Примѣръ. Дано уравненіе втораго порядка

$$y_2^{\,2}-2\frac{y_1 y_2}{x}+1=0,$$

которое мы уже разсматривали въ предыдущемъ нумерѣ. Уравненіе (15) сведется теперь на

$$-\frac{2y_2-2\dfrac{y_1}{x}}{2\dfrac{y_2}{x}}=0$$

и будетъ имѣть мѣсто, когда

$$y_2=\frac{y_1}{x}$$

и когда

$$y_2=\infty.$$

Послѣднее выраженіе оставляемъ въ сторонѣ, какъ неудовлетворяющее данному уравненію, а первое подставляемъ въ это уравненіе, послѣ чего находимъ

$$-\frac{y_1^{\,2}}{x^2}+1=0,$$

т. е.

$$y_1^{\,2}=x^2,\ \text{или}\ y_1=\pm x,$$

результатъ, который и представляетъ первое особенное рѣшеніе даннаго уравненія.

*Критеріумы, служащіе для отличія особенныхъ рѣшеній отъ частныхъ интеграловъ.*

**136.** Такъ-какъ особенныя рѣшенія дифференціальныхъ уравненій по внѣшнему своему виду совершенно сходны съ частными интегралами, отъ которыхъ отличаются только способомъ своего полученія изъ общихъ первыхъ интеграловъ, то въ тѣхъ случаяхъ, когда общій первый интегралъ уравненія неизвѣстенъ, рѣшеніе вопроса о томъ—будетъ ли дѣйствительно рѣшеніе дифференціальнаго уравненія, найденное пріемомъ, изложеннымъ въ послѣднемъ нумерѣ, особеннымъ его рѣшеніемъ или же первымъ частнымъ интеграломъ, представляется далеко не легкимъ. Между тѣмъ оставить этотъ вопросъ безъ отвѣта весьма не желательно, такъ-какъ нѣтъ сомнѣнія, что пріемы, нами указанные, часто приводятъ къ рѣшеніямъ, которыя только частные интегралы даннаго дифференціальнаго уравненія. Какъ бы то ни было, однако Лагранжъ и Лапласъ оставили этотъ пунктъ теоріи особенныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій безъ разъясненія. Коши первый остановился на немъ и далъ три теоремы, позволяющія рѣшать въ каждомъ частномъ случаѣ—представляетъ ли найденное рѣшеніе дифференціальнаго уравненія перваго порядка, не содержащее произвольнаго количества, особенное рѣшеніе или частный интегралъ этого уравненія. Правда, въ послѣдствіи времени англійскій ученый Буль высказался было противъ необходимости и даже вѣрности критеріумовъ Коши; но затѣмъ онъ самъ отказался отъ такого мнѣнія и призналъ даже, что ближайшимъ шагомъ къ пополненію теоріи особенныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій должно быть установленіе и для уравненій порядковъ выше перваго критеріумовъ, соотвѣтствующихъ тѣмъ, которые установлены Коши для уравненій 1-го порядка. Мы постараемся показать, впрочемъ, что теоремы Коши легко могутъ быть обобщены.

**137.** Начнемъ съ доказательства слѣдующаго предложенія:

Предложеніе I. *Отношеніе*

$$y_{n-1} = \varphi(x, y, y_1, \ldots y_{n-2}),$$

*удовлетворяющее дифференціальному уравненію n-аго порядка*

$$dy_{n-1} = F(x, y, y_1, \dots y_{n-1})\, dx, \qquad (1)$$

*будетъ или частнымъ интеграломъ, или особеннымъ рѣшеніемъ этого уравненія смотря по тому, будетъ ли отношеніе $z=0$ частнымъ интеграломъ или особеннымъ рѣшеніемъ уравненія*

$$dz = [F(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \varphi+z) - F(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \varphi)]\, dx. \quad (2)$$

Пусть общій первый интегралъ уравненія (1) представленъ формулою

$$\Phi(x, y, y_1, \dots y_{n-1}, c) = 0 \qquad (3)$$

и пусть, рѣшивъ ее относительно $y_{n-1}$, мы нашли

$$y_{n-1} = \varphi(x, y, y_1, \dots y_{n-2}) + z, \qquad (4)$$

такъ что съ допущеніемъ $z=0$ мы получаемъ отношеніе

$$y_{n-1} = \varphi(x, y, y_1, \dots y_{n-2}), \qquad (5)$$

представляющее первое рѣшеніе уравненія (1).

Внеся въ уравненіе (1) значеніе $y_{n-1}$ изъ формулы (4), получимъ:

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dz}{dx} = F(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \varphi+z),$$

а подставивъ въ то-же уравненіе значеніе $y_{n-1}$ изъ формулы (5), также ему удовлетворяющее по положенію, найдемъ:

$$\frac{d\varphi}{dx} = F(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \varphi).$$

Вычтя послѣднія формулы одну изъ другой, непосредственно получимъ уравненіе (2), которое, слѣдовательно, существуетъ совмѣстно съ даннымъ. Ясно также, что уравненіе $z=0$ представляетъ рѣшеніе уравненія (2); но допущеніе $z=0$ сводитъ первый интегралъ (4) на уравненіе (5), а потому какъ отношеніе $z=0$, такъ и отношеніе (5) получаются однимъ и тѣмъ же путемъ: или замѣною произвольнаго постояннаго формулы (3) функціональнымъ количествомъ, или сообщеніемъ этому постоянному частнаго численнаго значенія. Слѣдовательно, отношеніе (5) будетъ особеннымъ рѣшеніемъ уравненія (1), когда отношеніе $z=0$ особенное рѣшеніе уравненія (2) и, напротивъ, отношеніе (5) представляетъ частный интегралъ уравненія (1), когда отношеніе $z=0$ есть частный интегралъ уравненія (2). Предложеніе и оправдано.

Такъ-какъ, конечно, совершенно безразлично какою буквою ни обозначать ту неизвѣстную функцію, обладающую свойствомъ удовлетворять уравненію (2), которую мы обозначали черезъ $z$, то доказанную теорему можно еще высказать въ такой формѣ:

*Для опредѣленія какого рода рѣшеніе, особенное или частное, представляетъ отношеніе*

$$y_{n-1}=\varphi(x, y, y_1, \dots y_{n-2}),$$

*удовлетворяющее дифференціальному уравненію*

$$\frac{dy_{n-1}}{dx}=F(x, y, y_1, \dots y_{n-1}),$$

*нужно только рѣшить будетъ ли отношеніе* $y_{n-1}=0$ *особеннымъ рѣшеніемъ или частнымъ интеграломъ уравненія*

$$\frac{dy_{n-1}}{dx}=F[x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \varphi(x, y, \dots y_{n-2})+y_{n-1}]$$

$$-F[x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \varphi(x, y, \dots y_{n-2})],$$

*зависящаго отъ тѣхъ-же перемѣнныхъ.*

И такъ, вопросъ сводится всегда на разсмотрѣніе рѣшеній вида $y_{n-1}=0$.

