Къ вопросу объ устойчивости движенія.

А. М. Ляпунова.

Предлагаемая замѣтка заключаетъ въ себѣ небольшое дополненіе къ сочиненію *Общая задача объ устойчивости движенія* (Харьковъ, 1892; изданіе Харьк. Матем. Общества).

Въ этомъ сочиненіи, предполагая, что въ дифференціальныхъ уравненіяхъ возмущеннаго движенія, приведенныхъ къ нормальному виду, вторыя части представлены рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ неизвѣстныхъ функцій, и дѣлая еще нѣкоторыя общія предположенія (о которыхъ будетъ сказано ниже), я указываю условіе, при которомъ рѣшеніе вопроса объ устойчивости не зависитъ отъ членовъ выше перваго измѣренія въ названныхъ рядахъ; но при этомъ доказываю только его достаточность. Здѣсь я намѣренъ показать, какимъ образомъ можетъ быть доказана необходимость этого условія.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть величины, по отношенію къ которымъ изслѣдуется устойчивость, и которыя въ дифференціальныхъ уравненіяхъ возмущеннаго движенія должны играть роль неизвѣстныхъ функцій времени t.

Величины эти суть нѣкоторыя данныя функціи координатъ и скоростей разсматриваемой матерьяльной системы, выраженія которыхъ могутъ зависѣть явнымъ образомъ и отъ времени.

Я предполагаю, что функціи эти выбраны такъ, чтобы для движенія, устойчивость котораго изслѣдуется, и которое называю невозмущеннымъ, онѣ всѣ дѣлались нулями, и что для движеній возмущенныхъ онѣ удовлетворяютъ дифференціальнымъ уравненіямъ вида:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n + X_s,\\ (s = 1, 2, \ldots, n)\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

гдѣ $p_{s\sigma}$ $(s, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$ суть нѣкоторыя вещественныя постоянныя, а $X_1, X_2, \ldots, X_n$ нѣкоторыя извѣстныя функціи величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и t, представляемыя при достаточно малыхъ $|x_s|$ рядами

$$X_s = \sum P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}, \qquad (m_1 + m_2 + \ldots + m_n > 1)$$

расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ x_s и несодержащими членовъ ниже второго измѣренія относительно послѣднихъ. Я предполагаю при томъ, что коэффиценты $P_s^{(\ldots)}$ въ этихъ рядахъ, представляющіе или вещественныя постоянныя, или непрерывныя вещественныя функціи времени, таковы, что возможно найти такія положительныя постоянныя M и A, при которыхъ выполнялись бы неравенства вида

$$\left| P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} \right| < \frac{M}{A^{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}}$$

для всѣхъ значеній t, превосходящихъ то его значеніе, которое мы приняли за начальное.

Задача объ устойчивости по отношенію къ величинамъ x_s приводится къ рѣшенію вопроса о возможности для всякаго даннаго положительнаго числа l выбирать другое положительное число ε такъ, чтобы всякій разъ, когда въ начальный моментъ времени функціямъ x_s даются вещественныя значенія, удовлетворяющія условіямъ

$$|x_1| \leqq \varepsilon, \quad |x_2| \leqq \varepsilon, \quad \ldots, \quad |x_n| \leqq \varepsilon,$$

во все послѣдующее время движенія выполнялись неравенства

$$|x_1| < l, \quad |x_2| < l, \quad \ldots, \quad |x_n| < l.$$

Когда этотъ вопросъ разрѣшается въ утвердительномъ смыслѣ, невозмущенное движеніе по отношенію къ величинамъ x_s устойчиво; въ противномъ случаѣ неустойчиво.

Въ упомянутомъ выше сочиненіи указывается условіе, которому должны удовлетворять постоянныя $p_{s\sigma}$, для того, чтобы рѣшеніе этого вопроса не зависѣло отъ какихъ-либо частныхъ предположеній относительно функцій X_s.

