III.

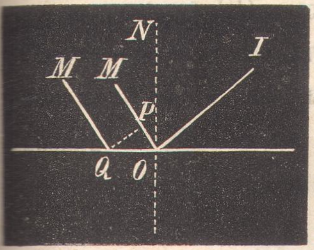
Вычисленіе хода лучей въ двоякопреломляющемъ кристаллѣ.

А. П. Грузинцева.

Изучая теорію явленій двойного преломленія, я не нашелъ общаго аналитическаго рѣшенія задачи о ходѣ лучей въ двоякопреломляющемъ кристаллѣ даже въ самыхъ полныхъ трактатахъ по физической оптикѣ (какъ-то у Billet, Beer, Verdet); только у Lamé въ его извѣстныхъ «Leçons sur l'élasticité des corps solides» помѣщено рѣшеніе этой задачи, но въ формѣ не вполнѣ совершенной и оконченной.

Въ трактатахъ по физической оптикѣ даются лишь геометрическія построенія для опредѣленія хода лучей въ кристаллѣ и по выходѣ ихъ изъ него, и только для одноосныхъ кристалловъ дано у Billet (Traité d'optique physique. Vol. I, page 283 et suiv.) аналитическое рѣшеніе задачи; а между тѣмъ само собой ясно, что рѣшеніе такой важной задачи построеніемъ совершенно не достаточно, и необходимо поэтому имѣть ея аналитическое рѣшеніе. Можетъ-быть, большая сложность, которая встрѣчается при рѣшеніи этой задачи, не позволила упомянутымъ авторамъ привести ея рѣшеніе, но, идя извѣстныхъ путемъ, можно избѣжать слишкомъ большой сложности и дать формулы достаточно простыя для употребленія. Кромѣ того важно имѣть общія формулы для изслѣдованія хода лучей въ кристаллѣ. Имѣя общія формулы, намъ не придется прибѣгать каждый разъ въ частныхъ случаяхъ къ особымъ вычисленіямъ, а стоитъ только воспользоваться уже разъ найденными результатами. Обдумывая этотъ вопросъ, я напалъ на пріемъ, который не только рѣшаетъ вопросъ о вычисленіи хода лучей въ кристаллахъ, но можетъ быть употребленъ безъ новыхъ соображеній для опредѣленія другихъ обстоятельствъ при изученіи явленій двойного преломленія, какъ напримѣръ при явленіяхъ интерференціи въ кристаллахъ. Этотъ пріемъ и будетъ служить предметомъ настоящей замѣтки, причемъ основаніемъ рѣшенія будетъ обобщенное построеніе Гюйгенса.

Пусть данъ двоякопреломляющій кристаллъ и плоскость паденія луча, идущаго сначала въ изотропной срединѣ, пересѣкаетъ верхній фасъ кристалла по прямой



OQ, причемъ точка O есть точка паденія луча на кристаллъ. Пусть падающая плоская волна, проходящая черезъ O, будетъ M, JO будетъ направленіе падающаго луча перпендикулярнаго къ ней, ON нормалъ къ фасу кристалла, идущій къ верху въ изотропную средину. Черезъ единицу времени плоская волна будетъ въ M_1 и разстояніе по перпендикуляру QP (точка Q лежитъ на фасѣ кристалла и волнѣ M_1, а P есть подошва перпендикуляра, опущеннаго изъ Q на плоскость волны M) будетъ равно v, скорости свѣта въ верхней изотропной срединѣ.

Пусть далѣе M_1 пересѣкаетъ фасъ кристалла по прямой AB. Въ то время, какъ въ изотропной срединѣ свѣтовыя колебанія распространятся до поверхности шара радіуса v — шара, къ которому M_1 будетъ касательной плоскостью, въ кристаллѣ эти колебанія распространятся до поверхности волны. *Чтобы найдти направленіе преломленныхъ лучей, надо провести черезъ AB плоскости касательныя къ поверхности волны внутри кристалла, тогда прямыя, соединяющія O съ точками касанія, и будутъ искомыми преломленными лучами.*

Это правило и есть извѣстное обобщеніе построенія Гюйгенса, данное имъ для одноосьныхъ кристалловъ.

Такъ-какъ поверхность волны 4-го порядка имѣетъ двѣ полости, то вообще будутъ 4-е касательныя плоскости — по двѣ, симметрично расположенныхъ около начала O; для насъ необходимо взять тѣ двѣ внутри кристалла, которыя будутъ касаться (внутренней и внѣшней) полостей. Такимъ образомъ *получимъ два преломленныхъ луча.* Положимъ, что ABT_1 и ABT_2 будутъ двѣ сказанныя касательныя плоскости, R_1, R_2 точки касанія, тогда OR_1 и OR_2 будутъ оба преломленные луча; положимъ, далѣе, что OS_1 и OS_2 будутъ перпендикуляры, опущенные изъ O на обѣ касательныя плоскости, тогда OS_1 будетъ скорость ω_1 перваго луча, а OS_2 будетъ скоростью ω_2 второго луча.

Задача наша будетъ состоять въ вычисленіи величины и направленія этихъ прямыхъ OP_1, OP_2, OS_1 и OS_2 по данному падающему лучу.