138. Теперь можемъ доказать еще слѣдующую теорему:

Предложеніе II. *Если отношеніе $y_{n-1}=0$ представляетъ особенное рѣшеніе уравненія*

$$dy_{n-1}-F(x, y, y_1, \ldots y_{n-1})\,dx=0, \qquad (1)$$

*то, взявъ два безконечно-малыхъ количества $\alpha$, $\beta$, изъ которыхъ первое выбрано такъ, чтобы функція $F(x, y, y_1, \ldots y_{n-1})$ сохраняла одинъ и тотъ-же знакъ при измѣненіи $y_{n-1}$ внутри предѣловъ $y_{n-1}=\alpha$, $y_{n-1}=\beta$, получимъ, что интегралъ*

$$\int_\alpha^\beta \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, y_1, \ldots y_{n-1})}$$

*будетъ самъ величиною неизмѣримо-малою.*

Предположивъ, что первый интегралъ даннаго уравненія (1) представленъ въ формѣ

$$\Phi(x, y, y_1, \ldots y_{n-1})=c, \qquad (2)$$

продифференцируемъ это отношеніе сполна относительно $x$; получимъ:

$$\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Phi}{dy}y_1+\frac{d\Phi}{dy_1}y_2+\ldots+\frac{d\Phi}{dy_{n-2}}y_{n-1}+\frac{d\Phi}{dy_{n-1}}\frac{dy_{n-1}}{dx}=0.$$

Отсюда

$$\frac{dy_{n-1}}{dx}=-\frac{\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Phi}{dy}y_1+\ldots+\frac{d\Phi}{dy_{n-2}}y_{n-1}}{\frac{d\Phi}{dy_{n-1}}},$$

или, положивъ для краткости

$$-\left[\frac{\partial \Phi}{dx}+\frac{\partial \Phi}{dy}y_1+\ldots+\frac{\partial \Phi}{dy_{n-2}}y_{n-1}\right]=\Psi(x,y,y_1,\ldots y_{n-1}), \quad (3)$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx}=\frac{\Psi(x,y,y_1,\ldots y_{n-1})}{\frac{d\Phi}{dy_{n-1}}}. \quad (4)$$

Съ другой стороны, изъ уравненія (1) непосредственно находимъ:

$$\frac{dy_{n-1}}{dx}=F(x,y,y_1,\ldots y_{n-1}). \quad (5)$$

Такъ-какъ, правая часть формулы (4) на содержитъ уже произвольнаго постояннаго, то выраженія, доставляемыя для $\frac{dy_{n-1}}{dx}$ формулами (4) и (5), должны быть тождествены между собою. Въ слѣдствіе этого будемъ имѣть вообще

$$F(x,y,y_1,\ldots y_{n-1})=\frac{\Psi(x,y,y_1,\ y_{n-1})}{\frac{d\Phi}{dy_{n-1}}},$$

или

$$\frac{\partial \Phi}{dy_{n-1}}=\frac{\Psi(x,y,y_1,\ldots y_{n-1})}{F(x,y,y_1,\ldots y_{n-1})}.$$

Интегрированіе относительно $y_{n-1}$ между предѣлами $\alpha, \beta$ доставляетъ теперь:

$$\Phi(x,y,y_1,\ldots y_{n-2},\beta)-\Phi(x,y,y_1,\ldots y_{n-2},\alpha)$$

$$=\int_\alpha^\beta \psi(x,y,y_1,\ldots y_{n-1})\frac{dy_{n-1}}{F(x,y,y_1,\ldots y_{n-1})}.$$

Но $F(x, y, y_1, \dots y_{n-1})$ функція не мѣняющая, по положенію, знака при измѣненіи $y_{n-1}$ отъ $\alpha$ до $\beta$, а потому, въ силу извѣстной теоремы интегральнаго исчисленія, будетъ:

$$\Phi(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \beta) - \Phi(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \alpha)$$

$$= \Psi(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \alpha + \vartheta(\beta - \alpha)) \int_\alpha^\beta \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, y_1, \dots y_{n-1})};$$

слѣдовательно найдемъ, что вообще

$$\int_\alpha^\beta \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, y_1, \dots y_{n-1})}$$

$$= \frac{\Phi(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \beta) - \Phi(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \alpha)}{\Psi(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \alpha + \theta(\beta - \alpha))}. \quad (6)$$

Разсматривая правую часть этой формулы, видимъ, что, по мѣрѣ того какъ $\alpha$ и $\beta$ стремятся къ нулю, числитель ея такъ-же стремится къ нулю. Что касается до знаменателя, то онъ въ предѣлѣ обращается въ

$$\Psi(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, 0).$$

Но коль-скоро отношеніе $y_{n-1} = 0$ представляетъ особенное рѣшеніе уравненія (1), это отношеніе должно получаться замѣною въ формулѣ (2) произвольнаго постояннаго $c$ опредѣленною функціею $x$, почему, въ этомъ случаѣ, и производная отъ $\Phi$, взятая относительно $x$ и всего, что съ нимъ измѣняется, такъ-же должна представлять опредѣленную функцію $x$. Эта производная, въ силу формулы (3), есть не что иное, какъ $\Psi(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, y_{n-1})$, а потому это послѣднее выраженіе, въ случаѣ допущенія $y_{n-1} = 0$, должно обращаться въ опредѣленную, конечную функцію $x$. Слѣдовательно знаменатель правой части формулы (6) имѣетъ предѣломъ конечную величину, а потому вся правая часть съ убываніемъ $\alpha, \beta$ неопредѣленно убываетъ и стремится къ нулю. Значитъ, коль-скоро $y_{n-1}=0$ представляетъ особенное рѣшеніе даннаго дифференціальнаго уравненія, интегралъ

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, y_1, \ldots y_{n-1})},$$

при безконечно-малыхъ $\alpha, \beta$, самъ, дѣйствительно, представляетъ неизмѣримо-малое количество.

Предложеніе оправдано.

**139.** Непосредственнымъ дополненіемъ только что доказанной теоремы служитъ предложеніе ему обратное, которое можно высказать въ слѣдующей формѣ.

