V. $\left\{\begin{array}{l} a+bk+ck^2=0\,, \\ l+mk+nk^2=0\,, \end{array}\right.$ невозмущенное движеніе устойчиво;

VI. $a=b=c=0\,,$ „ „ устойчиво.

Въ двухъ послѣднихъ случаяхъ невозмущенное движеніе принадлежитъ къ нѣкоторымъ непрерывнымъ рядамъ установившихся движеній.

2$^{\underline{\text{ой}}}$ случай: два чисто мнимыхъ корня.

33. Пусть предложенная система дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія есть $n+2^{\underline{\text{го}}}$ порядка, и пусть соотвѣтствующее ей опредѣляющее уравненіе имѣетъ два чисто мнимыхъ корня и n корней съ отрицательными вещественными частями.

Такъ какъ коэффиціенты въ дифференціальныхъ уравненіяхъ мы предполагаемъ вещественными, то чисто мнимые корни необходимо будутъ сопряженными:

$$\lambda\sqrt{-1}\,, \qquad -\lambda\sqrt{-1}\,,$$

гдѣ λ нѣкоторая отличная отъ нуля вещественная постоянная, которую, чтобы остановиться на чемъ-либо опредѣленномъ, будемъ считать положительною.

Для системы дифференціальныхъ уравненій перваго приближенія этимъ корнямъ будутъ соотвѣтствовать два интеграла вида:

$$(x+iy)e^{-i\lambda t}\,, \quad (x-iy)e^{i\lambda t}\,,$$

гдѣ $i=\sqrt{-1}$, а x и y суть линейныя формы съ постоянными вещественными коэффиціентами отъ перемѣнныхъ, играющихъ роль неизвѣстныхъ функцій въ дифференціальныхъ уравненіяхъ (пар. 18).

Вводя вмѣсто двухъ изъ этихъ неизвѣстныхъ функцій перемѣнныя x и y, преобразуемъ предложенную систему къ слѣдующему виду:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{dx}{dt}=-\lambda y+X\,, \qquad \dfrac{dy}{dt}=\lambda x+Y\,, \\[2ex] \dfrac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots+p_{sn}x_n+\alpha_s x+\beta_s y+X_s\,. \\ (s=1,\,2,\,\ldots,\,n) \end{array}\right\} \tag{45}$$

Здѣсь X, Y, X_s суть голоморфныя функціи перемѣнныхъ $x, y, x_1, x_2, \ldots, x_n$, разложенія которыхъ начинаются членами не ниже второго порядка и обладаютъ постоянными вещественными коэффиціентами, а $p_{s\sigma}$, α_s, β_s нѣкоторыя вещественныя постоянныя, между которыми $p_{s\sigma}$ таковы, что уравненіе

$$D(\varkappa)=0$$

(при прежнемъ обозначеніи) имѣетъ только корни съ отрицательными вещественными частями.

Можно предположить, что функціи X и Y обращаются въ нуль, когда x и y дѣлаются нулями, ибо въ противномъ случаѣ, замѣняя перемѣнныя x и y нѣкоторыми новыми, систему (45) всегда можно было бы преобразовать въ такую же, но для которой функціи, играющія роль X и Y, обращались бы въ нуль при одновременномъ равенствѣ нулю обѣихъ новыхъ перемѣнныхъ.

Дѣйствительно, на основаніи теоремы параграфа 30$^{\text{аго}}$ (примѣч.) всегда найдемъ голоморфныя функціи x и y перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющія уравненіямъ

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots+p_{sn}x_n+\alpha_s x+\beta_s y+X_s)\frac{\partial x}{\partial x_s}=-\lambda y+X,$$

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots+p_{sn}x_n+\alpha_s x+\beta_s y+X_s)\frac{\partial y}{\partial x_s}=\lambda x+Y$$

и содержащія въ своихъ разложеніяхъ только члены не ниже второго порядка *).

Пусть

$$x=u,\qquad y=v$$

суть такія рѣшенія этихъ уравненій.

Тогда, дѣлая

$$x=u+\xi,\qquad y=v+\eta$$

и вводя въ уравненія (45) вмѣсто перемѣнныхъ x и y перемѣнныя ξ и η, преобразуемъ эти уравненія къ виду:

$$\frac{d\xi}{dt}=-\lambda\eta+\Xi,\qquad \frac{d\eta}{dt}=\lambda\xi+\Upsilon,$$

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots+p_{sn}x_n+\alpha_s\xi+\beta_s\eta+X'_s,\qquad (s=1,2,\ldots,n)$$

гдѣ Ξ, Υ, X'_s представятъ голоморфныя функціи величинъ ξ, η, x_s, разложенія которыхъ будутъ начинаться членами не ниже второго порядка, и изъ которыхъ первыя двѣ, опредѣляясь формулами:

$$\Xi=X-\lambda v-\sum_{s=1}^{n}\{p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots+p_{sn}x_n+\alpha_s(u+\xi)+\beta_s(v+\eta)+X_s\}\frac{\partial u}{\partial x_s},$$

$$\Upsilon=Y+\lambda u-\sum_{s=1}^{n}\{p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots+p_{sn}x_n+\alpha_s(u+\xi)+\beta_s(v+\eta)+X_s\}\frac{\partial v}{\partial x_s}$$

(если въ функціяхъ X, Y, X_s величины x и y предположимъ замѣненными величинами $u+\xi$ и $v+\eta$), при $\xi=\eta=0$ будутъ обращаться въ нуль.

*) Выраженное въ этой теоремѣ условіе относительно корней $\varkappa_s$, λ_j въ разсматриваемомъ случаѣ, очевидно, выполняется.

При томъ разсматриваемое преобразованіе таково, что новыя перемѣнныя могутъ играть такую же роль при рѣшеніи нашей задачи, какъ и прежнія.

Мы можемъ предположить, что при составленіи уравненій (45) уже было выполнено указанное сейчасъ преобразованіе (если въ немъ была надобность), и что слѣдовательно функціи X и Y уничтожаются при $x = y = 0$.

Допуская это, сдѣлаемъ

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta$$

и введемъ въ наши уравненія вмѣсто x и y перемѣнныя r и ϑ.

Будемъ имѣть:

$$\frac{dr}{dt} = X\cos\vartheta + Y\sin\vartheta, \quad r\frac{d\vartheta}{dt} = \lambda r + Y\cos\vartheta - X\sin\vartheta.$$

Но вслѣдствіе нашего допущенія вторыя части этихъ уравненій, будучи выражены черезъ r и ϑ, будутъ обращаться въ нуль при $r = 0$. Поэтому второе изъ этихъ уравненій приводится къ виду:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \lambda + \Theta, \tag{46}$$

гдѣ Θ есть голоморфная функція перемѣнныхъ $r, x_1, x_2, \ldots, x_n$, уничтожающаяся при одновременномъ равенствѣ послѣднихъ нулю и обладающая въ своемъ разложеніи коэффиціентами, представляющими цѣлыя раціональныя функціи отъ $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$.

Изъ этого уравненія видно, что пока величины $|r|$, $|x_s|$ не превосходятъ нѣкоторыхъ предѣловъ, ϑ будетъ непрерывною возрастающею функціей t, и что если бы величины $|r|$, $|x_s|$ во все время движенія оставались достаточно малыми, то функція ϑ съ безпредѣльнымъ возрастаніемъ t безпредѣльно возрастала бы.

Такъ какъ нашу задачу можно разсматривать, какъ задачу объ устойчивости по отношенію къ величинамъ

$$r, \; x_1, \; x_2, \ldots, \; x_n,$$

то отсюда ясно, что при рѣшеніи этой задачи перемѣнная ϑ можетъ играть такую же роль, какъ и t.

