ГЛАВА ПЯТАЯ.

Объ особенныхъ рѣшеніяхъ дифференціальныхъ уравненій между двумя перемѣнными.

117. Помимо первыхъ, вторыхъ и т. д. и вообще полныхъ интеграловъ, содержащихъ извѣстное число произвольныхъ постоянныхъ количествъ, и частныхъ рѣшеній, получающихся изъ этихъ интеграловъ сообщеніемъ входящимъ въ нихъ произвольнымъ постояннымъ тѣхъ или другихъ численныхъ значеній, дифференціальныя уравненія могутъ имѣть еще рѣшенія, вовсе не содержащіяся въ его интегралахъ, т. е. не получающіяся изъ нихъ чрезъ сообщеніе какихъ бы то ни было численныхъ значеній произвольнымъ постояннымъ. Такія рѣшенія, въ существованіи которыхъ убѣдились еще геометры прошедшаго столѣтія, получили названіе *особенныхъ рѣшеній* дифференціальныхъ уравненій (solutions singulières). Французскіе ученые Лежандръ, Лапласъ и, особенно, Лагранжъ тщательно изслѣдовали ихъ свойства и установили правила для разысканія ихъ какъ въ томъ случаѣ, когда интегралъ дифференціальнаго уравненія извѣстенъ, такъ и въ томъ, когда мы его не знаемъ. Со времени Лагранжа теорія особенныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій получила еще дальнѣйшее развитіе въ трудахъ Пуассона, Коши и нѣкоторыхъ другихъ геометровъ и потому изложеніе ея естественно должно найдти мѣсто въ каждомъ курсѣ теоріи дифференціальныхъ уравненій. Изложенію свойствъ особенныхъ рѣшеній мы и посвятимъ настоящую главу, причемъ начнемъ съ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій перваго порядка.

Объ особенныхъ рѣшеніяхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка и разысканіи ихъ по данному полному интегралу.

118. *Особеннымъ рѣшеніемъ дифференціальнаго уравненія перваго порядка между двумя перемѣнными называютъ всякое отношеніе между тѣми-же перемѣнными, которое, представляя рѣшеніе уравненія, не можетъ быть получено изъ полнаго интеграла чрезъ сообщеніе въ немъ постоянному произвольному того или другаго численнаго значенія.*

Что такія *особенныя* рѣшенія дѣйствительно существуютъ— можно показать на примѣрѣ. Такъ, уравненіе

$$y\frac{dy}{dx}+x=\frac{dy}{dx}\sqrt{x^2+y^2-b}$$

имѣетъ полнымъ интеграломъ уравненіе

$$x^2-2cy-c^2-b=0,$$

гдѣ c постоянное произвольное, а въ то-же время удовлетворяется и уравненіемъ

$$x^2+y^2-b=0,$$

которое не можетъ быть выведено изъ полнаго интеграла сообщеніемъ частнаго значенія постоянному произвольному c и представляетъ, поэтому, особенное рѣшеніе даннаго дифференціальнаго уравненія.

119. Отрицательный признакъ, которымъ мы характеризовали особенныя рѣшенія, именно—что они не могутъ быть получаемы изъ полнаго интеграла сообщеніемъ въ немъ частнаго постоян-

[нов]аго значенія постоянному произвольному — не трудно замѣнить [по]ложительнымъ признакомъ, доказавъ, что эти рѣшенія получаются изъ полнаго интеграла замѣною въ немъ постояннаго произвольнаго функціею одного изъ перемѣнныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, легко оправдать слѣдующее предложеніе:

Полный интегралъ дифференціальнаго уравненія перваго порядка между двумя перемѣнными, вида

$$F(x,\ y,\ c)=0,$$

всегда можетъ быть преобразованъ, чрезъ замѣну с функціею x, въ какое угодно отношеніе, содержащее x и y, или одно y, а чрезъ замѣну с функціею y — въ какое угодно отношеніе, содержащее x и y, или одно x.

Пусть

$$\psi(x,\ y)=0$$

то отношеніе, въ которое хотимъ преобразовать данный интегралъ; сочетавъ его съ интеграломъ нашимъ, будемъ имѣть два уравненія, между которыми можно исключить перемѣнное y, или x: въ результатѣ получится отношеніе между x и c, или между y и c, изъ котораго c и опредѣлится какъ функція x, или какъ функція y. Подстановка этого значенія c въ интегралъ и сведетъ его, какъ это очевидно, на отношеніе $\psi(x,\ y)=0$.

Если-бы отношеніе $\psi(x,\ y)=0$ содержало только одно y, то изъ него и интеграла $F(x,\ y,\ c)=0$ можно было бы исключить только y и опредѣлить затѣмъ c только въ формѣ функціи x; а если-бы данное отношеніе содержало только одно перемѣнное x, то возможно было бы исключить только x и выразить c какъ функцію y.

И такъ, замѣна постояннаго c функціею x можетъ служить для преобразованія полнаго интеграла въ какое угодно отношеніе, зависящее или отъ x и y, или отъ одного y, а замѣна c

функціею y преобразовываетъ интегралъ въ какое угодно отношеніе, содержащее x и y, или одно x.

Мы въ-правѣ, слѣдовательно, сказать:

Всякое особенное рѣшеніе дифференціальнаго уравненія первагo порядка между двумя перемѣнными, содержащее и x, и y, можетъ быть получено изъ полнаго интеграла замѣною въ немъ с какъ функціею x, такъ и функціею y; тѣ особенныя рѣшенія, которыя зависятъ отъ одного y, выводятся изъ интеграла замѣною с функціею x, а тѣ, которыя содержатъ одно x, получаются изъ него замѣною с функціею y.

120. Отличаясь по существу своему отъ частныхъ интеграловъ, особенныя рѣшенія дифференціальныхъ уравненій перваго порядка сходны съ ними по виду, такъ-какъ, подобно имъ, представляются въ видѣ отношеній, не содержащихъ произвольнаго постояннаго. Чтобы рѣшить: представляетъ ли то или другое отношеніе, удовлетворяющее данному дифференціальному уравненію и не содержащее произвольнаго постояннаго, частный интегралъ или особенное рѣшеніе, нужно обратиться къ полному интегралу и разсмотрѣть — можно или нѣтъ получить изъ него данное отношеніе приписавъ постоянному c нѣкоторое численное значеніе; если можно, то отношеніе наше представляетъ частный интегралъ, а если нельзя, то оно особенное рѣшеніе. Поступить такъ возможно, однако, только тогда, когда полный интегралъ дифференціальнаго уравненія извѣстенъ; въ противномъ случаѣ задача становится гораздо сложнѣе и требуетъ иныхъ пріемовъ для своего рѣшенія. Въ чемъ состоятъ эти пріемы — объяснимъ ниже, а теперь разсмотримъ какимъ образомъ по данному полному интегралу уравненія найдти *всѣ* его особенныя рѣшенія.

121. Пусть

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad (1)$$

данное дифференціальное уравненіе, а отношеніе

$$y = \varphi(x, c) \tag{2}$$

представляетъ его полный интегралъ. Дифференцированіе отношенія (2) доставитъ выраженіе

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi(x,c)}{dx}, \tag{3}$$

которое, по исключеніи изъ него c при помощи уравненія (2), приведется къ данному уравненію (1).

Формулу (3) мы получаемъ разсматривая c постояннымъ количествомъ и дифференцируя (2) въ этомъ предположеніи; но всякое особенное рѣшеніе даннаго уравненія (1) получается изъ (2) замѣною въ немъ постояннаго c функціею x или y; поэтому нужно разсмотрѣть — какимъ условіямъ должна удовлетворять та функція перемѣннаго x, которая, будучи подставлена вмѣсто c въ формулу (2), доставляетъ отношеніе между перемѣнными, удовлетворяющее уравненію (1).

Предположивъ, вообще, количество c функціею x и продифференцировавъ послѣ этого (2), получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi(x,c)}{dx} + \frac{d\varphi(x,c)}{dc}\frac{dc}{dx}; \tag{4}$$

но, чтобы отношеніе (2) и въ настоящемъ случаѣ, когда оно уже перестало быть полнымъ интеграломъ, все-таки удовлетворяло уравненію (1), необходимо, чтобы значеніе $\frac{dy}{dx}$, доставляемое формулою (4), было тождественно со значеніемъ $\frac{dy}{dx}$ изъ равенства (3); слѣдовательно должно имѣть мѣсто уравненіе

$$\frac{d\varphi(x,c)}{dc}\frac{dc}{dx} = 0.$$

Вотъ то условіе, которому должно удовлетворять количество c для того, чтобы уравненіе было, вообще, рѣшеніемъ уравненія (1). Условіе это требуетъ, чтобы имѣли или

$$\frac{dc}{dx}=0,$$

или

$$\frac{d\varphi(x,c)}{dc}=0, \tag{5}$$

т. е.

$$\frac{dy}{dc}=0;$$

но первое изъ этихъ уравненій опредѣляетъ c какъ величину постоянную, почему и не можетъ приводить къ особеннымъ рѣшеніямъ; второе, напротивъ, опредѣляетъ, вообще, c какъ функцію x, а потому и должно служить для перехода отъ полнаго интеграла (2) къ особеннымъ рѣшеніямъ уравненія (1). Найденное изъ (5) значеніе c, будучи подставлено въ интегралъ (2), всегда доставляетъ рѣшеніе уравненія (1), потому что условіе (5) всегда сводитъ формулу (4) на формулу (3); но нельзя ручаться, чтобы рѣшеніе это всегда было особеннымъ, а не частнымъ, такъ-какъ въ частныхъ случаяхъ формула (5) можетъ доставлять для c и постоянныя значенія. Доставленіе уравненіемъ (5) однихъ только постоянныхъ значеній для c есть признакъ, что уравненіе (1) не имѣетъ особенныхъ рѣшеній, которыя содержали бы y. Если-бы, напротивъ, уравненіе (5) дало нѣсколько функціональныхъ значеній c, то заключили бы, что уравненіе (1) имѣетъ нѣсколько особенныхъ рѣшеній, которыя и получились бы чрезъ подстановку найденныхъ изъ (5) значеній c въ интегралъ (2).

122. Для поясненія изложеннаго пріема возьмемъ примѣры.

1) Пусть дано выше приведенное уравненіе

$$y\frac{dy}{dx}+x=\frac{dy}{dx}\sqrt{x^2+y^2-b}, \qquad (\alpha)$$

полный интегралъ котораго есть

$$x^2-2cy-c^2-b=0, \qquad (\beta)$$

и приложимъ указанное нами правило къ разысканію его особеннаго рѣшенія.