Предложеніе III. *Если при неизмѣримо-малыхъ предѣлахъ* $y_{n-1}=\alpha$, $y_{n-1}=\beta$, *внутри которыхъ функція* $F(x, y, y_1, \ldots y_{n-2}, y_{n-1})$ *не мѣняетъ знака, интегралъ*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, y_1, \ldots y_{n-1})}$$

*представляетъ неизмѣримо-малую величину и если, въ тоже время, отношеніе* $y_{n-1}=0$ *удовлетворяетъ дифференціальному уравненію*

$$dy_{n-1} - F(x, y, y_1, \ldots y_{n-1})\, dx = 0, \tag{1}$$

*то отношеніе* $y_{n-1}=0$ *непремѣнно представляетъ не частный интегралъ, а особенное рѣшеніе этого уравненія.*

Въ самомъ дѣлѣ, допущеніе, что интегралъ $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{dy_{n-1}}{F(x,y,y_1,\ldots y_{n-1})}$ представляетъ неизмѣримо-малую величину, влечетъ за собою допущеніе, что интегралъ

$$\int\limits_{\alpha}^{y_{n-1}}\frac{dy_{n-1}}{F(x,y,y_1,\ldots y_{n-1})}$$

представляетъ такую функцію, которая стремится къ нулю вмѣстѣ съ $y_{n-1}$, независимо отъ значенія $x$ и прочихъ количествъ, въ нее входящихъ.

Допустимъ, что вообще

$$\int\limits_{o}^{y_{n-1}}\frac{dy_{n-1}}{F(x,y,y_1,\ldots y_{n-1})}=\psi(x,y,y_1,\ldots y_{n-1}) \qquad (2)$$

и сверхъ того предположимъ, что первый интегралъ уравненія (1) приведенъ къ формѣ

$$y_{n-1}=\vartheta(x,y,y_1,\ldots y_{n-2}c); \qquad (3)$$

въ такомъ случаѣ будетъ тождественно

$$\frac{d\vartheta(x,y,y_1,\ldots y_{n-2},c)}{dx}=F(x,y,y_1,\ldots y_{n-2},\vartheta).$$

Съ другой стороны, продифференцировавъ формулу (2) относительно одного $y_{n-1}$, получимъ:

$$D_{y_{n-1}}\psi(x,y,y_1,\ldots y_{n-1})=\frac{1}{F(x,y,y_1,\ldots y_{n-1})}$$

и это — каковы бы ни были значенія $x$ и количествъ $y, y_1, \dots y_{n-2}$, отъ него зависящихъ; поэтому, если означить черезъ $\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}$ какую бы то ни было систему значеній этихъ количествъ, можно будетъ написать

$$D_{y_{n-1}} \psi(\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, y_{n-1}) = \frac{1}{F(\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, y_{n-1})},$$

или же, въ силу (3),

$$D_\vartheta \psi(\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, \vartheta) . d\vartheta = \frac{d\vartheta}{F(\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, \vartheta)}.$$

Но $d\vartheta = F(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \vartheta)\, dx$, а потому

$$D_\vartheta \psi(\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, \vartheta) d\vartheta = \frac{F(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \vartheta)}{F(\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, \vartheta)}\, dx. \quad (4)$$

Измѣнивъ теперь $x$ въ $x+h$ и означая черезъ $\Delta y, \Delta y_1, \dots \Delta\vartheta$ соотвѣтствующія измѣненія количествъ $y, y_1, \dots \vartheta$, получимъ:

$$D_\vartheta \psi(\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, \vartheta + \Delta\vartheta) . d\vartheta$$

$$= \frac{F(x+h, y+\Delta y, \dots y+\Delta y_{n-2}, \vartheta+\Delta\vartheta)}{F(\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, \vartheta+\Delta\vartheta)}\, dx. \quad (5)$$

Вычтя формулу (4) изъ (5), получимъ:

$$[D_\vartheta \psi(\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, \vartheta+\Delta\vartheta) - D_\vartheta \psi(\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, \vartheta)] d\vartheta$$

$$= h . \frac{d}{dx} \left\{ \frac{F(x, y, y_1, \dots \vartheta)}{F(\xi, \eta, \eta_1, \dots \vartheta)} \right\}_{x = x + \theta h} dx.$$

Обѣ части этой формулы представляютъ однако точные дифференціалы, а потому интегрированіе дастъ:

$$\psi(\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, \vartheta+\Delta\vartheta) - \psi(\xi, \eta, \eta_1, \eta_{n-2}, \vartheta)$$

$= h\dfrac{F(x, y, \ldots \vartheta)}{F(\xi, \eta, \ldots \vartheta)}$ + произвольная функція количествъ $\xi$, $\eta$, $\eta_1$, ... $\eta_{n-2}$.

Равенство, нами полученное, должно однако существовать каковы бы ни были значенія $\xi, \eta, \eta_1, \ldots \eta_{n-2}$, а потому можно положить ихъ соотвѣтственно равными $x, y, y_1, \ldots y_{n-2}$, такъ что будетъ:

$$\psi(x, y, y_1, \ldots y_{n-2}, \vartheta + \Delta\vartheta) - \psi(x, y, y_1, \ldots y_{n-2}, \vartheta)$$
$$= h + \text{произвольная функція.} \qquad (6)$$

Получивъ это послѣднее равенство, легко уже доказать, что отношеніе $y_{n-1} = 0$ должно представлять особенное рѣшеніе, а не частный интегралъ уравненія (1). Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ противное, именно, что $y_{n-1}, = \vartheta$ обращается въ нуль, когда произвольному постоянному $c$ въ формулѣ (3) приписываемъ нѣкоторое опредѣленное численное значеніе, получили бы, что независимо отъ значеній $x, y, y_1, \ldots y_{n-2}$ выраженіе $\vartheta(x, y, y_1, \ldots y_{n-2}, c)$ равно было бы нулю и равенство (5) перешло бы въ слѣдующее:

$$\psi(x, y, y_1, \ldots y_{n-2}, 0) - \psi(x, y, y_1, \ldots y_{n-2}, 0 = h) + \text{произвольная функція,}$$

которое однако нелѣпо, такъ-какъ въ немъ вторая часть произвольная величина, а первая часть равна нулю, если только $\psi(x, y, y_1, \ldots y_{n-1})$ представляетъ опредѣленную функцію перемѣнныхъ, какъ это непремѣнно и должно быть, когда

$$\int_0^\beta \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, \ldots y_{n-1})}$$

величина неизмѣримо-малая. Послѣднее равенство возможно поэтому только при допущеніи, что $\psi$, т. е.

$$\int_0^{y_{n-1}} \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, \ldots y_{n-1})}$$

величина неопредѣленная или безконечная.

Слѣдовательно условіе

$$\lim \int_0^{\beta} \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, \ldots y_{n-1})} = 0$$

устраняетъ возможность того, чтобы отношеніе $y_{n-1} = 0$, удовлетворяя уравненію (1), представляло его частный интегралъ. Предложеніе наше такимъ образомъ и представляется доказаннымъ.