Примемъ ее за независимую перемѣнную вмѣсто t.

Тогда наши уравненія для опредѣленія r, x_s въ функціяхъ ϑ дадутъ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dr}{d\vartheta} = rR, \\ &\frac{dx_s}{d\vartheta} = q_{s1}x_1 + q_{s2}x_2 + \cdots + q_{sn}x_n + (a_s\cos\vartheta + b_s\sin\vartheta)r + Q_s, \\ &\qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

гдѣ R, Q_s представятъ функціи такого же характера, какъ и Θ, при чемъ функціи Q_s не будутъ содержать въ своихъ разложеніяхъ членовъ ниже второго измѣренія относительно величинъ r, x_s. Что же касается коэффиціентовъ $q_{s\sigma}$, a_s, b_s, то они опредѣлятся формулами:

$$q_{s\sigma} = \frac{p_{s\sigma}}{\lambda}, \quad a_s = \frac{\alpha_s}{\lambda}, \quad b_s = \frac{\beta_s}{\lambda},$$

и слѣдовательно $q_{s\sigma}$ будутъ таковы, что всѣ корни уравненія

$$\begin{vmatrix} q_{11}-\varkappa & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22}-\varkappa & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn}-\varkappa \end{vmatrix} = 0 \tag{48}$$

будутъ обладать отрицательными вещественными частями.

Первое изъ уравненій (47) показываетъ, что если начальное значеніе r есть нуль, то r будетъ равнымъ нулю для всякаго ϑ, и что въ противномъ случаѣ r будетъ сохранять знакъ своего начальнаго значенія по крайней мѣрѣ до тѣхъ поръ, пока величины r, x_s остаются всѣ численно достаточно малыми. При томъ изъ самаго опредѣленія r видно, что безъ всякаго нарушенія общности можно ограничиться разсмотрѣніемъ его значеній только одного какого-либо знака.

Вслѣдствіе этого мы будемъ предполагать, что r можетъ получать только положительныя (или равныя нулю) значенія.

Примѣчаніе. — Функціи Θ, R, Q_s при всякомъ ϑ суть голоморфныя относительно величинъ r, x_1, x_2, ..., x_n. При томъ, по самому своему происхожденію, онѣ таковы, что всегда найдутся такія положительныя *постоянныя* A, A_1, A_2, ..., A_n, которыя будутъ удовлетворять условію, чтобы при

$$|r| = A, \qquad |x_s| = A_s \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

разложенія этихъ функцій были сходящимися въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ.

Такъ какъ далѣе намъ нерѣдко придется имѣть дѣло съ подобными функціями, то мы введемъ для нихъ особый терминъ.

Вообще пусть F есть нѣкоторая функція перемѣнныхъ x, y, ... и параметровъ α, β, ..., и пусть при всякихъ значеніяхъ этихъ параметровъ, удовлетворяющихъ нѣкоторымъ условіямъ (A), функція F по отношенію къ перемѣннымъ x, y, ... голоморфна. Тогда, если возможно найти такія *независящія отъ названныхъ параметровъ* отличныя отъ нуля числа a, b, ..., чтобы при

$$x = a, \qquad y = b, \qquad \ldots$$

разложеніе этой функціи по цѣлымъ положительнымъ степенямъ x, y, ... было *сходящимся въ равной степени* для всѣхъ значеній α, β, ..., удовлетворяющихъ условіямъ (A), то мы будемъ говорить, что функція F (по отношенію къ перемѣннымъ x, y, ...) *голоморфна въ равной степени* для всѣхъ такихъ значеній α, β, ...

Наши функціи Θ, R, Q_s по отношенію къ перемѣннымъ r, x_1, x_2, ..., x_n будутъ, слѣдовательно, голоморфными въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ *).

34. Чтобы воспользоваться для изслѣдованія уравненій (47) предложеніями параграфа 16$^{\underline{\text{аго}}}$, вообще придется предварительно подвергнуть эти уравненія нѣкоторому преобразованію.

Въ такомъ преобразованіи не представится надобности только въ случаѣ, если всѣ постоянныя a_s, b_s равны нулю, и функціи $R^{(0)}$, $Q_s^{(0)}$, въ которыя обращаются R, Q_s при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, удовлетворяютъ нѣкоторому условію. Условіе это состоитъ въ томъ, что, если функція $R^{(0)}$ не равна тожественно нулю, то при разложеніи по восходящимъ степенямъ r наинизшая степень должна сопровождаться въ ея разложеніи постояннымъ коэффиціентомъ и должна быть менѣе наинизшей изъ степеней r, входящихъ въ разложенія $Q_s^{(0)}$; если же $R^{(0)}$ тожественно равна нулю, то такими же должны быть и всѣ $Q_s^{(0)}$.

Цѣль упомянутаго преобразованія и будетъ состоять въ приведеніи дифференціальныхъ уравненій къ такому виду, для котораго выполнялось бы указанное сейчасъ условіе.

Названное преобразованіе находится въ связи съ вопросомъ о возможности нѣкотораго періодическаго рѣшенія для системы (47).

Будемъ стараться удовлетворить этой системѣ рядами слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned} r &= c + u^{(2)} c^2 + u^{(3)} c^3 + \ldots, \\ x_s &= u_s^{(1)} c + u_s^{(2)} c^2 + u_s^{(3)} c^3 + \ldots, \\ &\qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

гдѣ c произвольная постоянная, а $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ независящія отъ нея періодическія функціи ϑ съ общимъ періодомъ 2π.

Такая задача, конечно, не всегда будетъ возможна; но когда она возможна, функціи u найдутся подъ видомъ нѣкоторыхъ конечныхъ рядовъ синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ.

*) Если бы мы пожелали разсматривать и комплексныя значенія ϑ, то очевидно, могли бы утверждать, что функціи эти по отношенію къ перемѣннымъ r, x_s суть голоморфныя въ равной степени для всѣхъ значеній ϑ вида

$$\vartheta = \alpha + \beta \sqrt{-1},$$

гдѣ α произвольное вещественное число, а β вещественное число, подчиненное условію, чтобы абсолютная величина его не превосходила какого-либо даннаго предѣла.

Относительно типа функцій u можно поставить болѣе общее требованіе; а именно—можно предположить ихъ цѣлыми раціональными функціями ϑ съ коэффиціентами, представляющими конечные ряды синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ. Тогда задача о подысканіи этихъ функцій такъ, чтобы ряды (49) по крайней мѣрѣ формально удовлетворяли уравненіямъ (47), сдѣлается всегда возможною.

Посмотримъ, какъ найдутся такія функціи.

Дѣлая въ уравненія (47) подстановку (49) и затѣмъ приравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ c, получимъ слѣдующія системы уравненій:

$$\frac{du_s^{(1)}}{d\vartheta} = q_{s1}u_1^{(1)} + q_{s2}u_2^{(1)} + \cdots + q_{sn}u_n^{(1)} + a\cos\vartheta + b_s\sin\vartheta, \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du^{(l)}}{d\vartheta} = U^{(l)}, \\ &\frac{du_s^{(l)}}{d\vartheta} = q_{s1}u_1^{(l)} + q_{s2}u_2^{(l)} + \cdots + q_{sn}u_n^{(l)} + (a_s\cos\vartheta + b_s\sin\vartheta)\,u^{(l)} + U_s^{(l)}, \\ &\qquad\qquad (s=1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(50)}$$

гдѣ l одно изъ чиселъ $2, 3, \ldots$.

Здѣсь $U^{(l)}$, $U_s^{(l)}$ суть извѣстныя цѣлыя раціональныя функціи отъ тѣхъ $u^{(i)}$, $u_s^{(i)}$, для которыхъ $i < l$, съ коэффиціентами, представляющими цѣлыя раціональныя функціи отъ $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$.

