тому будетъ ли

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}2\mu_k\,.\,2\nu_k\qquad(4)$$

четное число или нечетное. Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ:

$$\mu_k=\frac{\alpha_k}{2}\;,\;\nu_k=\frac{\beta_k}{2}\,,$$

гдѣ α_k и β_k или 0 или 1, то (4) короче такъ напишется:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\alpha_k\,.\,\beta_k;$$

слѣдовательно, смотря по тому будетъ ли эта сумма равна четному числу или нечетному, функція:

$$\Theta\left(u_h;\overset{\rho}{\underset{1}{\frac{\alpha_h}{2}}},\frac{\beta_h}{2}\right)$$

будетъ четною или нечетною.

66. Къ этого рода функціямъ принадлежатъ и тѣ, которыя входятъ въ выраженія $\sqrt{\frac{\varphi(a_{2l-1})}{Q(a_{2l-1})}}$ и $\sqrt{\frac{\varphi(a_{2j})}{P(a_{2j})}}$, найденныя нами въ § 51, если за $\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$ названнаго § принять ту изъ Θ-функцій, которую мы означили чрезъ $\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$ въ § 62. Дѣйствительно, соединяя въ одну формулу (8) и (22) § 51, имѣемъ:

$$\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_\alpha = e^{\sum\limits_{k=1}^{k=\rho} \overset{\alpha}{J}_k u_k}\,\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h + \overset{\alpha}{K}_h}}\right), \tag{1}$$

что по виду тождественно съ (5) § 63, если тамъ принять еще, что:

$$\Theta\left(0_h;\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h,\nu_h}}\right) = \Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{\sum_{h=1}^{h=\rho}(\mu_h\omega_{kh} + \nu_h\omega'_{kh})}}\right), \tag{2}$$

что всегда возможно по замѣчанію въ концѣ § 55. Имѣя въ виду, что по (3), (4), (5) и (9) § 15:

$$\overset{2k-1}{K}_h = \sum_{g=k}^{g=\rho}\frac{1}{2}\,\omega_{h,g} - \frac{1}{2}\,\omega'_{h,k}; \qquad \overset{2k-1}{J}_h = \sum_{g=k}^{g=\rho}\frac{1}{2}\,\eta_{h,g} - \frac{1}{2}\,\eta'_{h,k}; \tag{3}$$

$$\overset{2k}{K}_h = \sum_{g=k+1}^{g=\rho}\frac{1}{2}\,\omega_{h,g} - \frac{1}{2}\,\omega'_{h,k}; \qquad \overset{2k}{J}_h = \sum_{g=k+1}^{g=\rho}\frac{1}{2}\,\eta_{h,g} - \frac{1}{2}\,\eta'_{h,k}; \tag{4}$$

мы будемъ имѣть, когда $\alpha = 2k-1$:

$$\left.\begin{aligned} &\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{k-1} = 0; \quad \mu_k = \mu_{k+1} = \mu_{k+2} = \ldots = \mu_\rho = \frac{1}{2};\\ &\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_{k-1} = 0; \; \nu_k = -\frac{1}{2}; \nu_{k+1} = \nu_{k+2} = \ldots = \nu_\rho = 0; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

когда же $\alpha = 2k$, то слѣдующее:

$$\left.\begin{aligned} &\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k = 0; \qquad \mu_{k+1} = \mu_{k+2} = \ldots = \mu_\rho = \frac{1}{2};\\ &\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_{k-1} = 0; \quad \nu_k = -\frac{1}{2}; \nu_{k+1} = \nu_{k+2} = \ldots = \nu_\rho = 0; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

а потому

$$\Theta\Big(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\Big)_{2k-1}=\Theta\Big(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}};0_1,0_2\ldots 0_{k-1};\frac{1}{2}\ldots\frac{1}{2};0_1\,0_2\ldots(-\frac{1}{2}),0_{k+1}\ldots 0_\rho\Big);\quad(7)$$

$$\Theta\Big(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\Big)_{2k}\;=\Theta\Big(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}};0_1\;\,0_2\ldots 0_k\;\;;\frac{1}{2}\ldots\frac{1}{2};0_1\,0_2\ldots(-\frac{1}{2}),0_{k+1}\ldots 0_\rho\Big).\quad(8)$$

Изъ этихъ функцій для первыхъ имѣемъ:

$$\sum_{h=1}^{h=\rho}2\mu_h\,.\,2\nu_h=-1,$$

а *потому эти функціи нечетныя*, т. е.

$$\Theta\Big(-\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\Big)_{2k-1}=-\Theta\Big(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\Big)_{2k-1};$$

для послѣднихъ же

$$\sum_{h=1}^{h=\rho}2\mu_h\,.\,2\nu_h=0\,,$$

слѣдовательно онѣ суть четныя, т. е.

$$\Theta\Big(-\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\Big)_{2k}=\Theta\Big(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\Big)_{2k}.$$

67. Изъ функціональнаго уравненія (9) § 58 общей $\Theta\Big(u_h;\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}},\nu_h\Big)$ мы легко получимъ, раздѣливъ почленно два такихъ уравненія — для двухъ Θ съ различными характеристиками, — одно на другое, слѣдующее равенство:

$$\frac{\Theta\Big(u_h+\overset{\rho}{\underset{1}{\overline{\omega}_h}};\mu_h,\nu_h\Big)}{\Theta\Big(u_h+\overset{\rho}{\underset{1}{\overline{\omega}_h}},\mu'_h,\nu'_h\Big)}=e^{2\pi i\sum\limits_{h=1}^{h=\rho}(m_h(\nu_h-\nu'_h)-n_h(\mu_h-\mu'_h))}\,\frac{\Theta\Big(u_h;\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}},\nu_h\Big)}{\Theta\Big(u_h;\overset{\rho}{\underset{1}{\mu'_h}},\nu'_h\Big)}.\quad(1)$$

