Рѣшеніе уравненій четвертой степени на основаніи симметричнаго омографическаго соотношенія, существующаго между его корнями.

В. Г. Имшенецкаго † [1]).

§ 1. *Теорема.* Корни α, β, γ, δ уравненія четвертой степени

$$f(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

всегда можно разбить на такія двѣ группы, по два корня α и β, γ и δ, что корни, принадлежащіе къ каждой изъ нихъ, подставленные вмѣсто x и y, будутъ удовлетворять соотношенію

$$xy = \mu(x + y) + \lambda \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

симметричному и омографическому въ отношеніи x и y.

Коэффиціентъ μ въ уравненіи (2) опредѣлится изъ уравненія третьей степени, которое будетъ *разрѣшающимъ* въ отношеніи уравненія (1). Коэффиціентъ λ выразится раціонально посредствомъ μ и a, b, c, d.

Доказательство. По свойству симметричнаго соотношенія (2) взаимная перестановка x и y въ уравненіи (2) не измѣняетъ его вида. Изъ него получаемъ

$$y = \frac{\mu x + \lambda}{x - \mu} \quad \text{и} \quad x = \frac{\mu y + \lambda}{y - \mu},$$

тождественныя выраженія y черезъ x и обратно.

---

[1]) Замѣтка эта найдена въ бумагахъ покойнаго В. Г. Имшенецкаго. Время ея составленія не извѣстно.

Поэтому, допуская, что между α и β съ одной стороны, и между γ и δ съ другой, имѣетъ мѣсто соотношеніе (2), будемъ имѣть, что подстановка

$$z = \frac{\mu\zeta + \lambda}{\zeta - \mu} = \mu + \frac{\lambda + \mu^2}{\zeta - \mu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

въ данное уравненіе

$$f(z) = 0$$

не должна произвести измѣненія его вида, такъ что послѣ этой подстановки и соединенія подобныхъ членовъ получится уравненіе:

$$f(\zeta) = 0.$$

Но по теоремѣ Тейлора мы находимъ, что

$$f\left(\frac{\mu\zeta + \lambda}{\zeta - \mu}\right) = f\left(\mu + \frac{\lambda + \mu^2}{\zeta - \mu}\right) =$$

$$= f(\mu) + f'(\mu)\frac{\lambda + \mu^2}{\zeta - \mu} + \frac{1}{2} f''(\mu)\left(\frac{\lambda + \mu^2}{\zeta - \mu}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6} f'''(\mu)\left(\frac{\lambda + \mu^2}{\zeta - \mu}\right)^3 + \left(\frac{\lambda + \mu^2}{\zeta - \mu}\right)^4 = 0.$$

Отсюда, упрощая, получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} (\zeta - \mu)^4 + \dfrac{f'(\mu)(\lambda + \mu^2)}{f(\mu)}(\zeta - \mu)^3 + \dfrac{f''(\mu)(\lambda + \mu^2)^2}{2f(\mu)}(\zeta - \mu)^2 + \\ \qquad + \dfrac{f'''(\mu)(\lambda + \mu^2)^3}{6f(\mu)}(\zeta - \mu) + \dfrac{(\lambda + \mu^2)^4}{f(\mu)} = 0. \end{array}\right\} . \quad (4)$$

На основаніи же вышеприведеннаго соображенія уравненіе (4) должно быть тождественнымъ съ уравненіемъ $f(\zeta) = 0$.

Но такъ какъ

$$\left.\begin{array}{l} f(\zeta) = f(\mu + \zeta - \mu) = \\ = f(\mu) + f'(\mu)(\zeta - \mu) + \dfrac{1}{2} f''(\mu)(\zeta - \mu)^2 + \dfrac{1}{6} f'''(\mu)(\zeta - \mu)^3 + (\zeta - \mu)^4 = 0, \end{array}\right\} . \quad (5)$$

