Къ вопросу о конфигураціяхъ.

К. А. Андреева.

1. Точки и прямыя линіи, данныя на плоскости въ опредѣленномъ числѣ, могутъ имѣть такое относительное расположеніе, что каждая данная точка будетъ совмѣщаться съ опредѣленнымъ числомъ данныхъ прямыхъ и каждая прямая съ опредѣленнымъ числомъ данныхъ точекъ. При этомъ число прямыхъ, совмѣщенныхъ съ одною точкою, можетъ быть одно и то же для всѣхъ данныхъ точекъ, а число точекъ, совмѣщенныхъ съ одною данною прямою, одно и то же для всѣхъ данныхъ прямыхъ. Сочетанія точекъ и прямыхъ, подчиненныхъ въ своемъ расположеніи такимъ условіямъ, принято нѣкоторыми геометрами называть *конфигураціями.* Точки и прямыя, составляющія конфигурацію, суть ея элементы.

Простѣйшій примѣръ конфигурацій представляютъ вершины и стороны треугольника. Здѣсь каждая прямая совмѣщена съ двумя точками и каждая точка съ двумя прямыми.

Далѣе, подъ понятіе о конфигураціяхъ подходятъ всѣ полные многоугольники и полные многосторонники. Дѣйствительно, вершины и стороны полнаго многоугольника n-го порядка составляютъ такую конфигурацію, въ которой съ каждой прямой (стороной) совмѣщены двѣ точки (вершины), а съ каждой точкой (вершиной) $(n-1)$ прямыхъ (сторонъ). Точно также стороны и вершины полнаго многосторонника n-го порядка представляютъ конфигурацію, въ которой съ каждою точкою совмѣщены двѣ прямыя и съ каждою прямой $(n-1)$ точекъ.

Конфигураціи, въ которыхъ число точекъ, совмѣщающихся съ прямыми, и число прямыхъ, совмѣщающихся съ точками, одно и тоже, суть *конфигураціи симметрическія.* Изъ всѣхъ многоугольниковъ и многосторонниковъ только треугольникъ представляетъ симметрическую конфигурацію.

2. Будемъ называть *характеристикою* конфигураціи число ея элементовъ одного рода, совмѣщенныхъ съ однимъ элементомъ другого

рода. Всякая конфигурація имѣетъ, слѣдовательно, двѣ характеристики, равенство которыхъ есть условіе симметричности конфигураціи.

Конфигурацію, характеристики которой суть a и b, мы будемъ обозначать чрезъ $Cf(a, b)[x, y]$, гдѣ x и y суть числа всѣхъ элементовъ, составляющихъ конфигурацію. При этомъ подъ первыми буквами a и x нужно подразумѣвать всегда точки, а подъ вторыми b и y прямыя. Соотвѣтственно этому правилу полный четыреугольникъ есть конфигурація $Cf(2, 3)[4, 6]$, а полный четырехсторонникъ конфигурація $Cf(3, 2)[6, 4]$.

3. Приведенные выше примѣры представляютъ такія конфигураціи, въ которыхъ одна изъ характеристикъ не превосходитъ 2. Очевидно, что возможность такихъ конфигурацій не можетъ возбуждать сомнѣнія, такъ какъ въ нихъ всѣ элементы одного рода могутъ быть даны произвольно, а всѣ элементы другого рода опредѣляются сочетаніями первыхъ по два.

Но если каждая изъ характеристикъ болѣе 2, то возможность конфигураціи не очевидна и требуетъ доказательства. Констатированіе этой возможности представляетъ, слѣдовательно, теорему, выражающую нѣкоторое дескриптивное геометрическое свойство.

Извѣстно, напримѣръ, что на плоскости могутъ быть даны десять точекъ и десять прямыхъ въ такомъ расположеніи, чтобы чрезъ каждую точку проходили три изъ этихъ прямыхъ и на каждой прямой лежали три изъ этихъ точекъ.

Такое сочетаніе 10 точекъ и 10 прямыхъ представляетъ симметрическую конфигурацію, характеристики которой суть 3 и 3, т. е. $Cf(3, 3)[10, 10]$. Возможность этой конфигураціи формулируется обыкновенно въ видѣ теоремы о гомологическихъ треугольникахъ.

Извѣстно также, что на плоскости можно взять девять точекъ и девять прямыхъ въ такомъ расположеніи, что чрезъ каждую точку проходятъ три прямыя и на каждой прямой лежатъ три точки. Это есть конфигурація, обозначаемая чрезъ $Cf(3, 3)[9, 9]$.

Конфигурацію послѣдняго рода даетъ теорема о шестиугольникѣ Паскаля, когда вершины этого шестиугольника лежатъ по три на двухъ прямыхъ, или теорема о шестиугольникѣ Бріаншона, когда стороны его проходятъ по три чрезъ двѣ точки *).