Если $\mu_h,\nu_h;\mu'_h,\nu'_h$ суть дроби съ знаменателемъ 2, т. е. наши функціи четныя или нечетныя, то:

$$2\sum_{h=1}^{h=\rho}(m_h(\nu_h-\nu'_h)-n_h(\mu_h-\mu'_h)) \qquad (2)$$

будетъ цѣлое число, четное или нечетное; тогда будетъ:

$$e^{2\pi i\sum\limits_{h=1}^{h=\rho}(m_h(\nu_h-\nu'_h)-n_h(\mu_h-\mu'_h))}=(-1)^{2\sum\limits_{h=1}^{h=\rho}(m_h(\nu_h-\nu'_h)-n_h(\mu_h-\mu'_h))}. \qquad (3)$$

Если примемъ въ частности $\overset{\rho}{\underset{1}{\mu'_h}}=0, \overset{\rho}{\underset{1}{\nu'_h}}=0$, т. е. за дѣлителя въ (1) возьмемъ основную функцію, то, при $\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}}, \overset{\rho}{\underset{1}{\nu_h}}=(0, \frac{1}{2})$, равенство (1) преобразуется въ такое:

$$\frac{\Theta\left(u_h+\overset{\rho}{\underset{1}{\varpi_h}};\mu_h,\nu_h\right)}{\Theta_0\left(u_h\overset{\rho}{\underset{1}{+}}\varpi_h\right)}=(-1)^{2\sum\limits_{h=1}^{h=\rho}(m_h\nu_h-n_h\mu_h)}\frac{\Theta\left(u_h;\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}},\nu_h\right)}{\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}. \qquad (4)$$

Въ этомъ послѣднемъ видѣ заключаются тѣ частныя двухъ Θ, чрезъ которыя мы выразимъ $\sqrt{\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}}$ и $\sqrt{\frac{\varphi(a_{2j})}{P(a_{2j})}}$, именно (по предыдущему §) для первой будемъ имѣть:

$$\frac{\Theta\left(u_h\overset{\rho}{\underset{1}{+}}\varpi_h\right)_{2k-1}}{\Theta_0\left(u_h\overset{\rho}{\underset{1}{+}}\varpi_h\right)}=(-1)^{m_k+\sum\limits_{h=k}^{h=\rho}n_h}\frac{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_{2k-1}}{\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)} \qquad (5)$$

для второй:

$$\frac{\Theta\left(u_h\overset{\rho}{\underset{1}{+}}\varpi_h\right)_{2k}}{\Theta_0\left(u_h\overset{\rho}{\underset{1}{+}}\varpi_h\right)}=(-1)^{m_k+\sum\limits_{h=k+1}^{h=\rho}n_h}\frac{\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)_{2k}}{\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}. \qquad (6)$$

Изъ (5) и (6) слѣдуетъ, что функціи $\sqrt{\frac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}}$ и $\sqrt{\frac{\varphi(a_{2k})}{P(a_{2k})}}$, которыя лишь постояннымъ множителемъ отличаются отъ этихъ частныхъ двухъ $\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$, суть функціи періодическія и имѣютъ каждая 2ϱ системъ періодовъ, которыя получаются изъ ϖ_h, давая $\overset{\rho}{\underset{1}{m}}_h$ и $\overset{\rho}{\underset{1}{n}}_h$ частныя значенія. Вообще частное двухъ Θ съ разными характеристиками, элементы которыхъ вида: $0, \frac{1}{2}$, будетъ имѣть 2ϱ системъ періодовъ. Для функціи (5), или $\sqrt{\dfrac{\varphi(a_{2k-1})}{P'(a_{2k-1})}}$, періодами перваго класса (означаемыми нами безъ значковъ сверху) будутъ:

$$\omega_{h,1}\ \omega_{h,2}\ \dots\ \omega_{h,k-1},\ 2\omega_{h,k},\ \omega_{h,k+1}\ \dots\ \omega_{h,\rho};\quad (h=1,2,\dots\varrho)\qquad (7)$$

періодами второго класса:

$$\omega'_{h,1}\ \omega'_{h,2}\ \dots\ \omega'_{h,k-1},\ 2\omega'_{h,k},\ 2\omega'_{h,k+1}\dots 2\omega'_{h,\rho}\quad (h=1,2,\dots\varrho);\qquad (8)$$

для функціи (6) или $\sqrt{\dfrac{\varphi(a_{2k})}{P(a_{2k})}}$ періоды перваго класса будутъ тѣ же (7); періоды второго класса будутъ такіе:

$$\omega'_{h,1}\ \omega'_{h,2}\ \dots\ \omega'_{h,k-1},\ \omega'_{h,k},\ 2\omega'_{h,k+1}\dots 2\omega'_{h,\rho}\quad (h=1,2,\dots\varrho).\qquad (9)$$

Эти системы могутъ быть замѣнены и другими, получаемыми изъ $\overset{\rho}{\underset{1}{\bar\omega}}_h$, давая $\overset{\rho}{\underset{1}{m}}_g$ и $\overset{\rho}{\underset{1}{n}}_g$ 2ϱ *системъ значеній такихъ, чтобы опредѣлитель ихъ не былъ* $=0$.