Когда всѣ $u^{(i)}$, $u_s^{(i)}$, для которыхъ $i < l$, найдены, первое изъ уравненій (50) дастъ функцію $u^{(l)}$, послѣ чего n остальныхъ послужатъ для опредѣленія функцій $u_s^{(l)}$.

При нашемъ предположеніи относительно типа всѣхъ функцій u, извѣстные члены въ этихъ послѣднихъ n уравненіяхъ представятся подъ видомъ конечныхъ рядовъ синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ съ постоянными или цѣлыми раціональными относительно ϑ коэффиціентами. Разыскивая функціи $u_s^{(l)}$ подъ видомъ такихъ-же рядовъ, получимъ для нихъ по свойству корней уравненія (48) вполнѣ опредѣленныя выраженія. При томъ функціи эти выйдутъ періодическими всякій разъ, когда таковы извѣстные члены въ разсматриваемыхъ уравненіяхъ.

Функціи $u_s^{(1)}$ всегда будутъ періодическими, а именно — слѣдующаго вида:

$$u_s^{(1)} = A_s\cos\vartheta + B_s\sin\vartheta,$$

гдѣ A_s, B_s нѣкоторыя постоянныя. Можно убѣдиться, что будутъ періодическими также и всѣ функціи $u^{(2)}$, $u_s^{(2)}$. Но слѣдующія могутъ содержать ϑ и внѣ знаковъ sin и cos.

Допустимъ, что всѣ функціи $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$, для которыхъ l менѣе нѣкотораго цѣлаго числа m, найдены и представляютъ періодическія функціи ϑ. Тогда функцію $U^{(m)}$ можно будетъ представить подъ видомъ конечнаго ряда синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ, и если въ этомъ ряду не окажется постояннаго члена, то функція $u^{(m)}$, а слѣдовательно и всѣ функціи $u_s^{(m)}$ будутъ періодическими. Въ противномъ случаѣ въ функціи эти войдутъ вѣковые члены, и между прочимъ функція $u^{(m)}$ будетъ вида:

$$u^{(m)} = g\vartheta + v, \tag{51}$$

гдѣ g отличная отъ нуля постоянная, а v конечный рядъ синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ.

Допустимъ, что имѣетъ мѣсто этотъ послѣдній случай.

Предполагая, что вычисленіе было ведено такимъ образомъ, чтобы всѣ функціи $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$, v для вещественнаго ϑ были вещественными, преобразуемъ наши дифференціальныя уравненія (47) посредствомъ подстановки:

$$r = z + u^{(2)}z^2 + u^{(3)}z^3 + \ldots + u^{(m-1)}z^{m-1} + vz^m,$$

$$x_s = u_s^{(1)}z + u_s^{(2)}z^2 + \ldots + u_s^{(m-1)}z^{m-1} + z_s,$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n)$$

гдѣ z, z_1, $z_2, \ldots$, z_n суть новыя перемѣнныя, которыя вводимъ вмѣсто прежнихъ r, x_1, $x_2, \ldots$, x_n.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{d\vartheta} &= zZ, \\ \frac{dz_s}{d\vartheta} &= q_{s1}z_1 + q_{s2}z_2 + \ldots + q_{sn}z_n + Z_s, \\ &(s = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

суть преобразованныя уравненія.

Вслѣдствіе (51) и уравненій, которымъ удовлетворяютъ функціи $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$, будемъ имѣть:

$$zZ = \frac{rR - U^{(2)}z^2 - U^{(3)}z^3 - \ldots\ U^{(m-1)}z^{m-1}\ (U^{(m)} - g)\,z^m}{1 + 2u^{(2)}z + 3u^{(3)}z^2 + \ldots + (m-1)u^{(m-1)}z^{m-2} + mvz^{m-1}},$$

$$Z_s = Q_s - U_s^{(2)}z^2 - U_s^{(3)}z^3 - \ldots - U_s^{(m-1)}z^{m-1} +$$
$$+ (a_s\cos\vartheta + b_s\sin\vartheta)vz^m - [u_s^{(1)} + 2u_s^{(2)}z + \ldots + (m-1)u_s^{(m-1)}z^{m-2}]\,zZ,$$

гдѣ функціи rR, Q_s предполагаются выраженными черезъ перемѣнныя z, z_s.

Отсюда видно, что Z, Z_s будутъ голоморфными функціями перемѣнныхъ z, z_1, $z_2, \ldots$, z_n въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ, отъ котораго будутъ зависѣть коэффиціенты въ ихъ разложеніяхъ (эти коэффиціенты представятся подъ видомъ конечныхъ рядовъ синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ). Функціи эти будутъ уничтожаться при равенствѣ нулю всѣхъ z, z_s. При томъ функціи Z_s не будутъ содержать въ своихъ разложеніяхъ членовъ перваго порядка. Наконецъ, если $Z^{(0)}$, $Z_s^{(0)}$ суть функціи, въ которыя обращаются Z, Z_s при

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0,$$

то разложеніе функціи $Z^{(0)}$ по восходящимъ степенямъ z будетъ начинаться $m-1^{\underline{\text{ой}}}$ степенью послѣдняго, которая будетъ сопровождаться постояннымъ коэффиціентомъ g, а разложенія функцій $Z_s^{(0)}$ будутъ содержать z въ степеняхъ не ниже $m^{\underline{\text{ой}}}$.

Въ послѣднемъ убѣждаемся, замѣчая, что по самому значенію величинъ $U^{(l)}$, $U_s^{(l)}$ разложенія функцій

$$rR - U^{(2)}z^2 - U^{(3)}z^3 - \ldots - U^{(m)}z^m,$$
$$Q_s - U_s^{(2)}z^2 - U_s^{(3)}z^3 - \ldots - U_s^{(m)}z^m$$

въ членахъ, не зависящихъ отъ величинъ z_s, могутъ содержать z только въ степеняхъ, превосходящихъ m.

Такимъ образомъ уравненія (52) будутъ обладать всѣми требуемыми свойствами.

При томъ подстановка, посредствомъ которой они выведены, такова, что при рѣшеніи нашей задачи новыя перемѣнныя z, z_1, z_2, ..., z_n могутъ играть ту же роль, какъ и прежнія r, x_1, x_2, ..., x_n.

Замѣтимъ, что при $|z|$ достаточно маломъ знаки r и z всегда одинаковы. Поэтому вслѣдствіе сдѣланнаго предположенія относительно r перемѣнную z мы должны считать положительною.

Примѣчаніе 1. — Общія выраженія функцій $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$, соотвѣтствующихъ данному l, будутъ содержать $l-1$ постоянныхъ произвольныхъ, которыя войдутъ при квадратурахъ, опредѣляющихъ функціи $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, ..., $u^{(l)}$. Но легко видѣть, что ни число m, ни постоянная g отъ выбора значеній, которыя мы пожелали бы приписать этимъ постояннымъ произвольнымъ, зависѣть не будутъ.