Рѣшивъ уравненіе (β) относительно y, получимъ:

$$y=\frac{x^2-c^2-b}{2c},$$

почему будетъ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-c^2-x^2+b}{2c^2},$$

и уравненіе (5) приметъ, въ настоящемъ случаѣ, видъ

$$\frac{-c^2-x^2+b}{2c^2}=0.$$

Оно будетъ удовлетворяться въ двухъ случаяхъ: когда

$$2c^2=\infty$$

и когда

$$c^2+x^2-b=0.$$

Первое изъ этихъ равенствъ доставляетъ $c=\pm\infty$, т. е. значеніе c не зависящее отъ x, а потому и не можетъ привести къ особенному рѣшенію; но изъ втораго равенства находимъ, напротивъ,

$$c^2=b-x^2,$$

или

$$c=\sqrt{b-x^2},$$

т. е. опредѣляемъ c какъ функцію x. Подстановка этого значенія c въ интегралъ (β) должна, слѣдовательно, доставить особенное рѣшеніе. Въ самомъ дѣлѣ, мы получаемъ, сдѣлавъ это,

$$x^2-2y\sqrt{b-x^2}-b+x^2-b=0,$$

или

$$x^2-b=y\sqrt{b-x^2},$$

откуда

$$(b-x^2)^2=y^2(b-x^2)$$

и наконецъ

$$x^2+y^2-b=0.$$

Вотъ искомое особенное рѣшеніе.

2) Возьмемъ еще уравненіе

$$(1+x^2)\frac{dy^2}{dx^2}-2xy\frac{dy}{dx}+y^2-1=0,$$

впервые изслѣдованное Тайлоромъ. Будучи проинтегрировано, оно приведетъ насъ къ полному интегралу вида

$$y=cx+\sqrt{1-c^2}.$$

Для разысканія особенныхъ рѣшеній дифференцируемъ этотъ интегралъ по c и пишемъ:

$$\frac{dy}{dc}=x-\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}.$$

Уравненіе (5) приметъ, слѣдовательно, видъ

$$\frac{x\sqrt{1-c^2}-c}{\sqrt{1-c^2}}=0$$

и будетъ удовлетворяться въ двухъ случаяхъ: когда

$$\sqrt{1-c^2}=\infty$$

и когда

$$x\sqrt{1-c^2}-c=0.$$

Первое изъ этихъ равенствъ не доставляетъ функціональныхъ значеній для c и не приводитъ, поэтому, къ особеннымъ рѣшеніямъ; но второе даетъ выраженіе c вида

$$c=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

которое, по подстановленіи въ интегралъ

$$y=cx+\sqrt{1-c^2},$$

доставляетъ особенное рѣшеніе

$$y^2=x^2+1.$$

123. Изложенный способъ разысканія особенныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, зависящихъ отъ двухъ перемѣнныхъ, по данному полному интегралу, опредѣляетъ постоянное произвольное какъ функцію перемѣннаго x; поэтому, въ силу доказаннаго въ нумерѣ 119, онъ можетъ доставлять только тѣ особенныя рѣшенія, которыя содержатъ x и y, или одно y; но если уравненіе имѣетъ особенныя рѣшенія, зависящія отъ одного x, то для полученія ихъ способъ этотъ служить не можетъ. Чтобы дать средство находить и такія рѣшенія, въ случаѣ если они существуютъ, или убѣдиться въ томъ, что ихъ нѣтъ, необходимо вывести еще одно условіе.

Рѣшивъ относительно x уравненіе (2) нумера 121, получимъ

$$x=\psi(y,\ c) \qquad (6)$$

и принимая x за функцію y, а c за постоянное, придемъ къ отношенію

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d\psi(y,\ c)}{dy}, \qquad (7)$$

которое, по исключеніи изъ него c при помощи (6), обратится въ данное дифференціальное уравненіе (1). Если теперь предположимъ, что количество c есть функція y, то дифференцированіе формулы (6) въ этомъ послѣднемъ случаѣ дастъ:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\partial\psi(y,c)}{dy}+\frac{\partial\psi(y,c)}{dc}\frac{dc}{dy}.$$

Полученное равенство показываетъ, что для того, чтобы и въ предположеніи c функціею y, когда формула (6) перестаетъ быть полнымъ интеграломъ, она все-таки осталась рѣшеніемъ уравненія (1), необходимо и достаточно, чтобы имѣли

$$\frac{\partial\psi(y,c)}{dc}\frac{dc}{dy}=0,$$

такъ-какъ только при существованіи этого условія уравненіе (6) продолжаетъ доставлять то-же выраженіе для $\frac{dx}{dy}$, какъ и уравненіе (1). Послѣднее условіе разбивается однако на два

$$\frac{dc}{dy}=0$$

и

$$\frac{\partial\psi(y,c)}{dc}=0, \tag{8}$$

т. е.

$$\frac{dx}{dc}=0,$$

изъ которыхъ первое имѣетъ мѣсто въ случаѣ постояннаго c, а потому и не можетъ приводить къ особеннымъ рѣшеніямъ; второе же, напротивъ, выражаетъ, вообще, c какъ функцію y и даетъ именно особенныя рѣшенія. Впрочемъ, въ частныхъ случаяхъ, и это равенство можетъ приводить къ постояннымъ значеніямъ c, соотвѣтствующимъ частнымъ интеграламъ. Функціональныя значенія c, доставляемыя уравненіемъ (8), будучи подставляемы въ полный интегралъ уравненія (1), и доставляютъ особенныя рѣшенія этого уравненія, содержащія x.

Опредѣляя, вообще, c какъ функцію y, условное уравненіе (8) не можетъ дать только тѣхъ особенныхъ рѣшеній, которыя зависятъ отъ одного y, а доставляетъ всѣ рѣшенія, содержащія x. Если изъ этого уравненія не получается функціональныхъ значеній c, то это признакъ несуществованія для разсматриваемаго дифференціальнаго уравненія особенныхъ рѣшеній, зависящихъ отъ x; уравненіе это можетъ однако имѣть особенныя рѣшенія, содержащія одно y, и чтобы узнать это нужно обратиться къ условному равенству (5). Вообще равенства (5) и (8) дополняютъ другъ друга, никогда однако одно другому не противорѣча: первое не можетъ приводить только къ рѣшеніямъ, заключающимъ одно x, а второе — къ рѣшеніямъ, зависящимъ отъ одного y; рѣшенія, содержащія оба эти количества, получаются одинаково какъ при помощи одного, такъ и при помощи другаго. Въ соединеніи равенства эти даютъ всегда возможность или открыть всѣ особенныя рѣшенія уравненія, или заключить, что такихъ рѣшеній не существуетъ.

124. Возьмемъ примѣры.

1) Пусть дано уравненіе

$$2x\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

полный интегралъ котораго

$$y^2 - 2cx = 0.$$

Въ настоящемъ случаѣ

$$\frac{dy}{dc} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2c}},\quad \frac{dx}{dc} = \frac{-y^2}{c^2}.$$

Уравненіе (5) приметъ теперь видъ

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2c}} = 0$$

и будетъ имѣть мѣсто въ двухъ случаяхъ: когда

$$\sqrt{x} = 0$$

и когда

$$\sqrt{2c} = \infty;$$

но ни то, ни другое предположеніе не даетъ функціональнаго значенія c, почему и заключаемъ, что наше уравненіе не имѣетъ особенныхъ рѣшеній, содержащихъ y.

Остается рѣшить — не имѣетъ ли это уравненіе особенныхъ рѣшеній, зависящихъ отъ одного x. Для этого обращаемся къ условію (8), которое въ настоящемъ примѣрѣ даетъ равенство

$$\frac{-y^2}{c^2} = 0,$$

распадающееся на два слѣдующія:

$$y^2 = 0 \text{ и } c^2 = \infty.$$

ни одно изъ которыхъ не даетъ функціональнаго выраженія для с. Мы видимъ, слѣдовательно, что уравненіе наше вовсе не имѣетъ особенныхъ рѣшеній.

2) Возьмемъ еще уравненіе

$$y\frac{dy}{dx} + x = \frac{dy}{dx}\sqrt{x^2 + y^2 - b}, \qquad (\alpha)$$

которое было уже приведено выше и имѣетъ полнымъ интеграломъ своимъ уравненіе

$$x^2 - 2cy - c^2 - b = 0. \qquad (\beta)$$

При помощи условія (5) мы нашли для этого уравненія особенное рѣшеніе

$$x^2 + y^2 - b = 0, \qquad (\gamma)$$

содержащее оба перемѣнныя; теперь воспользуемся условіемъ (8), чтобы рѣшить — не имѣетъ ли это уравненіе еще особенныхъ рѣшеній, зависящихъ отъ одного x. Для этого уравненіе (β) разрѣшимъ относительно x; получимъ:

$$x = \sqrt{2cy + c^2 + b}.$$

Дифференцированіе этого выраженія по c дастъ

$$\frac{dx}{dc} = \frac{y+c}{\sqrt{2cy+c^2+b}},$$

такъ что условіе (8) приметъ видъ

$$\frac{y+c}{\sqrt{2cy+c^2+b}} = 0. \qquad (\delta)$$

Вотъ то уравненіе, изъ котораго нужно опредѣлить c и найденныя для него значенія подставлять въ (β) для полученія особенныхъ рѣшеній уравненія (α), содержащихъ x. Но уравненіе (δ) имѣетъ мѣсто въ двухъ случаяхъ: когда

$$y + c = 0$$

и когда

$$\sqrt{2cy + c^2 + b} = \infty;$$

въ первомъ случаѣ получаемъ $c = -y$ и приходимъ къ особенному рѣшенію

$$x^2 + y^2 - b = 0,$$

тождественному съ прежде найденнымъ, а во второмъ не получаемъ вовсе опредѣленнаго функціональнаго значенія c, а слѣдовательно и не приходимъ ни къ какому особенному рѣшенію.

Полученные нами результаты показываютъ, что взятое нами уравненіе имѣетъ всего одно особенное рѣшеніе, содержащее оба перемѣнныя и потому получаемое безразлично какъ при помощи условія (5), такъ и при помощи условія (8).