то для существованія упомянутаго тождества необходимы слѣдующія равенства, вытекающія изъ сравненія коэффиціентовъ одинаковыхъ степеней $(\zeta-\mu)$ въ уравненіяхъ (4) и (5):

$$(\lambda+\mu^2)^4=[f(\mu)]^2 \quad \ldots \ldots \quad (a)$$

$$(\lambda+\mu^2)^3 f'''(\mu)=6f(\mu)f'(\mu) \quad \ldots \ldots \quad (b)$$

$$(\lambda+\mu^2)^2 f''(\mu)=f(\mu)f''(\mu) \quad \ldots \ldots \quad (c)$$

$$(\lambda+\mu^2) f'(\mu)=\frac{1}{6}f(\mu)f'''(\mu) \quad \ldots \ldots \quad (d)$$

Изъ нихъ по условію (c) имѣемъ

$$f(\mu)=(\lambda+\mu^2)^2; \quad \ldots \ldots \quad (e)$$

поэтому, для согласованія условій (c) и (a), необходимо, извлекая квадратный корень изъ обѣихъ частей уравненія (a), взять результаты извлеченія съ одинаковыми знаками.

Далѣе, съ помощію (e), исключивъ $f(\mu)$ изъ (b) или изъ (d), прійдемъ къ одному и тому-же условію

$$6f'(\mu)=f'''(\mu)(\lambda+\mu^2) \ldots \ldots \quad (f)$$

Исключивъ $\lambda+\mu^2$ изъ уравненій (e) и (f), мы получимъ слѣдующее уравненіе

$$36[f'(\mu)]^2=[f'''(\mu)]^2 f(\mu), \ldots \ldots (g)$$

съ помощію котораго можно опредѣлить требуемыя значенія коэффиціента μ, послѣ чего значеніе другого коэффиціента λ получится изъ уравненія (f) по формулѣ

$$\lambda=\frac{6f(\mu)-\mu^2 f'''(\mu)}{f'''(\mu)} \ldots \ldots (h)$$

§ 2. Теперь не трудно убѣдиться, съ помощію простыхъ алгебраическихъ вычисленій, что хотя уравненіе (g), служащее для опредѣленія значеній μ, повидимому шестой степени, но въ немъ члены выше третьей степени сокращаются, и по упрощеніи оно получаетъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned}(a^3-4ab+8c)\mu^3+(a^2b+2ac-4b^2+16d)\mu^2\\+(a^2c+8ad-4bc)\mu+a^2d-c^2=0.\end{aligned}\right\} \ldots (G)$$

Равнымъ образомъ уравненіе (h) окончательно получитъ такой видъ:

$$\lambda = \frac{2a\mu^2 + 2b\mu + c}{4\mu + a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (H)$$

Изъ уравненія (G) получимъ по крайней мѣрѣ *одно* вещественное значеніе μ, а соотвѣтствующее значеніе λ найдемъ по формулѣ (H).

Если $d = \frac{c^2}{a^2}$, то $\mu = 0$ и $\lambda = \frac{c}{a}$.

Если данное уравненіе четвертой степени будетъ вида

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

что всегда можно предполагать, то уравненія (G) и (H) получатъ слѣдующій видъ

$$8q\mu^3 - 4(p^2 - 4r)\mu^2 - 4pq\mu - q^2 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (G')$$

и

$$\lambda = \frac{2p\mu + q}{4\mu} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (H')$$

§ 3. Разсмотримъ теперь, какимъ образомъ можно довести до конца рѣшеніе уравненія четвертой степени (1), зная одинъ изъ корней уравненія третьей степени (G).

Первую часть даннаго уравненія (1) можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$f(z) = [z^2 - (\alpha + \beta)z + \alpha\beta][z^2 - (\gamma + \delta)z + \gamma\delta].$$

Но на основаніи соотношенія (2) мы имѣемъ:

$$\alpha\beta = \mu(\alpha + \beta) + \lambda, \qquad \gamma\delta = \mu(\gamma + \delta) + \lambda;$$

слѣдовательно

$$f(z) = [z^2 + \lambda - (\alpha + \beta)(z - \mu)][z^2 + \lambda - (\gamma + \delta)(z - \mu)],$$