Дѣйствительно, если h_2, h_3, ... суть значенія, принимаемыя функціями $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, ... при $\vartheta = 0$, а $v^{(l)}$, $v_s^{(l)}$ суть функціи $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$, найденныя въ предположеніи, что всѣ h_j равны нулю, то общія выраженія функцій $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ получатся, какъ коэффиціенты при c^l въ разложеніяхъ выраженій

$$\gamma + v^{(2)}\gamma^2 + v^{(3)}\gamma^3 + \ldots,$$
$$v_s^{(1)}\gamma + v_s^{(2)}\gamma^2 + v_s^{(3)}\gamma^3 + \ldots,$$

гдѣ

$$\gamma = c + h_2c^2 + h_3c^3 + \ldots.$$

А потому, если $v^{(m)}$ есть первая непеpіодическая въ ряду функцій

$$v^{(2)},\quad v^{(3)},\quad \ldots,\quad v^{(m)},\quad \ldots,$$

то $u^{(m)}$ будетъ первою неперіодическою въ ряду функцій

$$u^{(2)},\quad u^{(3)},\quad \ldots,\quad u^{(m)},\quad \ldots,$$

каковы бы ни были постоянныя h_j. При томъ разность $u^{(m)} - v^{(m)}$ необходимо будетъ періодическою функціей.

Примѣчаніе 2. — Изъ способа, которымъ были получены функціи R, Q_s, нетрудно вывести, что если коэффиціенты въ ихъ разложеніяхъ представить подъ видомъ рядовъ синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ, то въ каждомъ членѣ съ четною степенью r (включая и нулевую) будутъ встрѣчаться только четныя кратности ϑ, а въ каждомъ членѣ съ нечетною степенью r — только нечетныя кратности ϑ.

Отсюда въ силу выраженій для функцій $u_s^{(1)}$ слѣдуетъ, что если функцію $U^{(2)}$ представить подъ видомъ ряда синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ, то въ этомъ ряду будутъ встрѣчаться только нечетныя кратности ϑ, и слѣдовательно рядъ этотъ не будетъ содержать постояннаго члена. Функція $u^{(2)}$ будетъ поэтому всегда періодическою, и слѣдовательно число m, игравшее роль въ предыдущемъ преобразованіи, будетъ не менѣе 3.

Ближайшее разсмотрѣніе уравненій (50) показываетъ, что число это всегда будетъ нечетнымъ.

Впрочемъ это свойство числа m обнаружится и при самомъ изслѣдованіи уравненій (52) (пар. 37, примѣч.).

35. Когда функціи $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$, начиная съ нѣкотораго значенія l, дѣлаются непеміодическими, мы всегда можемъ въ томъ убѣдиться, проинтегрировавши достаточное число системъ уравненій (50). Но когда всѣ эти функціи суть періодическія, какъ бы ни было велико число l, обнаружить это послѣднее обстоятельство такимъ же путемъ вообще, конечно, нельзя.

Тѣмъ не менѣе допустимъ, что въ какомъ-либо случаѣ намъ удалось такъ или иначе доказать, что всѣ функціи $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ при всякомъ l суть періодическія.

Покажемъ, что въ этомъ случаѣ при надлежащемъ опредѣленіи постоянныхъ произвольныхъ, которыя войдутъ въ названныя функціи, ряды (49) при $|c|$ достаточно маломъ будутъ абсолютно сходящимися и при томъ въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ. Этими рядами опредѣлится тогда нѣкоторое періодическое рѣшеніе дифференціальныхъ уравненій (47) съ одною произвольною постоянною c, подчиненною только условію, чтобы модуль ея не превосходилъ нѣкотораго предѣла.

Мы остановимся на предположеніи, что всѣ функціи $u^{(l)}$ обращаются въ нуль при $\vartheta = 0$. Этимъ предположеніемъ постоянныя произвольныя въ функціяхъ $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ опредѣлятся вполнѣ.

Въ параграфѣ 22омъ было замѣчено, что посредствомъ линейной подстановки съ постоянными коэффиціентами система уравненій (13) всегда можетъ быть преобразована къ виду (17). Воспользуемся подобною подстановкой для преобразованія уравненій (47).

Пусть $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ суть корни уравненія (48). Тогда названную подстановку можно предположить такою, чтобы коэффиціенты $q'_{s\sigma}$, играющіе въ преобразованныхъ уравненіяхъ роль коэффиціентовъ $q_{s\sigma}$, всѣ были нулями, за исключеніемъ слѣдующихъ:

$$q'_{11} = \varkappa_1, \quad q'_{22} = \varkappa_2, \quad \ldots, \quad q'_{nn} = \varkappa_n, \qquad q'_{21} = \sigma_1, \quad q'_{32} = \sigma_2, \quad \ldots, \quad q'_{nn-1} = \sigma_{n-1}.$$

Допустимъ временно, что система (47) уже имѣетъ преобразованную форму. Тогда система (50) будетъ слѣдующаго вида:

$$\frac{du^{(l)}}{d\vartheta} = U^{(l)},$$

$$\frac{du_1^{(l)}}{d\vartheta} = \varkappa_1 u_1^{(l)} + (a_1 \cos\vartheta + b_1 \sin\vartheta)\, u^{(l)} + U_1^{(l)},$$

$$\frac{du_s^{(l)}}{d\vartheta} = \varkappa_s u_s^{(l)} + \sigma_{s-1} u_{s-1}^{(l)} + (a_s \cos\vartheta + b_s \sin\vartheta)\, u^{(l)} + U_s^{(l)}.$$

$$(s = 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$$

Предполагая, что всѣ функціи $u^{(i)}$, $u_s^{(i)}$, для которыхъ $i < l$, уже найдены, и принимая въ разсчетъ, что вещественныя части всѣхъ $\varkappa_s$ отрицательны, изъ этихъ уравненій послѣдовательно выводимъ:

$$\left.\begin{aligned} u^{(l)} &= \int_0^{\vartheta} U^{(l)} d\vartheta, \\ u_1^{(l)} &= e^{\varkappa_1 \vartheta} \int_{-\infty}^{\vartheta} e^{-\varkappa_1 \vartheta} [(a_1 \cos\vartheta + b_1 \sin\vartheta)\, u^{(l)} + U_1^{(l)}]\, d\vartheta, \\ u_s^{(l)} &= e^{\varkappa_s \vartheta} \int_{-\infty}^{\vartheta} e^{-\varkappa_s \vartheta} [\sigma_{s-1} u_{s-1}^{(l)} + (a_s \cos\vartheta + b_s \sin\vartheta)\, u^{(l)} + U_s^{(l)}]\, d\vartheta. \\ &(s = 2,\ 3,\ \ldots,\ n) \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

Мы замѣчаемъ теперь, что $U^{(l)}$, $U_s^{(l)}$ суть цѣлыя функціи отъ найденныхъ раньше $u^{(i)}$, $u_s^{(i)}$, въ которыхъ коэффиціенты представляютъ линейныя формы съ положительными числовыми коэффиціентами отъ коэффиціентовъ въ разложеніяхъ функцій R, Q_s. Поэтому, если вообще черезъ $v^{(i)}$, $v_s^{(i)}$ означимъ нѣкоторые высшіе предѣлы модулей функцій $u^{(i)}$, $u_s^{(i)}$ въ предѣлахъ измѣняемости ϑ отъ 0 до 2π (а слѣдовательно и для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ), а черезъ $V^{(l)}$, $V_s^{(l)}$ — результаты замѣны въ функціяхъ $U^{(l)}$, $U_s^{(l)}$ величинъ $u^{(i)}$, $u_\sigma^{(i)}$ величинами $v^{(i)}$, $v_\sigma^{(i)}$ и коэффиціентовъ разложеній R, Q_s высшими предѣлами ихъ модулей въ тѣхъ же предѣлахъ измѣняемости ϑ, и если наконецъ черезъ

$$-\lambda_1,\quad -\lambda_2,\ \ldots,\ -\lambda_n$$

означимъ вещественныя части корней $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ..., $\varkappa_n$, то въ силу (53) можемъ положить:

$$\left.\begin{aligned} v^{(l)} &= 2\pi V^{(l)}, \\ \lambda_1 v_1^{(l)} &= \{|a_1| + |b_1|\}\, v^{(l)} + V_1^{(l)}, \\ \lambda_s v_s^{(l)} &= |\sigma_{s-1}|\, v_{s-1}^{(l)} + \{|a_s| + |b_s|\}\, v^{(l)} + V_s^{(l)}. \\ &(s = 2,\ 2,\ \ldots,\ n) \end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

Дѣлая при томъ

$$\lambda_1 v_1^{(1)} = |a_1| + |b_1|, \quad \lambda_s v_s^{(1)} = |\sigma_{s-1}|\, v_{s-1}^{(1)} + |a_s| + |b_s|, \qquad (s=2, 3, \ldots, n)$$

и опредѣляя формулами (54) величины $v^{(l)}$, $v_s^{(l)}$ для всякаго l, превосходящаго 2, получимъ такимъ образомъ высшіе предѣлы модулей для всѣхъ функцій $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$, годные для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ.