125. Выводя условныя уравненія

$$\frac{dy}{dc}=0 \text{ и } \frac{dx}{dc}=0,$$

мы предполагали полный интегралъ дифференціальнаго уравненія разрѣшеннымъ или относительно y, или относительно x; но такъ-какъ на практикѣ не всегда возможно привести полный интегралъ къ одной изъ этихъ формъ, то слѣдуетъ еще указать какъ поступать, когда интегралъ уравненія

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0 \qquad (1)$$

данъ въ общей формѣ

$$F(x, y, c)=0. \qquad (2)$$

Форма уравненія (2) позволяетъ равно удобно разсматривать какъ y функціею x, такъ и x функціею y. Принимая сперва x за независимое перемѣнное, продифференцируемъ уравненіе (2) въ предположеніи c постояннымъ количествомъ; получимъ:

$$\frac{\partial F(x,y,c)}{dx}+\frac{\partial F(x,y,c)}{dy}\frac{dy}{dx}=0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F(x,y,c)}{dx}}{\dfrac{\partial F(x,y,c)}{dy}}. \qquad (3)$$

Это выраженіе, по исключеніи изъ него c при помощи (2), и приведетъ къ тому-же выраженію $\frac{dy}{dx}$, какъ и уравненіе (1).

Если, напротивъ, допустить c функціею x, то дифференцированіе уравненія (2) дастъ:

$$\frac{\partial F(x,y,c)}{dx}+\frac{\partial F(x,y,c)}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F(x,y,c)}{dc}\frac{dc}{dx}=0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{\partial F(x,y,c)}{dx}}{\frac{\partial F(x,y,c)}{dy}}+\frac{-\frac{\partial F(x,y,c)}{dc}}{\frac{\partial F(x,y,c)}{dy}}\cdot\frac{dc}{dx}.$$

Чтобы это послѣднее выраженіе $\frac{dy}{dx}$, соотвѣтствующее случаю, когда уравненіе (2) перестаетъ быть полнымъ интеграломъ, удовлетворяло дифференціальному уравненію (1), нужно, чтобы оно было тождественно съ выраженіемъ (3), т. е. чтобы имѣли

$$\frac{\frac{\partial F(x,y,c)}{dc}}{\frac{\partial F(x,y,c)}{dy}}\cdot\frac{dc}{dx}=0.$$

Это равенство удовлетворяется, однако, какъ въ томъ случаѣ, когда

$$\frac{dc}{dx}=0,$$

такъ и въ томъ, когда имѣемъ:

$$\frac{\frac{\partial F(x,y,c)}{dc}}{\frac{\partial F(x,y,c)}{dy}}=0. \qquad (4)$$

Первое изъ этихъ условій соотвѣтствуетъ случаю, когда c постоянное количество и потому можетъ доставить только частные интегралы; второе же приводитъ, вообще, къ опредѣленію c какъ функціи x и y, или одного x, а потому и доставляетъ особенныя рѣшенія. Эти рѣшенія получаются, когда равенство

(4) рѣшимъ относительно c и полученныя для него функціональныя значенія будемъ подставлять въ уравненіе (2). Если-бы и уравненіе (4) не доставило функціональныхъ значеній c, то заключили бы, что данное дифференціальное уравненіе не имѣетъ особенныхъ рѣшеній, содержащихъ y.

Условіе (4) не иное что, какъ прежде выведенное нами условіе $\frac{dy}{dc} = 0$, потому что вообще

$$\frac{dy}{dc} = -\frac{\frac{\partial F(x,y,c)}{dc}}{\frac{\partial F(x,y,c)}{dy}};$$

но въ настоящей своей формѣ оно разбивается на два:

$$\frac{\partial F(x,y,c)}{dc} = 0 \text{ и } \frac{\partial F(x,y,c)}{dy} = \infty;$$

изъ которыхъ каждое можетъ служить для опредѣленія c какъ функціи x; въ однихъ случаяхъ къ особеннымъ рѣшеніямъ уравненія приводитъ первое изъ нихъ, въ другихъ — второе.

Если теперь въ уравненіи (2) за перемѣнное независимое взять y, то дифференцированіе его дастъ, принимая c за постоянное,

$$\frac{\partial F(x,y,c)}{dy} + \frac{\partial F(x,y,c)}{dx}\frac{dx}{dy} = 0,$$

откуда

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\partial F(x,y,c)}{dy}}{\frac{\partial F(x,y,c)}{dx}},$$

выраженіе, по исключеніи изъ котораго c при помощи уравненія (2), придемъ къ уравненію (1); если же (2) продифференцировать, трактуя c функціею y, то получимъ:

$$\frac{\partial F(x,y,c)}{dy}+\frac{\partial F(x,y,c)}{dx}\frac{dx}{dy}+\frac{\partial F(x,y,c)}{dc}\frac{dc}{dy}=0,$$

откуда

$$\frac{dx}{dy}=\frac{-\dfrac{\partial F(x,y,c)}{dy}}{\dfrac{\partial F(x,y,c)}{dx}}+\frac{-\dfrac{\partial F(x,y,c)}{dc}}{\dfrac{\partial F(x,y,c)}{dx}}\cdot\frac{dc}{dy}.$$

Но для того, чтобы уравненіе (2) представляло рѣшеніе уравненія (1) и въ настоящемъ случаѣ, когда c функція y, нужно и достаточно, чтобы послѣднее выраженіе $\frac{dx}{dy}$ совпадало съ прежнимъ, а это будетъ, когда

$$\frac{\dfrac{\partial F(x,y,c)}{dc}}{\dfrac{\partial F(x,y,c)}{dx}}\cdot\frac{dc}{dy}=0.$$

Условіе это распадается на два:

$$\frac{dc}{dy}=0,$$

$$\frac{\dfrac{\partial F(x,y,c)}{dc}}{\dfrac{\partial F(x,y,c)}{dx}}=0, \qquad (5)$$

изъ которыхъ первое соотвѣтствуетъ постоянному c и потому не приводитъ къ особеннымъ рѣшеніямъ, а второе опредѣляетъ, вообще, c какъ функцію x и y, или одного y. Послѣднее равенство (5) и представляетъ то условіе, изъ котораго находятся всѣ функціональныя значенія c, обращающія интегралъ (2) въ особенныя рѣшенія, содержащія x и y, или одно x.

Условіе (5) какъ-разъ соотвѣтствуетъ прежде выведенному нами равенству $\frac{dx}{dc}=0$, потому что вообще

$$\frac{dx}{dc}=-\frac{\frac{\partial F(x,y,c)}{dc}}{\frac{\partial F(x,y,c)}{dx}}.$$

Сравненіе равенства (5) съ (4) показываетъ, что имѣя мѣсто какъ въ случаѣ $\frac{\partial F(x,y,c)}{dc}=0$, такъ и въ томъ, когда $\frac{\partial F(x,y,c)}{dx}=\infty$, условіе (5) можетъ приводить къ особеннымъ рѣшеніямъ, отличнымъ отъ тѣхъ, которыя получаются при помощи условія (4), только въ случаѣ, когда равенство $\frac{\partial F(x,y,c)}{dx}=\infty$ доставляетъ опредѣленныя функціональныя значенія c. Можно, слѣдовательно, сказать вообще, что для разысканія тѣхъ значеній c, которыя обращаютъ уравненіе (2) въ особенныя рѣшенія, нужно опредѣлить функціональныя значенія c, удовлетворяющія каждому изъ трехъ равенствъ:

$$\frac{\partial F(x,y,c)}{dc}=0,\ \frac{\partial F(x,y,c)}{dy}=\infty,\ \frac{\partial F(x,y,c)}{dx}=\infty,$$

и выбрать тѣ изъ этихъ значеній, для которыхъ то или другое изъ условій (4) и (5) имѣетъ мѣсто.

126. Пояснимъ высказанное примѣромъ.

Пусть дано дифференціальное уравненіе:

$$\left(y+x\frac{dy}{dx}\log x\right)^2-\left(y+x\frac{dy}{dx}\log x\right)\left(y+3x\frac{dy}{dx}\right)\log x$$
$$+\left(y+3x\frac{dy}{dx}\right)^2 xy=0, \qquad (\alpha)$$

имѣющее полнымъ интеграломъ уравненіе

$$xy^3 - cy\log x + c^2 = 0. \qquad (\beta)$$

Означивъ лѣвую часть этого интеграла, краткости ради, через u, мы должны будемъ составить на самомъ дѣлѣ равенства $\frac{du}{dc} = 0$, $\frac{du}{dy} = \infty$, $\frac{du}{dx} = \infty$, рѣшить ихъ относительно c и найденныя функціональныя значенія этого количества, которыя удовлетворяютъ въ то-же время и одному изъ равенствъ

$$\frac{\frac{du}{dc}}{\frac{du}{dy}} = 0, \quad \frac{\frac{du}{dc}}{\frac{du}{dx}} = 0$$

подставлять въ интегралъ (β); результатами и будутъ особенныя рѣшенія уравненія (α). На дѣлѣ получимъ:

$$\frac{du}{dc} = -y\log x + 2c = 0,$$

$$\frac{du}{dy} = 3xy^2 - c\log x = \infty,$$

$$\frac{du}{dx} = y^3 - \frac{cy}{x} = \infty.$$

Изъ этихъ равенствъ только первое доставляетъ опредѣленное функціональное значеніе c, именно

$$c = \frac{y\log x}{2}, \qquad (\gamma)$$

а два послѣднихъ удовлетворяются только въ предположеніи $c = \infty$; слѣдовательно остается только одно выраженіе (γ) подставить въ формулу (β), что дастъ намъ

$$y = \frac{1}{4x}(\log x)^2,$$

единственное особенное рѣшеніе уравненія (α).

127. Нужно замѣтить, что то или иное изъ равенствъ

$$\frac{\partial F}{dc}=0,\quad \frac{\partial F}{dy}=\infty,\quad \frac{\partial F}{dx}=\infty$$

можетъ, въ частныхъ случаяхъ, вовсе не зависѣть отъ c, а содержать только перемѣнныя x, y. Изъ этого нельзя еще заключать, чтобы дифференціальное уравненіе не имѣло особеннаго рѣшенія, соотвѣтствующаго разсматриваемому условію; напротивъ, такое рѣшеніе часто существуетъ и можетъ быть безъ труда найдено.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть равенство

$$\frac{\partial F}{dc}=0$$

не содержитъ c, а представляетъ уравненіе между x и y. Опредѣливъ, при помощи его, c изъ полнаго интеграла, можемъ получить для этого количества функціональное значеніе, которое, подставленное въ полный интегралъ, обратитъ его въ самое отношеніе

$$\frac{\partial F}{dc}=0. \tag{a}$$

Если притомъ найденное нами значеніе c не обращаетъ въ нуль выраженій $\frac{\partial F}{dy}$ и $\frac{\partial F}{dx}$, то равенство (a) удовлетворитъ дифференціальному уравненію и представитъ его особенное рѣшеніе.