**140.** Чтобы показать какимъ образомъ слѣдуетъ пользоваться доказанными предложеніями въ каждомъ частномъ случаѣ, приведемъ нѣсколько примѣровъ.

1) Пусть дано дифференціальное уравненіе перваго порядка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y. \log y}{x},$$

удовлетворяющееся отношеніемъ $y = 0$.

Въ виду предыдущихъ предложеній намъ нужно въ интегралѣ

$$\int_\alpha^{\beta} \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, \ldots y_{n-1})}$$

положить $n = 1$, $F(x, y, \ldots) = \dfrac{y. \log y}{x}$, отъ чего онъ обратится въ

$$\int_\alpha^{\beta} \frac{xdy}{y \log y},$$

и затѣмъ разсмотрѣть — будетъ ли этотъ послѣдній интегралъ величиною безконечно-малою, когда $\alpha, \beta$ безконечно-малы.

Мы имѣемъ

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{xdy}{y.\log y} = x\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{y.\log y} = x\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\log y}{\log y};$$

но

$$\int \frac{d\log y}{\log y} = \log(\log y),$$

а потому

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{xdy}{y\log y} = x\{\log(\log\beta) - \log(\log\alpha)\},$$

или

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{xdy}{y\log y} = x\log\left(\frac{\log\beta}{\log\alpha}\right),$$

такъ что, перейдя къ предѣлу, найдемъ:

$$\lim\int_{\alpha}^{\beta} \frac{xdy}{y.\log y} = x.\log\left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

т. е. что предѣлъ нашего интеграла величина неопредѣленная. Значитъ, $y = 0$ есть частный интегралъ даннаго уравненія.

2) Возьмемъ еще уравненіе втораго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2\frac{dy}{dx}, \tag{a}$$

которое удовлетворяется отношеніемъ

$$\frac{dy}{dx}=0; \qquad \text{(b)}$$

требуется рѣшить, представляетъ ли это послѣднее первое особенное рѣшеніе или первый частный интегралъ.

Полагая

$$\frac{dy}{dx}=y_1\,,\ \frac{d^2y}{dx^2}=y_2\,,$$

уравненіе (a) и отношеніе (b) представляемъ въ формѣ

$$y_2=a^2y_1\,,\ y_1=0.$$

Согласно выведеннымъ нами критеріямъ намъ нужно изслѣдовать значеніе интеграла

$$\int_\alpha^\beta \frac{dy_1}{ay_1{}^2}$$

при $\alpha$ и $\beta$ безконечно-малыхъ.

Мы имѣемъ

$$\int_\alpha^\beta \frac{dy_1}{ay_1{}^2}=\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right\}=\frac{1}{a}\left\{\infty-\infty\right\}.$$

Интегралъ нашъ, слѣдовательно, неопредѣленная величина, а потому $y_1=0$, т. е. $\frac{dy_1}{dx}=0$, не можетъ быть особеннымъ рѣшеніемъ даннаго дифференціальнаго уравненія, а представляетъ одинъ изъ его первыхъ частныхъ интеграловъ.

3) Возьмемъ еще уравненіе

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\frac{2}{x}\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2}+1=0,$$

удовлетворяющееся допущеніемъ

$$\frac{dy}{dx}=x.$$

Требуется рѣшить будетъ ли послѣднее отношеніе первымъ особеннымъ рѣшеніемъ, или первымъ частнымъ интеграломъ даннаго уравненія.

Рѣшивъ данное уравненіе относительно $\frac{d^2y}{dx^2}$ и полагая $\frac{d^2y}{dx^2}=y_2$, $\frac{dy}{dx}=y_1$, получаемъ:

$$y_2=\frac{y_1\pm\sqrt{y_1^2-x^2}}{x}. \qquad (a)$$

Преобразовывая это уравненіе согласно теоремѣ 1-й (нум. 137), получаемъ:

$$y_2=\frac{y_1}{x}\pm\frac{\sqrt{2xy_1+y_1^2}}{x}.$$

Остается рѣшить будетъ ли уравненіе $y_1=0$ первымъ частнымъ интеграломъ или первымъ особеннымъ рѣшеніемъ послѣдняго уравненія. Для этого, согласно теоремѣ 2 й (нум. 138), составляемъ интегралъ

$$\int_\alpha^\beta \frac{xdy_1}{y_1+\sqrt{2xy_1+y_1^2}}$$

$$=x\left[\log\left(x+y_1+\sqrt{2xy_1+y_1^2}\right)-\frac{x}{x+y_1+\sqrt{2xy_1+y_1^2}}\right]_\alpha^\beta.$$

Такъ-какъ интегралъ этотъ при безконечно-малыхъ $\alpha$, $\beta$ самъ безконечно-малая величина, то заключаемъ, что $y_1=x$ есть первое особенное рѣшеніе даннаго уравненія (а).

---

## ГЛАВА ШЕСТАЯ.

### Геометрическія приложенія теоріи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій.

#### *Общія замѣчанія.*

**141.** Теорія дифференціальныхъ уравненій находитъ обширныя приложенія въ области какъ геометріи, такъ и прикладныхъ математическихъ наукъ — механики, физики и астрономіи; можно даже сказать, что отъ успѣшнаго развитія этой теоріи зависитъ непосредственно будущность и этихъ наукъ. Не касаясь здѣсь приложеній теоріи дифференціальныхъ уравненій къ рѣшенію задачъ прикладныхъ наукъ, мы остановимся на геометрическихъ вопросахъ, рѣшеніе которыхъ зависитъ отъ интеграціи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Не трудно уяснить себѣ a priori, какого именно рода геометрическія задачи естественно приводятъ къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій. Для этого досточно припомнить, что, при обозначеніи чрезъ $x$, $y$ прямоугольныхъ координатъ точки въ плоскости, дифференціальный коэффиціентъ $\dfrac{dy}{dx}$ выражаетъ тангенсъ угла, составляемаго касательною плоской кривой съ осью абсциссъ, и что этотъ дифференціальный коэффиціентъ входитъ въ уравненія касательной и нормальной и въ выраженія длины касательной, нормальной, подкасательной и поднормальной, а также въ выраженіе дифференціала дуги плоской кривой. Въ виду этого каждое дифференціальное уравненіе перваго порядка представляетъ извѣстное отношеніе между опредѣленными геометрическими элементами плоскихъ кривыхъ и полный интегралъ его долженъ, поэтому, выражать тѣ кривыя, для которыхъ такое отношеніе имѣетъ мѣсто.

