Къ вопросу о черченіи картъ.

А. А. Маркова.

Со временъ Птоломея извѣстно, что въ стереографической проекціи всякій кругъ сферы изображается кругомъ (или прямою). Извѣстно также, что въ центральной проекціи всякій большой кругъ сферы изображается прямою.

Мнѣ казалось интереснымъ узнать, нѣтъ ли другихъ способовъ изображать сферу на плоскости, обладающихъ тѣмъ или другимъ изъ выше-указанныхъ свойствъ.

И еще въ 1876 году я пришелъ къ тому заключенію, что *изъ всѣхъ изображеній сферы на плоскости только стереографическая проекція обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что всякому кругу сферы соотвѣтствуетъ на плоскости тоже кругъ.*

Это предложеніе было публиковано мною въ 1884 году, какъ одно изъ положеній при докторской диссертаціи.

Оно было затѣмъ доказано M. M. du Chatenet въ 1886 году[1]).

Главная цѣль настоящей замѣтки состоитъ въ рѣшеніи слѣдующей болѣе общей задачи.

Найти всѣ такія изображенія сферы на плоскости, при которыхъ всякій большой кругъ сферы изображается на плоскости также кругомъ (или прямою).

ЗАДАЧА 1-я.

Пусть будутъ

$$X,\ Y$$

двѣ независимыя перемѣнныя.

[1]) Nouvelles Annales, 1886.

Найти, каковы должны быть двѣ неизвѣстныя функціи

$$\xi, \eta$$

отъ этихъ перемѣнныхъ, независимыя другъ отъ друга, для того, чтобы всякому линейному уравненію

$$aX + bY + c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

между X и Y соотвѣтствовало линейное же уравненіе

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

между ξ и η.

РѢШЕНІЕ.

Дадимъ X нѣкоторое частное значеніе X_0.

Уравненію

$$X = X_0,$$

должно соотвѣтствовать нѣкоторое линейное уравненіе

$$\alpha_0\xi + \beta_0\eta + \gamma_0 = 0$$

между ξ и η.

Здѣсь

$$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0,$$

означаютъ числа постоянныя и при томъ одно, по крайней мѣрѣ, изъ чиселъ

$$\alpha_0, \beta_0$$

не нуль.

Положимъ

$$\alpha_0\xi + \beta_0\eta = \theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Обращаясь затѣмъ къ перемѣнной Y, дадимъ ей послѣдовательно нѣкоторыя частныя значенія

$$Y_0, Y_1.$$

Пусть при

$$X = X_0, \quad Y = Y_0$$

имѣемъ

$$\xi = \xi_0\,,\ \eta = \eta_0\,,\ \theta = \theta_0$$

а при

$$X = X_0\,,\ Y = Y_1$$

имѣемъ

$$\xi = \xi_1\,,\ \eta = \eta_1\,,\ \theta = \theta_1\,.$$

Выраженіе θ нами подобрано такъ, что

$$\theta_0 = \theta_1 = -\gamma_0\,.$$

Изъ чиселъ

$$\alpha_0\,,\ \beta_0$$

одно, по крайней мѣрѣ, не нуль.

Предположимъ, что α_0 не нуль.

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы имѣемъ право предполагать, что

$$\eta_1 \text{ не } = \eta_0\,,$$

такъ какъ ξ и η должны зависѣть не только отъ X, но и отъ Y.

Послѣ этихъ замѣчаній введемъ новыя перемѣнныя

$$u = \frac{Y - Y_0}{X - X_0}\,,\ v = \frac{Y - Y_1}{X - X_0}\,,\ \varrho = \frac{\eta - \eta_0}{\theta - \theta_0}\,,\ \sigma = \frac{\eta - \eta_1}{\theta - \theta_0}\,. \quad . \quad (4)$$

Всякому линейному уравненію между X и Y соотвѣтствуетъ линейное же уравненіе между u и v; всякому линейному уравненію между u и v соотвѣтствуетъ линейное уравненіе между X и Y; всякому линейному уравненію между ξ и η соотвѣтствуетъ линейное уравненіе между ϱ и σ; всякому линейному уравненію между ϱ и σ соотвѣтствуетъ линейное уравненіе между ξ и η.

Кромѣ того не трудно убѣдиться, что ϱ зависитъ только отъ u, а σ только отъ v.

На этомъ основаніи поставленная нами задача сводится къ слѣдующей болѣе простой.