То-же самое слѣдуетъ сказать и про отношенія $\frac{\partial F}{dy}=\infty$ и $\frac{\partial F}{dx}=\infty$.

Для поясненія сказаннаго возьмемъ примѣръ.

Уравненіе

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}x^3\right)\frac{dy}{dx}-(1+x^2)y-\frac{1}{16}x^4=0$$

имѣетъ полнымъ интеграломъ отношеніе

$$u=x\sqrt{1+x^2}+\log[c(x+\sqrt{1+x^2})]\mp\sqrt{16y+4x^2+x^4}=0.$$

Пусть требуется отыскать его особенныя рѣшенія.

Составляемъ равенства

$$\frac{du}{dc}=\frac{1}{c}=0,$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{8}{\sqrt{16y+4x^2+x^4}}=\infty.$$

Первое изъ нихъ даетъ $c=\infty$ и не приводитъ, слѣдовательно, къ особеннымъ рѣшеніямъ. Второе сводится на

$$16y+4x^2+x^4=0, \qquad (\mathfrak{b})$$

отношеніе, не содержащее c, но представляющее само, какъ это сейчасъ докажемъ, особенное рѣшеніе даннаго уравненія. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ это равенство ($\mathfrak{b}$), получимъ, что интегралъ даннаго уравненія приведется къ виду

$$x\sqrt{1+x^2}+\log[c(x+\sqrt{1+x^2})]=0$$

и, разрѣшенный относительно c, доставитъ:

$$c=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot e^{-x\sqrt{1+x^2}}. \qquad (\mathfrak{c})$$

Вотъ функціональное значеніе c, которое обращаетъ полный интегралъ въ уравненіе ($\mathfrak{b}$). Притомъ это значеніе c не обращаетъ въ безконечность выраженія $\frac{du}{dc}$, почему равенство

$$\frac{\frac{du}{dc}}{\frac{du}{dc}} = 0$$

удовлетворяется допущеніемъ равенства (b); если же такъ, то отношеніе (b) удовлетворяетъ дифференціальному нашему уравненію и представляетъ притомъ его особенное рѣшеніе.

О разысканіи особенныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, когда полный интегралъ неизвѣстенъ.

128. Разсмотримъ теперь, какимъ образомъ разыскиваются особенныя рѣшенія дифференціальныхъ уравненій перваго порядка въ томъ случаѣ, когда полный интегралъ неизвѣстенъ.

Пусть имѣемъ дифференціальное уравненіе перваго порядка между перемѣннымъ x, его функціею y и производною этой функціи, которую означимъ черезъ p; оно будетъ вида

$$f(x, y, p) = 0 \qquad (1)$$

Пусть

$$F(x, y, c) = 0 \qquad (2)$$

полный интегралъ этого уравненія. Продифференцировавъ его по измѣняемости x и y, получимъ:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} p = 0. \qquad (3)$$

Исключеніе c изъ уравненій (2) и (3) приводитъ, какъ извѣстно, къ данному уравненію (1), почему, рѣшивъ уравненіе (3) относительно c и выразивъ, такимъ образомъ, это количество отношеніемъ

$$c = \varphi(x, y, p), \qquad (4)$$

какъ функцію количествъ x, y, p, по подстановленіи въ формулу (2), получимъ дифференціальное уравненіе (1) въ формѣ отношенія

$$F(x, y, \Phi) = 0, \qquad (5)$$

лѣвая часть котораго можетъ только отличаться отъ лѣвой части (1) общимъ множителемъ.

Приведенное къ формѣ отношенія (5), дифференціальное уравненіе наше продифференцируемъ сполна по x, y, p; получимъ:

$$\frac{\partial F}{dx} + \frac{\partial F}{dy} p + \frac{\partial F}{d\Phi} \left\{ \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Phi}{dy} p + \frac{d\Phi}{dp} \frac{dp}{dx} \right\} = 0.$$

Но сумма первыхъ двухъ членовъ лѣвой части не что иное, какъ результатъ подстановленія въ формулу (3) значенія c, найденнаго изъ нея-же; поэтому сумма эта тождественна нулю и послѣднее равенство сводится на

$$\frac{\partial F}{d\Phi} \left\{ \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Phi}{dy} p + \frac{d\Phi}{dp} \frac{dp}{dx} \right\} = 0. \qquad (6)$$

Вотъ къ какому виду привели мы производную нашего дифференціальнаго уравненія. Формула (6) представляетъ дифференціальное уравненіе втораго порядка, которое, по раздѣленіи лѣвой его части на $\frac{\partial F}{dy}$, представится въ слѣдующей формѣ:

$$\frac{\frac{\partial F}{d\Phi}}{\frac{\partial F}{dy}} \left\{ \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Phi}{dy} p + \frac{d\Phi}{dp} \frac{dp}{dx} \right\} = 0 \qquad (7)$$

и разобьется на два уравненія:

$$\frac{\frac{\partial F}{d\Phi}}{\frac{\partial F}{dy}} = 0, \qquad (8)$$

$$\frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Phi}{dy} p + \frac{d\Phi}{dp}\frac{dp}{dx} = 0. \qquad (9)$$

Послѣднее изъ этихъ двухъ уравненій удовлетворяется отношеніемъ (4), представляющимъ его первый интегралъ. Этотъ первый интегралъ уравненія (9), очевидно, можетъ быть принятъ и за первый интегралъ уравненія (7), если только существованіе его не обращаетъ въ безконечность перваго множителя лѣвой части этого уравненія. Сверхъ того уравненіе (7) удовлетворяется дифференціальнымъ отношеніемъ перваго порядка (5), такъ что имѣемъ два первыхъ рѣшенія этого уравненія:

$$c = \Phi(x, y, p), \quad F(x, y, \Phi) = 0.$$

Исключеніе изъ этихъ двухъ уравненій дифференціальнаго коэффиціента p должно доставить, какъ извѣстно, окончательное рѣшеніе уравненія (7); но p входитъ только въ функцію Φ, почему исключеніе Φ равносильно исключенію p, а исключеніе Φ изъ послѣднихъ двухъ уравненій даетъ, очевидно, въ результатѣ отношеніе

$$F(x, y, c) = 0,$$

т. е. полный интегралъ уравненія (1).

Обращаемся теперь къ равенству (8), представляющему дифференціальное отношеніе перваго порядка. Его, очевидно, можно также разсматривать какъ *первое* рѣшеніе уравненія (7), которому оно удовлетворяетъ, если только существованіе его не обращаетъ въ безконечность втораго множителя лѣвой части этого уравненія. Допустимъ, что это условіе имѣетъ мѣсто. Въ такомъ случаѣ равенство (8) и отношеніе (5) представятъ намъ два первыхъ рѣшенія уравненія (7), именно:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\frac{dF}{d\varphi}}{\frac{dF}{dy}}=0,\\ &F(x,y,\varphi)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Для полученія окончательнаго рѣшенія останется исключить только между послѣдними уравненіями количество p; но p входитъ только въ φ, почему вмѣсто исключенія p можно исключить φ, что, очевидно, приведетъ насъ къ тому-же результату какъ и исключеніе c между уравненіями

$$\frac{\frac{dF}{dc}}{\frac{dF}{dy}}=0,$$

$$F(x,y,c)=0,$$

доставляющее, какъ уже извѣстно, особенныя рѣшенія уравненія (1), если такія имѣются.

И такъ, исключеніе φ изъ равенства (8) и даннаго уравненія, приведеннаго къ виду (5), доставляетъ особенныя рѣшенія этого уравненія.

Кромѣ того высказанное даетъ право заключить: *данное дифференціальное уравненіе перваго порядка между двумя перемѣнными всегда можетъ быть приведено къ такому виду, что, будучи продифференцировано, доставитъ уравненіе втораго порядка, распадающееся на два множителя, изъ которыхъ одинъ, по исключеніи изъ него, при помощи даннаго уравненія, дифференціальнаго коэффиціента, приведетъ къ особеннымъ рѣшеніямъ этого уравненія.*

Предложеніе это впервые доказано Лагранжемъ.

129. Выводы предыдущаго нумера не даютъ еще возможности разыскивать особенныя рѣшенія не найдя предварительно полнаго интеграла: равенства (10), въ той формѣ, въ которой они написаны, выведены сами изъ полнаго интеграла (2). Намъ предстоитъ показать теперь — какимъ образомъ равносильныя имъ условія выводятся изъ самаго уравненія (1).

Что касается до уравненія

$$F(x, y, \varphi)=0,$$

то оно равносильно, какъ извѣстно, уравненію (1), отъ котораго можетъ только отличаться нѣкоторымъ множителемъ, почему и можно, вообще, допустить

$$F(x, y, \varphi)=M.f(x, y, p), \tag{11}$$

гдѣ M нѣкоторая функція x, y, p. Если такъ, то получимъ:

$$\frac{\partial F}{d\varphi}\frac{\partial\varphi}{dp}=\frac{\partial M}{dp}.f(x, y, p)+M\frac{\partial f}{dp},$$

$$\frac{\partial F}{dy}+\frac{\partial F}{d\varphi}\frac{\partial\varphi}{dy}=\frac{\partial M}{dy}f(x, y, p)+M\frac{\partial f}{dy},$$

или, такъ-какъ, въ силу (11), $f(x, y, p)=\dfrac{F(x, y, \varphi)}{M}$, то

$$\frac{\partial F}{d\varphi}.\frac{\partial\varphi}{dp}=\frac{\partial M}{dp}.\frac{F}{M}+M.\frac{\partial f}{dp},$$

$$\frac{\partial F}{dy}+\frac{\partial F}{d\varphi}\frac{\partial\varphi}{dy}=\frac{\partial M}{dy}.\frac{F}{M}+M.\frac{\partial f}{dy},$$

такъ-что будетъ вообще

$$\frac{\frac{\partial F}{d\varphi}}{\frac{\partial F}{dy}}=\frac{\frac{\partial M}{dp}\cdot\frac{F}{M}+M\frac{\partial f}{dp}}{\frac{\partial M}{dy}\cdot\frac{F}{M}+M\frac{\partial f}{dy}}\times\left\{\frac{1+\frac{\frac{\partial F}{d\varphi}}{\frac{\partial F}{dy}}\cdot\frac{\partial\varphi}{dy}}{\frac{\partial\varphi}{dp}}\right\}$$

Въ виду этого первое изъ уравненій (10) сводится на слѣдующее:

$$\frac{\frac{\partial M}{dp}\cdot\frac{F}{M}+M.\frac{\partial f}{dp}}{\frac{\partial M}{dy}\frac{F}{M}+M\frac{\partial f}{dy}}\cdot\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{dp}}=0,$$

такъ-что вмѣсто равенствъ (10) можемъ взять равенства

$$F(x,y,\varphi)=0, \tag{12}$$

$$\left\{\frac{\frac{\partial M}{dp}\frac{F}{M}+M\frac{\partial f}{dp}}{\frac{\partial M}{dy}\frac{F}{M}+M\frac{\partial f}{dy}}\right\}\times\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{dp}}=0; \tag{13}$$

исключеніе изъ нихъ количества p и должно привести къ особенному рѣшенію даннаго уравненія, если такое имѣется. Но при существованіи равенства (12), равенство (13) упрощается и сводится на слѣдующее:

$$\left\{\frac{\frac{\partial f}{dp}}{\frac{\partial f}{dy}}\right\}\times\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{dp}}=0, \tag{14}$$

а равенство (12) равносильно данному дифференціальному уравненію (1), такъ-что вмѣсто равенствъ (12) и (13) можно взять равенство (14) и уравненіе (1) и изъ нихъ исключить количество p.