Условіе это относится къ корнямъ уравненія

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \varkappa & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - \varkappa & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} - \varkappa \end{vmatrix} = 0,$$

и если

$$\lambda_1\,,\ \lambda_2\,,\ \ldots,\ \lambda_n \tag{2}$$

суть взятыя со знакомъ минусъ вещественныя части этихъ корней, выражается такъ: *наименьшее изъ чиселъ (2) не должно быть нулемъ.*

Достаточность этого условія обнаруживается тѣмъ, что для случаевъ, когда наименьшее изъ чиселъ (2) положительно, доказывается устойчивость невозмущеннаго движенія, а для случаевъ, когда число это отрицательно, — неустойчивость, при чемъ принимаются въ разсчетъ только тѣ общія предположенія относительно функцій X_s, которыя высказаны выше [1]).

Чтобы доказать необходимость того же условія, я долженъ доказать теперь слѣдующее:

Каковы-бы ни были постоянныя $p_{s\sigma}$, но если только они таковы, что наименьшее изъ чиселъ (2) есть нуль, функціи X_s всегда можно подбирать такъ, чтобы имѣла мѣсто устойчивость или неустойчивость, по желанію.

Что въ этомъ предположеніи названныя функціи всегда можно выбирать такъ, чтобы имѣла мѣсто неустойчивость, это выводится уже изъ нѣкоторыхъ результатовъ, находящихся въ моемъ сочиненіи, притомъ и непосредственно доказывается весьма легко. Мнѣ остается поэтому только показать, что если наименьшее изъ чиселъ (2) есть нуль, то всегда возможенъ и такой выборъ функцій X_s, при которомъ невозмущенное движеніе будетъ устойчивымъ.

Я разсмотрю сначала два частныхъ случая, для которыхъ числа (2) всѣ будутъ нулями.

Пусть система (1) имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1, \\ \frac{dx_i}{dt} &= x_{i-1} + X_i. \\ &{\scriptstyle (i=2,\,3,\,\ldots,\,n)} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Разумѣя подъ $\varphi_1\,,\ \varphi_2\,,\ \ldots,\ \varphi_n$ функціи, опредѣляемыя послѣдовательно (для $s=n\,,\ n-1\,,\ \ldots,\ 2,\ 1$) изъ уравненій вида

$$\varphi_s = x_s^2 + \varphi_{s+1}^2$$

при условіи

$$\varphi_{n+1} = 0,$$

нетрудно убѣдиться, что если

---

[1]) *Общая задача объ устойчивости движенія*, стр. 86.

$$X_s = -2\,x_{s+1}\varphi_{s+1}, \qquad (s=1,\,2,\,\dots,\,n)$$

то функція φ_1 будетъ интеграломъ системы (3).

Но функція эта (непрерывная и однозначная) такова, что для вещественныхъ x_s можетъ обращаться въ нуль не иначе, какъ при

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Поэтому при указанномъ выборѣ функцій X_s невозмущенное движеніе несомнѣнно будетъ устойчивымъ.

Я допускаю теперь, что система (1) есть четнаго порядка $n = 2m$ и имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = -\mu y_1 + X_1, \qquad && \frac{dy_1}{dt} = \mu x_1 + Y_1,\\
&\frac{dx_i}{dt} = -\mu y_i + x_{i-1} + X_i, && \frac{dy_i}{dt} = \mu x_i + y_{i-1} + Y_i,\\
&&(i=2,\,3,\,\dots,\,m)&
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

гдѣ y_s, Y_s суть новыя обозначенія величинъ x_{m+s}, X_{m+s}.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ суть функціи, опредѣляемыя послѣдовательно уравненіями вида

$$\varphi_s = x_s^2 + y_s^2 + \varphi_{s+1}^2$$

при условіи

$$\varphi_{m+1} = 0.$$

Тогда, если

$$X_s = -2\,x_{s+1}\varphi_{s+1}, \qquad Y_s = -2\,y_{s+1}\varphi_{s+1}, \qquad (s=1,\,2,\,\dots,\,m)$$

то функція φ_1 будетъ, какъ легко въ томъ убѣдиться, интеграломъ системы (4). А такъ какъ функція эта при вещественныхъ x_s, y_s можетъ уничтожаться только для

$$x_1 = x_2 = \dots = x_m = y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0,$$

то подобно предыдушему должно заключить, что при указанномъ выборѣ функцій X_s, Y_s невозмущенное движеніе будетъ устойчивымъ.