4. Объясненное въ предыдущемъ понятіе о конфигураціяхъ точекъ и прямыхъ линій можетъ быть расширено въ смыслѣ распространенія на элементы болѣе сложные и принадлежащіе системамъ большаго числа измѣреній, нежели системы точекъ и прямыхъ на плоскости. Такъ на-

*) Въ 1880 году мы указывали на эти сочетанія прямыхъ и точекъ, какъ на основныя предложенія проективной геометріи. См. ст. „Объ изложеніи началъ проективной геометріи въ Сообщ. Х. М. О.“, вып. 2, 1880, § 14, стр. 163—166.

примѣръ, всѣ круги на плоскости представляютъ систему трехъ измѣреній и, разсматривая круги и точки, какъ элементы конфигурацій, можно утверждать слѣдующее:

1) Четыре точки и четыре круга могутъ быть взяты такъ на плоскости, чтобы чрезъ каждую точку проходило три изъ этихъ круговъ и на каждомъ кругѣ лежало три изъ этихъ точекъ.

2) Восемь точекъ и восемь круговъ могутъ быть взяты такъ на плоскости, что чрезъ каждую точку проходятъ четыре круга и на каждомъ кругѣ лежатъ четыре точки.

Такія совокупности точекъ и круговъ представляютъ также симметрическія конфигураціи съ характеристиками 3 и 4. Возможность первой изъ нихъ очевидна; указаніе на возможность второй составляетъ теорему.

5. Наибольшаго вниманія заслуживаютъ конфигураціи въ пространствѣ, образуемыя основными геометрическими элементами: точками, плоскостями и прямыми линіями.

Точки и плоскости суть необходимые элементы такихъ конфигурацій. Прямыя линіи могутъ быть принимаемы въ разсмотрѣніе или нѣтъ. Число точекъ, совмѣщающихся съ одною плоскостью, и число плоскостей, совмѣщающихся съ одною точкою, суть характеристики конфигураціи.

Простѣйшія изъ конфигурацій въ пространствѣ представляютъ вершины и грани тетраэдра, а также вершины и грани такъ называемыхъ полныхъ пространственныхъ многоугольниковъ и многогранниковъ. Эти конфигураціи принадлежатъ къ такимъ, возможность которыхъ очевидна. Но существуетъ, безъ сомнѣнія, множество конфигурацій, констатированіе которыхъ представляетъ болѣе или менѣе трудно доказываемыя дескриптивныя свойства пространства.

Къ такимъ свойствамъ принадлежитъ теорема, доказанная въ первый разъ Мёбіусомъ, о возможности такого расположенія двухъ тетраэдровъ, при которомъ каждый изъ нихъ вписанъ въ другой *). Это есть симметрическая конфигурація восьми точекъ и восьми плоскостей, совмѣщающихся по четыре, т. е. $Cf(4, 4)[8, 8]$.

6. Нѣкоторыя конфигураціи обнаруживаются при геометрическихъ изслѣдованіяхъ, какъ случайные или побочные результаты. Такъ при разсмотрѣніи четырехъ сферъ мы получаемъ 12 центровъ подобія, расположенныхъ на 12 плоскостяхъ по шести на каждой. Притомъ черезъ каждый центръ подобія проходятъ также шесть изъ этихъ плоскостей. Это есть, слѣдовательно, конфигурація $Cf(6, 6)[12, 12]$. Здѣсь въ число элементовъ могутъ быть включены и прямыя (16 осей подобія), на каж-

*) Möbius (A. F.)—„Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in Bezug auf andere um und eingeschrieben zugleich heissen?“ — Crelle Journal T. III, 1828. p. 273—278.—Möbius gesammelte Werke, T. I, 1885, p. 439-446.

дой изъ которыхъ лежатъ три центра подобія и чрезъ каждую изъ которыхъ проходятъ три плоскости.

При изслѣдованiи системъ прямыхъ линій въ пространствѣ (Strahlencomplexe) встрѣчается линейчатая поверхность 4-го порядка и 4-го класса, такъ называемая Куммерова поверхность. Она имѣетъ 16 узловыхъ точекъ и 16 особыхъ плоскостей, которыя составляютъ симметрическую конфигурацію $Cf(6, 6)[16, 16]$. Съ каждою плоскостью этой конфигураціи совмѣщены 6 ея точекъ, лежащихъ на одной кривой 2-го порядка, и чрезъ каждую точку проходятъ 6 плоскостей касательныхъ къ одному конусу 2-го порядка.

7. Профессоръ Страсбургскаго университета Теодоръ Рейе первый обратилъ вниманiе на конфигураціи, какъ на непосредственный предметъ геометрическихъ изслѣдованій.

Во введенiи къ своимъ лекціямъ по геометріи положенія этотъ геометръ по поводу теоремы о гомологическихъ треугольникахъ говоритъ, что фигура, изображающая эту теорему, заслуживаетъ вниманія, какъ примѣръ характеризующихся особаго рода правильностью геометрическихъ сочетаній или конфигурацій *).

Въ нѣкоторыхъ своихъ спеціальныхъ изслѣдованiяхъ онъ доказываетъ отдѣльные виды конфигурацій. Такъ напримѣръ въ статьѣ „Ueber die Kummer'sche Configuration" **), онъ ставитъ доказательство указанной выше конфигураціи особыхъ точекъ и особыхъ плоскостей Куммеровой поверхности внѣ зависимости отъ разсмотрѣнія этой поверхности.