Мы доказали такимъ образомъ, что равенство (8) можно замѣнить, при разысканіи особенныхъ рѣшеній, равенствомъ (14); но это послѣднее удовлетворяется какъ въ томъ случаѣ, когда имѣемъ

$$\frac{\frac{\partial f}{dp}}{\frac{\partial f}{dy}} = 0, \tag{15}$$

такъ и въ томъ, когда будетъ

$$\frac{\partial \varphi}{dp} = \infty \tag{16}$$

Когда $\frac{\partial \varphi}{dp}$ не равно, вообще, ни нулю, ни безконечности, тогда уравненіе (14) совершенно равносильно уравненію (15) и потому, въ этомъ случаѣ, исключеніе p между уравненіями

$$\frac{\frac{\partial f}{dp}}{\frac{\partial f}{dy}} = 0 \text{ и } f(x, y, p) = 0 \tag{17}$$

доставитъ всѣ тѣ-же особенныя рѣшенія, какъ и исключеніе φ между уравненіями (10). Когда $\frac{\partial \varphi}{dp} = \infty$, тогда могутъ оказаться особенныя рѣшенія, получающіяся чрезъ исключеніе p не между уравненіями (17), а между уравненіемъ (16) и послѣднимъ изъ уравненій (17). Наконецъ, когда одновременно съ первымъ изъ уравненій (17) имѣемъ $\frac{\partial \varphi}{dp} = 0$, тогда существованіе перваго изъ уравненій (17) не обусловливаетъ еще существованія перваго изъ уравненій (10), почему исключеніе p изъ уравненій (17) можетъ приводить и къ такимъ отношеніямъ, которыя не удовлетворяютъ дифференціальному уравненію (1).

Послѣднее обстоятельство не имѣетъ, впрочемъ, существеннаго значенія, такъ-какъ, найдя результатъ исключенія p изъ уравненій (17), легко затѣмъ разслѣдовать на дѣлѣ—удовлетворяетъ ли онъ дифференціальному уравненію.

Изъ всего до сихъ поръ высказаннаго слѣдуетъ, что за исключеніемъ тѣхъ рѣдкихъ случаевъ, когда исключеніе p между уравненіемъ $\frac{d\varphi}{dp} = \infty$ и самымъ дифференціальнымъ уравненіемъ приводитъ къ опредѣленному отношенію между перемѣнными, удовлетворяющему дифференціальному уравненію, *для разысканія особенныхъ рѣшеній дифференціальнаго уравненія*

$$f(x, y, p) = 0$$

нужно только исключить p между нимъ и уравненіемъ

$$\frac{\frac{df}{dp}}{\frac{df}{dy}} = 0.$$

Ясно при этомъ, что указанный способъ приводитъ только къ тѣмъ особеннымъ рѣшеніямъ уравненія, которыя получаются при помощи условія $\frac{dy}{dc} = 0$; слѣдовательно онъ не можетъ доставлять тѣхъ рѣшеній, которыя не содержатъ y, а зависятъ отъ одного x.

130. Такъ-какъ изложенный въ предыдущемъ нумерѣ способъ разысканія особенныхъ рѣшеній можетъ доставлять только особенныя рѣшенія, содержащія x и y, или одно y, то остается дать еще пріемъ и для разысканія особенныхъ рѣшеній, зависящихъ отъ одного x.

Чтобы сдѣлать это, обращаемся къ дифференціальному уравненію

$$f(x, y, p) = 0.$$

До сихъ поръ мы разсматривали въ немъ y какъ функцію x; теперь, на-оборотъ, примемъ x за функцію y. Дифференціальное уравненіе наше въ такомъ случаѣ измѣнитъ нѣсколько свой внѣшній видъ и будетъ уже зависѣть не отъ x, y, $\frac{dy}{dx} = p$, а отъ x, y и $\frac{dx}{dy} = q$, почему представится формулою вида:

$$f_1(y, x, q) = 0.$$

Взявъ теперь полный интегралъ этого уравненія, который, по-прежнему, будетъ выражаться уравненіемъ

$$F(x, y, c) = 0,$$

и разсуждая затѣмъ точно такъ-же, какъ въ двухъ предыдущихъ нумерахъ, найдемъ, что для опредѣленія особенныхъ рѣшеній даннаго дифференціальнаго уравненія, содержащихъ x, необходимо исключить q между даннымъ уравненіемъ и уравненіемъ

$$\frac{\frac{df_1}{dq}}{\frac{df_1}{dx}} = 0.$$

И здѣсь, впрочемъ, нужно замѣтить, что въ тѣхъ, хотя и рѣдкихъ, случаяхъ, когда исключеніе q между даннымъ уравненіемъ и слѣдующимъ

$$\frac{d\psi}{dq} = \infty,$$

гдѣ $\psi(x, y, q) = c$, приводитъ къ опредѣленному отношенію между перемѣнными, и этимъ путемъ можетъ получиться добавочное особенное рѣшеніе даннаго уравненія.

Сопоставивъ сказанное передъ этимъ съ заключенiемъ предыдущаго нумера, получаемъ предложенiе:

Особенныя рѣшенiя дифференцiальнаго уравненiя перваго порядка

$$f(x, y, p) = 0,$$

содержащiя количество y, получаются чрезъ исключенiе p между этимъ уравненiемъ и уравненiемъ

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial p}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0;$$

особенныя же рѣшенiя даннаго уравненiя, содержащiя x, находятся такъ-же точно чрезъ исключенiе $q = \frac{1}{p}$ между даннымъ уравненiемъ, приведеннымъ къ виду

$$f_1(y, x, q) = 0,$$

и отношенiемъ

$$\frac{\frac{\partial f_1}{\partial q}}{\frac{\partial f_1}{\partial x}} = 0;$$

наконецъ, въ иныхъ случаяхъ, могутъ найдтись особенныя рѣшенiя даннаго уравненiя чрезъ ислюченiе p $\left(\text{или } q = \frac{1}{p}\right)$ между нимъ и однимъ изъ уравненiй

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = \infty, \quad \frac{\partial \psi}{\partial q} = \infty.$$

Впрочемъ и теорема эта, и условныя уравненiя

$$\frac{\frac{\partial f}{dp}}{\frac{\partial f}{dy}}=0,\quad \frac{\frac{\partial f_1}{dq}}{\frac{\partial f_1}{dx}}=0$$

могутъ быть представлены въ нѣсколько иной формѣ. Въ самомъ дѣлѣ, взявъ уравненіе $f(x, y, p)=0$, изъ него находимъ

$$\frac{\partial f}{dy}+\frac{\partial f}{dp}\frac{dp}{dy}=0,$$

такъ-что

$$\frac{dp}{dy}=-\frac{\frac{\partial f}{dy}}{\frac{\partial f}{dp}},$$

почему первое изъ условныхъ уравненій сведется на

$$\frac{dp}{dy}=\infty.$$

Взявъ теперь дифференціальное уравненіе въ формѣ $f_1(y,x,q)=0$, найдемъ

$$\frac{\partial f_1}{dx}+\frac{\partial f_1}{dq}\frac{dq}{dx}=0,$$

откуда

$$\frac{dq}{dx}=-\frac{\frac{\partial f_1}{dx}}{\frac{\partial f_1}{dq}},$$

почему второе изъ выше приведенныхъ условныхъ уравненій можно будетъ представить въ формѣ

$$\frac{dq}{dx}=\infty,$$

или, такъ-какъ $q = \frac{1}{p}$, въ слѣдующей:

$$\frac{d\left[\frac{1}{p}\right]}{dx} = \infty,$$

въ которой оно всего чаще и употребляется.

Условныя уравненія

$$\frac{dp}{dy} = \infty, \quad \frac{d\left(\frac{1}{p}\right)}{dx} = \infty$$

впервые были выведены Лапласомъ, а потому и называются часто *условными уравненіями Лапласа.*

Точно такъ-же и добавочныя условія $\frac{\partial \varphi}{dp} = \infty$ и $\frac{\partial \psi}{dq} = \infty$ могутъ быть представлены чрезъ

$$\frac{\partial c}{dp} = \infty \text{ и } \frac{\partial c}{dq} = \infty,$$

такъ-какъ и $\varphi(x, y, p)$ и $\psi(y, x, q)$ выражаютъ, въ сущности, количество c.