68. Въ § 53 мы видѣли, что общая Θ, опредѣляемая формулами (8) и (10) этого §, обращается въ нуль, когда

$$\overset{\rho}{\underset{1}{u}}_h = \overset{2k-1}{K}_h - \overset{\rho}{\underset{1}{u}}{}^{(0)}_h;\qquad (k=1,2,\dots\varrho)\qquad (1)$$

изъ (9) § 57 слѣдуетъ, что это будетъ имѣть мѣсто вообще для ϱ системъ:

$$\overset{\rho}{\underset{1}{u}}_h = \overset{2k-1}{K}_h - \overset{\rho}{\underset{1}{u}}{}^{(0)}_h + \bar\omega_h\qquad (k=1,2\dots\varrho).\qquad (2)$$

Для основной $\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u}}_h\right)$ величины $\overset{\rho}{\underset{1}{u}}{}^{(0)}_h = 0$, и потому будемъ имѣть $\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u}}_h\right) = 0$ для слѣдующихъ ϱ системъ:

$$\overset{\rho}{\underset{1}{u}}_h = \overset{2k-1}{K}_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} \bar\omega_h.\qquad (k=1,2\dots\varrho)\qquad (3)$$

Изъ (9) § 62 для общей $\Theta\left(u_h ; \overset{\rho}{\underset{1}{\mu}}_h , \nu_h\right)$ будемъ имѣть тогда, что она обращается въ нуль, когда

$$\overset{\rho}{\underset{1}{u}}_h = \overset{2k\text{-}1}{K}_h - \sum_{h=1}^{h=\rho}\left(\mu_h \omega_{kh} \overset{\rho}{\underset{1}{+}} \nu_{kh} \omega'_{kh}\right) + \bar{\omega}_h . \qquad (k = 1, 2 \ldots . \varrho) \tag{4}$$

Въ частности отсюда получимъ для $\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u}}_h\right)_{2l-1}$ и $\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u}}_h\right)_{2l}$, что они обращаются въ нуль соотвѣтственно для такихъ ϱ системъ значеній $\overset{\rho}{\underset{1}{u}}_h$:

$$\overset{\rho}{\underset{1}{u}}_h = \overset{2k\text{-}1}{K}_h - \overset{\overset{\rho}{2l\text{-}1}}{\underset{1}{K}}_h + \bar{\omega}_h \qquad (k = 1, 2 \ldots . \varrho) \tag{5}$$

$$\overset{\rho}{\underset{1}{u}}_h = \overset{2k\text{-}1}{K}_h - \overset{\overset{\rho}{2l}}{\underset{1}{K}}_h + \bar{\omega}_h \qquad (k = 1, 2 \ldots . \varrho) \tag{6}$$

какъ то слѣдуетъ изъ (1) § 63 и (3) настоящаго.

Вмѣстѣ съ этимъ мы нашли и тѣ системы значеній $\overset{\rho}{\underset{1}{u}}_h$, для которыхъ обращаются въ нуль и функціи $\sqrt{\dfrac{\varphi(a_{2l-1})}{P'(a_{2l-1})}}$ и $\sqrt{\dfrac{\varphi(a_{2l})}{P(a_{2l})}}$. Всѣ эти функціи обращаются въ ∞^1 для системъ (3) этого §, ибо для этихъ значеній обращается въ нуль общій знаменатель $\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u}}_h\right)$ выраженій ихъ чрезъ Θ-функціи.

69. Величины η_{kh} содержатъ всѣ вмѣстѣ $\dfrac{\rho(\rho+1)}{2}$ произвольныхъ постоянныхъ c_{kl}, такихъ, что

$$c_{kl} = c_{lk} , \tag{1}$$

ибо по (5) § 19 имѣемъ:

$$\eta_{kh} = \eta^{(0)}{}_{kh} + \sum_{l=1}^{l=\rho} c_{kl} \omega_{lh} , \tag{2}$$

гдѣ $\eta^{(0)}_{kh}$ относится къ частному виду интеграловъ 2. рода. Тѣ же величины входятъ и въ выраженія величинъ η'_{kh}, ибо по (14) § 9 имѣемъ:

$$\eta'_{kh} = \eta'^{(0)}_{kh} + \sum_{l=1}^{l=\varrho} c_{kl} \omega'_{lh}. \tag{3}$$

Эти произвольныя постоянныя c_{kl} можно такъ опредѣлить, что всѣ η_{kh} $(k, h = 1, 2 \ldots \varrho)$ будутъ $= 0$; для этого стоитъ только рѣшить систему уравненій:

$$0 = \eta^{(0)}_{kh} + \sum_{l=1}^{l=\varrho} c_{kl} \omega_{lh}. \qquad (h = 1, 2 \ldots . \varrho) \tag{4}$$

Означая опредѣлитель изъ ω_{lh} чрезъ Ω, такъ что будетъ:

$$\Omega = \left| \omega_{lh} \right| \qquad (l, h = 1, 2 \ldots . \varrho) \tag{5}$$

и чрезъ Ω_{lh} его миноръ по элементу ω_{lh}, раздѣленный на самого опредѣлителя:

$$\Omega_{lh} = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_{lh}}, \tag{6}$$

мы будемъ имѣть изъ (4):

$$c_{kg} = -\sum_{h=1}^{h=\varrho} \Omega_{gh} \eta^{(0)}_{kh}. \tag{7}$$

Если рѣшимъ всѣ ϱ системъ, получаемыхъ изъ (4), давая k всѣ значенія отъ 1 до ϱ, то опредѣляемыя по (7) выраженія c_{kg} будутъ удовлетворять условію (1), въ силу (1)—(4) § 19, т. е. будетъ:

$$\sum_{h=1}^{h=\varrho} \Omega_{gh} \eta^{(0)}_{kh} = \sum_{h=1}^{h=\varrho} \Omega_{kh} \eta^{(0)}_{gh}. \tag{8}$$