Но по свойству функцій R, Q_s, для модулей коэффиціентовъ въ ихъ разложеніяхъ при вещественномъ ϑ всегда можно выбрать постоянные высшіе предѣлы такъ, чтобы ряды, въ которые обратятся эти разложенія послѣ замѣны коэффиціентовъ названными высшими предѣлами, были сходящимися при отличныхъ отъ нуля r, x_s, модули которыхъ достаточно малы. Тогда этими рядами опредѣлятся нѣкоторыя голоморфныя функціи перемѣнныхъ r, x_s. Означимъ ихъ соотвѣтственно черезъ

$$F(r, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad F_s(r, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Функціи эти будутъ уничтожаться при $r = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, и при томъ функціи F_s не будутъ содержать въ своихъ разложеніяхъ членовъ перваго порядка.

Если же высшіе предѣлы, о которыхъ идетъ рѣчь, выбраны такимъ образомъ, то величины $v^{(l)}$, $v_s^{(l)}$, опредѣляемыя предыдущими формулами, представятъ коэффиціенты въ разложеніяхъ

$$\left.\begin{aligned} r &= c + v^{(2)}c^2 + v^{(3)}c^3 + \ldots, \\ x_s &= v_s^{(1)}c + v_s^{(2)}c^2 + v_s^{(3)}c^3 + \ldots, \\ &\quad (s=1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

по цѣлымъ положительнымъ степенямъ c величинъ r, x_s, удовлетворяющихъ уравненіямъ:

$$\begin{aligned} r &= c + 2\pi r F(r, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \lambda_1 x_1 &= \{|a_1| + |b_1|\} r + F_1(r, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \lambda_j x_j &= \{|a_j| + |b_j|\} r + |\sigma_{j-1}|\, x_{j-1} + F_j(r, x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (j=2, 3, \ldots, n) \end{aligned}$$

и обращающихся въ нуль при $c = 0$.

Поэтому при $|c|$ достаточно маломъ ряды (55) будутъ абсолютно сходящимися; а слѣдовательно ряды

$$\begin{gathered} |c| + |u^{(2)}c^2| + |u^{(3)}c^3| + \ldots, \\ |u_s^{(1)}c| + |u_s^{(2)}c^2| + |u_s^{(3)}c^3| + \ldots \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \end{gathered}$$

при всякомъ достаточно маломъ $|c|$ будутъ сходящимися въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ.

Возвращаемся теперь къ первоначальнымъ уравненіямъ (47) и къ соотвѣтствующимъ имъ уравненіямъ (50).

Такъ какъ въ этихъ уравненіяхъ всѣ коэффиціенты суть вещественныя функціи ϑ, то такими же будутъ и функціи $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$, найденныя въ предположеніи, что при $\vartheta = 0$ всѣ $u^{(l)}$ дѣлаются нулями. Поэтому при вещественномъ c рядами (49) будетъ опредѣляться въ этомъ предположеніи нѣкоторое вещественное рѣшеніе уравненій (47).

Воспользуемся имъ для преобразованія этихъ уравненій.

Дѣлаемъ

$$r = z + u^{(2)} z^2 + u^{(3)} z^3 + \ldots,$$

$$x_s = z_s + u_s^{(1)} z + u_s^{(2)} z^2 + \ldots, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

и вмѣсто перемѣнныхъ r, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вводимъ въ эти уравненія перемѣнныя z, $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Преобразованныя уравненія будутъ вида (52), и входящія въ нихъ функціи Z, Z_s будутъ такого же характера, какъ и въ случаѣ, разсмотрѣнномъ въ предыдущемъ параграфѣ, съ тою только разницею, что теперь при

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$$

всѣ эти функціи будутъ дѣлаться нулями.

Разсматриваемая подстановка при томъ такова, что для нашей задачи новыя перемѣнныя будутъ имѣть такое же значеніе, какъ и прежнія.

36. Разсмотримъ ближе случай, когда всѣ функціи $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ суть періодическія.

Предполагая, что постоянныя произвольныя въ этихъ функціяхъ опредѣлены согласно разсмотрѣнному выше условію, мы представимъ рядами (49) при $|c|$ достаточно маломъ нѣкоторое періодическое рѣшеніе системы (47).

Для системы (45) этому рѣшенію будетъ соотвѣтствовать также нѣкоторое періодическое рѣшеніе. Послѣднее получимъ, если въ уравненіяхъ

$$\left.\begin{aligned} x = [c + u^{(2)} c^2 + \ldots] \cos\vartheta, \quad y = [c + u^{(2)} c^2 + \ldots] \sin\vartheta, \\ x_s = u_s^{(1)} c + u_s^{(2)} c^2 + \ldots \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(56)}$$

перемѣнную ϑ замѣнимъ ея выраженіемъ въ функціи t.

Покажемъ, какъ найдется эта функція, и каковъ будетъ видъ названнаго сейчасъ рѣшенія системы (45).

Обращаемся къ уравненію (46).

Дѣлаемъ въ функцію Θ подстановку (49) и затѣмъ функцію

$$\frac{\lambda}{\lambda + \Theta}$$

разлагаемъ въ рядъ по восходящимъ степенямъ c.

Такъ какъ послѣдняя при $c = 0$ обращается въ единицу, то при этомъ найдемъ:

$$\frac{\lambda}{\lambda + \Theta} = 1 + \Theta_1 c + \Theta_2 c^2 + \Theta_3 c^3 + \ldots ,$$

гдѣ всѣ Θ_j суть независящія отъ c періодическія функціи ϑ, которыя можно представить подъ видомъ конечныхъ рядовъ синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ.

Означая теперь черезъ t_0 постоянную произвольную, изъ уравненія (46) выводимъ:

$$\vartheta + c\int_0^{\vartheta} \Theta_1 d\vartheta + c^2 \int_0^{\vartheta} \Theta_2 d\vartheta + \ldots = \lambda(t - t_0) .$$

Первая часть этого уравненія, кромѣ періодическихъ членовъ, заключаетъ въ себѣ члены, пропорціональные ϑ.

Если вообще сдѣлаемъ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Theta_m d\vartheta = h_m ,$$

то совокупность всѣхъ такихъ членовъ представимъ подъ видомъ:

$$(1 + h_2 c^2 + h_3 c^3 + \ldots)\, \vartheta \,. \text{*)}$$

При этомъ уравненію нашему можно будетъ дать слѣдующій видъ:

$$(1 + h_2 c^2 + h_3 c^3 + \ldots)[\vartheta + c\Phi_1(\vartheta) + c^2\Phi_2(\vartheta) + \ldots] = \lambda(t - t_0) ,$$

гдѣ $\Phi_j(\vartheta)$ означаютъ нѣкоторые независящіе отъ c конечные ряды синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ.

Всѣ произведенныя до сихъ поръ операціи вполнѣ законны въ предположеніи, что ϑ принимаетъ только вещественныя значенія, а $|c|$ не превосходитъ нѣкотораго предѣла.