Наконецъ, въ статьѣ подъ заглавіемъ „Das Problem der Configurationen" ***) имъ былъ поставленъ категорически вопросъ о разысканiи конфигурацій по даннымъ ихъ числовымъ характеристикамъ и разъясненiи ихъ геометрическихъ свойствъ.

8. Вопросъ о конфигураціяхъ, поставленный такимъ образомъ, возбуждаетъ, конечно, большой интересъ. Но помимо непосредственнаго интереса къ конфигураціямъ, какъ представляющимъ любопытныя геометрическія сочетанія, на первый взглядъ неочевидныя, онѣ должны привлекать вниманiе геометровъ по своему значенiю для систематическаго изложенія геометрическихъ теорій.

Дѣло въ томъ, что указанныя выше конфигураціи, состоящія изъ сочетаній 10 точекъ съ 10 прямыми и 9 точекъ съ 9 прямыми, представляютъ геометрическія теоремы, изъ которыхъ, какъ основныхъ предложеній или леммъ, можетъ быть развита вся проективная теорія линій 2-го порядка на плоскости. Подобнымъ же образомъ многія другія

*) Th. Reye.—Die Geometrie der Lage. 2-te Aufl. Hannover, 1877, p. 4.

**) ——— „Ueber die Kummer'sche Configuration von 16 Punkten und 16 Ebenen".— „Borchardt Journal, T. LXXXIV, 1878, p. 209—213.

***) ——— „Das Problem der Configurationen" — Acta mathematica, T. I, 1882 p. 93—96.

конфигураціи могутъ быть принимаемы за точки отправленія въ изложеніи другихъ геометрическихъ теорій, имѣющихъ предметомъ болѣе сложныя геометрическія формы какъ на плоскости, такъ и въ пространствѣ.

Если принять во вниманіе, что конфигураціи точекъ, прямыхъ линій и плоскостей представляютъ зависимости между основными геометрическими элементами и что сущность этихъ зависимостей является основнымъ принципомъ цѣлой теоріи, то нельзя не признать за ними естественнаго значенія леммъ для этихъ теорій.

9. Задача Рейе объ изслѣдованіи конфигурацій, исходя изъ числовыхъ характеристикъ, чрезвычайно обширна и потому самому можетъ получать разрѣшеніе не иначе какъ по частямъ.

Почти одновременно съ публикаціей статьи „Das Problem der Configurationen" появляется въ математическихъ журналахъ рядъ геометрическихъ изслѣдованій, имѣющихъ цѣлью дать отвѣтъ на эту задачу для простѣйшихъ случаевъ. Наибольшую послѣдовательность въ разсмотрѣніи такихъ случаевъ представляютъ нѣсколько статей Кантора, публикованныхъ въ отчетахъ Вѣнской Академіи Наукъ *).

Изслѣдованія этого геометра показали между прочимъ, что нужно различать три рода конфигурацій, обозначающихся черезъ $Cf(3,3)[9,9]$. Изъ нихъ только одна представляетъ частный случай теоремы Паскаля о вписанномъ шестиугольникѣ. Всѣ три доказываются при помощи только началъ проективной геометріи и указаніе на нихъ должно имѣть естественное мѣсто при изложеніи этихъ началъ.

Далѣе, Канторъ обобщилъ конфигурацію $Cf(3,3)[10,10]$, представляющую теорему о гомологическихъ треугольникахъ, на случай какихъ угодно характеристикъ a и b. Именно, онъ доказалъ возможность конфигураціи $Cf(a,b)[x,y]$, гдѣ x есть число сочетаній изъ $(a+b-1)$ элементовъ по b, и y число сочетаній изъ того же числа элементовъ по a. Это доказательство состоитъ въ послѣдовательномъ примѣненіи теоремы о гомологическихъ треугольникахъ.

Не нужно думать, однако, что этимъ обобщеніямъ даются всѣ конфигураціи, соотвѣтствующія характеристикамъ a и b. Оно выясняетъ только существованіе особаго типа конфигурацій, въ которыхъ числа x и y всѣхъ элементовъ находятся въ опредѣленной зависимости отъ характеристикъ. Указанныя выше конфигураціи 9 точекъ и 9 прямыхъ, очевидно, подъ этотъ типъ не подходятъ.

---

*) Kantor (S) — „Ueber eine Gattung von Configurationen in der Ebene und im Raume". — Sitzungsberichte der Wiener Akad. der Wiss. T. LXXX, 1879, p. 715–723.

——— „Ueber die Configurationen (3,3) mit den indices 8, 9 und ihren Zusammenhang mit den Curven dritter Ordnung". — Ibid. T. LXXXIV. 1881, p. 915–932.

——— „Die Configurationen (3,3) 10". — Ibid. T. LXXXIV, 1881, p. 1291–1314.