Положимъ, что

$$A, B, C$$

будутъ косинусы направленія падающаго луча;

$$A_1, B_1, C_1$$

косинусы направленія нормала къ тому фасу кристалла, на который падаетъ лучъ, возстановленнаго изъ точки паденія O,

$$A_{\prime\prime}, B_{\prime\prime}, C_{\prime\prime}$$

косинусы направленія нормала къ плоскости паденія луча. При этомъ за начало координатъ принята точка паденія O, и за координатныя оси — оси упругости кристалла. Тогда, называя перемѣнныя координаты какой-нибудь точки буквами x, y, z, будемъ имѣть:

$$Ax + By + Cz = o \qquad (1)$$

уравненіе падающей волны M;

$$A_1x + B_1y + C_1z = o \qquad (2)$$

уравненіе фаса кристалла, на который падаетъ лучъ;

$$A_{''}x + B_{''}y + C_{''}z = o \qquad (3)$$

уравненіе плоскости паденія, причемъ $A_{''}$, $B_{''}$, $C_{''}$ связаны съ A, $A_{'}$ и пр. соотношеніями:

$$\left.\begin{array}{l} A_{''}sni = CB_1 - C_1B; \\ B_{''}sni = AC_1 - A_1C; \\ C_{''}sni = BA_1 - AB_1, \end{array}\right\} \qquad (4)$$

гдѣ i есть уголъ паденія, опредѣляемый равенствомъ:

$$csi = AA_1 + BB_1 + CC_1. \qquad (5)$$

Далѣе уравненіе плоскости M_1 будетъ:

$$Ax + By + Cz - v = o. \qquad (6)$$

Замѣтивъ всѣ эти соотношенія необходимыя намъ ниже, выразимъ аналитически требованіе, чтобы плоскость, касательная къ поверхности волны въ кристаллѣ, проходила черезъ прямую пересѣченія плоскостей (2) и (6).

Уравненія плоскости, проходящей черезъ прямую пересѣченія плоскостей (2) и (6), т. е. плоскости верхняго фаса кристалла и плоскости падающей волны M_1, по извѣстному правилу геометріи можно написать такъ:

$$Ax + By + Cz - v + k(A_1x + B_1y + C_1z) = o; \qquad (7)$$

Здѣсь k неопредѣленный множитель и найдется изъ того условія, чтобы уравненіе (7) давало уравненіе касательной къ волнѣ плоскости. Если назовемъ

$$m,\ n,\ p$$

косинусы направленія одной изъ прямыхъ OS, тогда уравненіе касательной плоскости будетъ:

$$mx + ny + pz - \omega = o, \tag{8}$$

гдѣ ω скорость свѣта вдоль OS.

Уравненіе (7) и (8) должны давать одну и ту-же плоскость, для чего нужно, какъ извѣстно, чтобы коеффиціенты при x, y, z въ обоихъ уравненіяхъ были пропорціональны между собой, т. е. имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} A + kA_1 &= \mu m; \\ B + kB_1 &= \mu n; \\ C + kC_1 &= \mu p; \\ v &= \mu . \omega . \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Здѣсь количество μ есть коеффиціентъ пропорціональности и его физическое значеніе, именно

$$\mu = \frac{v}{\omega}; \tag{10}$$

ясно: это есть не что иное, какъ показатель преломленія свѣта при переходѣ его изъ верхней изотропной средины въ нижнюю двоякопреломляющую.

Количество k, введенное вышенаписанными формулами, и есть то, къ опредѣленію котораго сведется весь предложенный вопросъ; кромѣ этой роли онъ имѣетъ еще другую: эта, какъ можно убѣдиться простымъ вычисленіемъ, величина можетъ дать разность хода лучей въ двоякопреломляющей пластинкѣ, именно—разность двухъ корней k пропорціональна разности хода обоихъ лучей—что необходимо при изученіи явленій интерференціи въ кристаллахъ.

Прежде чѣмъ показать способъ опредѣленія количества k, а по нему и всѣхъ остальныхъ неизвѣстныхъ количествъ, считаю нужнымъ сдѣлать небольшое отступленіе. Уравненія (9) даютъ извѣстные законы распространенія свѣта въ двояко-преломляющихъ кристаллахъ очень просто и легко.

Умножая уравненія (9) по порядку на $A_{\prime\prime}$, $B_{\prime\prime}$, $C_{\prime\prime}$ по сложеніи результатовъ при помощи равенствъ (4), имѣемъ:

$$A_{\prime\prime}m + B_{\prime\prime}n + C_{\prime\prime}p = o. \tag{11}$$

Это равенство показываетъ, что *плоскости, касательныя къ поверхности волны въ кристаллѣ, перпендикулярны къ плоскости паденія.* Затѣмъ умножая первое равенство въ системѣ (9) на B_1, второе на—C_1, по сложеніи результатовъ находимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\omega.\, A_{\prime\prime}\,\mathrm{sn}\, i - (pB_1 - nC_1).v = o;\\ &\omega.\, B_{\prime\prime}.\mathrm{sn}\, i - (mC_1 - pA_1).v = o;\\ &\omega.\, C_{\prime\prime}.\,\mathrm{sn}\, i - (nA_1 - mB_1).v = o; \end{aligned}\right\} \text{подобнымъ образомъ:} \tag{12}$$

Называя теперь σ уголъ между нормаломъ къ фасу кристалла и направленіемъ OS, имѣемъ:

$$\mathrm{cs}\sigma = mA_1 + nB_1 + pC_1.$$

Перенося вторые члены въ равенствахъ (12) вправо и складывая ихъ квадраты, находимъ по извлеченіи квадратнаго корня:

$$\frac{\mathrm{sn}\, i}{\mathrm{sn}\sigma} = \frac{v}{\omega} = \mu, \tag{13}$$

соотношеніе извѣстное и отвѣчающее закону Декарта для просто преломляющихъ срединъ.