Выраженія радіуса кривизны, координатъ центра кривизны и уравненіе эволюты содержатъ въ себѣ не только $\frac{dy}{dx}$, но и $\frac{d^2y}{dx^2}$ а потому всякое данное отношеніе между этими элементами плоскихъ кривыхъ будетъ выражаться въ формѣ дифференціальнаго уравненія втораго порядка, интегралъ котораго будетъ опредѣлять всѣ плоскія кривыя, для которыхъ данное отношеніе имѣетъ мѣсто.

Замѣтивъ это, переходимъ уже къ разсмотрѣнію отдѣльныхъ задачъ.

### *Частныя задачи.*

**142.** На первый разъ пусть *требуется опредѣлить тѣ плоскія кривыя, для которыхъ длина поднормальной остается равною опредѣленной функціи абсциссы $x$.*

Такъ-какъ длина поднормальной выражается, какъ извѣстно, чрезъ $y\,\frac{dy}{dx}$, то условія задачи устанавливаютъ слѣдующее дифференціальное уравненіе перваго порядка:

$$y\,.\,\frac{dy}{dx} = f(x)\,, \qquad (1)$$

гдѣ $f(x)$ данная функція.

По умноженіи на $dx$ уравненіе это перейдетъ въ

$$y\,.\,dy = f\,(x)\,dx,$$

гдѣ перемѣнныя уже раздѣлены. Интеграція дастъ теперь

$$\frac{y^2}{2} = \int f(x)\,dx + C,$$

откуда

$$y = \sqrt{2\int f\,(x)\,dx + C'}. \qquad (2)$$

Это и есть искомое уравненіе всѣхъ плоскихъ кривыхъ, длина поднормальной которыхъ равна $f(x)$.

Понятно, что для того, чтобы уравненіе это выражало систему кривыхъ опредѣленнаго вида, необходимо, чтобы $f(x)$ представляла совершенно опредѣленную функцію. Сдѣлаемъ поэтому нѣсколько частныхъ допущеній относительно $f(x)$.

1) Допустимъ сперва, что $f\,(x)$ сводится на постоянную величину $A$. Въ этомъ случаѣ уравненіе (2) обращается въ

$$y = \sqrt{2\int A dx + C'},$$

откуда

$$y = \sqrt{2\,A.\,x + C'}$$

Это есть уравненіе семейства параболъ, у которыхъ ось совпадаетъ съ осью $x$-овъ, параметръ равенъ $2A$, а разстояніе вершины отъ начала координатъ измѣняется отъ одной кривой къ другой. Слѣдовательно можемъ сказать: *кривыя, поднормальная которыхъ должна быть постоянно равна данной величинѣ $A$, представляютъ параболы, имѣющія параметръ равный $2\,A$ и оси которыхъ совпадаютъ съ осью $x$-овъ.*

2) Допустимъ, далѣе, что $f(x)=x$. Уравненіе (2) приметъ теперь видъ

$$y=\sqrt{2\int x.dx+C'}$$

и мы найдемъ изъ него

$$y=\sqrt{x^2+C'}$$

или

$$y^2-x^2=C',$$

т. е.

$$(y+x)(y-x)=C'.$$

Этотъ результатъ выражаетъ двѣ системы параллельныхъ прямыхъ, въ которыхъ каждая прямая образуетъ равные между собою, но произвольные отрѣзки на осяхъ $x$-овъ и $y$-овъ.

3) Положивъ $f(x)=\frac{1}{x}$, получимъ:

$$y=\sqrt{2\log x+C'},$$

откуда

$$y^2-2\log x=C'.$$

Это и есть уравненіе семейства кривыхъ, въ которыхъ длина поднормальной выражается чрезъ $\frac{1}{x}$.

**143**. Пусть теперь *требуется опредѣлить кривыя, длина подкасательной которыхъ равнялась бы данной функціи $f(x)$.*

Такъ-какъ длина подкасательной выражается вообще чрезъ $y\dfrac{dx}{dy}$, то въ настоящемъ случаѣ условія задачи выразятся уравненіемъ

$$y\,.\frac{dx}{dy}=f\,(x)\,, \tag{1}$$

которое сводится на слѣдующее:

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{f(x)}.$$

Проинтегрировавъ его, находимъ:

$$\log y=\int\frac{dx}{f(x)}+C,$$

или

$$y=C.e^{\int\frac{dx}{f(x)}} \tag{2}$$

Это и есть уравненіе семейства кривыхъ, отвѣчающихъ требованіямъ задачи.

Допустимъ, въ частности, $f(x)=A$, гдѣ $A$ постоянное; въ такомъ случаѣ уравненіе (2) приметъ видъ

$$y=C.e^{\frac{x}{A}} \tag{3}$$

Таково уравненіе семейства кривыхъ, длина подкасательной которыхъ сохраняетъ постоянное значеніе $A$.

Если сдѣлать $f(x)=x$, то уравненіе (2) обратится въ слѣдующее:

$$y=C.e^{\log x},$$

или

$$y = C . x,$$

откуда

$$\frac{y}{x} = C.$$

Это уравненіе выражаетъ систему прямыхъ, проходящихъ черезъ начало координатъ, но составляющихъ различные углы съ осью $x$-овъ.

**144.** Пусть требуется *опредѣлить семейство кривыхъ, радіусъ кривизны которыхъ равнялся бы данной функціи $f(x)$.*

Условія задачи доставляютъ дифференціальное уравненіе втораго порядка

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \mp \frac{1}{f(x)}, \qquad (1)$$

на интеграцію котораго и сводится все дѣло.

Если уравненіе (1) помножить на $dx$, то первая часть его сдѣлается точнымъ дифференціаломъ выраженія

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}},$$

а потому интеграція дастъ

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}} = \mp \int \frac{dx}{f(x)} + C.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\mp\int\frac{dx}{f(x)}+C}{\sqrt{1+\left\{\mp\int\frac{dx}{f(x)}+C\right\}^2}}$$

и слѣдовательно

$$y=\int\frac{\left[\mp\int\frac{dx}{f(x)}+C\right]dx}{\sqrt{1-\left(\mp\int\frac{dx}{f(x)}+C\right)^2}}+C_1 \quad (2)$$

Это и есть общее уравненіе семейства кривыхъ, отвѣчающихъ условіямъ задачи.

Допустимъ, въ частности, $f(x)=A$, т. е. постоянному количеству. Въ этомъ случаѣ уравненіе (2) принимаетъ видъ

$$y=\int\frac{\left[\mp\frac{1}{A}x+C\right]dx}{\sqrt{1-\left[\mp\frac{x}{A}+C\right]^2}}+C_1,$$

$$=\int\frac{[x+AC]\,dx}{\sqrt{A^2-(x+AC)^2}}+C_1,$$

$$=-\sqrt{A^2-(x+AC)^2}+C_1,$$

такъ-что окончательно получимъ:

$$(y-C_1)^2+(x+AC)^2=A^2.$$

Этотъ результатъ показываетъ, что условіямъ задачи отвѣчаютъ всѣ круги, описанные радіусомъ равнымъ $A$, каково бы ни было положеніе центра.