Найти, въ какой зависимости должны находиться

$$\varrho \text{ отъ } u \qquad \text{и} \qquad \sigma \text{ отъ } v$$

для того, чтобы всякому линейному уравненію между u и v соотвѣтствовало линейное же уравненіе между ϱ и σ.

Условія этой новой задачи требуютъ, чтобы отношеніе

$$\frac{\frac{d\sigma}{dv}}{\frac{d\varrho}{du}}$$

обращалось въ число постоянное всякій разъ, когда между u и v установлена такая зависимость, при которой производная

$$\frac{dv}{du}$$

равна числу постоянному.

Иначе сказать, при

$$\frac{dv}{du} = \text{пост.}$$

мы должны имѣть

$$d\,\frac{\frac{d\sigma}{dv}}{\frac{d\varrho}{du}} = \frac{\frac{d^2\sigma}{dv^2}\frac{d\varrho}{du}\frac{dv}{du} - \frac{d\sigma}{dv}\frac{d^2\varrho}{du^2}}{\left(\frac{d\varrho}{du}\right)^2}\,du = 0\,.$$

Послѣднее уравненіе, по причинѣ произвольности $\frac{dv}{du}$, тотчасъ разбивается на два

$$\frac{d^2\sigma}{dv^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2\varrho}{du^2} = 0\,,$$

которыя даютъ

$$\varrho = \delta u + \delta'\,, \quad \sigma = \varepsilon v + \varepsilon'\,. \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \quad (5)$$

Здѣсь

$$\delta\,,\ \delta'\,,\ \varepsilon\,,\ \varepsilon'$$

означаютъ числа постоянныя.

Изъ нашихъ формулъ (3), (4) и (5) не трудно заключить, что ξ и η должны быть связаны съ X и Y уравненіями слѣдующаго вида

$$\xi = \frac{\lambda' X + \mu' Y + \nu'}{\lambda X + \mu Y + \nu}, \qquad \eta = \frac{\lambda'' X + \mu'' Y + \nu''}{\lambda X + \mu Y + \nu} \quad . \; . \quad (6)$$

гдѣ

$$\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu', \lambda'', \mu'', \nu'',$$

означаютъ числа постоянныя.

Имъ можно давать, согласно условіямъ задачи, только такія значенія, при которыхъ ξ и η можно считать перемѣнными независимыми, и соотвѣтственно этому уравненія (6) можно преобразовать въ слѣдующія

$$X = \frac{l'\xi + m'\eta + n'}{l\xi + m\eta + n}, \quad Y = \frac{l''\xi + m''\eta + n''}{l\xi + m\eta + n} \quad . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Здѣсь

$$l, m, n, l', m', n', l'', m'', n''$$

означаютъ также числа постоянныя.

Уравненія (6) и (7) удовлетворяютъ всѣмъ условіямъ нашей задачи; изъ нихъ слѣдуетъ также, что всякому линейному уравненію между ξ и η соотвѣтствуетъ линейное же уравненіе между X и Y.

Прежде чѣмъ приступить ко второй задачѣ, замѣчу, что первая задача была также рѣшена M. M. du Chatenet.

Я изложилъ здѣсь свой способъ рѣшенія этой задачи, потому что онъ кажется мнѣ болѣе простымъ, чѣмъ способъ M. M. du Chatenet.

ЗАДАЧА 2-я.

Пусть

$$x, y$$

означаютъ двѣ независимыя перемѣнныя и

$$z = x^2 + y^2.$$

Пусть кромѣ того

$$X, Y$$

означаютъ двѣ другія перемѣнныя, также не зависящія другъ отъ друга.

Найти, какова должна быть зависимость между

$$x, y$$

съ одной стороны и

$$X, Y$$

съ другой для того, чтобы всякому линейному соотношенію

$$aX + bY + c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

между X и Y соотвѣтствовало линейное же соотношеніе

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

между x, y, z.

РѢШЕНІЕ.

При разсмотрѣніи уравненій (8) и (9) можно считать

$$X, Y, x, y, z$$

функціями одной какой-нибудь независимой перемѣнной.