Замѣтимъ здѣсь одно обстоятельство. Такъ-какъ обыкновенно свѣтъ проходитъ изъ средины менѣе плотной въ болѣе плотную, то вообще

$$v > \omega,$$

а слѣдовательно по (13):

$$i > \sigma.$$

Опредѣлимъ теперь k. Складывая квадраты первыхъ 3-хъ равенствъ въ системѣ (9) и положивъ для простоты

$$v = 1,$$

находимъ:

$$\omega^2 = \frac{1}{1 + k^2 + 2k\,\mathrm{cs}\,i},$$

или, какъ намъ удобнѣе:

$$\frac{1}{\omega^2} = 1 + k^2 + 2k\,\mathrm{cs}\,i. \qquad (14)$$

Подставимъ теперь одно значеніе $\frac{1}{\omega^2}$ изъ этого равенства, а m, n, p изъ (9) и μ изъ (10) въ уравненіе Френеля для скоростей волнъ, написанное въ видѣ:

$$\omega^4 - \omega^2 Sm^2(b^2 + c^2) + Sm^2 b^2 c^2 = o,$$

причемъ здѣсь a, b, c суть скорости распространенія свѣта вдоль осей упругости, а знакомъ S* обозначена сумма трехъ членовъ подобныхъ первому, написанному подъ нимъ — или, лучше въ видѣ:

$$1 - \frac{1}{\omega^2} \cdot Sm^2(b^2 + c^2) + \frac{1}{\omega^4} Sm^2 b^2 c^2 = 0,$$

составивъ предварительно слѣдующія выраженія:

---

* Это обозначеніе принадлежитъ, кажется, Lamé. См. его Leçons sur l'élasticité etc.

$$\frac{Sm^2(b^2+c^2)}{\omega^2}=S(b^2+c^2)A^2+k^2S(b^2+c^2)A_1{}^2+2kS(b^2+c^2)AA_1;$$

$$\frac{Sm^2b^2c^2}{\omega^2}=Sb^2c^2A^2+k^2Sb^2c^2A_1{}^2+2kSb^2c^2AA_1\,,$$

и умноживъ послѣднее на $\frac{1}{\omega^2}$ (14)

$$\frac{Sm^2b^2c^2}{\omega^4}=Sb^2c^2A^2+k^2Sb^2c^2A^2+2kSb^2c^2AA+k^2Sb^2c^2A^2+$$
$$+k^4Sb^2c^2A_1{}^2+2k^3Sb^2c^2AA_1+2k\mathrm{cs}i\,.\,Sb^2c^2A^2+2k^3\mathrm{cs}iSb^2c^2A_1{}^2$$
$$+4k^2\mathrm{cs}\,i\,Sb^2c^2AA_1\,,-$$

послѣ подстановокъ въ уравненіе Френеля находимъ уравненіе для опредѣленія k:

$$Tk^4+T_{\mathrm{I}}k^3+T_{\mathrm{II}}k^2+T_{\mathrm{III}}k+T_{\mathrm{IV}}=0. \tag{15}$$

Здѣсь положено:

$$T=Sb^2c^2A_1{}^2;\ T_1=2\mathrm{cs}i\,.\,Sb^2c^2A_1{}^2+Sb^2c^2AA_1,$$

$$T_{\prime\prime}=Sb^2c^2A_1{}^2+Sb^2c^2A^2+4\mathrm{cs}i\,.\,Sb^2c^2AA_1-S(b^2+c^2)A_1{}^2;$$

$$T_{\prime\prime\prime}=2\mathrm{cs}i\,Sb^2c^2A^2+2Sb^2c^2AA_1-2S(b^2+c^2)AA_1;\ T_{\mathrm{IV}}=Sb^2c^2A^2$$
$$-S(b^2+c^2)A^2+1.$$

Уравненіе (15) 4-ой степени и даетъ четыре корня для k; изъ нихъ, ясно, два относятся къ той части волны, которая находится внутри кристалла, а два другихъ къ той, которая будетъ внѣ кристалла.

Замѣтимъ здѣсь одно соотношеніе для z и σ. Изъ уравненій (9) по умноженіи ихъ A_1, B_1, C_1 и по сложеніи результатовъ, находимъ:

$$k=\mu\ \mathrm{cs}\,\sigma-\mathrm{cs}\,i\,,$$

а при помощи равенства (13):

$$k = \frac{\operatorname{sn}(i - \sigma)}{\operatorname{sn} \sigma}. \qquad (16)$$

Это соотношеніе очень простое и въ то-же время полезное при вычисленіи разности хода лучей въ кристаллѣ, изъ него находимъ:

$$tg\,\sigma = \frac{\operatorname{sn} i}{k + \operatorname{cs} i}. \qquad (17)$$

Теперь рѣшеніе вопроса состоитъ въ слѣдующемъ. Сначала рѣшаемъ уравненіе (15) относительно k; затѣмъ беремъ тѣ два корня k, которые даютъ по (17) для σ дугу меньшую i. Зная такимъ образомъ два корня k_1 и k_2, находимъ по (17) два значенія σ : σ_1 и σ_2. Потомъ по формулѣ (13) опредѣляемъ:

$$\omega = \frac{\operatorname{sn} \sigma_1}{\operatorname{sn} i}, \omega = \frac{\operatorname{sn} \sigma_2}{\operatorname{sn} i}$$

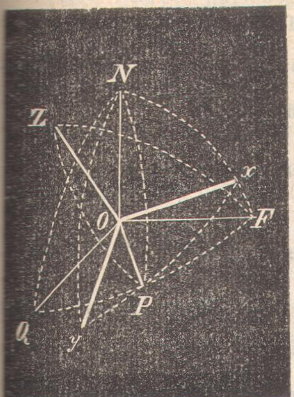
и

$$\mu_1 = \frac{1}{\omega_1}, \mu_2 = \frac{1}{\omega_2};$$

и наконецъ по формуламъ (9) находимъ m, n, p, для болѣе удобнаго опредѣленія которыхъ ниже сообщены логариѳмическія формулы.