Дѣйствительно, написавъ уравненіе (1) § 19 такимъ образомъ:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho} \eta_{kh}\,\omega_{kg} = \sum_{k=1}^{k=\rho} \eta_{kg}\,\omega_{kh}\,, \tag{9}$$

помножая обѣ части его на $\Omega_{mh}.\Omega_{ng}$ и суммируя по h и g отъ 1 до ϱ, получимъ:

$$\sum_{h=1}^{h=\rho}\Omega_{mh}\sum_{g=1}^{g=\rho}\Omega_{ng}\sum_{k=1}^{k=\rho}\eta_{kh}\,\omega_{kg} = \sum_{h=1}^{h=\rho}\Omega_{mh}\sum_{g=1}^{g=\rho}\Omega_{ng}\sum_{k=1}^{k=\rho}\eta_{kg}\,\omega_{kh}\,,$$

или

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\sum_{h=1}^{h=\rho}\Omega_{mh}\,\eta_{kh}\sum_{g=1}^{g=\rho}\Omega_{ng}\,\omega_{kg} = \sum_{k=1}^{k=\rho}\sum_{g=1}^{g=\rho}\Omega_{ng}\,\eta_{kg}\sum_{h=1}^{h=\rho}\Omega_{mh}\,\omega_{kh}\,;$$

въ силу же того, что (по извѣстнымъ свойствамъ опредѣлителя)

$$\sum_{g=1}^{g=\rho}\Omega_{ng}\,\omega_{kg} = 0 \ (k \gtrless n), \quad \sum_{g=1}^{g=\rho}\Omega_{ng}\,\omega_{ng} = 1\,;$$

$$\sum_{h=1}^{h=\rho}\Omega_{mh}\,\omega_{kh} = 0 \ (k \gtrless m), \quad \sum_{h=1}^{h=\rho}\Omega_{mh}\,\omega_{kh} = 1\,;$$

это приводится къ такому:

$$\sum_{h=1}^{h=\rho}\Omega_{mh}\,\eta_{nh} = \sum_{g=1}^{g=\rho}\Omega_{ng}\,\eta_{mg}\,; \tag{10}$$

въ этихъ же тождествахъ заключаются и (8), именно послѣднія представляютъ тотъ частный случай (10), который получимъ, положивъ всѣ $c_{kl}=0$ въ выраженіяхъ (2), стало быть для интеграловъ 2. рода, которые мы означали чрезъ $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\Pi}}{}^{0}_{k}$.

70. Внесемъ теперь эти выраженія въ (3) предыдущаго §, которое по (1) того же § можно такъ представить:

$$\eta'_{kh} = \eta'^{(0)}_{kh} + \sum_{l=1}^{l=\rho} c_{lk}\omega'_{lh}; \tag{1}$$

будемъ имѣть:

$$\eta'_{kh} = \eta'^{(0)}_{kh} - \sum_{l=1}^{l=\rho}\sum_{j=1}^{j=\rho} \Omega_{kj}\eta^{(0)}_{lj}\omega'_{lh}$$

или

$$\eta'_{kh} = \eta'^{(0)}_{kh} - \sum_{l=1}^{l=\rho}\omega'_{lh}\sum_{j=1}^{j=\rho} \Omega_{kj}\eta^{(0)}_{lj}. \tag{2}$$

Помножая это на $u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}$ и суммируя по k отъ 1 до ϱ, мы получимъ показатель при e^{-1} во второмъ изъ уравненій (1) § 57, примѣненномъ къ основной $\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$, т. е. для которой $\overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}} = 0$, $\overset{\rho}{\underset{1}{\nu_h}} = 0$,—въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{k=\rho}\eta'_{kh}\left(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{k=\rho}\eta'^{(0)}_{kh}\left(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}\right) - \sum_{l=1}^{l=\rho}\omega'_{lh}\sum_{j=1}^{j=\rho}\eta'^{(0)}_{lj}\sum_{k=1}^{k=\rho}\Omega_{kj}\left(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Это выраженіе значительно упростится, если положить:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\Omega_{kj}u_k = v_j, \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\Omega_{kj}\omega'_{kh} = \tau_{jh}. \tag{5}$$

При этомъ будетъ, что̀ важно замѣтить:

$$\tau_{jh} = \tau_{hj}. \tag{6}$$

Дѣйствительно, точно такъ-же какъ въ предыдущемъ §, мы получимъ (имѣя въ виду значеніе Ω_{mn}):

$$u_g = \sum_{j=1}^{j=\rho} \omega_{gj} v_j, \tag{7}$$

и изъ (5) такимъ же образомъ:

$$\omega'_{gh} = \sum_{j=1}^{j=\rho} \omega_{gj} \tau_{jh}. \tag{8}$$

Внося изъ (4), (5), (7) и (8) въ (3), получимъ:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho} \eta'_{kh}\left(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=\rho} \eta^{(0)}{}_{kh} \sum_{j=1}^{j=\rho} \omega_{kj}\left(v_j + \frac{1}{2}\tau_{jh}\right) - \sum_{l=1}^{l=\rho} \omega'_{lh} \sum_{j=1}^{j=\rho} \eta^{(0)}{}_{lj}\left(v_j + \frac{1}{2}\tau_{jh}\right),$$