Тому же автору принадлежатъ указанія на нѣкоторые типы конфигурацій въ пространствѣ. Онъ показалъ, напримѣръ, что если обозначать чрезъ C_k^l число сочетаній изъ k предметовъ по l, то, каковы бы ни были цѣлыя числа m и n, возможна такая комбинація C_{m+n}^{n+1} точекъ, C_{m+n}^{m} прямыхъ и C_{m+n}^{m+1} плоскостей, что 1) чрезъ каждую прямую проходитъ n плоскостей и на каждой прямой лежитъ m точекъ, 2) на каждой плоскости лежитъ $(m+1)$ прямыхъ и C_{m+1}^{2} точекъ, 3) чрезъ каждую точку проходитъ $(n+1)$ прямыхъ и C_{n+1}^{2} плоскостей.

Кромѣ изслѣдованій Кантора существуетъ въ геометрической литературѣ нѣсколько другихъ работъ, представляющихъ прямо или косвенно частные отвѣты на задачу Рейе о разысканіи конфигурацій.

Настоящая замѣтка примыкаетъ къ тому же ряду изслѣдованій, отвѣчающихъ на задачу Рейе, и имѣетъ цѣлью доказательство одного общаго типа симметрическихъ конфигурацій въ пространствѣ, который, сколько намъ извѣстно, не былъ до сихъ поръ указанъ.

Въ виду того, что простѣйшая изъ этыхъ конфигурацій есть сочетаніе вершинъ и граней двухъ вписанныхъ другъ въ друга тетраэдровъ, мы будемъ называть ихъ *конфигураціями Мёбіуса*.

10. Возможность построенія двухъ тетраэдровъ, вписанныхъ одновременно другъ въ друга, можетъ быть выражена слѣдующей теоремой.

Если черезъ данную точку o проведемъ четыре плоскости A_1, A_2, A_3, A_4 и на шести прямыхъ, по которымъ онѣ пересѣкаются, возьмемъ по одной точкѣ p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, то четыре плоскости B_1, B_2, B_3, B_4, опредѣляемыя каждыми тремя изъ этихъ точекъ, не лежащими на одной изъ плоскостей A, проходятъ черезъ одну точку q.

Здѣсь мы имѣемъ конфигурацію восьми точекъ o, p_i, q и восьми плоскостей A_i, B_j, связанныхъ между собою такъ, что чрезъ каждую точку проходятъ четыре плоскости и на каждой плоскости лежатъ четыре точки.

Это есть первая конфигурація Мёбіуса. Въ ней мы можемъ подраздѣлить всѣ элементы на пять послѣдовательныхъ группъ или рядовъ: o, (A), (p), (B), q. Точки o и q, составляющія крайнія группы, суть противоположные элементы. Очевидно, что элементами трехъ первыхъ рядовъ всѣ остальные элементы вполнѣ опредѣляются.

Возможность той же конфигураціи можетъ быть выражена также слѣдующей теоремой, взаимной по формѣ съ предыдущею.

Если на данной плоскости O возьмемъ четыре точки a_1, a_2, a_3, a_4 и чрезъ шесть прямыхъ, соединяющихъ эти точки, приведемъ плоскости P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, то четыре точки b_1, b_2, b_3, b_4, опредѣляемыя каждыми тремя изъ этихъ плоскостей, не проходящими чрезъ одну и ту же изъ точекъ a, лежатъ на одной плоскости Q.

Здѣсь мы имѣемъ тоже 8 точекъ a_i и b_j и 8 плоскостей O, P_i, Q, составляющихъ конфигурацію, при чемъ плоскости O и Q будутъ противоположными элементами.

Каждой точкѣ конфигураціи соотвѣтствуетъ, слѣдовательно, своя противоположная точка и каждой плоскости противоположная плоскость.

11. Вообразимъ теперь, что чрезъ данную точку o проведены пять плоскостей A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и на линіяхъ ихъ пересѣченія взято 10 точекъ p_1, $p_2, \ldots p_{10}$, по одной на каждой.

Какія-нибудь четыре изъ плоскостей A вмѣстѣ съ соотвѣтственными точками p опредѣлятъ первую конфигурацію Мёбіуса, въ которой, согласно предыдущему, должна существовать точка q, противоположная точкѣ o. Такихъ точекъ будетъ, очевидно, пять, т. е. столько, сколько существуетъ сочетаній изъ пяти плоскостей A по четыре. Можно доказать, что эти пять точекъ q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 лежатъ на одной плоскости C.

Допустивъ, что это доказано, мы будемъ имѣть конфигурацію 16 точекъ o, p_i, q_j и 16 плоскостей A_i, B_j, C, въ которой черезъ каждую точку проходятъ пять плоскостей и на каждой плоскости лежатъ пять точекъ. Дѣйствительно, чрезъ точку o проходятъ пять плоскостей A, на каждой плоскости A лежитъ точка o и четыре точки p, чрезъ каждую точку p проходятъ двѣ плоскости A и три плоскости B, на каждой плоскости B лежатъ три точки p и двѣ точки q, чрезъ каждую точку q проходятъ четыре плоскости B и одна C, наконецъ, на плоскости C лежатъ 5 точекъ q.

Это есть вторая конфигурація Мёбіуса. Въ ней элементы составляютъ шесть послѣдовательныхъ группъ: o, (A), (p), (B), (q), C. Точка o и плоскость C суть противоположные элементы.