Для рѣшенія и изслѣдованія уравненія (15) полезно преобразовать его коеффиціенты, именно полезно выразить эти коеффиціенты въ функціи угловъ, опредѣляющихъ положеніе фаса кристалла въ отношеніи осей кристалла.

Пусть фасъ кристалла пересѣкается плоскостью xy по прямой OP и пусть OF будетъ слѣдъ плоскости паденія на фасѣ. Примемъ слѣдъ плоскости паденіе OF, перпендикуляръ къ плоскости паденія OQ и нормалъ къ фасу ON за новыя координатныя оси x^1, y^1, z^1; тогда, называя A^1, B^1, C^1 косинусы направленія оси x^1, $A_{,,}$, $B_{,,}$, $C_{,,}$ оси $y_,$ и $A_,$, $B_,$, $C_,$ оси z^1, имѣемъ;



$$\left.\begin{aligned} A^1 . \operatorname{sn} i &= A - A_1 . \operatorname{cs} i \\ B^1 . \operatorname{sn} i &= B - B_1 . \operatorname{cs} i \\ C^1 . \operatorname{sn} i &= C - C_1 . \operatorname{cs} i \end{aligned}\right\} ; \quad (18);$$

ибо направленіе A^1, B^1, C^1 перпендикулярно къ направленіямъ ON и OQ, а это послѣднее перпендикул. къ ON и лучу OJ.

Называя теперь φ и ψ углы OP съ осями x^1 и x, а θ уголъ между нормаломъ ON и осью z, по формуламъ Эйлера имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A - A_1 \operatorname{cs} i}{\operatorname{sn} i} &= \operatorname{cs}\varphi . \operatorname{cs}\psi - \operatorname{sn}\varphi . \operatorname{sn}\psi . \operatorname{cs}\theta \quad (\text{изъ } \Delta\, x P F) \\ \frac{B - B_1 \operatorname{cs} i}{\operatorname{sn} i} &= \operatorname{cs}\varphi . \operatorname{sn}\psi + \operatorname{sn}\varphi . \operatorname{cs}\psi . \operatorname{cs}\theta \quad (\text{изъ } \Delta\, y P F) \\ \frac{C - C_1 \operatorname{cs} i}{\operatorname{sn} i} &= \operatorname{sn}\varphi . \operatorname{sn}\theta \quad (\text{изъ } \Delta\, z P F) \end{aligned}\right\} (19)$$

Также:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \operatorname{sn}\psi . \operatorname{sn}\theta \; ; \; (\text{изъ } \Delta\, x P N) \\ B_1 &= \operatorname{cs}\psi . \operatorname{sn}\theta \; ; \; (\text{изъ } \Delta\, y P N) \\ C_1 &= \operatorname{cs}\theta \; . \quad , \; (\text{изъ } \Delta\, z P N) \end{aligned}\right\} ; \quad (20)$$

Полагая въ формулахъ (19):

$tg\, \varphi . \operatorname{cs}\theta = ctg\, \mu$, гдѣ μ вспомогательный уголъ, находимъ: (21)

$$\left.\begin{aligned} A - A_1 . \operatorname{cs} i &= \operatorname{sn} i . \operatorname{os}\varphi . \frac{\operatorname{sn}(\mu - \psi)}{\operatorname{sn}\mu} \\ B - B_1 . \operatorname{cs} i &= \operatorname{sn} i . \operatorname{cs}\varphi . \frac{\operatorname{cs}(\mu - \psi)}{\operatorname{sn}\mu} \\ C - C_1 . \operatorname{cs} i &= \operatorname{sn} i . \operatorname{sn}\varphi . \operatorname{sn}\theta, \text{ и также:} \end{aligned}\right\} ; \quad (22)$$

$$\left.\begin{aligned} A^1 . \operatorname{sn}\mu &= \operatorname{cs}\varphi . \operatorname{sn}(\mu - \psi) \\ B^1 . \operatorname{sn}\mu &= \operatorname{cs}\varphi . \operatorname{cs}(\mu - \psi) \\ C^1 &= \operatorname{sn}\varphi . \operatorname{sn}\theta \; . \end{aligned}\right\} (23)$$

При помощи приведенныхъ формулъ можно преобразовать коеффиціенты T_1 T_{11} . . . Замѣтимъ, что въ нихъ входятъ слѣдующія количества, которыя мы означимъ такъ:

$$P = Sb^2c^2A^2 \ ; P_1 = Sb^2c^2A^2 \ ; P' = Sb^2c^2AA_1 \ ;$$

$$S = S(b^2 + c^2)A^2 \ ; S_1 = S(b^2 + c^2)A_1{}^2, \ S' = S(b^2 + c^2)AA_1.$$

Умножимъ равенства (18) по порядку на Ab^2c^2, Ba^2c^2, Ca^2b^2 и сложимъ результаты, получимъ:

$P - \cs i \, . \, P' = \alpha$, гдѣ α означаемъ вторую часть равенства, не вычисляя ее.