Изо всего нами доказаннаго вытекаетъ такимъ образомъ тотъ выводъ, что для разысканія особенныхъ рѣшеній каждаго даннаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка нужно исключить $p = \frac{dy}{dx}$ между уравненіемъ этимъ и каждымъ изъ двухъ уравненій Лапласа

$$\frac{dp}{dy} = \infty \text{ и } \frac{\partial\left(\frac{1}{p}\right)}{dx} = \infty$$

и между даннымъ уравненіемъ и добавочными уравненіями

$$\frac{\partial c}{dp} = \infty \text{ и } \frac{\partial c}{dq} = \infty.$$

Провѣрка того, будутъ ли найденныя такимъ образомъ отношенія рѣшеніями дифференціальнаго уравненія, конечно, не представляетъ затрудненій; но гораздо важнѣе то обстоятельство, что исключеніе p изъ даннаго уравненія и того или другаго изъ условій Лапласа можетъ, какъ было указано нами, приводить иногда и къ частнымъ интеграламъ. Такъ-какъ эти послѣдніе, не содержа произвольнаго постояннаго, по формѣ своей совершенно сходны съ особенными рѣшеніями и отличаются отъ нихъ только способомъ своего полученія изъ полнаго интеграла, то весьма важно дать критерій для рѣшенія — представляютъ ли, въ каждомъ данномъ случаѣ, найденныя при помощи условій Лапласа рѣшенія особенныя рѣшенія, или только частные интегралы. На вопросѣ этомъ мы остановимся ниже, а теперь перейдемъ къ изслѣдованію особенныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій порядковъ выше перваго; но прежде всего, для поясненія предшествующаго, приведемъ примѣръ.

131. Возьмемъ уравненіе

$$y\frac{dy}{dx}+x=\frac{dy}{dx}\sqrt{x^2+y^2-b},$$

которое мы уже разсматривали выше. Означивъ $\frac{dy}{dx}$ черезъ p, приведемъ его къ формѣ

$$py+x-p\sqrt{x^2+y^2-b}=0. \qquad (\alpha)$$

Для опредѣленія особенныхъ рѣшеній этого уравненія нужно раздѣлить частную производную лѣвой его части, взятую по измѣняемости p, на частную производную того-же выраженія, взятую по измѣняемости y, и, приравнявъ полученное частное нулю, исключить p между послѣднимъ и даннымъ уравненіями. Результатъ исключенія и долженъ быть особеннымъ рѣшеніемъ, если такое имѣется.

Продифференцировавъ лѣвую часть уравненія (α) по p, находимъ:

$$y-\sqrt{x^2+y^2-b}, \qquad (\beta)$$

а продифференцировавъ ее по y, получаемъ:

$$p-\frac{py}{\sqrt{x^2+y^2-b}}. \qquad (\gamma)$$

Дѣленіе выраженія (β) на (γ) доставляетъ:

$$\frac{y-\sqrt{x^2+y^2-b}}{p\left(1-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2-b}}\right)},$$

или

$$\frac{[y-\sqrt{x^2+y^2-b}]\sqrt{x^2+y^2-b}}{-p(y-\sqrt{x^2+y^2-b})},$$

т. е. окончательно

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2-b}}{-p}.$$

Приравнявъ это частное нулю, получаемъ уравненіе

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2-b}}{p}=0,$$

которое должно удовлетворяться въ случаѣ существованія особеннаго рѣшенія. Ясно однако, что для этого необходимо — или чтобы имѣли

$$x^2+y^2-b=0, \qquad (\delta)$$

или чтобы было

$$p=\infty.$$

Послѣднее предположеніе не приводитъ ни къ какому опредѣленному результату, почему остается принять первое уравненіе. Изъ него, для полученія особеннаго рѣшенія, оставалось бы только исключить p при помощи уравненія (α); но въ настоящемъ примѣрѣ это уравненіе (δ) уже вовсе не содержитъ p, почему само должно представлять особенное рѣшеніе.

Сравненіе найденнаго результата съ нумеромъ 124-мъ подтверждаетъ справедливость сдѣланнаго заключенія.

Объ особенныхъ рѣшеніяхъ дифференціальныхъ уравненій порядковъ выше перваго.

132. *Особенными рѣшеніями* дифференціальнаго уравненія n-аго порядка между двумя перемѣнными мы будемъ называть, какъ это принято со времени Лапласа и Лагранжа, такія уравненія между тѣми-же перемѣнными, которыя, будучи низшаго порядка чѣмъ дифференціальное уравненіе и представляя его *рѣшенія*, въ то-же время не заключаются въ интегралахъ соотвѣтствующаго порядка этого дифференціальнаго уравненія, т. е. не могутъ быть выведены изъ нихъ сообщеніемъ частныхъ постоянныхъ значеній входящимъ въ нихъ постояннымъ произвольнымъ количествомъ.

Особенныя рѣшенія, представляющія собою дифференціальныя уравненія порядка единицею низшаго чѣмъ данное, будемъ называть *первыми особенными его рѣшеніями;* тѣ, порядокъ которыхъ двумя единицами ниже порядка самаго дифференціальнаго уравненія, будемъ именовать *вторыми особенными его рѣшеніями* и т. д.; наконецъ особенныя рѣшенія, не содержащія вовсе производныхъ зависимаго перемѣннаго, будемъ называть *полными особенными рѣшеніями* дифференціальнаго уравненія.

Самыя производныя зависимаго перемѣннаго y, т. е. $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$, условимся, для краткости, означать соотвѣтственно чрезъ y_1, $y_2, \ldots y_n$. Сверхъ того, для означенія результатовъ дифференцированія какого-либо выраженія только относительно одного изъ входящихъ въ него количествъ, не обращая вниманія на всѣ прочія, будемъ употреблять (какъ дѣлали и передъ этимъ) характеристику ∂ вмѣсто характеристики d, которая будетъ служить для означенія результатовъ дифференцированія относительно перемѣннаго, принимая во вниманіе измѣняемость и зависящихъ отъ него количествъ.

Условившись во всемъ этомъ, возьмемъ дифференціальное уравненіе n-аго порядка, разрѣшенное относительно производной n-аго порядка зависимаго перемѣннаго, вида

$$y_n = f(x, y, y_1, \ldots y_{n-1}) \qquad (1)$$

и положимъ, что

$$y = F(x, c_1, c_2, \ldots c_n) \qquad (2)$$

есть полный интегралъ его. Не трудно доказать, что всякое отношеніе вида

$$y = \Phi(x), \qquad (3)$$

не заключающее произвольныхъ постоянныхъ c_1, $c_2, \ldots c_n$ и не получающееся изъ уравненія (2) сообщеніемъ постояннымъ произвольнымъ частныхъ постоянныхъ значеній, всегда можетъ быть выведено изъ уравненія (2) замѣною одного изъ произвольныхъ постоянныхъ прилично выбранною функціею x и остальныхъ произвольныхъ постоянныхъ, входящихъ въ правую часть уравненія (2).

Въ самомъ дѣлѣ, для того, чтобы уравненіе (2) перешло въ уравненіе (3), необходимо и достаточно, чтобы при всевозможныхъ значеніяхъ x мы имѣли

$$F(x, c_1, c_2, \ldots c_{n-1}, c_n) = \Phi(x),$$

уравненіе, которое, по разрѣшеніи его относительно одного изъ произвольныхъ постоянныхъ, напримѣръ относительно c_n, доставитъ для этого количества выраженіе вида

$$c_n = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots c_{n-1}).$$

Подстановка этого выраженія на мѣсто c_n въ правую часть уравненія (2) и обратитъ ее, очевидно, въ $\Phi(x)$, и это — какія бы значенія ни имѣли произвольныя количества $c_1, c_2, \ldots c_n$. Слѣдовательно, когда $\Phi(x)$ не содержитъ ни одного изъ произвольныхъ количествъ, входящихъ въ уравненіе (2), всѣ члены результата подстановки, въ которые входятъ $c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$, должны тождественно уничтожаться.

И такъ, *всякое отношеніе между перемѣнными, не содержащее произвольныхъ постоянныхъ, или содержащее ихъ въ числѣ меньшемъ чѣмъ полный интегралъ дифференціальнаго уравненія, и въ то-же время не выводящееся изъ этого интеграла сообщеніемъ частныхъ постоянныхъ значеній произвольнымъ постояннымъ, всегда можетъ быть выведено изъ этого полнаго интеграла замѣною въ немъ одного изъ произвольныхъ постоянныхъ функціональнымъ выраженіемъ.*

133. Возвращаемся теперь къ полному интегралу (2) и разсмотримъ — при какихъ условіяхъ замѣна въ немъ одного изъ произвольныхъ постоянныхъ функціею перемѣннаго x измѣняетъ его въ отношеніе, представляющее все-таки рѣшеніе дифференціальнаго уравненія.

Пока $c_1, c_2, \ldots c_n$ остаются постоянными величинами, дифференцированіе интеграла (2) доставляетъ систему уравненій:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{\partial F(x, c_1, c_2, \ldots c_n)}{dx}, \\ y_2 &= \frac{\partial^2 F(x, c_1, c_2, \ldots c_n)}{dx^2}, \\ y_3 &= \frac{\partial^3 F(x, c_1, c_2, \ldots c_n)}{dx^3}, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y_n &= \frac{\partial^n F(x, c_1, c_2, \ldots c_n)}{dx^n} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

и исключеніе количествъ $c_1, c_2, \ldots c_n$ между этими уравненіями (4) и уравненіемъ (2) даетъ въ результатѣ уравненіе тождественное съ дифференціальнымъ уравненіемъ (1).

Допустимъ теперь, что количества $c_1, c_2, \ldots c_n$ обратились въ функціи x. Чтобы и теперь уравненіе (2) оставалось рѣшеніемъ дифференціальнаго уравненія (1), необходимо, чтобы послѣдовательное дифференцированіе формулы (2) снова доставило систему уравненій (4), а для этого нужно и достаточно, чтобы удовлетворялась система добавочныхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{dc_1}\,dc_1 + \frac{\partial F}{dc_2}\,dc_2 + \ldots + \frac{\partial F}{dc_n}\,dc_n = 0,\\
&\frac{\partial^2 F}{dxdc_1}\,dc_1 + \frac{\partial^2 F}{dxdc_2}\,dc_2 + \ldots + \frac{\partial^2 F}{dxdc_n}\,dc_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial^n F}{dx^{n-1}dc_1}\,dc_1 + \frac{\partial^n F}{dx^{n-1}dc_2}\,dc_2 + \ldots + \frac{\partial^n F}{dx^{n-1}dc_n}\,dc_n = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Эта система уравненій можетъ, однако, имѣть мѣсто или въ случаѣ, когда вообще имѣемъ совмѣстно

$$dc_1 = 0,\ dc_2 = 0, \ldots dc_n = 0,$$

или когда удовлетворяется уравненіе

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial F}{dc_1}, & \frac{\partial F}{dc_2}, & \ldots & \frac{\partial F}{dc_n}\\
\frac{\partial^2 F}{dxdc_1}, & \frac{\partial^2 F}{dxdc_2}, & \ldots & \frac{\partial^2 F}{dxdc_n}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\frac{\partial^n F}{dx^{n-1}dc_1}, & \frac{\partial^n F}{dx^{n-1}dc_2}, & \ldots & \frac{\partial^n F}{dx^{n-1}dc_n}
\end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

зависящее отъ x и количествъ $c_1, c_2, \ldots c_n$. Первый случай соотвѣтствуетъ допущенію количествъ $c_1, c_2, \ldots c_n$ постоянными величинами; во второмъ случаѣ для одного изъ количествъ $c_1, c_2, \ldots c_n$, напримѣръ для c_n, изъ уравненія (6) получаемъ выраженіе, зависящее отъ x и $c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$. Внеся это выраженіе на мѣсто c_n въ уравненія (2) и (4), затѣмъ будемъ уже имѣть возможность исключить или всѣ производныя $y_1, y_2, \ldots y_n$, что приведетъ къ уравненію вида

$$y = F_1(x, c_1, c_2, \ldots c_{n-1}), \tag{7}$$

или всѣ количества $c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$ и высшую производную y_n, что доставитъ уравненіе

$$y_{n-1} = \psi(x, y, y_1, \ldots y_{n-2}), \tag{8}$$

интеграція котораго приведетъ въ результатѣ къ уравненію, содержащему $n-1$ произвольныхъ постоянныхъ количествъ.