Въ этомъ предположеніи ряды

$$1 + h_2 c^2 + h_3 c^3 + \ldots , \qquad c\Phi_1(\vartheta) + c^2\Phi_2(\vartheta) + \ldots$$

будутъ абсолютно сходящимися. При томъ рядъ

$$|c\Phi_1(\vartheta)| + |c^2\Phi_2(\vartheta)| + |c^3\Phi_3(\vartheta)| + \ldots \tag{57}$$

будетъ сходящимся въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ.

Но для дальнѣйшихъ преобразованій разсмотрѣніе вещественныхъ значеній ϑ будетъ недостаточно. Намъ придется при этомъ разсматривать всякія комплексныя значенія его вида:

$$\vartheta = \alpha + \beta\sqrt{-1} ,$$

---

*) Нетрудно убѣдиться, что h_1 всегда будетъ нулемъ.

гдѣ α и β вещественныя числа, изъ которыхъ первое совершенно произвольно, а второе подчинено условію, чтобы его абсолютная величина не превосходила нѣкотораго предѣла.

Если-бы въ предыдущемъ параграфѣ, при изслѣдованіи сходимости рядовъ (49), мы разсматривали такія значенія ϑ, то пришли бы, какъ нетрудно убѣдиться, къ подобному же заключенію, какъ и для вещественныхъ значеній ϑ.

Вслѣдствіе этого мы можемъ быть увѣрены, что $|c|$ всегда можно выбрать достаточно малымъ для того, чтобы рядъ (57) былъ сходящимся въ равной степени для всѣхъ комплексныхъ значеній ϑ указаннаго сейчасъ вида.

Замѣтивши это, положимъ:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(1 + h_2 c^2 + h_3 c^3 + \ldots) = T, \qquad \frac{2\pi(t - t_0)}{T} = \tau, \qquad \vartheta - \tau = \varphi.$$

Тогда наше уравненіе приведется къ виду:

$$\varphi + c\Phi_1(\varphi + \tau) + c^2\Phi_2(\varphi + \tau) + \ldots = 0. \tag{58}$$

Будемъ здѣсь разсматривать τ, какъ независящій отъ c параметръ, которому приписываются всякія значенія вида:

$$\tau = \varrho + \sigma\sqrt{-1},$$

гдѣ ϱ и σ вещественныя числа, изъ которыхъ послѣднее по абсолютной величинѣ не превосходитъ нѣкотораго даннаго предѣла.

Тогда, если такое же условіе поставимъ и для перемѣнной φ, то въ силу замѣченнаго выше свойства ряда (57) изъ уравненія (58) будетъ слѣдовать, что при $|c|$ достаточно маломъ модуль перемѣнной φ сдѣлается сколь угодно малымъ.

Наша задача приведется такимъ образомъ къ опредѣленію изъ уравненія (58) зависящей отъ c функціи φ, модуль которой выборомъ достаточно малаго $|c|$ можно было бы сдѣлать насколько угодно малымъ.

Мы замѣчаемъ теперь, что каждая изъ функцій $\Phi_j(\varphi + \tau)$, по своему характеру, можетъ быть представлена подъ видомъ ряда, расположеннаго по цѣлымъ положительнымъ степенямъ φ и абсолютно сходящагося при всякихъ φ и τ. Поэтому въ силу упомянутаго сейчасъ свойства ряда (57) первая часть уравненія (58) будетъ голоморфною функціей величинъ φ и c (и при томъ — въ равной степени для всѣхъ указанныхъ значеній τ).

Функція эта при $\varphi = c = 0$ обращается въ нуль, а ея частная производная по φ дѣлается при этомъ равною единицѣ.

Поэтому на основаніи извѣстной теоремы искомая функція φ будетъ голоморфною относительно c и слѣдовательно при $|c|$ достаточно маломъ представится подъ видомъ ряда:

$$\varphi = \varphi_1 c + \varphi_2 c^2 + \varphi_3 c^3 + \dots, \tag{59}$$

гдѣ всѣ φ_j означаютъ нѣкоторыя независящія отъ c функціи τ.

Функціи φ_j легко находятся послѣдовательно и выражаются при помощи функцій Φ_j и ихъ производныхъ $\Phi_j^{(l)}$:

$$\varphi_1 = -\Phi_1(\tau), \qquad \varphi_2 = \Phi_1(\tau)\,\Phi_1'(\tau) - \Phi_2(\tau), \dots.$$

Всѣ эти функціи можно будетъ представлять подъ видомъ конечныхъ рядовъ синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей τ.

Такимъ образомъ для ϑ найдемъ слѣдующее выраженіе:

$$\vartheta = \tau + \varphi_1 c + \varphi_2 c^2 + \varphi_3 c^3 + \dots.$$

Внося это выраженіе въ уравненія (56) и затѣмъ разлагая результаты подстановки въ ряды по восходящимъ степенямъ c, представимъ функціи x, y, x_s подъ видомъ рядовъ того же характера, какъ и (59).

Всѣ эти ряды при величинахъ c, модули которыхъ достаточно малы, будутъ сходящимися въ равной степени для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній τ.

Послѣ подстановки

$$\tau = \frac{2\pi(t - t_0)}{T} \tag{60}$$

ими и опредѣлится искомое рѣшеніе системы (45).

По отношенію къ t функціи x, y, x_s будутъ въ этомъ рѣшеніи періодическими съ періодомъ

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\lambda + \Theta} = \frac{2\pi}{\lambda}\,(1 + h_2 c^2 + h_3 c^3 + \dots).$$

Найденному рѣшенію, если угодно, можно дать нѣсколько иной видъ. А именно, названныя сейчасъ функціи можно представить подъ видомъ рядовъ Фурье, расположенныхъ по синусамъ и косинусамъ цѣлыхъ кратностей τ. Эта возможность видна изъ того, что функціи, о которыхъ идетъ рѣчь, при достаточно маломъ $|c|$ будутъ синектичными для всѣхъ комплексныхъ значеній τ, подчиненныхъ указанному выше условію. Получаемые такимъ путемъ новые ряды будутъ того же характера, какъ и ряды, разсматриваемые Линдштедтомъ (пар. 27).

Наше періодическое рѣшеніе содержитъ двѣ постоянныхъ произвольныхъ c и t_0, при вещественныхъ значеніяхъ которыхъ ему будетъ соотвѣтствовать нѣкоторое періодическое движеніе.

Постоянная t_0 впрочемъ не имѣетъ существеннаго вліянія на характеръ этого движенія. Послѣдній опредѣляется главнымъ образомъ постоянною c.

Измѣняя эту постоянную непрерывнымъ образомъ, мы получимъ нѣкоторый непрерывный рядъ періодическихъ движеній, и разсматриваемое невозмущенное движеніе будетъ входить въ него, какъ соотвѣтствующее $c = 0$.

Примѣчаніе. — Для дѣйствительнаго вычисленія членовъ разсматриваемыхъ рядовъ, конечно, нѣтъ необходимости непремѣнно идти указаннымъ выше путемъ. Для этой цѣли вообще будетъ предпочтительнѣе трактовать непосредственно уравненія (45).