Далѣе умножимъ уравненіе (18) по порядку на $A_1b^2c^2$, $B_1a^2c^2$, $C_1a^2b^2$ и сложимъ результаты, тогда получимъ:

$$P' - \cs i . \, P_1 = \beta, \text{ значеніе } \beta \text{ ясно.} \qquad (25)$$

За-тѣмъ возводимъ уравненія (18) въ квадратъ, умножая по порядку на b^2c^2, a^2c^2, a^2b^2 и складывая, находимъ:

$P + \cs^2 i . P_1 - 2 \cs i . P' = \gamma$, причемъ значеніе γ понятно. (26)

Далѣе перенесемъ вторыя части въ первыхъ частяхъ уравненій (18) во вторыя ихъ части, возводимъ въ квадраты и, умножая по порядку на b^2c^2, a^2c^2, a^2b^2, по сложеніи результатовъ получимъ:

$$P = \cs^2 i . \, P_1 + \delta, \text{ или}$$

$$P - \cs^2 i . \, P_1 = \delta. \qquad (27)$$

Эти равенства (24) — (27) послужатъ намъ для опредѣленія количествъ P, P_1, P' въ функціи одного изъ нихъ и для преобразованія коеффиціентовъ уравненія (15).

Совершенно такимъ-же образомъ находимъ:

$S - \cs i . \, S' = a$; (28) $\qquad$ $S' - \cs i . \, S_1 = b$. (29)

$S + \cs^2 i . \, S_1 - 2 \cs i . \, S' = c$; (30) $\qquad$ $S - \cs^2 i . \, S_1 = d$ (31)

Роль этихъ равенствъ такая-же, какъ и предъидущихъ.

Опредѣлимъ теперь при помощи простого вычисленія количества α, β, γ и δ. Замѣчая, что A, B, C суть линейныя функціи $\operatorname{sn} i$ и $\operatorname{cs} i$, можно представить α, β, γ, δ въ видѣ:

$$\alpha = M.\operatorname{sn}^2 i + N.\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i;\ \beta = N'.\operatorname{sn} i;\ \gamma = M'.\operatorname{sn}^2 i;$$
$$\delta = M''.\operatorname{sn}^2 i + Q.\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i,$$

гдѣ M, N,... суть нѣкоторыя функціи θ, φ и ψ, ихъ вычислимъ ниже; при этомъ замѣчу, что одинаковыми буквами означены количества, которыя, какъ докажемъ, равны.

Также найдемъ:

$$a = F.\operatorname{sn}^2 i + G.\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i;\ b = G'.\operatorname{sn} i;\ c = F'.\operatorname{sn}^2 i;$$
$$d = F''.\operatorname{sn}^2 i + H.\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i.$$

Всѣхъ введенныхъ коэффиціентовъ 12, но, какъ сейчасъ увидимъ, различныхъ между ними только 4.

Дѣйствительно, исключая изъ уравненій (24) — (27) количества P, P_1, P', находимъ:

$$\alpha - \gamma = \beta.\operatorname{cs} i,\ \delta = \alpha + \beta.\operatorname{cs} i = 2\alpha - \gamma,\ \text{также:}$$
$$a - c = b.\operatorname{cs} i,\ d = a + b.\operatorname{cs} i = 2a - c.$$

Подставимъ сюда значеніе α, a..., по сравненіи коэффиціентовъ при $\operatorname{sn} i$, $\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i$, $\operatorname{sn}^2 i$, находимъ:

$$M = M' = M'';\ N = N';\ Q = 2N,$$

$$F = F' = F'';\ G = G';\ H = 2G.$$

И такъ:

$$\alpha = M\operatorname{sn}^2 i. + N.\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i;\ \beta = N\operatorname{sn} i;\ \gamma = M.\operatorname{sn}^2 i,$$
$$\delta = M\operatorname{sn}^2 i + 2N\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i;$$

$$a = F.\operatorname{sn}^2 i + G.\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i;\ b = G.\operatorname{sn} i;\ c = F.\operatorname{sn}^2 i;$$
$$d = F\operatorname{sn}^2 i + 2G\operatorname{sn} i.\operatorname{cs} i.$$

Теперь остается только вычислить M, N, F, G.

Сначала вычислимъ G и N. Значенія ихъ при помощи (25), (29) и (23) будутъ:

$$N = Sb^2c^2A_1A';\ G = S(b^2+c^2)A_1A'$$

и подставляя сюда значеніе A', $A_1 \ldots$ изъ равенствъ (23) и (20), находимъ послѣ легкаго преобразованія:

$$N = -\frac{c^2 \operatorname{sn}\theta . \operatorname{cs}\varphi}{\operatorname{sn}\mu}\left\{b^2\operatorname{cs}\mu + a^2\lambda^2\operatorname{cs}\psi . \operatorname{cs}(\mu-\psi)\right\} + $$
$$+ a^2b^2\operatorname{sn}\theta . \operatorname{sn}\theta . \operatorname{sn}\varphi, \quad (32)$$

гдѣ $$\lambda^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2},$$

$$G = -\frac{c^2\operatorname{sn}\theta . \operatorname{cs}\varphi . \operatorname{cs}\mu}{\operatorname{sn}\mu} - \frac{\operatorname{sn}\theta . \operatorname{cs}\varphi}{\operatorname{sn}\mu}\left\{b^2\operatorname{cs}\mu + a^2\lambda^2\operatorname{cs}\psi\operatorname{cs}(\mu-\psi)\right\} +$$
$$(a^2+b^2)\operatorname{sn}\theta . \operatorname{cs}\theta\operatorname{sn}\varphi. \quad (33)$$