Уравненіе (7) можетъ быть разсматриваемо какъ результатъ непосредственной замѣны въ полномъ интегралѣ (2) количества c_n его выраженіемъ, получаемымъ изъ уравненія (6), уравненія — обусловливающаго совмѣстное существованіе системы уравненій (4); поэтому уравненіе (7), чрезъ послѣдовательное дифференцированіе n разъ и исключеніе затѣмъ $c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$, должно привести къ данному дифференціальному уравненію (1), т. е. уравненіе (7) представляетъ *рѣшеніе* уравненія (1). Рѣшеніе это есть *полное особенное*, если только значеніе c_n изъ уравненія (6) зависитъ дѣйствительно отъ x, а не сводится на постоянную величину. Что касается до уравненія (8), то и оно чрезъ дифференцированіе должно приводить къ уравненію (1), а потому и представляетъ *первое особенное рѣшеніе* его. Легко понять также, что продифференцировавъ $n-1$ разъ уравненіе (7) и исключивъ $c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$, мы получаемъ уравненіе (8), такъ что уравненіе (7) представляетъ полный интегралъ уравненія (8). Наконецъ ясно также, что первое особенное рѣшеніе (8) получается въ результатѣ и въ тѣхъ случаяхъ, когда начинаемъ съ исключенія $(n-1)$ изъ количествъ $c_1, c_2, \ldots c_n$ между уравненіемъ (2) и первыми $(n-1)$-ею уравненіями (4) и затѣмъ уже, въ полученномъ такимъ образомъ первомъ интегралѣ уравненія (1), произвольное постоянное исключаемъ при помощи уравненія (6), освобожденнаго предварительно отъ прочихъ произвольныхъ постоянныхъ. Слѣдовательно видимъ, что первое особенное рѣшеніе выводится изъ любаго изъ первыхъ интеграловъ.

Въ итогѣ имѣемъ теперь слѣдующія предложенія, изъ которыхъ первое высказано было впервые Лежандромъ, а остальныя два принадлежатъ Лагранжу.

Полное особенное рѣшеніе дифференціальнаго уравненія n-аго порядка представляетъ уравненіе между перемѣнными, содержащее по большей мѣрѣ $n-1$ произвольныхъ постоянныхъ количествъ.

Каждый первый интегралъ дифференціальнаго уравненія приводитъ, чрезъ замѣну въ немъ произвольнаго постояннаго функціями перемѣннаго независимаго, къ однимъ и тѣмъже первымъ особеннымъ рѣшеніямъ.

Полныя особенныя рѣшенія представляютъ полные интегралы первыхъ особенныхъ рѣшеній дифференціальнаго уравненія.

134. Изъ предыдущаго ясно, что, имѣя полный интегралъ (2) дифференціальнаго уравненія n-аго порядка и желая найдти особенныя рѣшенія этого уравненія, нужно только составить уравненіе (6) и, разрѣшивъ его относительно одного изъ произвольныхъ постоянныхъ, найденныя такимъ образомъ функціональныя выраженія подставлять въ интегралъ (2): въ результатѣ такихъ подстановокъ и будемъ получать полныя особенныя рѣшенія дифференціальнаго уравненія. Сложность уравненія (6) дѣлаетъ однако способъ этотъ неудобнымъ на практикѣ, почему гораздо выгоднѣе искать первыя особенныя рѣшенія уравненія по данному одному изъ первыхъ интеграловъ его; затѣмъ отъ этихъ первыхъ особенныхъ рѣшенiй путемъ интегрированiя можно всегда перейдти, въ силу послѣдняго изъ предложенiй предыдущаго нумера, и къ полнымъ особеннымъ рѣшенiямъ.

Разсмотримъ же, какимъ образомъ первыя особенныя рѣшенiя получаются изъ перваго интеграла.

Пусть

$$y_n = f(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}) \tag{1}$$

данное дифференцiальное уравненiе n-аго порядка, а

$$y_{n-1} = F(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-2}, c) \tag{2}$$

его первый интегралъ. Дифференцированiе этого послѣдняго доставляетъ непосредственно

$$y_n = \frac{\partial F}{dx} + \frac{\partial F}{dy} y_1 + \frac{\partial F}{dy_1} y_2 + \ldots + \frac{\partial F}{dy_{n-2}} y_{n-1}, \tag{3}$$

уравненiе, дѣлающееся тождественнымъ съ даннымъ дифференцiальнымъ уравненiемъ (1) по замѣнѣ въ немъ c его выраженiемъ изъ уравненiя (2).

Если допустить однако c не постоянною величиною, а функцiею x, то дифференцированiе уравненiя (2) дастъ

$$y_n = \frac{\partial F}{dx} + \frac{\partial F}{dy} y_1 + \frac{\partial F}{dy_1} y_2 + \ldots + \frac{\partial F}{dy_{n-2}} y_{n-1} + \frac{\partial F}{dc}\frac{dc}{dx} \tag{4}$$

и для того, чтобы уравненiе (2) оставалось и въ этомъ случаѣ рѣшенiемъ уравненiя (1), будетъ необходимо и достаточно, чтобы мы имѣли или

$$dc = 0,$$

или

$$\frac{\partial F}{dc} = 0. \tag{5}$$

Первое условіе имѣетъ мѣсто только при c постоянномъ; второе же, которое можно написать въ формѣ

$$\frac{dy_{n-1}}{dc}=0, \tag{6}$$

даетъ вообще для c функціональныя выраженія, подставляя которыя въ интегралъ (2) и будемъ получать *первыя особенныя рѣшенія* уравненія (1).

Можетъ случиться, что и изъ уравненія (6) c опредѣлится какъ постоянное: это признакъ, что уравненіе (1) не имѣетъ особенныхъ рѣшеній.

Если-бы первый интегралъ уравненія (1) данъ былъ въ формѣ

$$F(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, c)=0,$$

то, полагая c постояннымъ, нашли бы

$$y_n=-\frac{\dfrac{dF}{dx}+\dfrac{dF}{dy}y_1+\dfrac{dF}{dy_1}y_2+\ldots+\dfrac{dF}{dy_{n-2}}y_{n-1}}{\dfrac{dF}{dy_{n-1}}},$$

а принимая c за функцію x, имѣли бы

$$y_n=-\frac{\dfrac{dF}{dx}+\dfrac{dF}{dy}y_1+\dfrac{dF}{dy_1}y_2+\ldots+\dfrac{dF}{dy_{n-2}}y_{n-1}}{\dfrac{dF}{dy_{n-1}}}-\frac{\dfrac{dF}{dc}}{\dfrac{dF}{dy_{n-1}}}\frac{dc}{dx},$$

почему условіе (6) представилось бы въ формѣ

$$\frac{\dfrac{dF}{dc}}{\dfrac{dF}{dy_{n-1}}}=0 \tag{7}$$

и имѣло бы мѣсто, какъ въ случаѣ, когда

$$\frac{\partial F}{dc} = 0, \tag{8}$$

такъ и въ томъ, когда

$$\frac{\partial F}{dy_{n-1}} = \infty. \tag{9}$$

И такъ, *для разысканія особенныхъ первыхъ рѣшеній дифференціальнаго уравненія n-аго порядка, достаточно подставлять въ его первый интегралъ функціональныя значенія c, получаемыя чрезъ рѣшеніе уравненія* (6).

Примѣръ. Дано дифференціальное уравненіе втораго порядка

$$y_2^2 - 2\frac{y_1 y_2}{x} + 1 = 0, \tag{α}$$

первый интегралъ котораго

$$x^2 - 2cy_1 + c^2 = 0 \tag{β}$$

намъ извѣстенъ. Найдемъ первыя особенныя рѣшенія.

Въ настоящемъ случаѣ

$$\frac{dy_1}{dc} = \frac{c^2 - x^2}{2c^2},$$

а потому условное уравненіе (6) сведется на

$$c^2 - x^2 = 0$$

и мы получимъ для c выраженіе

$$c = \pm x,$$

подстановка котораго въ уравненіе (β) доставитъ

$$y_1 \mp x = 0,$$

отношеніе, которое и представляетъ первое особенное рѣшеніе уравненія (1). Проинтегрировавъ его, найдемъ

$$y \mp \frac{1}{2}x^2 - c_1 = 0,$$

уравненіе, представляющее полное особенное рѣшеніе даннаго дифференціальнаго уравненія (α).

135. Разсмотримъ теперь какимъ образомъ разыскиваются первыя особенныя рѣшенія въ томъ случаѣ, когда первые интегралы дифференціальнаго уравненія намъ неизвѣстны.

Пусть

$$f(x, y, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0 \qquad (1)$$

данное дифференціальное уравненіе, а

$$F(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}\, c) = 0 \qquad (2)$$

его первый интегралъ. Дифференцированіе уравненія (2) доставляетъ

$$\frac{\partial F}{dx} + \frac{\partial F}{dy}y_1 + \frac{\partial F}{dy_1}y_2 + \ldots + \frac{\partial F}{dy_{n-1}}y_n = 0. \qquad (3)$$

Исключеніе c между уравненіями (2) и (3) приводитъ, какъ извѣстно, къ данному дифференціальному уравненію (1), почему, рѣшивъ уравненіе (3) относительно c и выразивъ, такимъ образомъ, это количество отношеніемъ

$$c = \Phi(x, y, y_1, y_2, \ldots y_n) \qquad (4)$$

какъ функцію количествъ $x, y, y_1, \ldots y_n$, по подстановленіи въ формулу (2) получимъ дифференціальное уравненіе (1) въ формѣ уравненія

$$F(x, y, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, \Phi) = 0, \qquad (5)$$

лѣвая часть котораго можетъ только отличаться отъ лѣвой части (1) общимъ множителемъ.