12. Положимъ, далѣе, что чрезъ данную точку o проведены шесть плоскостей A и на всѣхъ линіяхъ ихъ пересѣченія взято по одной точкѣ p.

Каждыя пять изъ плоскостей A вмѣстѣ съ соотвѣтственными точками p опредѣлятъ вторую конфигурацію Мёбіуса, въ которой будетъ существовать плоскость C, противоположная точкѣ o. Такихъ плоскостей будетъ, слѣдовательно, также шесть.

Можно доказать, что всѣ шесть плоскостей C_1, $C_2, \ldots C_6$ проходятъ черезъ одну точку r, и вмѣстѣ съ тѣмъ убѣдиться, что 32 точки o, p_i, q_j, r и 32 плоскости A_i, B_j, C_k составляютъ конфигурацію, въ которой чрезъ каждую точку проходятъ 6 плоскостей и на каждой плоскости лежатъ 6 точекъ.

Это третья конфигурація Мёбіуса. Въ ней мы имѣемъ семь послѣдовательныхъ рядовъ элементовъ, причемъ точкѣ o противоположнымъ элементомъ служитъ точка r.

13. Приведенныя, но пока еще не доказанныя, геометрическія предложенія суть только первыя звенья цѣлаго ряда такихъ предложеній, изъ которыхъ каждое предполагаетъ извѣстными всѣ предыдущія и которыми констатируется цѣлый рядъ конфигурацій Мёбіуса.

Общая или m-ая конфигурація этого ряда есть сочетаніе 2^{n-1} точекъ и столькихъ же плоскостей, въ которой черезъ каждую точку проходитъ n плоскостей и на каждой плоскости лежитъ n точекъ. При этомъ очевидно, что $n = m + 3$, т. е. порядокъ каждой конфигураціи на три единицы меньше, чѣмъ ея характеристика.

Конфигураціи Мёбіуса суть, слѣдовательно, типа $Cf(n, n)[2^{n-1}, 2^{n-1}]$.

Само собою понятно, что мы сведемъ доказательство всѣхъ конфигурацій Мёбіуса къ доказательству только первой изъ нихъ, если, допустивъ возможность первыхъ $(m-1)$, убѣдимся въ возможности m-ой.

Вообразимъ для этого, что чрезъ данную точку o проведены n плоскостей A_1, $A_2, \ldots A_n$ и на линіяхъ ихъ пересѣченія взято по одной точкѣ p. Какія-нибудь $(n-1)$ изъ плоскостей A вмѣстѣ съ соотвѣтствующими точками p опредѣлятъ конфигурацію Мёбіуса съ характеристикой $(n-1)$. Такихъ конфигурацій будетъ n.

Если докажемъ, что элементы всѣхъ этихъ конфигурацій, противоположные точкѣ o, совмѣщаются съ однимъ и тѣмъ же новымъ элементомъ (лежатъ на одной плоскости, если они суть точки, и проходятъ черезъ одну точку, если суть плоскости), то и убѣдимся въ возможности конфигураціи съ характеристикой n.

14. Будемъ обозначать черезъ $Cf(k)[A_i, A_j \ldots]$ конфигурацію съ характеристикой k, опредѣляемую всѣми n плоскостями A, за исключеніемъ $A_i, A_j \ldots$, и соотвѣтственными имъ точками p.

Если положимъ сперва, что n есть число нечетное, то въ конфигураціяхъ $Cf(n-1)[A_i]$ элементы, противоположные точкѣ o, будутъ плоскости, въ конфигураціяхъ $Cf(n-2)[A_i, A_j]$ точки, въ конфигураціяхъ $Cf(u-3)[A_i, A_j, A_k]$ опять плоскости и т. д.

Обозначимъ плоскости, противоположныя точкѣ o,

въ конфигураціи $Cf(n-1)[A_1]$ чрезъ N_1,
„ $Cf(n-1)[A_2]$ „ N_2,
„ $Cf(n-1)[A_3]$ „ N_3,
„ $Cf(n-1)[A_4]$ „ N_4.

Обозначимъ точки, противоположныя точкѣ o,

въ конфигураціи $Cf(n-2)[A_1, A_2]$ чрезъ v_1,
„ $Cf(n-2)[A_1, A_3]$ „ v_2,
„ $Cf(n-2)[A_1, A_4]$ „ v_3,
„ $Cf(n-2)[A_2, A_3]$ „ v_4,
„ $Cf(n-2)[A_2, A_4]$ „ v_5,
„ $Cf(n-2)[A_3, A_4]$ „ v_6.

Обозначимъ плоскости, противоположныя точкѣ o,

въ конфигураціи $Cf(n-3)[A_2, A_3, A_4]$ чрезъ M_1,

„ $Cf(n-3)[A_1, A_3, A_4]$ „ M_2,

„ $Cf(n-3)[A_1, A_2, A_4]$ „ M_3,

„ $Cf(n-3)[A_1, A_2, A_3]$ „ M_4.

Пусть наконецъ точка, противоположная точкѣ o, въ конфигураціи $Cf(n-4)[A_1, A_2, A_3, A_4]$ будетъ u.