**145.** *Найдти кривыя, радіусъ кривизны которыхъ равнялся бы длинѣ нормальной.*

Такъ-какъ радіусъ кривизны и длина нормальной опредѣляются, какъ извѣстно, формулами

$$\varrho = \mp \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}, \quad N = \pm y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

то, предполагая, что направленія обѣихъ линій этихъ должны совпадать, изъ условій задачи получимъ уравненіе

$$-\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \tag{1}$$

приводящееся къ виду

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0, \tag{2}$$

которое нужно проинтегрировать.

Первая часть этого уравненія отъ умноженія на $dx$ дѣлается точнымъ дифференціаломъ выраженія $y\frac{dy}{dx} + x$, а потому, проинтегрировавъ, получаемъ:

$$y\frac{dy}{dx} + x = C.$$

Вторичная интеграція доставляетъ, далѣе,

$$y^2 + x^2 = 2Cx + C'. \tag{3}$$

Это уравненіе круга, центръ котораго на оси $x$-овъ; слѣдовательно всѣ окружности, описанныя произвольными радіусами изъ какихъ бы то ни было точекъ оси $x$-овъ, отвѣчаютъ условіямъ задачи.

Если-бы мы допустили, что направленія радіуса кривизны и нормальной должны быть противоположны, то уравненіе (1) измѣнилось бы въ слѣдующее:

$$\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Положивъ въ немъ $\frac{dy}{dx}=p$, мы нашли бы

$$py\frac{dp}{dy}-p^2-1=0,$$

откуда

$$\frac{p.\,dp}{p^2+1}=\frac{dy}{y}$$

и слѣдовательно

$$y=C\sqrt{1+p^2}.$$

Послѣ этого, замѣнивъ $p$ его выраженіемъ $\frac{dy}{dx}$, получили бы

$$dx=\frac{Cdy}{\sqrt{y^2-C^2}},$$

откуда, проинтегрировавъ еще разъ, нашли бы

$$x=C'+C\log\left[y+\sqrt{y^2-C^2}\right], \qquad (4)$$

или

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-b}{a}}+e^{-\frac{x-b}{a}}\right). \qquad (5)$$

Это уравненіе, въ которомъ $a$ и $b$ произвольныя постоянныя, опредѣляетъ семейство *цѣпныхъ* линій.

### *Геометрическое значеніе особенныхъ рѣшеній.*

**146**. Во многихъ изъ геометрическихъ задачъ, въ которыхъ самыя условія задачи формулируются дифференціальнымъ уравненіемъ, главную роль въ рѣшеніи, какъ это замѣтилъ вообще еще Лагранжъ, играетъ не полный интегралъ дифференціальнаго уравненія, а его особенное рѣшеніе. Въ виду этого необходимо указать, вообще, на самое геометрическое значеніе особенныхъ рѣшеній.

Пусть

$$y=F(x, c) \qquad (1)$$

представляетъ полный интегралъ дифференціальнаго уравненія перваго порядка. Онъ опредѣляетъ семейство кривыхъ, изъ которыхъ каждая отвѣчаетъ опредѣленному значенію произвольнаго постояннаго $c$. Въ то-же время кривая, *обертывающая* всѣ кривыя даннаго семейства, должна имѣть общую точку съ каждою изъ этихъ линій, а потому у нея будутъ тѣ-же координаты $x$, $y$ и то-же уравненіе между этими координатами, но съ тою только разницею, что параметръ $c$ въ уравненіи (1) будетъ перемѣнною величиною до тѣхъ поръ пока оно будетъ принадлежать кривой, обертывающей всѣ прочія. Кромѣ того нужно будетъ, чтобы положеніе касательной было одно и то-же какъ въ кривой, гдѣ $c$ постоянное количество, такъ и въ той, гдѣ оно перемѣнное количество. Извѣстно, однако, что положеніе касательной опредѣляется значеніемъ производной ординаты, получаемымъ чрезъ дифференцированіе уравненія кривой, а потому въ настоящемъ случаѣ нужно, чтобы выраженіе $\frac{dy}{dx}$, выводимое изъ уравненія (1) трактуя въ немъ $c$ перемѣннымъ, не отличалось отъ выраженія $\frac{dy}{dx}$, получаемаго изъ уравненія (1) разсматривая $c$ постояннымъ. Послѣднее требованіе приводитъ (какъ мы уже видѣли въ предыдущей главѣ) къ условію $\frac{dy}{dc}=0$, при существованіи котораго уравненіе (1) обращается въ особенное рѣшеніе дифференціальнаго уравненія, если только изъ уравненія $\frac{dy}{dc}=0$ $c$ выражается функціею $x$. Слѣдовательно *особенное рѣшеніе дифференціальнаго уравненія перваго порядка всегда выражаетъ обертку семейства кривыхъ, опредѣляемыхъ полнымъ интеграломъ.*

Въ тѣхъ случаяхъ, когда условное уравненіе $\frac{dy}{dc}=0$ доставляетъ для $c$ постоянное значеніе и поэтому дифференціальное уравненіе не имѣетъ особеннаго рѣшенія, кривая, обертывающая всѣ прочія, оказывается сама принадлежащею къ семейству линій, опредѣляемыхъ полнымъ интеграломъ.

**147.** Разсмотримъ теперь нѣсколько частныхъ геометрическихъ задачъ, рѣшеніе которыхъ сводится на разысканіе особеннаго рѣшенія дифференціальнаго уравненія.

Пусть *требуется опредѣлить кривую, въ которой перпендикуляры, проводимые изъ начала координатъ къ касательнымъ, имѣли бы одну постоянную длину $A$.*

Условіе задачи выражается въ настоящемъ случаѣ уравненіемъ

$$y-x\frac{dy}{dx}=A\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \qquad (1)$$

имѣющимъ форму уравненія Клэро. Разыскивая извѣстнымъ намъ пріемомъ его полный интегралъ, найдемъ:

$$y = Cx + A\sqrt{1 + C^2}, \qquad (2)$$

уравненіе, которое вмѣсто кривой линіи, требуемой задачею, изображаетъ систему прямыхъ, кратчайшее разстояніе которыхъ отъ начала координатъ равно $A$.