или, перемѣняя l на k во второмъ членѣ, чтò очевидно мы вправѣ сдѣлать:

$$\sum_{k=1}^{k=\rho} \eta'_{kh}\left(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}\right) = \sum_{k=1}^{k=\rho} \sum_{j=1}^{j=\rho} \left(\eta'^{(0)}{}_{kh}\omega_{kj} - \omega'_{kh}\eta^{(0)}{}_{kj}\right)\left(v_j + \frac{1}{2}\tau_{jh}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{j=\rho} \left(v_j + \frac{1}{2}\tau_{jh}\right) \sum_{k=1}^{k=\rho} \left(\eta'^{(0)}{}_{kh}\omega_{kj} - \omega'_{kh}\eta^{(0)}{}_{kj}\right).$$

Это же на основаніи (3) и (4) § 19 приводится къ такому

$$\sum_{k=1}^{k=\rho} \eta'_{kh}\left(u_k + \frac{1}{2}\omega'_{kh}\right) = 2\pi i\left(v_h + \frac{1}{2}\tau_{hh}\right), \tag{9}$$

гдѣ по (5) для $j=h$:

$$\tau_{hh}=\sum_{k=1}^{k=\rho}\Omega_{kh}\omega'_{kh}. \tag{10}$$

71. Внося въ (4) предыдущаго § $u_k+\omega_{kh}$ вмѣсто u_k и отличая на минуту новое значеніе v_j приписанною на верху буквою h въ скобкахъ, мы будемъ имѣть:

$$v^{(h)}{}_j=\sum_{k=1}^{k=\rho}\Omega_{kj}\left(u_k+\omega_{kh}\right)=\sum_{k=1}^{k=\rho}\Omega_{kj}u_k+\sum_{k=1}^{k=\rho}\Omega_{kj}\omega_{kh},$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} v^{(h)}{}_j&=v_j\\ v^{(h)}{}_h&=v_h+1.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Внося въ (4) предыдущаго § $u_k+\omega'_{kh}$ вмѣсто u_k и означая чрезъ $v^{(h')}{}_j$ новое значеніе v_j, получимъ:

$$v^{(h')}{}_j=\sum_{k=1}^{k=\rho}\Omega_{kj}(u_k+\omega'_{kh})=\sum_{k=1}^{k=\rho}\Omega_{kj}u_k+\sum_{k=1}^{k=\rho}\Omega_{kj}\omega'_{kh},$$

т. е.

$$v^{(h')}{}_j=v_j+\tau_{jh}. \tag{2}$$

72. Вводя перемѣнныя $\overset{\rho}{\underset{1}{v_j}}$ вмѣсто $\overset{\rho}{\underset{1}{u_j}}$ въ функціональныя уравненія (1) § 57 въ примѣненіи къ разсматриваемому частному виду функціи $\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$, который теперь, разсматривая какъ функцію отъ $\overset{\rho}{\underset{1}{v_j}}$, мы означимъ чрезъ $\vartheta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{v_h}}\right)$, такъ что будетъ спеціальная

$$\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)=\vartheta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{v_h}}\right), \tag{1}$$

и выписывая этотъ разъ сполна всю систему уравненій, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta(v_1+1, v_2, \ldots v_\rho) = \vartheta(v_1, v_2, \ldots v_\rho) \\ \vartheta(v_1, v_2+1, \ldots v_\rho) = \vartheta(v_1, v_2, \ldots v_\rho) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vartheta(v_1, v_2, \ldots v_\rho + 1) = \vartheta(v_1, v_2, \ldots v_\rho)\end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta(v_1+\tau_{11}, v_2+\tau_{21}, \ldots v_\rho+\tau_{\rho 1}) = e^{-2\pi i(v_1+\frac{1}{2}\tau_{11})}\vartheta(v_1, v_2, \ldots v_\rho) \\ \vartheta(v_1+\tau_{12}, v_2+\tau_{22}, \ldots v_\rho+\tau_{\rho 2}) = e^{-2\pi i(v_2+\frac{1}{2}\tau_{22})}\vartheta(v_1, v_2, \ldots v_\rho) \\ \cdot \\ \vartheta(v_1+\tau_{1\rho}, v_2+\tau_{2\rho}, \ldots v_\rho+\tau_{\rho\rho}) = e^{-2\pi i(v_\rho+\frac{1}{2}\tau_{\rho\rho})}\vartheta(v_1, v_2, \ldots v_\rho).\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Подобно тому, какъ въ § 59 для общей $\Theta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$ мы получили самое общее уравненіе (9), такъ точно можемъ и для $\vartheta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{v_h}}\right)$, которую мы будемъ, слѣдуя Вейерштрассу, называть Якобіевскою, изъ уравненій (2) и (3) получить формулу, отвѣчающую (9).