Разумѣя подъ c произвольную постоянную и подъ T рядъ

$$\frac{2\pi}{\lambda}(1+h_2c^2+h_3c^3+\dots)$$

съ *неопредѣленными* коэффиціентами h, вводимъ въ эти уравненія вмѣсто t новую независимую перемѣнную τ посредствомъ подстановки (60). Затѣмъ постоянными h стараемся распорядиться такъ, чтобы преобразованнымъ уравненіямъ удовлетворяли ряды:

$$\left.\begin{aligned} x &= x^{(1)}c+x^{(2)}c^2+x^{(3)}c^3+\dots\,, \\ y &= y^{(1)}c+y^{(2)}c^2+y^{(3)}c^3+\dots\,, \\ x_s &= x_s^{(1)}c+x_s^{(2)}c^2+x_s^{(3)}c^3+\dots\,, \\ & (s=1,\,2,\,\dots,\,n) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(61)}$$

въ которыхъ всѣ $x^{(m)}$, $y^{(m)}$, $x_s^{(m)}$ были бы періодическими функціями τ съ общимъ періодомъ 2π.

Для вычисленія этихъ функцій (которыя предполагаются независящими отъ c) получатся системы дифференціальныхъ уравненій, изъ которыхъ, въ случаѣ возможности нашей задачи, при надлежащемъ выборѣ коэффиціентовъ h, послѣдовательно найдутся всѣ названныя функціи въ порядкѣ возрастанія m подъ видомъ конечныхъ рядовъ синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей τ. При этомъ для каждаго m сначала найдутся $x^{(m)}$ и $y^{(m)}$, затѣмъ всѣ $x_s^{(m)}$. Значенія, которыя придется приписать постояннымъ h_m, опредѣлятся также послѣдовательно въ порядкѣ возрастанія m и при томъ такъ, что для всякаго m постоянная h_{m-1} найдется одновременно съ функціями $x^{(m)}$, $y^{(m)}$.

Уравненіямъ, которыя получатся для опредѣленія $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, всегда можно будетъ удовлетворить предположеніемъ

$$x^{(1)}=\cos\tau\,, \qquad y^{(1)}=\sin\tau\,.$$

Затѣмъ дальнѣйшія вычисленія можно будетъ вести такъ, чтобы всѣ $x^{(m)}$, $y^{(m)}$, для которыхъ $m>1$, при $\tau=0$ дѣлались нулями. Тогда всѣ искомыя функціи, а также постоянныя h выйдутъ вполнѣ опредѣленными, и ряды (61) сдѣлаются тожественными съ разсмотрѣнными выше.

Останавливаясь на такомъ предположеніи, посмотримъ, какъ найдутся постоянныя h.

Допустимъ, что мы вычислили всѣ функціи $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$, $x_s^{(\mu)}$, для которыхъ $\mu<m$, и всѣ постоянныя h_j, для которыхъ $j<m-1$. Тогда для опредѣленія функцій $x^{(m)}$ и $y^{(m)}$ получимъ систему уравненій вида:

$$\frac{dx^{(m)}}{d\tau}=-y^{(m)}-h_{m-1}\sin\tau+X^{(m)}, \qquad \frac{dy^{(m)}}{d\tau}=x^{(m)}+h_{m-1}\cos\tau+Y^{(m)},$$

гдѣ $X^{(m)}$, $Y^{(m)}$ будутъ нѣкоторыми извѣстными цѣлыми раціональными функціями отъ всѣхъ найденныхъ $x^{(\mu)}$, $y^{(\mu)}$, $x_s^{(\mu)}$.

Функціи $X^{(m)}$, $Y^{(m)}$ представятся подъ видомъ конечныхъ рядовъ синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей τ.

Будемъ искать функціи $x^{(m)}$, $y^{(m)}$ подъ видомъ такихъ же рядовъ.

При опредѣленіи коэффиціентовъ въ этихъ рядахъ мы встрѣтимъ нѣкоторую особенность только для членовъ, содержащихъ синусъ и косинусъ первой кратности τ. Поэтому ограничимся разсмотрѣніемъ только послѣднихъ и остальныхъ выписывать не будемъ.

Пусть

$$X^{(m)} = A_1 \cos\tau + A_2 \sin\tau + \ldots, \qquad Y^{(m)} = B_1 \cos\tau + B_2 \sin\tau + \ldots,$$

гдѣ A_1, A_2, B_1, B_2 суть нѣкоторыя извѣстныя постоянныя.

Дѣлая подобнымъ образомъ:

$$x^{(m)} = a_1 \cos\tau + a_2 \sin\tau + \ldots, \qquad y^{(m)} = b_1 \cos\tau + b_2 \sin\tau + \ldots,$$

для опредѣленія постоянныхъ a_1, a_2, b_1, b_2, h_{m-1} получимъ слѣдующія уравненія:

$$a_2 + b_1 = A_1, \qquad -a_1 + b_2 + h_{m-1} = A_2,$$
$$-a_2 - b_1 = B_2, \qquad -a_1 + b_2 - h_{m-1} = B_1.$$

Уравненія эти будутъ возможны только при условіи

$$A_1 + B_2 = 0, \tag{62}$$

и когда послѣднее выполнено, дадутъ:

$$h_{m-1} = \frac{A_2 - B_1}{2}, \qquad a_2 = A_1 - b_1, \qquad b_2 = \frac{A_2 + B_1}{2} + a_1.$$

Такъ какъ условіе, чтобы $x^{(m)}$, $y^{(m)}$ при $\tau = 0$ дѣлались нулями, опредѣляетъ постоянныя a_1 и b_1, то по этимъ формуламъ и найдутся всѣ искомыя постоянныя.

Изложенная сейчасъ метода вычисленія представляетъ только незначительное видоизмѣненіе методы Линдштедта, какова она была бы въ приложеніи къ занимающему насъ случаю (пар. 25).

Замѣтимъ, что для приложимости этой методы не необходимо, чтобы функціи X и Y обращались въ нуль при $x = y = 0$. Поэтому для нея нѣтъ надобности и въ томъ предварительномъ преобразованіи уравненій (45), на которое было указано въ параграфѣ 33$^{\text{емъ}}$.

Если бы существованіе разсматриваемыхъ періодическихъ рѣшеній не было извѣстно à priori, и если бы, прилагая предыдущую методу и доведя вычисленіе до нѣкотораго значка m, мы нашли, что для него условіе (62) не выполняется, то это послужило бы признакомъ, что искомыя рѣшенія невозможны.

Нетрудно видѣть, что въ этомъ случаѣ (будутъ ли функціи X и Y уничтожаться при $x=y=0$ или не будутъ) число m и постоянная

$$g=\frac{A_1+B_2}{2}$$

были бы тѣ самыя, съ которыми мы имѣли дѣло въ параграфѣ 34$^{\underline{\text{омъ}}}$.

37. Возвращаемся теперь къ нашей задачѣ.

Покажемъ, какимъ образомъ на основаніи уравненій (52) рѣшается вопросъ объ устойчивости.

Разсмотримъ сначала случай, когда при $z_1=z_2=\ldots=z_n=0$ функція Z не дѣлается нулемъ тожественно.

Пусть

$$zZ=gz^m+P^{(1)}z+P^{(2)}z^2+\ldots+P^{(m-1)}z^{m-1}+R,$$

гдѣ g отличная отъ нуля постоянная, $P^{(j)}$ линейныя формы величинъ z_s съ періодическими относительно ϑ коэффиціентами *) и R голоморфная функція перемѣнныхъ z, z_s, разложеніе которой, обладающее такими же коэффиціентами, не содержитъ членовъ ниже третьяго порядка и при томъ въ членахъ, линейныхъ относительно величинъ z_s, заключаетъ z въ степеняхъ не ниже $m^{\underline{\text{ой}}}$, а въ членахъ, не зависящихъ отъ этихъ величинъ, — въ степеняхъ не ниже $m+1^{\underline{\text{ой}}}$.

По свойству уравненій (52), при этомъ должно допустить, что разложенія функцій Z_s въ членахъ, не зависящихъ отъ величинъ z_σ, не содержатъ z въ степеняхъ ниже $m^{\underline{\text{ой}}}$.