Соотвѣтственно этому можно замѣнить наши уравненія (8) и (9) слѣдующими дифференціальными

$$\Phi = \begin{vmatrix} dX, & dY \\ d^2X, & d^2Y \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

и

$$2\Psi = \begin{vmatrix} dx, & dy, & dz \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \\ d^3x, & d^3y, & d^3z \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Преобразуя опредѣлители Φ и Ψ при помощи формулъ

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy, \qquad dY = \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy,$$

$$d^2X = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial X}{\partial x} d^2x + \frac{\partial X}{\partial y} d^2y$$

$$d^2Y = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial Y}{\partial x} d^2x + \frac{\partial Y}{\partial y} d^2y,$$

$$dz = 2xdx + 2ydy$$

$$d^2z = 2dx^2 + 2dy^2 + 2xd^2x + 2yd^2y,$$

$$d^3z = 6dxd^2x + 6dyd^2y + 2xd^3x + 2yd^3y,$$

получаемъ

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi = G(dxd^2y - dyd^2x) + Adx^3 + Bdx^2dy + Cdxdy^2 + Ddy^3\,,\\
&\Psi = \begin{vmatrix} dx\,, & dy\,, & 0 \\ d^2x\,, & d^2y\,, & dx^2 + dy^2 \\ d^3x\,, & d^3y\,, & 3(dxd^2x + dyd^2y) \end{vmatrix} = \\
&\quad = E(dyd^3x - dxd^3y) + F(dxd^2y - dyd^2x)\,,
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (12)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned}
&G = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\,,\\
&A = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\,,\\
&B = \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + 2\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial^2 Y}{\partial x\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - 2\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial^2 X}{\partial x\partial y}\,,\\
&C = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + 2\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - 2\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial^2 X}{\partial x\partial y}\,,\\
&D = \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\,,\\
&E = dx^2 + dy^2\,, \qquad F = 3(dxd^2x + dyd^2y)\,.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (13)$$

Изъ формулъ (12) затѣмъ выводимъ

$$d\Phi = G(dxd^3y - dyd^3x) + Ud^2x + Vd^2y + W \quad . \quad . \quad (14)$$

и

$$G\Psi + Ed\Phi - F\Phi = (EU - 3\varphi dx)d^2x + (EV - 3\varphi dy)d^2y + EW\,. \quad (15)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned}
U &= -\left(\frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy\right)dy + 3Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2, \\
V &= \left(\frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy\right)dx + Bdx^2 + 2Cdxdy + 3Ddy^2, \\
W &= \frac{\partial A}{\partial x}dx^4 + \left(\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x}\right)dx^3dy + \left(\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial x}\right)dx^2dy^2 + \\
&\quad + \left(\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)dxdy^3 + \frac{\partial D}{\partial y}dy^4, \\
\varphi &= Adx^3 + Bdx^2dy + Cdxdy^2 + Ddy^3.
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Замѣтимъ еще, что

$$(EU - 3\varphi dx)dx + (EV - 3\varphi dy)dy = 0$$

и потому формула (15) даетъ

$$G\Psi + Ed\Phi - F\Phi + \frac{EU - 3\varphi dx}{Gdy}\Phi = EW + \frac{EU - 3\varphi dx}{Gdy}\varphi \quad . \quad (17)$$

По условіямъ задачи Ψ обращается въ нуль всякій разъ, когда Φ обращается въ нуль.

Отсюда изъ формулы (17) слѣдуетъ, что, при

$$\Phi = 0,$$

обращается въ нуль и выраженіе

$$EGWdy + EU\varphi - 3\varphi^2dx.$$

А такъ какъ послѣднее выраженіе не содержитъ ни d^2x ни d^2y, то оно должно обращаться въ нуль тождественно.

Поэтому искомую нами зависимость, между

$$x, y$$

съ одной стороны и

$$X, Y$$

съ другой, можно представить слѣдующимъ уравненіемъ

$$EGWdy + EU\varphi - 3\varphi^2dx = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

гдѣ dx и dy означаютъ числа вполнѣ произвольныя.

Обращаясь къ уравненію (18), прежде всего находимъ

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi=(Adx+Bdy)(dx^2+dy^2)\,,\ A=C\,,\ B=D\,,\\
&W=\left\{\frac{\partial A}{\partial x}dx^2+\left(\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial x}\right)dxdy+\frac{\partial B}{\partial y}dy^2\right\}(dx^2+dy^2),\\
&U=-\left(\frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}dy\right)dy+3Adx^2+2Bdxdy+Ady^2.
\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ (19)$$

Затѣмъ по сокращеніи на

$$E^2dy=(dx^2+dy^2)^2\,dy$$

уравненіе (18) даетъ

$$G\left\{\frac{\partial A}{\partial x}dx^2+\left(\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial x}\right)dxdy+\frac{\partial B}{\partial y}dy^2\right\}=$$

$$=(Adx+Bdy)\left\{\left(\frac{\partial G}{\partial x}+B\right)dx+\left(\frac{\partial G}{\partial y}-A\right)dy\right\}.$$