Приведенное къ формѣ (5), дифференціальное уравненіе наше продифференцируемъ сполна по x; получимъ:

$$\frac{\partial F}{dx}+\frac{\partial F}{dy}y_1+\frac{\partial F}{dy_1}y_2+\ldots+\frac{\partial F}{dy_{n-1}}y_n$$
$$+\frac{\partial F}{d\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{dx}+\frac{\partial\varphi}{dy}y_1+\ldots+\frac{\partial\varphi}{dy_n}y_{n+1}\right)=0.$$

Но сумма первыхъ $n+1$ членовъ лѣвой части не что иное какъ результатъ подстановки въ уравненіе (3) значенія c, найденнаго изъ него же, почему она тождественно равна нулю и послѣдняя формула сводится на

$$\frac{\partial F(x,y,y_1,\ldots y_{n-1},\varphi)}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}y_1+\ldots+\frac{d\varphi}{dy_n}y_{n+1}\right)=0, \quad (6)$$

и, по раздѣленіи на

$$\frac{\partial F(x,y,y_1,\ldots y_{n-1},\varphi)}{dy_{n-1}},$$

мы получаемъ:

$$\left\{\frac{\dfrac{\partial F(x,y,y_1,\ldots y_{n-1},\varphi)}{d\varphi}}{\dfrac{\partial F(x,y,y_1,\ldots y_{n-1},\varphi)}{dy_{n-1}}}\right\}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{dx}+\frac{\partial\varphi}{dy}y_1+\ldots+\frac{\partial\varphi}{dy_n}y_{n+1}\right)=0. \quad (7)$$

Это уравненіе разбивается на два слѣдующихъ:

$$\frac{\dfrac{\partial F(x,y,y_1,\ldots y_{n-1},\varphi)}{d\varphi}}{\dfrac{\partial F(x,y,y_1,\ldots y_{n-1},\varphi)}{dy_{n-1}}}=0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial\varphi}{dx}+\frac{\partial\varphi}{dy}y_1+\ldots+\frac{\partial\varphi}{dy_n}y_{n+1}=0, \quad (9)$$

изъ которыхъ послѣднее имѣетъ первымъ интеграломъ отношеніе (4). Этотъ первый интегралъ уравненія (9) можно принять и за первый интегралъ уравненія (7), если только существованіе его не обращаетъ въ безконечность перваго множителя лѣвой части этого уравненія. Что касается до уравненія (8), то, будучи порядка единицею низшаго чѣмъ уравненіе (7), оно само можетъ быть разсматриваемо за *первое* рѣшеніе уравненія (7), если только существованіе его не обращаетъ въ безконечность лѣвой части уравненія (9).

Въ виду этого уравненія

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\dfrac{\partial F(x,y,y_1,\ldots y_{n-1},\Phi)}{d\Phi}}{\dfrac{\partial F(x,y,y_1,\ldots y_{n-1},\Phi)}{dy_{n-1}}}=0,\\[2ex]&F(x,y,y_1,\ldots y_{n-1},\Phi)=0\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

будутъ представлять два первыхъ рѣшенія уравненія (7) и исключеніе изъ нихъ высшей производной y_n приведетъ къ уравненію, составляющему *второе* рѣшеніе уравненія (7). Но y_n въ уравненіяхъ (10) входитъ только въ Φ, а потому исключеніе между этими уравненіями Φ равносильно исключенію y_n; исключеніе же Φ приведетъ къ уравненію, представляющему особенное рѣшеніе уравненія (1), какъ это слѣдуетъ изъ высказаннаго въ предыдущемъ нумерѣ.

И такъ, *къ особеннымъ рѣшеніямъ уравненія (1) можемъ придти чрезъ исключеніе y_n между уравненіями (10).*

Остановимся на разсмотрѣніи этихъ уравненій.

Послѣднее изъ нихъ не что иное какъ самое дифференціальное уравненіе (1), почему выраженія $F(x, y, y_1, \ldots y_{n-1}, \Phi)$ и $f(x, y, y_1, \ldots y_{n-1}, y_n)$ могутъ разниться между собою только общимъ множителемъ, представляющимъ, по большей мѣрѣ, функцію $x, y, y_1, \ldots y_n$. Пусть M этотъ множитель, такъ что вообще

$$F(x, y, y_1, \ldots y_{n-1}, \Phi) = M.f(x, y, y_1, \ldots y_{n-1}, y_n) \quad (11)$$

Дифференцированіе этого тождества даетъ:

$$\frac{\partial F}{d\Phi}\cdot\frac{d\Phi}{dy_n}=\frac{\partial M}{dy_n}.f(x,\ldots y_n)+M\frac{\partial f}{dy_n},$$

$$\frac{\partial F}{dy_{n-1}} + \frac{\partial F}{d\Phi}\frac{d\Phi}{dy_{n-1}} = \frac{\partial M}{dy_{n-1}} f(x, \ldots y_n) + M.\frac{\partial f}{dy_{n-1}},$$

а потому мы получимъ:

$$\frac{\dfrac{\partial F}{d\Phi}}{\dfrac{\partial F}{dy_{n-1}}} = \frac{\dfrac{\partial M}{dy_n} f(x, \ldots y_n) + M\dfrac{\partial f}{dy_n}}{\dfrac{\partial M}{dy_{n-1}} f(x, \ldots y_n) + M\dfrac{\partial f}{dy_{n-1}}} \times \left[\frac{1 + \dfrac{\dfrac{\partial F}{d\Phi}}{\dfrac{dF}{dy_{n-1}}} \cdot \dfrac{\partial \Phi}{dy_{n-1}}}{\dfrac{\partial \Phi}{dy_n}}\right].$$

Въ виду этого первое изъ уравненій (10) сводится на слѣдующее:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{dy_n} f(x, \ldots y_n) + M\dfrac{\partial f}{dy_n}}{\dfrac{\partial M}{dy_{n-1}} f(x, \ldots y_n) + M\dfrac{\partial f}{dy_{n-1}}} \times \left[\frac{1}{\dfrac{\partial \Phi}{dy_n}}\right] = 0 \qquad (12)$$

и особенныя рѣшенія дифференціальнаго уравненія (1) должны получаться исключеніемъ y_n между этимъ уравненіемъ и уравненіемъ

$$F(x, y, y_1, \ldots y_{n-1}, \Phi) = 0,$$

которое равносильно данному. Но коль-скоро $F(x, \ldots y_{n-1}, \Phi) = 0$, то, въ виду формулы (11), уравненіе (12) упростится и сведется окончательно на

$$\left(\frac{\dfrac{\partial f}{dy_n}}{\dfrac{\partial f}{dy_{n-1}}}\right) \cdot \frac{1}{\dfrac{\partial \Phi}{dy_n}} = 0, \qquad (13)$$

почему исключеніе y_n между уравненіемъ (13) и уравненіемъ $F(x, y, \ldots y_{n-1}, \Phi) = 0$, или равносильнымъ ему уравненіемъ (1), должно доставлять тѣ-же самые результаты, какъ и исключеніе y_n (или Φ) между уравненіями (10), т. е. оно должно приводить къ особеннымъ рѣшеніямъ уравненія (1).

Уравненіе (13) разбивается на два слѣдующія:

$$\frac{\frac{\partial f}{dy_n}}{\frac{\partial f}{dy_{n-1}}} = 0, \text{ или } \frac{\partial \Phi}{dy_n} = \infty.$$

Когда $\frac{\partial \Phi}{dy_n}$ не равно, вообще, ни нулю, ни безконечности, тогда первое изъ послѣднихъ уравненій совершенно равносильно первому изъ уравненій (10) и потому исключеніе y_n между уравненіями

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\frac{\partial f}{dy_n}}{\frac{\partial f}{dy_{n-1}}} = 0 \\ \\ f(x, y, \ldots y_n) = 0 \end{array}\right\} \qquad (14)$$

доставляетъ всѣ тѣ-же первыя особенныя рѣшенія, какъ и исключеніе Φ между уравненіями (10). Когда $\frac{\partial \Phi}{dy_n} = \infty$, тогда могутъ оказаться особенныя рѣшенія, не получающіяся при посредствѣ уравненій (14). Наконецъ, когда одновременно съ первымъ изъ уравненій (14) имѣемъ $\frac{\partial \Phi}{dy_n} = 0$, тогда существованіе перваго изъ уравненій (14) не обусловливаетъ еще существованія перваго изъ уравненій (10), почему исключеніе y_n изъ уравненій (14) можетъ иногда приводить и къ такимъ отношеніямъ, которыя не удовлетворяютъ дифференціальному уравненію (1). Послѣднее обстоятельство не имѣетъ, впрочемъ, существеннаго значенія, такъ-какъ, найдя результатъ исключенія y_n изъ уравненій (14), легко затѣмъ разслѣдовать на дѣлѣ — удовлетворяетъ ли онъ дифференціальному уравненію.

Изъ всего предшествующаго получаемъ такой выводъ:

Особенныя первыя рѣшенія дифференціальнаго уравненія n-аго порядка

$$f(x, y, y_1, \ldots y_n) = 0$$

находятся чрезъ исключеніе y_n *между этимъ уравненіемъ и слѣдующимъ:*

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y_n}}{\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}} = 0. \qquad (15)$$

Уравненіе (15) можетъ быть представлено еще въ иной формѣ. Продифференцировавъ данное дифференціальное уравненіе

$$f(x, y, y_1, \ldots y_n) = 0$$

по измѣняемости y_{n-1}, разсматривая y_n какъ его функцію, получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial f}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dy_{n-1}} = 0;$$

откуда

$$\frac{dy_n}{dy_{n-1}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}}{\frac{\partial f}{\partial y_n}},$$

почему уравненіе (15) приметъ видъ

$$\frac{dy_n}{dy_{n-1}} = \infty. \qquad (16)$$

Въ этой формѣ уравненіе это выведено было Лапласомъ, имя котораго и осталось за нимъ.