Что касается до уравненій (2), то они безъ всякаго труда тотчасъ обобщаются въ такое:

$$\vartheta(v_1+m_1, v_2+m_2, \ldots v_\rho+m_\rho) = \vartheta(v_1, v_2, \ldots v_\rho). \qquad (4)$$

Выбравъ теперь изъ (3) k-ое уравненіе

$$\vartheta(v_1+\tau_{1k}, v_{2k}+\tau_{2k}, \ldots v_\rho+\tau_{\rho k}) = e^{-2\pi i(v_k+\frac{1}{2}\tau_{kk})}\vartheta(v_1, v_2, \ldots v_\rho), \qquad (5)$$

перемѣнимъ въ немъ $\overset{\rho}{\underset{1}{v_h}}$ на $v_h \overset{\rho}{\underset{1}{+}} \tau_{hk}$, въ полученномъ сдѣлаемъ то же самое, и повторивъ это n_k разъ, перемножимъ полученныя n_k уравненій между собою почленно; по сокращеніи получимъ:

$$\vartheta\left(v_h + \overset{\rho}{\underset{1}{n_k}}\tau_{hk}\right) = e^{-2\pi i(n_k v_k + \frac{1}{2}n_k{}^2\tau_{kk})}\,\vartheta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{v_h}}\right). \qquad (6)$$

Это уравненіе—представитель ϱ, получаемыхъ изъ него, давая k значенія отъ 1 до ϱ. Выбравъ изъ этихъ уравненій такое:

$$\vartheta\Big(v_h+\underset{1}{\overset{\rho}{n_l}}\tau_{hl}\Big)=e^{-2\pi i(n_l v_l+\frac{1}{2}n_l^2\tau_{ll})}\,\vartheta\Big(\underset{1}{\overset{\rho}{v_h}}\Big). \tag{7}$$

Перемѣняя здѣсь $\underset{1}{\overset{\rho}{v_h}}$ на $v_h+\underset{1}{\overset{\rho}{n_k}}\tau_{hk}$, и перемножая съ предыдущимъ, по сокращеніи получимъ:

$$\vartheta\Big(v_h+n_k\underset{1}{\overset{\rho}{\tau_{hk}}}+n_l\tau_{hl}\Big)=e^{-2\pi i(n_k v_k+n_l v_l+\frac{1}{2}(\tau_{kk}n_k^2+2\tau_{kl}n_k n_l+\tau_{ll}n_l^2))}\,\vartheta\Big(\underset{1}{\overset{\rho}{v_h}}\Big). \tag{8}$$

Чрезъ повтореніе этого пріема ϱ разъ получимъ формулу:

$$\vartheta\Big(v_h+\underset{1}{\overset{\rho}{\sum_{j=1}^{j=\rho}}}n_j\tau_{hj}\Big)=e^{-2\pi i\left(\sum_{j=1}^{j=\rho}n_j v_j+\frac{1}{2}\varphi\big(\underset{1}{\overset{\rho}{n_h}}\big)\right)}\,\vartheta\Big(\underset{1}{\overset{\rho}{u_h}}\Big), \tag{9}$$

гдѣ

$$\varphi\Big(\underset{1}{\overset{\rho}{n_h}}\Big)=\sum_{k=1}^{k=\rho}\sum_{l=1}^{l=\rho}\tau_{kl}n_k n_l. \tag{10}$$

Перемѣняя въ (9) $\underset{1}{\overset{\rho}{v_h}}$ на $v_h\underset{1}{\overset{\rho}{+}}m_h$, гдѣ $\underset{1}{\overset{\rho}{m_h}}$ цѣлое число, мы получимъ, имѣя въ виду (4), самую общую формулу:

$$\vartheta\Big(v_h+m_h+\underset{1}{\overset{\rho}{\sum_{j=1}^{j=\rho}}}n_j\tau_{hj}\Big)=e^{-\pi i\sum_{k=1}^{k=\rho}n_k(2v_k+\sum_{l=1}^{l=\rho}\tau_{kl}n_l)}\,\vartheta\Big(\underset{1}{\overset{\rho}{v_h}}\Big), \tag{11}$$

ибо $\sum_{j=1}^{j=\rho}n_j m_j=$ цѣлому числу. Здѣсь въ то же время вмѣсто $\varphi\Big(\underset{1}{\overset{\rho}{n_h}}\Big)$ внесено его выраженіе изъ (10).

73. Изъ уравненія (2) видно, что $\vartheta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{v_h}}\right)$ есть періодическая функція отъ $\overset{\rho}{\underset{1}{v_h}}$, и такъ какъ она всегда конечна, то по теоремѣ Фурье разлагается въ рядъ такого вида:

$$\vartheta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{v_h}}\right)=\underbrace{\overbrace{\sum m_1 \sum m_2 \ldots \sum m_\rho}^{+\infty}}_{-\infty} A_{m_1 m_2 \cdots m_\rho} e^{2\pi i \sum\limits_{k=1}^{k=\rho} m_k v_k}, \tag{1}$$

означая чрезъ $\sum m_i$ сумму, взятую по m_i между указанными предѣлами.

Внося теперь изъ (10) въ (9) предыдущаго § вмѣсто $\varphi\left(\overset{\rho}{\underset{1}{v_h}}\right)$ его выраженіе, представимъ уравненіе (9) въ такомъ видѣ:

$$\vartheta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{v_h}}\right)=\vartheta\left(v_h+\sum_{\underset{1}{j=1}}^{\overset{\rho}{j=\rho}} n_j \tau_{hj}\right) e^{\pi i \sum\limits_{k=1}^{k=\rho} n_k (2v_k + \sum\limits_{l=1}^{l=\rho} \tau_{kl} m_l)}, \tag{2}$$

и затѣмъ внесемъ сюда вмѣсто $\vartheta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{v_h}}\right)$ ея разложеніе въ рядъ изъ (1); будемъ имѣть, употребляя сокращенное обозначеніе суммъ и коэффиціентовъ:

$$\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} m_h\right)_1^\rho \overset{\rho}{\underset{1}{A}}_{m_h} e^{\pi i \sum\limits_{k=1}^{k=\rho} 2m_k v_k} = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} m_h\right)_1^\rho \overset{\rho}{\underset{1}{A}}_{m_h} e^{\pi i \sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\left((m_k+n_k)2v_k+(2m_k+n_k)\sum\limits_{l=1}^{l=\rho}\tau_{kl}n_l\right)} \tag{3}$$