Если теперь, продифференцировавъ уравненіе (2), найдемъ выраженіе $\frac{dy}{dc}$, приравняемъ это выраженіе нулю, изъ полученнаго уравненія опредѣлимъ $C$, какъ функцію $x$, и затѣмъ найденное такимъ образомъ значеніе $C$ внесемъ въ полный интегралъ (2), то въ результатѣ получится особенное рѣшеніе уравненія (1), именно:

$$x^2 + y^2 = A^2.$$

Это послѣднее уравненіе опредѣляетъ кругъ, описанный изъ начала координатъ радіусомъ равнымъ $A$. Кругъ этотъ, очевидно, представляетъ кривую, вполнѣ отвѣчающую условіямъ задачи.

**148.** *Пусть требуется опредѣлить кривыя, въ которыхъ длина нормальной выражалась бы данною функціею разстоянія ея основанія отъ начала координатъ.*

Такъ-какъ длина нормальной выражается, вообще, чрезъ $y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, а разстояніе ея основанія отъ начала координатъ чрезъ $x + y\,\frac{dy}{dx}$, то задача сводится на опредѣленіе кривыхъ, для которыхъ удовлетворялось бы дифференціальное уравненіе вида

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=f\left(x+y\,\frac{dy}{dx}\right), \qquad (1)$$

гдѣ $f$ та или другая данная функція.

Чтобы проинтегрировать это уравненіе, начнемъ съ того, что продифференцируемъ его: получимъ дифференціальное уравненіе втораго порядка

$$\left(\frac{\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}-f'\left(x+y\,\frac{dy}{dx}\right)\right)\times\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{d^2y}{dx^2}\right]=0,$$

представляющееся слѣдствіемъ даннаго и разбивающееся на два слѣдующія:

$$\frac{\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}-f'\left(x+y\,\frac{dy}{dx}\right)=0, \qquad (2)$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\,\frac{d^2y}{dx^2}=0. \qquad (3)$$

Интеграція послѣдняго изъ этихъ уравненій, въ которомъ первая часть есть точный дифференціалъ выраженія $x+y\,\dfrac{dy}{dx}$, доставляетъ:

$$x+y\,\frac{dy}{dx}=a, \qquad (4)$$

уравненіе, въ виду котораго уравненіе (1) переходитъ въ

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=f(a). \qquad (5)$$

Исключивъ $\frac{dy}{dx}$ между уравненіями (4) и (5), мы получимъ:

$$y^2 + (x - a)^2 = [f(a)]^2, \qquad (6)$$

уравненіе, содержащее произвольное постоянное $a$ и удовлетворяющее данному уравненію (1), а потому и представляющее полный интегралъ этого уравненія.

Уравненіе (6) опредѣляетъ систему окружностей, центры которыхъ находятся на оси $x$-овъ, а радіусы представляютъ данную функцію разстоянія центра отъ начала координатъ. Окружности эти, очевидно, удовлетворяютъ условіямъ задачи.

Мы до сихъ поръ не касались уравненія (2), которое также имѣетъ мѣсто совмѣстно съ даннымъ. Если обратиться къ нему и между нимъ и даннымъ уравненіемъ исключить $\frac{dy}{dx}$, то въ результатѣ получится особенное рѣшеніе уравненія (1), выражающее обертку семейства окружностей, опредѣляемыхъ уравненіемъ (6). Эта обертка также будетъ отвѣчать требованіямъ задачи.

Особенное рѣшеніе, о которомъ идетъ рѣчь, въ настоящемъ случаѣ, когда полный интегралъ уравненія (1) уже найденъ, можно получить изъ этого послѣдняго.

Допустивъ, напримѣръ, что $f(a) = \sqrt{na}$ и продифференцировавъ уравненіе (6) относительно $a$, получимъ:

$$2(x - a) + n = 0,$$

а исключивъ $a$ между этимъ уравненіемъ и уравненіемъ (6), которое теперь сводится на

$$y^2 + (x - a)^2 = na,$$

мы и придемъ къ особенному рѣшенію уравненія (1):

$$y^2 = nx + \frac{n^2}{4},$$

выражающему параболу. При иномъ допущеніи относительно формы функціи $f(a)$ получили бы уравненіе другой кривой.

Здѣсь нельзя не обратить вниманія на то обстоятельство, что полный интегралъ (6) при всякомъ составѣ функціи $f(a)$, всегда выражаетъ окружности, между тѣмъ какъ особенное рѣшеніе обнаруживаетъ, что условіямъ задачи отвѣчаетъ и множество различныхъ кривыхъ, видъ которыхъ обусловливается составомъ функціи $f$.

*Задача траекторій.*

**149.** Траекторіею даннаго семейства кривыхъ называютъ, вообще, линію, пересѣкающую всѣ кривыя этого семейства подъ однимъ и тѣмъ-же угломъ. Если этотъ уголъ прямой, то и траекторія получаетъ названіе *ортогональной.*

Разсмотримъ какимъ образомъ, зная уравненіе семейства кривыхъ, опредѣлить ихъ ортогональную троекторію.

Пусть

$$\Phi(x, y, c) = 0 \tag{1}$$

уравненіе даннаго семейства кривыхъ. Дифференцированіе его доставитъ:

$$\frac{\partial \Phi}{dx} dx + \frac{\partial \Phi}{dy} dy = 0;$$

слѣдовательно для всѣхъ кривыхъ семейства

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{dx}}{\frac{\partial \Phi}{dy}}.$$

Таково общее выраженіе тангенса угла, составляемаго касательною къ различнымъ линіямъ семейства съ осью абсциссъ. Означимъ его черезъ $m$. Замѣтивъ теперь, что, въ виду самаго опредѣленія траекторіи, касательная къ траекторіи должна постоянно пересѣкать касательныя къ различнымъ линіямъ семейства подъ прямымъ угломъ, мы заключимъ, что выраженіе $\frac{dy}{dx}$ изъ уравненія траекторіи должно быть вообще равно $\frac{-1}{m}$, т. е. что изъ уравненія траекторіи

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial \Phi}{dy}}{\frac{\partial \Phi}{dx}},$$

откуда

$$\frac{\partial \Phi}{dy}\, dx - \frac{\partial \Phi}{dx}\, dy = 0, \qquad (2)$$

уравненіе, которое должно оправдываться при всякомъ значеніи $c$. Отсюда слѣдуетъ, что *дифференціальное уравненіе ортогональной траекторіи найдется чрезъ исключеніе $c$ между уравненіями (1) и (2).*

Если-бы уравненіе семейства кривыхъ дано было въ формѣ

$$\Phi(x, y, a, b) = 0,$$

гдѣ произвольныя постоянныя $a$, $b$ удовлетворяютъ уравненію

$$\psi(a, b) = 0,$$

то нужно было бы исключить $a$ и $b$ между послѣдними двумя уравненіями и уравненіемъ

$$\frac{\partial \Phi(x, y, a, b)}{dy}\, dx - \frac{\partial \Phi(x, y, a, b)}{dx}\, dy = 0.$$