Что же касается этого послѣдняго уравненія, то, въ виду произвольности dx и dy, оно равносильно слѣдующимъ тремъ:

$$\left.\begin{aligned}
&G\frac{\partial A}{\partial x}=A\frac{\partial G}{\partial x}+AB\,,\\
&G\left(\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial x}\right)=A\left(\frac{\partial G}{\partial y}-A\right)+B\left(\frac{\partial G}{\partial x}+B\right),\\
&G\frac{\partial B}{\partial y}=B\frac{\partial G}{\partial y}-AB\,.
\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ (20)$$

Отсюда при помощи весьма простыхъ преобразованій выводимъ

$$\frac{\partial G}{\partial x}=G\frac{\partial \log A}{\partial x}-B\,,\quad \frac{\partial G}{\partial y}=G\frac{\partial \log B}{\partial y}+A\,,$$

$$\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial x}=A\frac{\partial \log B}{\partial y}+B\frac{\partial \log A}{\partial x}\,,$$

$$A\frac{\partial \log\frac{A}{B}}{\partial y}=B\frac{\partial \log\frac{A}{B}}{\partial x}\,.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (21)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial \log A}{\partial x} + G\frac{\partial^2 \log A}{\partial x \partial y} - \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial \log B}{\partial y} + G\frac{\partial^2 \log B}{\partial x \partial y} + \frac{\partial A}{\partial x} =$$

$$= G\frac{\partial \log B}{\partial y}\frac{\partial \log A}{\partial x} + A\frac{\partial \log A}{\partial x} + G\frac{\partial^2 \log A}{\partial x \partial y} - \frac{\partial B}{\partial y} =$$

$$= G\frac{\partial \log A}{\partial x}\frac{\partial \log B}{\partial y} - B\frac{\partial \log B}{\partial y} + G\frac{\partial^2 \log B}{\partial x \partial y} + \frac{\partial A}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 \log \frac{A}{B}}{\partial x \partial y} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Самое общее рѣшеніе уравненія (22), какъ извѣстно, заключается въ слѣдующей формулѣ

$$\frac{A}{B} = f(x) \, . \, f_1(y) \, , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

гдѣ $f(x)$ зависитъ только отъ x, а $f_1(y)$ — только отъ y.

Съ другой стороны, опредѣляя на основаніи формулы (23) производныя

$$\frac{\partial \log \frac{A}{B}}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \log \frac{A}{B}}{\partial y}$$

и подставляя полученные такимъ образомъ результаты въ уравненіе (21), находимъ

$$\frac{\partial \log \frac{A}{B}}{\partial x} = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad \frac{\partial \log \frac{A}{B}}{\partial y} = \frac{f'_1(y)}{f_1(y)},$$

$$f'_1(y) = \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = \text{пост.}$$

и потому

$$f_1(y) = py + q, \quad f(x) = \frac{1}{-px + r}.$$

Здѣсь

$$p \, , \; q \, , \; r$$

означаютъ числа постоянныя.

Полагая соотвѣтственно этому

$$A=(py+q)K, \quad B=(-px+r)K, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

изъ уравненій (20) выводимъ

$$G\frac{\partial K}{\partial x}-K\frac{\partial G}{\partial x}=(-px+r)K^2, \qquad \frac{\partial \frac{G}{K}}{\partial x}=px-r,$$

$$G\frac{\partial K}{\partial y}-K\frac{\partial G}{\partial y}=(-py-q)K^2, \qquad \frac{\partial \frac{G}{K}}{\partial y}=py+q,$$

$$G=\left\{\frac{p(x^2+y^2)}{2}-rx+qy+s\right\}K, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

гдѣ s означаетъ также число постоянное.

И такъ,

$$\left.\begin{aligned}\Phi=K\Bigg[&\left(\frac{p(x^2+y^2)}{2}-rx+qy+s\right)(dxd^2y-dyd^2x)+\\ &+\Big\{(py+q)\,dx-(px-r)\,dy\Big\}(dx^2+dy^2)\Bigg].\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Изъ чиселъ

$$p, \; q, \; r, \; s,$$

одно, по крайней мѣрѣ, не нуль.

Не должно обращаться въ нуль также и K.

Мы будемъ считать s не равнымъ нулю.

Такимъ предположеніемъ общность нашихъ результатовъ не нарушится, ибо отъ случаевъ, когда $s=0$, можно перейти къ случаю s не $=0$ посредствомъ прибавленія къ x и y нѣкоторыхъ постоянныхъ чиселъ.