Обращаясь теперь къ общему случаю, я замѣчаю. что каковы-бы ни были постоянныя $p_{s\sigma}$, всегда найдется линейная подстановка съ постоянными вещественными коэффиціентами, преобразовывающая систему (1) въ такую, которая распадется на группы уравненій, принадлежащія къ одному изъ двухъ слѣдующихъ типовъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -\lambda y_1 + Y_1, \\ \frac{dy_i}{dt} &= -\lambda y_i + y_{i-1} + Y_i, \\ &\scriptstyle (i=2,\,3,\,\ldots,\,k) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -\lambda y_1 - \mu z_1 + Y_1, & \frac{dz_1}{dt} &= \mu y_1 \lambda z_1 + Z_1, \\ \frac{dy_i}{dt} &= -\lambda y_i - \mu z_i + z_{i-1} + Y_i, & \frac{dz_i}{dt} &= \mu y_i - \lambda z_i + z_{i-1} + Z_i, \\ & & &\scriptstyle (i=2,\,3,\,\ldots,\,k) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

гдѣ Y_s, Z_s означаютъ совокупности членовъ выше перваго измѣренія относительно неизвѣстныхъ функцій.

Здѣсь не исключается и случай $k=1$, когда группа вида (5) приводится къ одному первому уравненію, а группа вида (6) къ двумъ уравненіямъ первой строки.

Въ этихъ уравненіяхъ λ представляетъ одно изъ чиселъ (2).

Поэтому, если между послѣдними не находится отрицательныхъ, то чтобы невозмущенное движеніе сдѣлать устойчивымъ, стоитъ только во всѣхъ группахъ, для которыхъ $\lambda > 0$, а также въ тѣхъ, для которыхъ $k=1$, положить $Y_s = Z_s = 0$, и въ группахъ, для которыхъ $\lambda = 0$, $k > 1$, совокупности членовъ выше перваго измѣренія выбрать, какъ было показано въ двухъ разсмотрѣнныхъ сейчасъ частныхъ случаяхъ.

Такимъ образомъ необходимость указаннаго выше условія можетъ считаться доказанной.

Но условіе это, разумѣется, необходимо, только пока разсматриваются всякія системы вида (1). Если же желательно разсматривать лишь системы какого-либо опредѣленнаго типа, то оставаясь, конечно, достаточнымъ, оно можетъ не дѣлаться болѣе необходимымъ.

Такъ напримѣръ, если разсматривать только каноническія системы съ постоянными коэффиціентами, то условіе это навѣрно не будетъ необходимымъ.

Пользуюсь случаемъ, чтобы исправить нѣкоторыя замѣченныя мною неточности въ текстѣ цитированнаго здѣсь сочиненія.

На стр. 6 заключительныя слова параграфа 2 „При этомъ условіи величины (4)...“ должны быть замѣнены слѣдующими:

„При этомъ условіи величины (4) могутъ играть такую же роль при рѣшеніи вопроса объ устойчивости, какъ и величины (3), если только заданіемъ величинъ (4) функціи x_s, удовлетворяющія уравненіямъ (1), опредѣляются вполнѣ. Это послѣднее условіе въ силу предположеній, которыя мы дѣлаемъ далѣе относительно уравненій (1) (пар. 4), всегда будетъ выполняться. Поэтому далѣе вмѣсто величинъ (3) будемъ разсматривать всегда величины (4)".