и полагая

$$\frac{z^2 + \lambda}{z - \mu} = u,$$

можно данное уравненіе $f(z) = 0$ четвертой степени привести къ уравненію второй степени

$$[u - (\alpha + \beta)][u - (\gamma + \delta)] = 0. \quad \ldots \ldots \quad (K)$$

Коэффиціенты этого послѣдняго уравненія не трудно выразить въ коэффиціентахъ даннаго уравненія. Дѣйствительно, уравненіе (K) имѣетъ видъ

$$u^2 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)u + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta = 0.$$

Но мы имѣемъ:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-a,$$

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=b,$$

на основаніи же соотношенія (2) между корнями даннаго уравненія

$$\alpha\beta+\gamma\delta=-\mu a+2\lambda.$$

Слѣдовательно

$$\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta=b+a\mu-2\lambda.$$

И такъ, уравненіе (K) приметъ видъ

$$u^2+au+a\mu-2\lambda+b=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (L)$$

или, введя данное выше значеніе λ,

$$u^2+au+\frac{a^2\mu-2c+ab}{4\mu+a}=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (M)$$

Опредѣливъ оба корня u_1 и u_2 уравненія (L) или (M), получимъ соотвѣтственныя значенія z посредствомъ рѣшенія уравненій второй степени:

$$\left.\begin{aligned} z^2-u_1z+\mu u_1+\lambda=0 \\ z^2-u_2z+\mu u_2+\lambda=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (N)$$

Корни z_1, z_2 и z_3, z_4 двухъ послѣднихъ уравненій и будутъ корнями предложеннаго уравненія 4-ой степени $f(z)=0$.

Въ этомъ можно убѣдиться, перемножая уравненія (N) одно на другое, что доставитъ уравненіе

$$z^4-(u_1+u_2)z^3+[\mu(u_1+u_2)+u_1u_2+2\lambda]z^2-$$

$$-[2\mu u_1u_2+\lambda(u_1+u_2)]z+(\mu u_1+\lambda)(\mu u_2+\lambda)=0.$$

Но, на основаніи (L), мы имѣемъ:

$$-(u_1+u_2)=a, \qquad u_1u_2=a\mu-2\lambda+b;$$

слѣдовательно

$$\mu(u_1+u_2)+u_1u_2+2\lambda=-a\mu+a\mu-2\lambda+b+2\lambda=b,$$

$$-2\mu u_1u_2-\lambda(u_1+u_2)=-2a\mu^2+4\mu\lambda-2b\mu+\lambda a,$$

и такъ какъ по формулѣ (H)

$$-2a\mu^2-2b\mu=-4\mu\lambda-a\lambda+c\,,$$

то

$$-2\mu u_1u_2-\lambda(u_1+u_2)=c\,.$$

Наконецъ,

$$(\mu u_1+\lambda)(\mu u_2+\lambda)=\mu^2u_1u_2+\lambda\mu(u_1+u_2)+\lambda^2=$$

$$=a\mu^3-2\lambda\mu^2+b\mu^2-a\lambda\mu+\lambda^2\,;$$

но на основаніи уравненія

$$f(\mu)=(\lambda+\mu^2)^2$$

имѣемъ

$$a\mu^3+b\mu^2+c\mu+d=\lambda^2+2\lambda\mu^2\,;$$

откуда

$$\lambda^2=a\mu^3+b\mu^2+c\mu+d-2\lambda\mu^2\,.$$

Введя это значеніе λ^2 въ предыдущую формулу, найдемъ

$$(\mu u_1+\lambda)(\mu u_2+\lambda)=2a\mu^3+2b\mu^2+c\mu+d-4\lambda\mu^2-a\lambda\mu=$$

$$=(2a\mu^2+2b\mu+c)\,\mu-(4\mu+a)\,\lambda\mu+d$$

или, принимая во вниманіе уравненіе (H), которое можно написать такимъ образомъ:

$$(2a\mu^2+2b\mu+c)-(4\mu+a)\lambda=0\,,$$

мы получимъ

$$(\mu u_1+\lambda)(\mu u_2=\lambda)=d\,.$$

И такъ, отъ перемноженія уравненій (N) одного на другое мы получимъ данное уравненіе

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0\,.$$

ч. и т. д.