За-тѣмъ по формуламъ (26) и (30) при помощи (23) находимъ:

$$M = \frac{c^2\operatorname{cs}^2\varphi}{\operatorname{sn}^2\mu}\left\{b^2 + a^2\lambda^2\operatorname{cs}^2(\mu-\psi\right\} + a^2b^2\operatorname{sn}^2\theta . \operatorname{sn}^2\varphi; \quad (34)$$

$$F = \frac{c^2\operatorname{cs}^2\varphi}{\operatorname{sn}^2\mu} + \frac{\operatorname{cs}^2\varphi}{\operatorname{sn}^2\mu}\left\{b^2 + a^2\lambda^2\operatorname{cs}^2(\mu-\psi)\right\} +$$
$$+ (a^2+b^2)\operatorname{sn}^2\theta . \operatorname{sn}^2\varphi. \quad (35)$$

Видимъ, что коеффиціенты M, N, F, G зависятъ только отъ θ, φ и ψ, т. е. отъ положенія фаса кристалла, на которой падаютъ лучи, въ отношеніи осей упругости кристалла.

Теперь можно преобразовать коеффиціенты T_1 $T_{11}, \ldots$

Опредѣлимъ P, P', S, S' въ функціи P_1 и S_1, находимъ:

$$P' = \beta + \operatorname{cs} i . P_1;\ P = \delta + \operatorname{cs}^2 i . P_1;$$

$S' = b + \operatorname{cs} i . S_1;\ S = d + \operatorname{cs}^2 i . S_1$, при этомъ количества P_1 и S_1 имѣютъ слѣдующія значенія:

$$P_1 = c^2 \mathrm{sn}^2\theta \{b^2 + a^2\lambda^2 \mathrm{cs}^2\psi\} + a^2 b^2 \mathrm{cs}^2\theta; \quad (36)$$

$$S_1 = c^2 \mathrm{sn}^2\theta + \mathrm{sn}^2\theta \{b^2 + a^2\lambda^2 \mathrm{cs}^2\psi\} + (a^2 + b^2).\mathrm{cs}^2\theta. \quad (37)$$

И такъ имѣемъ:

$T = P_1$; $T_1 = 2\beta + 4\mathrm{cs}\, i . P_1$; $T_{11} = P_1 - S_1 + 5\mathrm{cs}^2 i . P_1 + 4\beta \mathrm{cs}\, i + \delta$, или, при помощи соотношенiи между α, β и δ:

$$T_{11} = P_1 - S_1 + 5\mathrm{cs}^2 i . P_1 + 5\beta \mathrm{cs}\, i + \alpha;$$

$$T_{111} = 2\mathrm{cs}\, i . P_1 + 2\mathrm{cs}^2 i . P_1 - 2\mathrm{cs}\, i . S_1 + 2\beta - 2b + 2\delta . \mathrm{cs}\, i;$$

$$T_{1v} = 1 + \delta - d + (P_1 - S_1)\mathrm{cs}^2 i.$$

Для изслѣдованiя уравненiя (15) полезно его преобразовать. Положимъ:

$$k = l - \mathrm{cs}\, i \quad (38)$$

подставляя это значенiе k въ уравненiи (15), находимъ окончательно:

$$P_1 l^4 + 2\mathrm{sn}\, i . N . l^3 + \{(M + P_1)\mathrm{sn}^2 i - S_1\} l^2 + 2\mathrm{sn}\, i \{(N - G)\mathrm{sn}^2 i$$
$$- G . \mathrm{cs}^2 i\} l + 1 + \mathrm{sn}^4 i . (M - F) - \mathrm{sn}^2 i . \mathrm{cs}^2 i . F = 0. \quad (39)$$

Замѣтимъ, что введя l въ формулу (17), находимъ:

$$\mathrm{tg}\,\sigma = \frac{\mathrm{sn}\, i}{l}. \quad (40)$$

Займемся теперь изслѣдованiемъ полученнаго уравненiя (39). Разберемъ случаи, имѣющiе большое значенiе въ физической оптикѣ.

Посмотримъ, при какихъ условiяхъ уравненiе (39) превращается въ биквадратное. Чтобы это уравненiе обращалось въ биквадратное, необходимо равенство нулю коэффицiентовъ при l^3 и l.

И такъ имѣемъ:

$$\mathrm{sn}\, i . N = 0; \ \mathrm{sn}\, i . \{(N - G).\mathrm{sn}^2 i - G \mathrm{cs}^2 i\} = 0. \quad (41)$$

Эти условія удовлетворяются:

1. $\operatorname{sn} i = 0$, но N и G отличны отъ нуля. Это случай нормальнаго паденія.

2. $\operatorname{sn} i$ не нуль, но $N = 0$, $G = 0$. Эти оба равенства распадаются на другія, ибо можно представить N и G въ видѣ: $N = \operatorname{sn}\theta . N_1$; $G = \operatorname{sn}\theta . G_1$ по равенствамъ (32) и (33). Слѣдовательно или a) $\operatorname{sn}\theta = 0$, N_1 и G_1 отличны отъ нуля, или b) $\operatorname{sn}\theta$ не нуль, а $N_1 = 0$, $G_1 = 0$.