Сравнивая здѣсь въ обѣихъ частяхъ коэффиціенты при $e^{\pi i \sum\limits_{k=1}^{k=\rho}(m_k+n_k)2v_k}$, получимъ:

$$A_{\overset{\rho}{\underset{1}{m_h+n_h}}} = A_{\overset{\rho}{\underset{1}{m_h}}} e^{\pi i \sum\limits_{k=1}^{k=\rho}(2m_k+n_k)\sum\limits_{l=1}^{l=\rho}\tau_{kl}n_l} \tag{4}$$

для всякаго значенія $\overset{\rho}{\underset{1}{m_h}}$. Полагая $\overset{\rho}{\underset{1}{m_h}}=0$, получимъ отсюда:

$$A_{\overset{\rho}{\underset{1}{n_h}}} = A_{\overset{\rho}{\underset{1}{0_h}}} e^{\pi i \sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\sum\limits_{l=1}^{l=\rho}\tau_{kl}n_k n_l}. \tag{5}$$

Опредѣленные по этой формулѣ коэффиціенты будутъ удовлетворять и предыдущему уравненію, ибо, вставляя въ (4) результатъ перемѣны въ (5) n на m, будемъ имѣть сперва:

$$A_{\underset{1}{\overset{\rho}{m_h+n_h}}} = A_{\underset{1}{\overset{\rho}{0_h}}}\, e^{\pi i \sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\sum\limits_{l=1}^{l=\rho}\tau_{kl}\left\{m_k m_l + 2m_k n_l + n_k n_l\right\}},$$

но

$$\sum_{k=1}^{k=\rho}\sum_{l=1}^{l=\rho}\left\{m_k m_l + 2m_k n_l + n_k n_l\right\} = \sum_{k=1}^{k=\rho}\sum_{l=1}^{l=\rho}(m_k+n_k)\,(m_l+n_l),$$

а потому будетъ

$$A_{\underset{1}{\overset{\rho}{m_h+n_h}}} = A_{\underset{1}{\overset{\rho}{0_h}}}\, e^{\pi i \sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\sum\limits_{l=1}^{l=\rho}\tau_{kl}(m_k+n_k)(m_l+n_l)},$$

— результатъ, получаемый изъ (5) чрезъ перемѣну n_h на m_h+n_h. Произвольную постоянную мы примемъ $=1$, что всегда возможно, такъ какъ $\Theta\left(\underset{1}{\overset{\rho}{0_h}}\right)$ можетъ быть назначена по произволу. Внося изъ (5) въ (1), будемъ имѣть искомое разложеніе Якобіевой $\vartheta\left(\underset{1}{\overset{\rho}{v_h}}\right)$:

$$\vartheta\left(\underset{1}{\overset{\rho}{v_h}}\right) = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} m_h\right)_1^{\rho} e^{\pi i \sum\limits_{k=1}^{k=\rho} m_k\left(2v_k + \sum\limits_{l=1}^{l=\rho}\tau_{kl} m_l\right)}. \tag{6}$$

74. Положимъ теперь въ интегралѣ Π_k:

$$c_{kg} = -\sum_{h=1}^{h=\rho}\Omega_{gh}\eta^{(0)}{}_{kh} + b_{kg}, \tag{1}$$

что всегда возможно; тогда будемъ имѣть по (10) § 30:

$$\frac{\partial \mathbf{J}\left(u_h \underset{1}{\overset{\rho}{-}} \overset{2k-1}{K_h}\right)_k}{\partial u_l} = \frac{\partial \mathbf{J}\left(u_h \underset{1}{\overset{\rho}{-}} \overset{2k-1}{K_h}\right)^0_k}{\partial u_l} - \sum_{h=1}^{h=\rho}\Omega_{lk}\eta^{(0)}{}_{kh} + b_{kl}, \tag{2}$$

что можно и такъ представить:

$$\frac{\partial}{\partial u_l}\left(\overset{2k\text{-}1}{J_k}+\mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \overset{2k\text{-}1}{K_h}\right)_k\right)=\frac{\partial}{\partial u_l}\left(\overset{2k\text{-}1}{J'_k}+\mathbf{J}\left(u_k \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \overset{2k\text{-}1}{K_h}\right)'_k\right)+b_{kl}, \qquad (3)$$

полагая для краткости:

$$\mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \overset{2k\text{-}1}{K_h}\right)'_k=-\sum_{g=1}^{g=\rho}\sum_{h=1}^{h=\rho}\Omega_{gh}\eta^{(0)}_{kh}u_g+\mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \overset{2k\text{-}1}{K_h}\right)^{0}_k, \qquad (4)$$

$$\overset{2k\text{-}1}{J'_k}=\sum_{g=1}^{g=\rho}\sum_{h=1}^{h=\rho}\Omega_{gh}\eta^{(0)}_{kh}\overset{2k\text{-}1}{K_g}+\overset{2k\text{-}1}{J^{0}_k}. \qquad (5)$$

Но

$$-\frac{\partial}{\partial u_l}\left(\overset{2k\text{-}1}{J_k}+\mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \overset{2k\text{-}1}{K_h}\right)_k\right)=\frac{\partial^2\log\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}{\partial u_l\,\partial u_k}, \qquad (6)$$

$$-\frac{\partial}{\partial u_l}\left(\overset{2k\text{-}1}{J'_k}+\mathbf{J}\left(u_h \overset{\rho}{\underset{1}{-}} \overset{2k\text{-}1}{K_h}\right)'_k\right)=\frac{\partial^2\log\bar{\Theta}_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}{\partial u_l\,\partial u_k}, \qquad (7)$$