Пусть для какого угодно цѣлаго положительнаго k

$$Z_s=P_s^{(1)}z+P_s^{(2)}z^2+\ldots+P_s^{(k)}z^k+Z_s^{(k)},$$

гдѣ $P_s^{(j)}$ суть линейныя формы величинъ z_σ съ періодическими коэффиціентами, а $Z_1^{(k)}$, $Z_2^{(k)},\ldots,Z_n^{(k)}$ голоморфныя функціи перемѣнныхъ z, z_s, разложенія которыхъ въ членахъ, линейныхъ относительно величинъ z_s, могутъ содержать z только въ степеняхъ выше $k^{\underline{\text{ой}}}$.

Подобно тому, какъ въ параграфѣ 29$^{\underline{\text{омъ}}}$, положимъ:

$$V=z+W+U^{(1)}z+U^{(2)}z^2+\ldots+U^{(m-1)}z^{m-1},$$

означая черезъ $U^{(j)}$ линейныя формы величинъ z_s, а черезъ W ихъ квадратичную форму съ неопредѣленными коэффиціентами. Но эти коэффиціенты, предполагая по прежнему постоянными для формы W, для формъ $U^{(j)}$ предположимъ періодическими функціями ϑ.

*) Вообще всѣ періодическіе коэффиціенты, о которыхъ здѣсь будетъ идти рѣчь, суть конечные ряды синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ.

Составивши затѣмъ въ силу уравненій (52) производную $\frac{dV}{d\vartheta}$, постараемся коэффиціентами въ формахъ $U^{(j)}$ распорядиться такъ, чтобы эта производная въ членахъ, линейныхъ относительно величинъ z_s, могла содержать z только въ степеняхъ не ниже $m^{\text{ой}}$. Для этого мы должны будемъ сдѣлать:

$$\sum_{s=1}^{n}(q_{s1}z_1+q_{s2}z_2+\cdots+q_{sn}z_n)\frac{\partial U^{(1)}}{\partial z_s}+\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \vartheta}+P^{(1)}=0,$$

$$\sum_{s=1}^{n}(q_{s1}z_1+q_{s2}z_2+\cdots+q_{sn}z_n)\frac{\partial U^{(k)}}{\partial z_s}+\frac{\partial U^{(k)}}{\partial \vartheta}+P^{(k)}+\sum_{s=1}^{n}(P_s^{(1)}\frac{\partial U^{(k-1)}}{\partial z_s}+\cdots+P_s^{(k-1)}\frac{\partial U^{(1)}}{\partial z_s})=0.$$

$$(k=2,\ 3,\ \ldots,\ m-1)$$

Изъ этихъ уравненій послѣдовательно найдемъ:

$$U^{(1)},\quad U^{(2)},\ \ldots,\quad U^{(m-1)}. \qquad \textbf{(63)}$$

При томъ предположеніе, что коэффиціенты въ формахъ $U^{(j)}$ суть періодическія функціи ϑ и именно — конечные ряды синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ, всегда будетъ возможно и опредѣлить эти коэффиціенты вполнѣ.

Дѣйствительно, если U есть первая въ ряду формъ (63) или какая-либо изъ слѣдующихъ въ предположеніи, что всѣ предшествующія ей уже найдены въ указанномъ сейчасъ видѣ, то для опредѣленія ея получится уравненіе

$$\sum_{s=1}^{n}(q_{s1}z_1+q_{s2}z_2+\cdots+q_{sn}z_n)\frac{\partial U}{\partial z_s}+\frac{\partial U}{\partial \vartheta}=A_1z_1+A_2z_2+\cdots+A_nz_n,$$

въ которомъ всѣ A будутъ извѣстными конечными рядами синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ. Это уравненіе для опредѣленія коэффиціентовъ a въ формѣ

$$U=a_1z_1+a_2z_2+\cdots+a_nz_n$$

дастъ слѣдующую систему уравненій:

$$\frac{da_s}{d\vartheta}+q_{1s}a_1+q_{2s}a_2+\cdots+q_{ns}a_n=A_s. \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

А послѣдняя вслѣдствіе того, что соотвѣтствующее ей опредѣляющее уравненіе не имѣетъ чисто мнимыхъ корней (всѣ эти корни обладаютъ положительными вещественными частями), всегда будетъ допускать и при томъ только одно такое рѣшеніе, въ которомъ всѣ a были бы конечными рядами синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ.

Опредѣливши указаннымъ путемъ формы $U^{(j)}$, форму W выберемъ согласно уравненію:

$$\sum_{s=1}^{n}(q_{s1}z_1+q_{s2}z_2+\cdots+q_{sn}z_n)\frac{\partial W}{\partial z_s}=g(z_1{}^2+z_2{}^2+\cdots+z_n{}^2). \qquad \textbf{(64)}$$

Тогда выраженіе полной производной функціи V по ϑ приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{dV}{d\vartheta}=g(z^m+z_1{}^2+z_2{}^2+\ldots+z_n{}^2)+S,$$

если положимъ:

$$S=\sum_{s=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{m-2}z^k Z_s^{(m-k-1)}\frac{\partial U^{(k)}}{\partial z_s}+z^{m-1}Z_s\frac{\partial U^{(m-1)}}{\partial z_s}+Z_s\frac{\partial W}{\partial z_s}\right\}+Z\sum_{k=1}^{m-1}kU^{(k)}z^k+R.$$

Но эту величину S всегда можно представить подъ видомъ:

$$S=vz^m+\sum_{s=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n}v_{s\sigma}z_s z_\sigma,$$

гдѣ v, $v_{s\sigma}$ были бы функціями z, z_s, ϑ, уничтожающимися при

$$z=z_1=z_2=\ldots=z_n=0,$$

періодическими относительно ϑ и голоморфными относительно z, z_s, при томъ — въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ.

Поэтому очевидно, что, если поставлено условіе

$$z\geqq 0, \tag{65}$$

то найденная величина $\frac{dV}{d\vartheta}$, какъ функція перемѣнныхъ z, z_s, ϑ, изъ которыхъ послѣдняя играетъ роль перемѣнной t, представитъ функцію знакоопредѣленную (стр. 56, примѣч.), которая при достаточно малыхъ z, $|z_s|$ будетъ сохранять знакъ постоянной g.

При томъ же условіи (65) будетъ знакоопредѣленною и именно — опредѣленно-положительною и функція V, если форма W, какъ функція перемѣнныхъ z_s, опредѣленно-положительна.

Послѣднее дѣйствительно будетъ имѣть мѣсто, когда $g<0$, ибо форма W, какъ удовлетворяющая уравненію (64), всегда будетъ сохранять знакъ, противоположный знаку g (пар. 20, теор. II).

Напротивъ, если $g>0$, для функціи V при условіи (65) и при величинахъ z, $|z_s|$, насколько угодно малыхъ, будутъ возможны значенія любого знака.

Поэтому, если имѣть въ виду условіе (65), — а послѣднее, какъ уже было замѣчено въ параграфѣ 34$^{\text{омъ}}$, представляетъ слѣдствіе предположенія $r\geqq 0$, всегда возможнаго и нисколько не ограничивающаго нашей задачи (пар. 33), — то можно утверждать, что функція V при $g>0$ будетъ удовлетворять условіямъ теоремы II параграфа 16$^{\text{аго}}$, а при $g<0$ — условіямъ теоремы I (вмѣстѣ съ примѣчаніемъ 2$^{\text{ымъ}}$).

Вслѣдствіе этого мы должны заключить, что въ случаѣ положительнаго g невозмущенное движеніе неустойчиво, а въ случаѣ отрицательнаго устойчиво.