На стр. 15, вторая фраза параграфа 6 „Будемъ разсматривать функціи..." должна быть замѣнена слѣдующимъ:

„Будемъ разсматривать функціи вещественнаго перемѣннаго t, получающія вполнѣ опредѣленныя значенія для всякаго t, бо́льшаго нѣкотораго предѣла t_0 или равнаго ему. Будемъ при томъ разсматривать только такія функціи, для модулей которыхъ при измѣненіи t отъ t_0 до какого угодно даннаго числа T, бо́льшаго t_0, существовали бы высшіе предѣлы".

На той же стр. фраза „Разсматривая одновременно съ функціей x..." должна быть замѣнена слѣдующею:

„Разсматривая одновременно съ функціей x функцію $\frac{1}{x}$, будемъ предполагать, что при всякомъ данномъ T, бо́льшемъ t_0, въ промежуткѣ отъ t_0 до T точный низшій предѣлъ модуля функціи x отличенъ отъ нуля".

На стр. 132 (10 и 11 строки) фраза „и что каждое изъ послѣднихъ, если ... " должна быть замѣнена слѣдующею:

„и что каждое изъ послѣднихъ, если для него $|c|$ достаточно мало, будетъ *по отношенію къ величинамъ* z, z_s устойчивымъ".

Для невозмущеннаго движенія (для котораго $c=0$) задача объ устойчивости по отношенію къ величинамъ x, y, x_s не отличается въ сущности отъ задачи объ устойчивости по отношенію къ величинамъ z, z_s. Но для періодическихъ движеній, о которыхъ идетъ здѣсь рѣчь, эти двѣ задачи вообще различны.

Для этихъ движеній по отношенію къ величинамъ x, y, x_s вообще существуетъ только извѣстная условная устойчивость: они устойчивы для возмущеній, не мѣняющихъ постоянной величины интеграла (76). Безусловная же устойчивость по отношенію къ названнымъ величинамъ имѣетъ для нихъ мѣсто лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда періодъ T (стр. 122) не зависитъ отъ постояннаго c, т. е. когда всѣ числа h_j суть нули.

Чтобы доказать это, разсматриваемъ одно изъ періодическихъ движеній, соотвѣтствующее, допустимъ, уравненіямъ:

$$z=c, \qquad z_1=z_2=\ldots=z_n=0, \tag{I}$$

$$\vartheta=\tau+\varphi_1 c+\varphi_2 c^2+\ldots, \tag{II}$$

гдѣ

$$\tau=\frac{2\pi(t-t_0)}{T},$$

а φ_1, φ_2 и т. д. суть извѣстныя періодическія функціи τ (см. стр. 122).

Изъ соотношеній между перемѣнными x, y, x_s и z, ϑ, z_s (стр. 110 и 119) нетрудно заключить, что если c не нуль, задача объ устойчивости этого движенія по отношенію къ первымъ перемѣннымъ равносильна задачѣ объ устойчивости его по отношенію ко вторымъ. Поэтому, чтобы разсматриваемое движеніе, устойчивое по отношенію къ z, z_s, было устойчивымъ по отношенію къ x, y, x_s, необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчивымъ по отношенію къ ϑ.

Замѣтивши это, означаемъ вторую часть уравненія (II) буквой ψ, и полагая

$$\vartheta = \psi + \zeta,$$

составляемъ дифференціальное уравненіе, которому будетъ удовлетворять ζ, въ предположеніи, что для всѣхъ возмущенныхъ движеній, съ которыми сравнивается разсматриваемое періодическое, постоянная величина интеграла (76) та же, что и для періодическаго.

Для всѣхъ этихъ движеній постоянное c въ уравненіи (66) будетъ тогда имѣть ту же величину, какъ и въ уравненіяхъ (I) и (II).

Поэтому, исключая z при помощи уравненія (66), получимъ для опредѣленія ζ уравненіе вида:

$$\frac{d\zeta}{dt} = Z(z_1, z_2, \ldots, z_n, \zeta, \psi), \tag{III}$$

вторая часть котораго будетъ уничтожаться при $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$.