Вслѣдствіе того, что доказываемое для какого-нибудь даннаго значенія n мы считаемъ извѣстнымъ для всѣхъ его меньшихъ значеній, будемъ имѣть, что всѣ четыре плоскости M проходятъ черезъ точку u. На томъ же основаніи заключаемъ, что каждая изъ точекъ v лежитъ на двухъ изъ плоскостей M, именно:

точка v_1 на плоскостяхъ M_3, M_4,

„ v_2 „ M_2, M_4,

„ v_3 „ M_2, M_3,

„ v_4 „ M_1, M_4,

„ v_5 „ M_1, M_3,

„ v_6 „ M_1, M_2.

Наконецъ по той же причинѣ

плоскость N_1 проходитъ чрезъ точки v_1, v_2, v_3,

„ N_2 „ „ „ v_1, v_4, v_5,

„ N_3 „ „ „ v_2, v_4, v_6,

„ N_4 „ „ „ v_3, v_5, v_6.

Отсюда видимъ, что всѣ точки u и v и всѣ плоскости M и N составляютъ первую конфигурацію Мёбіуса и потому четыре плоскости N_1, N_2, N_3, N_4 проходятъ чрезъ одну точку w, противоположную въ этой конфигураціи съ точкою u.

Такъ какъ въ предыдущихъ разсужденіяхъ подъ плоскостью A_4 можно подразумѣвать любую изъ плоскостей A за исключеніемъ A_1, A_2, A_3, то убѣждаемся, что всѣ плоскости N, противоположныя точкѣ o въ n конфигураціяхъ $Cf(n-1)[A_i]$, проходятъ черезъ одну и ту же точку w, а это и нужно было доказать.

Если бы мы предположили, что n есть число четное, то предыдущее доказательство измѣнилось бы только въ томъ, что въ разсматриваемыхъ четырехъ послѣднихъ рядахъ элементовъ (N), (v), (M), u точки были бы замѣнены плоскостями и обратно. При этомъ заключительный доводъ доказательства остался бы по существу тотъ же самый, такъ какъ мы видѣли, что первая конфигурація Мёбіуса можетъ быть констатирована двумя взаимными теоремами.

15. Чтобы вполнѣ убѣдиться, что доказанная предыдущими разсужденіями конфигурація обладаетъ всѣми вышеупомянутыми свойствами общей конфигураціи Мёбіуса, намъ нужно еще показать, что при вся-

комъ n число всѣхъ точекъ и всѣхъ плоскостей, составляющихъ эту конфигурацію, равно 2^{n-1}, а число элементовъ, совмѣщенныхъ съ любымъ элементомъ конфигураціи, равно n.

Принимая за данныя, опредѣляющія конфигурацію, точку o, n плоскостей A и точки p, мы распредѣляемъ, какъ уже сказано, всѣ элементы въ послѣдовательные ряды, состоящіе попеременно изъ точекъ и плоскостей.

Первый рядъ содержитъ одну только точку o, второй — n плоскостей A, третій—всѣ точки p, число которыхъ равно числу сочетаній изъ n по 2. Четвертый рядъ состоитъ изъ плоскостей B, каждая изъ которыхъ соотвѣтствуетъ тремъ изъ плоскостей A; слѣдовательно, число элементовъ четвертаго ряда равно числу сочетаній изъ n по 3. Пятый рядъ состоитъ изъ точекъ, противоположныхъ точкѣ o въ первыхъ конфигураціяхъ Мёбіуса, опредѣляемыхъ каждыми четырьмя изъ плоскостей A (конечно вмѣстѣ съ точками p и o), а потому число элементовъ этого ряда будетъ равно числу сочетаній изъ n по 4.

Вообще число элементовъ k-го ряда должно равняться числу сочетаній изъ n по k, потому что элементы этого ряда суть противоположные точкѣ o въ конфигураціяхъ съ характеристикою k, опредѣляемыхъ каждыми k плоскостями изъ всѣхъ n плоскостей A.

Называя чрезъ μ и ν числа точекъ и плоскостей, составляющихъ конфигурацію, опредѣляемую всѣми плоскостями A, и подразумѣвая подъ знакомъ C_n^k число сочетаній изъ n по k, будетъ, слѣдовательно, имѣть:

$$\mu + \nu = 1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n.$$

Вторая часть этого равенства есть сумма биноміальныхъ коэффиціентовъ и потому

$$\mu + \nu = (1+1)^n = 2^n.$$

Въ то же время

$$\mu - \nu = 1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0.$$

Слѣдовательно,

$$\mu = \nu = 2^{n-1}.$$

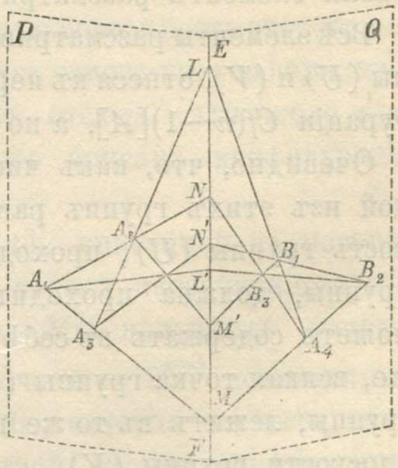
Если мы возьмемъ какой-нибудь элементъ ε k-го ряда, то онъ, будучи противоположнымъ точкѣ o для нѣкоторой конфигураціи $Cf(k)[A]$ съ характеристикой k, совмѣщается съ k элементами предыдущаго ряда, принадлежащими этой конфигураціи. Кромѣ того этотъ же элементъ ε будетъ совмѣщаться съ тѣми элементами послѣдующаго ряда, которые суть противоположные точкѣ o для всѣхъ конфигурацій $Cf(k+1)[A]$, опредѣляемыхъ тѣми сочетаніями плоскостей A по $(k+1)$, въ которыя входятъ k плоскостей A, принадлежащихъ предыдущей конфигураціи $Cf(k)[A]$. Число этихъ сочетаній, очевидно, равняется $(n-k)$. Слѣдовательно, съ произвольно взятымъ элементомъ ε конфигураціи $Cf(n)[A]$ совмѣщаются $k+(n-k)=n$ элементовъ.

16. Въ предыдущемъ мы свели доказательство конфигураціи Мёбіуса какого-угодно порядка къ доказательству первой изъ этихъ конфигурацій, т. е. возможности построенія двухъ вписанныхъ другъ въ друга тетраэдровъ.

Это послѣднее предложеніе доказано Мёбіусомъ при помощи его барицентрическаго исчисленія, которое, какъ извѣстно, есть одно изъ обобщеній метода координатъ. Сокращенный способъ аналитической геометріи даетъ средство къ весьма простой формулировкѣ этого доказательства при той же самой руководящей идеѣ *).

Считаемъ не лишнимъ привести здѣсь геометрическое доказательство того же предложенія, основанное на началахъ проективной геометріи.

Возьмемъ четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 въ пространствѣ и примемъ ихъ за вершины тетраэдра (A). Обозначимъ черезъ P плоскость, проходящую черезъ три первыя изъ этихъ точекъ, и черезъ Q произвольную плоскость, проходящую черезъ A_4. Пусть EF будетъ линія пересѣченія этихъ плоскостей.



Ребра тетраэдра A, лежащія на его грани P, встрѣтятъ прямую EF въ точкахъ L, M, N. Прямыя LA_4, MA_4, NA_4 будутъ линіями пересѣченія остальныхъ трехъ граней того же тетраэдра съ плоскостью Q.

Возьмемъ на этихъ прямыхъ точки B_1, B_2, B_3 и примемъ ихъ за вершины другого тетраэдра (B). Эти три вершины лежатъ на граняхъ тетраэдра (A) и грань Q тетраэдра (B) проходитъ черезъ вершину A_4 тетраэдра (A). Пусть L', M', N' будутъ точки, въ которыхъ прямыя $B_2 B_3$, $B_1 B_3$, $B_1 B_2$ встрѣчаютъ прямую EF.

Для того чтобы тетраэдръ (B) былъ описанный около тетраэдра (A), его грани должны пересѣкать плоскость P по тремъ прямымъ, соединяющимъ точки L', M', N' съ вершинами A_1, A_2, A_3.

Допустивши это, замѣтимъ, что шесть точекъ L, L', M, M', N, N', будучи точками пересѣченія прямой EF со сторонами полнаго четыреугольника $B_1\ B_2\ B_3\ A_4$ на плоскости Q, составляютъ инволюцію. От-

*) Это доказательство приведено нами, какъ примѣръ примѣненія сокращеннаго способа, въ „Основномъ курсѣ Аналитической Геометріи“ ч. II, Харьковъ, 1888, стр. 62—63.

сюда же слѣдуетъ, что шесть прямыхъ, по которымъ плоскость P пересѣкаетъ три грани тетраэдра (A) и три грани тетраэдра (B), будучи прямыми, сходящимися по три въ точкахъ A_1, A_2, A_3 и встрѣчающими прямую EF въ шести точкахъ инволюціи, составляютъ также систему сторонъ полнаго четыреугольника. Это доказываетъ, что прямыя $A_1 L'$, $A_2 M'$, $A_3 N'$ сходятся въ одну точку.

Точка эта есть четвертая вершина тетраэдра (B), и такъ какъ она находится на плоскости P, то убѣждаемся, что тетраэдръ (B) есть не только описанный около тетраэдра (A), но и вписанный въ него. Другими словами, тетраэдры (A) и (B) суть вписанные другъ въ друга.

17. Не трудно показать, что всякая конфигурація Мёбіуса состоитъ изъ двухъ такихъ же конфигурацій низшаго на единицу порядка, вписанныхъ одновременно другъ въ друга.

Положимъ, что разсматриваемая конфигурація есть $Cf(n)[A]$, гдѣ подъ A будемъ подразумѣвать, какъ и прежде, n плоскостей, проходящихъ черезъ одну и ту же точку o конфигураціи. Если возьмемъ какія-нибудь $(n-1)$ изъ этихъ плоскостей, то опредѣлимъ конфигурацію $Cf(n-1)[A]$, низшаго на единицу порядка и входящую въ составъ разсматриваемой, т. е. такую, каждый элементъ которой есть въ то же время элементъ разсматриваемой конфигураціи.