Случай $\operatorname{sn}\theta = 0$ соотвѣтствуетъ тому положенію фаса, когда онъ перпендикуляренъ оси z;

Случай b) разберемъ такъ. Положимъ въ N_1 и G_1:

$$U = \frac{\operatorname{cs}\varphi}{\operatorname{sn}\mu}\left\{ b^2 \operatorname{cs}\mu + a^2\lambda^2 \operatorname{cs}\psi . \operatorname{cs}(\mu - \psi) \right\},$$ тогда условія $N_1 = 0$, $G_1 = 0$ будутъ:

$$-c^2 . U + a^2 b^2 \operatorname{cs}\theta . \operatorname{sn}\varphi = 0; \quad -c^2 \operatorname{cs}\varphi . \operatorname{ctg}\mu - U +$$
$$+ (a^2 + b^2) . \operatorname{cs}\theta . \operatorname{sn}\varphi = 0.$$

Исключая отсюда U и вводя значеніе $\operatorname{ctg}\mu$, находимъ:

$$\operatorname{cs}\theta . \operatorname{sn}\varphi . (a^2 - c^2)(b^2 - c^2) = 0.$$

Это уравненіе даетъ въ общемъ случаѣ двуосьныхъ кристалловъ:

b_1) $\operatorname{cs}\theta = 0$, φ не ноль. При этомъ условіи $U = 0$, т. е., или

$$b'_1) \operatorname{cs}\varphi = 0; \quad b''_1) \operatorname{sn}\psi = 0; \quad b'''_1) \operatorname{cs}\psi = 0.$$

Слѣдовательно, помня значеніе угловъ φ и ψ, имѣемъ:

Если b'_1) лучъ падаетъ въ главномъ сѣченіи, проходящемъ черезъ ось z-овъ и эта послѣдняя лежитъ на фасѣ кристалла, или b''_1) фасъ параллеленъ плоскости xz, или если b'''_1) фасъ параллеленъ плоскости yz, то уравненіе для l превращается въ биквадратное.

c) $\operatorname{sn}\varphi = 0$, $\operatorname{cs}\theta$ не нуль, при этомъ $U = 0$ и даетъ:

c′) $\operatorname{sn}\psi = 0$; c″) $\operatorname{cs}\psi = 0$; слѣдовательно или c′) фасъ кристалла содержитъ ось x-овъ и плоскость паденія есть плоскость главнаго сѣченія или c″) фасъ содержитъ ось y-овъ и опять плоскость главнаго сѣченія есть плоскость паденія.

Итакъ заключаемъ, что уравненіе для l обращается въ биквадратное, когда паденіе нормально, или когда фасъ кристалла параллеленъ какой-нибудь коордонатной плоскости, или перпендикуляренъ къ одной изъ осей упругости.

Дадимъ теперь для m, n, p логариѳмическія выраженія. Положимъ:

$$A - A_1 \operatorname{cs} i = A_1 \operatorname{sn} i . \operatorname{ctg} h;$$

$$B - B_1 \operatorname{cs} i = B_1 \operatorname{sn} i . \operatorname{ctg} j;$$

$$C - C_1 \operatorname{cs} i = C_1 \operatorname{sn} i . \operatorname{ctg} g.$$

Подставляя A, B, C отсюда въ формулы (9), находимъ при помощи (16):

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{A_1 \operatorname{sn}(\sigma + h)}{\operatorname{sn} h}; \\ n &= \frac{B_1 \operatorname{sn}(\sigma + j)}{\operatorname{sn} j}; \\ p &= \frac{C_1 \operatorname{sn}(\sigma + g)}{\operatorname{sn} g}. \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Для опредѣленія h, j, g можно получить слѣдующія формулы при помощи (21) и (22):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg} h &= \frac{\operatorname{cs}\varphi . \operatorname{sn}(\mu - \psi)}{\operatorname{sn}\theta . \operatorname{sn}\psi . \operatorname{sn}\mu}; \\ \operatorname{ctg} j &= \frac{\operatorname{cs}\varphi . \operatorname{cs}(\mu - \psi)}{\operatorname{sn}\theta . \operatorname{cs}\psi . \operatorname{sn}\mu}; \\ \operatorname{ctg} g &= \operatorname{sn}\varphi . \operatorname{tg}\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Опредѣлимъ теперь величину и направленіе прямыхъ OR. Косинусы направленія OR и ея величина входятъ въ уравненіе поверхности волны, которое можно написать слѣдующимъ образомъ:

$$PR - Q + q = 0\,^{*}, \tag{44}$$

гдѣ положено для краткости:

$$P = Sb^2c^2x^2,\ R = Sx^2;\ Q = Sa^2\,(b^2 + c^2\,)\,x^2,\ q = a^2b^2c^2,$$

и гдѣ x, y, z суть коордонаты конца прямой OR.

Уравненіе касательной плоскости можно написать поэтому въ видѣ:

$$\begin{aligned} X.a\{P + a^2R - a^2(b^2 + c^2)\} &+ Y.y.\{P + b^2R - b^2(a^2 + c^2)\} \\ &+ Z.z.\{P + c^2R - c^2(a^2 + b^2)\} = PR - q; \end{aligned} \tag{45}$$

Здѣсь X, Y, Z суть перемѣнные коордонаты касательной плоскости, а x, y, z — точки касанія.

Сравнивая коеффиціенты этого уравненія съ коеффиціентами уравненія (8), мы получимъ три уравненія съ тремя неизвѣстными x, y, z; для рѣшенія ихъ употребимъ пріемъ Lamé. Опредѣлимъ точку x_1, y_1, z_1 изъ уравненій:

$$\frac{a_1}{bc} = \frac{m}{\omega},\ \frac{y_1}{ac} = \frac{n}{\omega},\ \frac{z_1}{ab} = \frac{p}{\omega}. \tag{46}$$

Эта точка лежитъ на касательной къ поверхности эллипсоида:

$$\frac{x_1^{\,2}}{bc} + \frac{y_1^{\,2}}{ac} + \frac{z_1^{\,2}}{ab} = 1, \tag{47}$$

которой можно назвать эллипсоидомъ Lamé.