**150.** Пояснимъ только-что высказанное примѣрами.

*1) Пусть требуется опредѣлить ортогональную траекторію системы кривыхъ, выражаемыхъ уравненіемъ*

$$y = cx^n.$$

Здѣсь $\Phi = y - cx^n$, а потому уравненіе (2) представится въ формѣ

$$dx + ncx^{n-1}\,dy = 0.$$

Исключеніе $c$ доставитъ поэтому

$$xdx + nydy = 0,$$

уравненіе, проинтегрировавъ которое, получимъ:

$$x^2 + ny^2 + c'.$$

Найденное уравненіе показываетъ, что траекторія представляетъ эллипсъ, когда $n$ положительное число, отличное отъ $1$, т. е. когда кривыя даннаго семейства представляютъ параболы. Траекторія сводится на кругъ при $n = 1$, когда данное семейство линій состоитъ изъ прямыхъ, проходящихъ черезъ начало координатъ. Наконецъ, при $n$ отрицательномъ, траекторія представляетъ гиперболу.

*2) Пусть требуется найдти ортогональную траекторію семейства конфокальныхъ эллипсовъ.*

Уравненіе такого семейства кривыхъ представится чрезъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

гдѣ произвольныя количества $a$, $b$ связаны между собою условнымъ уравненіемъ

$$a^2 - b^2 = h^2, \tag{2}$$

въ которомъ $h$, т. е. половина разстоянія между фокусами, остается однимъ и тѣмъ-же для всѣхъ кривыхъ семейства. Здѣсь намъ мужно исключить $a$ и $b$ между двумя послѣдними уравненіями и слѣдующимъ:

$$\frac{y}{b^2}\,dx - \frac{x}{a^2}\,dy = 0;$$

въ результатѣ получимъ:

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - y^2 - h^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0. \qquad (3)$$

Это дифференціальное уравненіе траекторіи, которое нужно еще проинтегрировать. Начнемъ съ того, что допустимъ $x = x_1^{\frac{1}{2}}$, $y = y_1^{\frac{1}{2}}$. Отъ этой замѣны перемѣнныхъ уравненіе (3) приметъ видъ:

$$y_1 = x_1\frac{dy_1}{dx_1} - h^2\,\frac{\frac{dy_1}{dx_1}}{\frac{dy_1}{dx_1} + 1}. \qquad (4)$$

Это послѣднее уравненіе имѣетъ форму уравненія Клерò, почему интеграція его не представляетъ затрудненій. Продифференцировавъ его, найдемъ:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_1}{dx_1} - x_1\frac{d^2y_1}{dx_1^2} - \frac{h^2}{\left[\frac{dy_1}{dx_1} + 1\right]^2}\cdot\frac{d^2y_1}{dx_1^2},$$

т. е.

$$0 = \left(x_1 + \frac{h^2}{\left(\frac{dy_1}{dx_1} + 1\right)^2}\right)\cdot\frac{d^2y_1}{dx_1^2},$$

уравненіе, разбивающееся на два слѣдующихъ:

*

$$x_1 + \frac{h^2}{\left[\frac{dy_1}{dx_1} + 1\right]^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^{\,2}} = 0,$$

изъ которыхъ послѣднее доставляетъ

$$\frac{dy_1}{dx_1} = c^2.$$

Внеся это выраженіе $\frac{dy_1}{dx_1}$ въ формулу (4), получимъ:

$$y_1 = x_1 c^2 - \frac{h^2 c^2}{c^2 + 1},$$

или, введя прежнія перемѣнныя $x$, $y$,

$$y^2 - x^2 c^2 = - \frac{h^2 c^2}{c^2 + 1}.$$

Это и есть полный интегралъ уравненія (3), опредѣляющій искомую траекторію. Такъ-какъ онъ непосредственно приводится къ формѣ:

$$\frac{x^2}{a_1^{\,2}} - \frac{y^2}{b_1^{\,2}} = 1,$$

гдѣ

$$a_1^{\,2} = \frac{h^2}{c^2 + 1}, \; b_1^{\,2} = \frac{h^2 c^2}{c^2 + 1}$$

и слѣдовательно

$$a_1^{\,2} + b_1^{\,2} = h^2,$$

то ясно, что траекторія представляетъ гиперболу, конфокальную съ даннымъ семействомъ эллипсовъ.

# ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

| Стр. | Строка. | Напечатано. | Слѣдуетъ. |
|---|---|---|---|
| 4 | 10 снизу | $-5ye^{2x}$ | $-5ye^{4x}$ |
| 17 | 19 — | $F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}\right)$ | $F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right)$ |
| 25 | 9 — | *дифференціальныхъ.* | *дифференціалахъ.* |
| 35 | 1 — | для $y_1$ | для $y_0$ |
| 54 | 4 — | $-\frac{ny}{x-1}$ | $-\frac{ny}{x+1}$ |
| 74 | 5 сверху | формулою $(\delta)$ | формулою (8) |
| 79 | 5 снизу | $y\int e^{\frac{y}{x}}dx+$ | $y\int e^{\frac{x}{y}}dx+$ |
| 89 | 6 — | $+N_2dy_1=0,$ | $+N_2dy_2=0,$ |
| 89 | 2 — | $\frac{N_1d(\gamma-\gamma_1)}{\Psi'(\gamma)(\gamma-\gamma_1)}+\frac{N_2d(\gamma-\gamma_2)}{\Psi'(\gamma)(\gamma-\gamma_2)}$ | $\frac{N_1d(\gamma-\gamma_1)}{\Psi'(\gamma_1)(\gamma-\gamma_1)}+\frac{N_2d(\gamma-\gamma_2)}{\Psi'(\gamma_2)(\gamma-\gamma_2)}$ |
| 115 | 1 сверху | $=\chi\left(\frac{d}{dx}\right)$ | $=\chi\left(\frac{dy}{dx}\right)$ |
| 123 | 11 — | $+U\frac{dV}{dx},$ | $+U\frac{d^mV}{dx^m},$ |
| 152 | 2 снизу | $\int\frac{dx}{x^{2m+2}\int_0^1(z^7-1)^m\cos zx.dz}+c'.$ | $\int\frac{dx}{x^{2m+2}\int_0^1(z^2-1)^m\cos zx\,dz}+c'.$ |
| 191 | 3 снизу | $C=\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{1.2(-m+3)(-m+5)}$ | $C=\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{1.2(-m+3)(-m+5)}A,$ |
| 191 | 2 снизу | $A,\ D=$ | $D=$ |