Всѣ элементы разсматриваемой конфигураціи мы раздѣлимъ на двѣ группы (U) и (V), отнеся къ первой тѣ, которые принадлежатъ взятой конфигураціи $Cf(n-1)[A]$, а ко второй всѣ тѣ, которые не принадлежатъ ей.

Очевидно, что, какъ число точекъ, такъ и число плоскостей въ каждой изъ этихъ группъ равняется 2^{n-2}. При этомъ какая-нибудь плоскость группы (U), проходя непремѣнно черезъ $(n-1)$ точекъ той же группы, должна проходить еще черезъ одну точку группы (V) и не можетъ содержать въ себѣ болѣе одной точки этой группы. Точно такъ же, всякая точка группы (U), находясь на $(n-1)$ плоскостяхъ той же группы, лежитъ въ то же время на одной, и притомъ только на одной, плоскости группы (V).

Всѣ элементы группъ (U) и (V) совмѣщаются, такимъ образомъ, попарно: точки съ плоскостями и плоскости съ точками.

Если теперь возьмемъ какую-нибудь плоскость группы (V), то она, проходя, согласно сказанному, только черезъ одну точку группы (U), должна проходить черезъ $(n-1)$ точекъ той же группы (V). Подобнымъ же образомъ всякая точка группы (V), находясь только на одной плоскости группы (U), должна лежать на $(n-1)$ плоскостяхъ той же группы (V).

Всѣ элементы группы (V) составляютъ, слѣдовательно, конфигурацію Мёбіуса съ характеристикой $(n-1)$.

Такимъ образомъ видимъ, что двѣ группы (U) и (V), на которыя раздѣлены нами всѣ элементы разсматриваемой конфигураціи, суть двѣ конфигураціи низшаго на единицу порядка и притомъ такія, что точки одной лежатъ на плоскостяхъ другой и обратио, т. е. это суть двѣ конфигураціи вписанныя другъ въ друга.

18. Восемь граней двухъ вписанныхъ другъ въ друга тетраэдровъ могутъ быть разсматриваемы, какъ четыре поверхности 2-го порядка имѣющія восемь общихъ точекъ.

Извѣстно изъ теоріи поверхностей 2-го порядка, что семью точками, общими тремъ такимъ поверхностямъ, опредѣляется восьмая ихъ общая точка, и что черезъ эти восемь точекъ можно провести безчисленное множество поверхностей 2-го порядка.

Первая конфигурація Мёбіуса представляется, такимъ образомъ, прямымъ слѣдствіемъ этого свойства поверхностей 2-го порядка. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы убѣждаемся изъ сказаннаго, что если семь точекъ этой конфигураціи находятся на какой-нибудь данной поверхности 2-го порядка (напр. на сферѣ), то и восьмая точка лежитъ на той же поверхности.

Положимъ, что намъ дана какая-нибудь поверхность 2-го порядка S. Возьмемъ на ней точку o и проведемъ черезъ эту точку n плоскостей $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$. Линія пересѣченія какихъ-либо двухъ изъ этихъ плоскостей встрѣтитъ поверхность S еще въ одной точкѣ p. Элементами o, (A), (p) опредѣлится конфигурація Мёбіуса, всѣ точки которой, какъ слѣдуетъ изъ сказаннаго, должны лежать на поверхности S.

Мы убѣждаемся такимъ образомъ, что во всякую поверхность второго порядка можетъ быть вписана конфигурація Мёбіуса какого-угодно порядка.

Въ силу закона двойственности заключаемъ отсюда, что около всякой поверхности второго порядка можетъ быть описана конфигурація Мёбіуса какого-угодно порядка.

19. Всякая плоскость конфигураціи $Cf(n)[A]$, вписанной въ поверхность S 2-го порядка, опредѣляетъ своимъ съ ней пересѣченіемъ нѣкоторую дѣйствительную линію 2-го порядка. Мы получаемъ, такимъ образомъ, на поверхности S систему 2^{n-1} точекъ и 2^{n-1} коническихъ сѣченій, представляющихъ также конфигурацію, которая служитъ какъ бы изображеніемъ на поверхности S вписанной въ нее конфигураціи Мёбіуса. Черезъ каждую точку этой конфигураціи проходитъ n коническихъ сѣченій и на каждомъ коническомъ сѣченіи лежитъ n точекъ.

Если поверхность S есть сфера, то, взявши ея стереографическую проекцію на какую-нибудь плоскость, мы получимъ на этой послѣдней такую же конфигурацію точекъ и круговъ. Выше были упомянуты частные случаи такихъ круговыхъ конфигурацій.

Еще въ 1873 году въ статьѣ „Выводъ одного общаго свойства многосторонниковъ“ *) нами была доказана возможность такого расположенія круговъ на плоскости.

---

*) См. Математическій Сборникъ т. VI, Москва, 1873.