Здѣсь Z будетъ нѣкоторою голоморфною функціей величинъ z_1, z_2, ..., z_n, ζ, въ разложеніи которой коэффиценты будутъ періодическими по отношенію къ ψ, и функція эта будетъ голоморфною въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній ψ.

Мы замѣчаемъ теперь, что постоянное c всегда можно предположить настолько численно малымъ, чтобы характеристичныя числа функцій z_s (какъ функцій перемѣннаго ϑ), удовлетворяющихъ уравненіямъ (70), были всѣ положительными при всякихъ начальныхъ значеніяхъ этихъ функцій.

Допуская это, означимъ черезъ $\varkappa$ какое-либо положительное число, меньшее всѣхъ этихъ характеристичныхъ чиселъ.

Затѣмъ, принимая t_0 за начальное значеніе t, означимъ черезъ z_0 начальное значеніе функціи

$$|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|.$$

Тогда, подставляя въ функцію Z вмѣсто величинъ z_s ихъ выраженія въ функціяхъ $\vartheta = \psi + \zeta$, обратимъ ее въ такую функцію τ, ζ и начальныхъ значеній величинъ z_s, которая при достаточно большомъ M будетъ удовлетворять неравенству

$$|Z| < M z_0 e^{-\varkappa\tau}$$

для всѣхъ значеній t, бо́льшихъ t_0, для всѣхъ значеній ζ, численно меньшихъ нѣкотораго предѣла l, и для всѣхъ численно достаточно малыхъ начальныхъ значеній функцій z_s.

Вслѣдствіе этого, означая черезъ ζ_0 начальное значеніе функціи ζ и предполагая $|\zeta_0|$ и z_0 достаточно малыми для того, чтобы выполнялось неравенство

$$|\zeta_0| + \frac{MT}{2\pi\varkappa} z_0 < l,$$

изъ уравненія (III) выведемъ, что при всякомъ t, бо́льшемъ t_0, будетъ выполняться слѣдующее:

$$|\zeta| < |\zeta_0| + \frac{MT}{2\pi\varkappa} z_0 (1 - e^{-\varkappa\tau}).$$

Отсюда заключаемъ объ устойчивости нашего движенія по отношенію къ ζ или, что все равно,—по отношенію къ ϑ.

Этотъ выводъ полученъ въ предположеніи, что возмущенія не измѣняютъ величины интеграла (76).

Разсмотримъ теперь какія угодно возмущенія.

Пусть c_1 есть постоянное, входящее вмѣсто c въ уравненіе (66) для разсматриваемаго возмущеннаго движенія.

Пусть далѣе ψ_1 есть то, во что обращается ψ послѣ замѣны c на c_1.

Въ силу доказаннаго сейчасъ для безусловной устойчивости нашего движенія по отношенію къ ϑ при $|c|$ достаточно маломъ, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы для всякаго даннаго положительнаго ε при c_1, достаточно близкомъ къ c, для всѣхъ значеній t, бо́льшихъ t_0, выполнялось неравенство

$$|\psi_1 - \psi| < \varepsilon.$$

А этому условію, не предполагая $c_1 = c$, очевидно, можно удовлетворить только въ случаѣ, когда T не зависитъ отъ c.

Указанная выше неточность, выразившаяся въ пропускѣ словъ „по отношенію къ величинамъ z, z_s", повлекла за собою неправильныя обобщенія, встрѣчающіяся на стр. 145 (двѣ первыя строки) и 147 (примѣч.), гдѣ утверждается, что всѣ періодическія движенія, достаточно близкія къ невозмущенному, устойчивы. Такъ какъ здѣсь рѣчь идетъ объ устойчивости по отношенію къ величинамъ x, y, x_s и при томъ— объ устойчивости безусловной, то утверждать, что имѣетъ мѣсто устойчивость, вообще можно для одного только невозмущеннаго движенія.

30 августа 1892 г.