гдѣ $\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)=\vartheta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{v_h}}\right)$; а потому изъ (3) получимъ:

$$\frac{\partial^2\log\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}{\partial u_l\,\partial u_k}=\frac{\partial^2\log\bar{\Theta}_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}{\partial u_l\,\partial u_k}-b_{kl} \qquad (8)$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)=\frac{\bar{\Theta}_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)}{\bar{\Theta}_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{0_h}}\right)}\,e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{k=\rho}\sum\limits_{l=1}^{l=\rho}b_{kl}u_ku_l}. \qquad (9)$$

Такимъ образомъ мы выразили основную общую $\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$ чрезъ спеціальную Якобіевскую, ибо теперь осталось только выразить $\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}}$ чрезъ $\overset{\varrho}{\underset{1}{v_h}}$ съ помощію (7) § 68. Первый множитель перейдетъ отъ этого по (6) предыдущаго § въ $\vartheta\left(\overset{\varrho}{\underset{1}{v_h}}\right):\vartheta\left(\overset{\varrho}{\underset{1}{0_h}}\right)$; показатель степени $e^{-\frac{1}{2}}$ приметъ такой видъ:

$$\sum_{k=1}^{k=\varrho}\sum_{l=1}^{l=\varrho} b_{kl}\sum_{j=1}^{j=\varrho}\omega_{kj}v_j\sum_{h=1}^{h=\varrho}\omega_{lh}v_h=\sum_{j=1}^{j=\varrho}\sum_{h=1}^{h=\varrho}B_{jh}v_jv_h, \qquad (10)$$

полагая

$$B_{jh}=\sum_{k=1}^{k=\varrho}\sum_{l=1}^{l=\varrho} b_{kl}\omega_{kj}\omega_{lh}. \qquad (11)$$

(Такъ какъ $b_{kl}=b_{lk}$, то отсюда слѣдуетъ:

$$B_{ih}=B_{hj}). \qquad (12)$$

Итакъ, изъ (9) получится:

$$\Theta_0\left(\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}}\right)=\frac{\vartheta\left(\overset{\varrho}{\underset{1}{v_h}}\right)}{\vartheta\left(\overset{\varrho}{\underset{1}{0_h}}\right)}\,e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{j=\varrho}\sum\limits_{h=1}^{h=\varrho}B_{jh}v_jv_h}. \qquad (13)$$

Если положимъ

$$-\frac{1}{2}B_{jh}=\pi i\,.\,\beta_{jh},$$

то предыдущее такъ представится:

$$\Theta_0\left(\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}}\right)=\frac{\vartheta\left(\overset{\varrho}{\underset{1}{v_h}}\right)}{\vartheta\left(\overset{\varrho}{\underset{1}{0_h}}\right)}\,e^{\pi i\sum\limits_{j=1}^{j=\varrho}\sum\limits_{h=1}^{h=\varrho}\beta_{jh}v_jv_h}. \qquad (14)$$

Въ частномъ случаѣ, когда $\Theta_0\left(\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}}\right)$ обращается въ $Al\left(\overset{\varrho}{\underset{1}{u_h}}\right)$ Вейерштрасса, будетъ $c_{kl}=0\ (k,l=1,2\ldots\varrho)$, и слѣд. по (1)

$$b_{kg} = \sum_{h=1}^{h=\rho} \Omega_{gh}\, \eta^{(0)}{}_{kh}; \tag{15}$$

въ этомъ случаѣ будетъ:

$$B_{jh} = \sum_{k=1}^{k=\rho} \sum_{l=1}^{l=\rho} \sum_{h=1}^{h=\rho} \Omega_{lh}\, \eta^{(0)}{}_{kh}\, \omega_{kj}\, \omega_{lh} = \sum_{k=1}^{k=\rho} \sum_{h=1}^{h=\rho} \eta^{(0)}{}_{kh}\, \omega_{kj}. \tag{16}$$

ибо $\sum_{l=1}^{l=\rho} \Omega_{lh}\omega_{lh} = 1$; слѣд.

$$Al\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right) = \frac{\vartheta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{v_h}}\right)}{\vartheta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{0_h}}\right)}\, e^{\pi i \sum_{j=1}^{j=\rho} \sum_{h=1}^{h=\rho} \gamma_{jh} v_j v_h}, \tag{17}$$

гдѣ

$$-\pi i . \gamma_{jh} = \sum_{k=1}^{k=\rho} \sum_{h=1}^{h=\rho} \eta^{(0)}{}_{kh}\, \omega_{kj}. \tag{18}$$

Такимъ образомъ мы нашли аналитическія выраженія сперва Якобіевской $\vartheta\left(\overset{\rho}{\underset{1}{v_h}}\right)$, а затѣмъ основной $\Theta_0\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$ и въ частности $Al\left(\overset{\rho}{\underset{1}{u_h}}\right)$ Вейерштрасса; такъ какъ въ § 63 было дано выраженіе чрезъ основную всякой другой $\Theta\left(u_h; \overset{\rho}{\underset{1}{\mu_h}}, \nu_h\right)$, то чрезъ это заразъ найдено и аналитическое выраженіе и этихъ послѣднихъ.

Этимъ можемъ считать нашу задачу обращенія гиперэллиптическихъ интеграловъ законченною; дальнѣйшія подробности относятся уже къ теоріи Θ-функцій вообще, изложеніе которой можетъ составить предметъ другого сочиненія.