Дѣйствительно, умножая уравненіе (46) по порядку на x_1, y_1, z_1 и складывая результаты, находимъ:

$$\frac{xx_1}{bc} + \frac{yy_1}{ac} + \frac{zz_1}{ab} = 1, \tag{48}$$

---

* См. *Lamé*, Leçons sur l'élasticité des corps solides. 2-me éd. p. 245.

ибо $mx + ny + pz = \omega$.

Подставляя значеніе m, n, p изъ (46) въ уравненіе Френеля для скорости ω, найдемъ:

$$P_{>1}R_1 - Q_1 + q = 0, \qquad (49)$$

т. е. точка x_1, y_1, z_1 лежитъ на поверхности волны, причемъ $P_{>1}, R_1, Q_1$ суть значенія $P_>, Q, R$ для точки x_1, y_1, z_1.

Также изъ (46) при помощи (47) находимъ:

$$mx_1 + ny_1 + pz_1 = \omega,$$

т. е. точка x_1, y_1, z_1 есть точка, лежащая на касательной къ поверхности волны (44). Отсюда заключаемъ, что точки (x, y, z) и (x_1, y_1, z_1) суть сопряженныя между собой, т. е. каждая есть полюсъ касательной къ волнѣ плоскости относительно эллипсоида Lamé, а слѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{bc} &= x_1 \cdot \frac{P_{>1} + a^2R_1 - a^2(b^2+c^2)}{P_{>1}R_1 - q}, \\ \frac{y}{ac} &= y_1 \cdot \frac{P_{>1} + b^2R_1 - b^2(a^2+c^2)}{P_{>1}R_1 - q}, \\ \frac{z}{ab} &= z_1 \cdot \frac{P_{>1} + c^2R_1 - c^2(a^2+b^2)}{P_{>1}R_1 - q}. \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Опредѣляя $P_{>1}$ и R_1, находимъ:

$$P_{>1} = q . [1 + k^2 + 2k \operatorname{cs} i] = q\,(l^2 + \operatorname{sn}^2 i); \qquad (51)$$

$$R_1 = P_1 l^2 + 2N \operatorname{sn} i . l + M . \operatorname{sn}^2 i. \qquad (52)$$

Составляя $P_{>1}$ R_1, надо будетъ воспользоваться уравненіемъ (39); тогда найдемъ:

$$P_{>1}R_1 = q . \{S_1 l^2 + 2G \operatorname{sn} i . l + F \operatorname{sn}^2 i . - 1\}. \qquad (53)$$

Подставляя все это въ формулы (50), находимъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1}{bc}\cdot\frac{(P_1+b^2c^2).l^2+2N\,\mathrm{sn}\,i.l+(M+b^2c^2)\mathrm{sn}^2 i-(b^2+c^2)}{S_1 l^2+2G\,\mathrm{sn}\,i.l+F\mathrm{sn}^2 i-2};\\ y &= \frac{y_1}{ac}\cdot\frac{(P_1+a^2c^2).l^2+2N\,\mathrm{sn}\,i.l+(M+a^2c^2).\mathrm{sn}^2 i-(a^2+c^2)}{S_1 l^2+2G\,\mathrm{sn}\,i.l+F\mathrm{sn}^2 i-2};\\ z &= \frac{z_1}{ab}\cdot\frac{(P_1+a^2b^2).l^2+2N\,\mathrm{sn}\,i.l+(M+a^2c^2).\mathrm{sn}^2 i-(a^2+b^2)}{S_1 l^2+2G\,\mathrm{sn}\,i.l+F\mathrm{sn}^2 i-2}.\end{aligned}\right\}\quad(54)$$

Зная отсюда x, y, z, находимъ $OR=\varrho$ по формулѣ:

$$\varrho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\qquad(55)$$

и косинусы направленія ϱ по формуламъ:

$$\mathrm{cs}\,f=\frac{x}{\varrho},\ \mathrm{cs}\,g=\frac{y}{\varrho},\ \mathrm{cs}\,h=\frac{z}{\varrho}.\qquad(56)$$

И такъ предложенный вопросъ рѣшенъ.

Для опредѣленія координатъ точекъ R и R_1 можно поступать еще слѣдующимъ образомъ; при опредѣленіи поверхности волны мы имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{\varrho^2-a^2}&=\frac{\omega m}{\omega^2-a^2};\\ \frac{y}{\varrho^2-b^2}&=\frac{\omega n}{\omega^2-b^2};\\ \frac{z}{\varrho^2-c^2}&=\frac{\omega p}{\omega^2-c^2},\end{aligned}\right\}\qquad(44)$$

гдѣ x, y, z суть координаты конца прямой OR, а

$$\varrho^2=x^2+y^2+z^2,$$

т. е. ϱ есть длина OR.

Изъ этихъ уравненій, по исключеніи x, y, z, имѣемъ:

$$\varrho^4.\,S\frac{m^2\omega^2}{(\omega^2-a^2)^2}-2\varrho^2.\left\{S\frac{\omega^2m^2a^2}{(\omega^2-a^2)^2}+\frac{1}{2}\right\}+S\frac{\omega^2a^4m^2}{(\omega^2-a^2)^2}=0.\quad(45)$$

Отсюда опредѣлимъ ϱ, а по (44) x, y, z. Но лучше употребить пріемъ Lamé.