Послѣ этихъ замѣчаній подвергнемъ Φ слѣдующимъ преобразованіямъ

$$\frac{8s^2\Phi}{K}=\left|\begin{array}{lll} 2s\left(x-\dfrac{r}{p}\right), & 2s\left(y+\dfrac{q}{p}\right), & p(x^2+y^2)-2rx+2qy+2s \\ 2sdx \quad , & 2sdy \quad , & 0 \\ 2sd^2x \quad , & 2sd^2y \quad , & -2p(dx^2+dy^2) \end{array}\right| =$$

$$=\left|\begin{array}{lll} 2s\left(x-\dfrac{r}{p}\right), & 2s\left(y+\dfrac{q}{p}\right), & -p(x^2+y^2)+2s \\ 2sdx \quad , & 2sdy \quad , & -2p(xdx+ydy) \\ 2sd^2x \quad , & 2sd^2y \quad , & -2p(xd^2x+yd^2y+dx^2+dy^2) \end{array}\right| =$$

$$=\left|\begin{array}{ccc} 2sx-r(x^2+y^2) \quad , & 2sy+q(x^2+y^2) \quad , & 2s-p(x^2+y^2) \\ 2sdx-2r(xdx+ydy), & 2sdy+2q(xdx+ydy), & -2p(xdx+ydy) \\ \left(\begin{array}{c} 2sd^2x-2r(dx^2+dy^2) \\ -2r(xd^2x+yd^2y) \end{array}\right), & \left(\begin{array}{c} 2sd^2y+2q(dx^2+dy^2) \\ +2q(xd^2x+yd^2y) \end{array}\right), & \left(\begin{array}{c} -2p(dx^2+dy^2) \\ -2p(xd^2x+yd^2y) \end{array}\right) \end{array}\right|,$$

и такимъ образомъ сдѣлаемъ очевиднымъ, что при

$$\Phi=0\,,$$

должно имѣть мѣсто уравненіе слѣдующаго вида

$$\alpha[2sx-r(x^2+y^2)]+\beta[2sy+q(x^2+y^2)]+\gamma[2s-p(x^2+y^2)]=0\,,$$

гдѣ α, β, γ независятъ ни отъ x ни отъ y.

Другими словами, всякому линейному соотношенію между X и Y должно соотвѣтствовать линейное же соотношеніе между

$$\frac{2sx-r(x^2+y^2)}{2s-p(x^2+y^2)} \quad \text{и} \quad \frac{2sy+q(x^2+y^2)}{2s-p(x^2+y^2)}.$$

Послѣ такого приведенія второй задачи къ первой нетрудно заключить, что

$$X,\ Y$$

должны быть связаны съ

$$x,\ y$$

уравненіями слѣдующаго вида

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{k'(x^2+y^2)+l'x+m'y+n'}{k(x^2+y^2)+lx+my+n} \\ Y &= \frac{k''(x^2+y^2)+l''x+m''y+n''}{k(x^2+y^2)+lx+my+n} \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

которыя и представляютъ самое общее рѣшеніе нашей задачи.

Здѣсь

$$k\,,\ l\,,\ m\,,\ n\,,\ k',\ l',\ m',\ n',\ k'',\ l'',\ m'',\ n''$$

означаютъ числа постоянныя.

ЗАДАЧА 3-я.

Найти всѣ такія изображенія сферы на плоскости, при которыхъ всякій большой кругъ сферы изображается на плоскости также кругомъ (или прямою).

РѢШЕНІЕ.

Положеніе каждой точки сферы можно опредѣлять широтою φ и долготою ψ, а положеніе каждой точки плоскости — прямолинейными прямоугольными координатами

$$x\,,\ y\,.$$

Тогда всякому большому кругу сферы будетъ соотвѣтствовать линейное уравненіе

$$a\,\frac{\cos\varphi\cos\psi}{\sin\varphi}+b\,\frac{\cos\varphi\sin\psi}{\sin\varphi}+c=0\,,$$

между

$$X=\operatorname{cotg}\varphi\cos\psi \qquad \text{и} \qquad Y=\operatorname{cotg}\varphi\sin\psi\,;$$

а всякому кругу плоскости будетъ соотвѣтствовать линейное уравненіе

$$\alpha x+\beta y+\gamma(x^2+y^2)+\delta=0$$

между

$$x\,,\ y\,,\ z=x^2+y^2\,.$$

На этомъ основаніи третья задача сводится ко второй и самое общее ея рѣшеніе заключается въ уравненіяхъ слѣдующаго вида

$$\left.\begin{aligned} \cot g\varphi\cos\psi &= \frac{k'(x^2+y^2)+l'x+m'y+n'}{k(x^2+y^2)+lx+my+n} \\ \cot g\varphi\sin\psi &= \frac{k''(x^2+y^2)+l''x+m''y+n''}{k(x^2+y^2)+lx+my+n} \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

гдѣ

$$k\,,\ l\,,\ m\,,\ n\,,\ k'\,,\ l'\,,\ m'\,,\ n'\,,\ k''\,,\ l''\,,\ m''\,,\ n''\,,$$

числа постоянныя.

Въ частномъ случаѣ, когда всякому большому кругу сферы соотвѣтствуетъ на плоскости прямая линія, коэффиціенты

$$k\,,\ k'\,,\ k''$$

должны, согласно рѣшенію первой задачи, обращаться въ нули.

ЗАДАЧА 4-я.

Найти всѣ такія изображенія сферы на плоскости, при которыхъ всякому кругу сферы соотвѣтствуетъ на плоскости также кругъ (или прямая).

РѢШЕНІЕ.

При обозначеніяхъ предыдущей задачи всякому кругу сферы соотвѣтствуетъ линейное уравненіе

$$a\cos\varphi\cos\psi + b\cos\varphi\sin\psi + c\sin\varphi + d = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

между

$$\cos\varphi\cos\psi\,, \quad \cos\varphi\sin\psi \quad \text{и} \quad \sin\varphi\,.$$

Выражая $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ черезъ $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$ по формуламъ

$$\cos\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}\,, \quad \sin\varphi = \frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}\,,$$

преобразуемъ уравненіе (29) въ слѣдующее

$$\left.\begin{array}{l} a\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\psi+b\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\sin\psi+ \\ \frac{d-c}{2}\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)+\frac{d+c}{2}=0. \end{array}\right\}\quad .\ .\ .\ (30)$$

По условіямъ задачи уравненію (30) при всякихъ значеніяхъ постоянныхъ

$$a,\ b,\ \frac{d-c}{2},\ \frac{d+c}{2}$$

должно соотвѣтствовать линейное уравненіе

$$\alpha x+\beta y+\gamma(x^2+y^2)+\delta=0$$

между

$$x,\ y,\ x^2+y^2.$$

Остановимся на тѣхъ случаяхъ, при которыхъ одинъ изъ коэффиціентовъ

$$a,\ b,\ \frac{d-c}{2}$$

приводится къ нулю.

Изъ разсмотрѣнія такихъ случаевъ нетрудно, согласно рѣшенію второй задачи, вывесть формулы слѣдующаго вида

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\psi=\dfrac{k'(x^2+y^2)+l'x+m'y+n'}{k(x^2+y^2)+lx+my+n} \\[2ex] \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\sin\psi=\dfrac{k''(x^2+y^2)+l''x+m''y+n''}{k(x^2+y^2)+lx+my+n} \\[2ex] \mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)=\dfrac{k'''(x^2+y^2)+l'''x+m'''y+n'''}{k(x^2+y^2)+lx+my+n} \end{array}\right\},\quad .\ .\ (31)$$

гдѣ всѣ

$$k,\ l,\ m,\ n,$$

со значками и безъ значковъ, означаютъ числа постоянныя.

Съ другой стороны нетрудно убѣдиться, что, при существованіи формулъ (31), всякому кругу сферы соотвѣтствуетъ на плоскости также кругъ.

Остается изслѣдовать условія совмѣстности этихъ трехъ формулъ (31) и мы придемъ къ теоремѣ, высказанной въ началѣ статьи:

Изъ всѣхъ изображеній сферы на плоскости только стереографическая проекція удовлетворяетъ условіямъ нашей послѣдней задачи.

Въ то время, какъ эта замѣтка печаталась, я наткнулся еще на одну статью M. Ch. Schols, помѣщенную въ Annales de l'Ecole polytechnique de Delft за 1886 годъ.

Статья эта озаглавлена такъ: *La courbure de la ligne géodésique.*

M. Ch. Schols не только доказываетъ мою теорему о стереографической проекціи, приписывая эту теорему M. M. du Chatenet, но и рѣшаетъ ту задачу, которая составляетъ главную цѣль настоящей замѣтки.

Предоставляю читателю сравнить мое рѣшеніе съ рѣшеніемъ M. Ch. Schols.

С.-Петербургъ.
5 Октября 1888 г.
