КУРСЪ
ТЕОРІИ
ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

Составилъ
Д. Деларю,
ординарный профессоръ Харьковскаго Университета.

ХАРЬКОВЪ.
Въ Университетской Типографіи.

1880.

Напечатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Харьковскаго Университета.

Ректоръ *А. Питра.*

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Недостатокъ въ руководствахъ къ изученію теоріи дифференціальныхъ уравненій ощущается не только у насъ, но и въ западной Европѣ, вообще столь богатой учебниками исчисленія безконечно-малыхъ. Дѣло въ томъ, что со времени изданія знаменитаго « Traité du calcul différentiel et du calcul intégral » Лакруа, обстоятельнаго нѣмецкаго курса Раабе[1] и Лекцій дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій аббата Муаньо[2], сочиненій, въ которыхъ теорія дифференціальныхъ уравненій излагалась въ тогдашнемъ ея состояніи, этотъ отдѣлъ анализа обогатился большимъ числомъ спеціальныхъ изслѣдованій, переработать которыя въ форму, доступную для начинающихъ, представлялось далеко не легкимъ. Въ слѣдствіе этого авторы руководствъ по исчисленію безконечно-малыхъ и предпочитали ограни-

[1] Die Differential- und Integralrechnung von *J. L. Raabe.* Zürich. 1839.

[2] Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral. Paris. 1840.

чиваться изложеніемъ только самыхъ основныхъ понятій теоріи дифференціальныхъ уравненій, оставляя изучающимъ ее трудъ знакомиться со спеціальными изслѣдованіями ученыхъ непосредственно по самымъ источникамъ. Единственный опытъ обстоятельнаго и систематическаго изложенія этого отдѣла анализа представляетъ сочиненіе англійскаго ученаго Буля «A treatise on differential equations», появившееся въ 1859 году; но и въ немъ, не смотря на многія положительныя его достоинства, теоріи совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій, уравненій въ полныхъ дифференціалахъ и частныхъ производныхъ развиты поверхностно. Правда, французскій ученый Серре, въ своемъ извѣстномъ «Cours de calcul différential et intégral, и Hoüel, въ неоконченномъ еще изданіи своего «Cours de calcul infinitésimal», обратили сравнительно болѣе вниманія на изложеніе теоріи дифференціальныхъ уравненій; но и они не дали ей все-таки столько мѣста, сколько она заслуживаетъ.

Желаніе дать студентамъ физико-математическихъ факультетовъ нашихъ университетовъ пособіе къ систематическому изученію столь важнаго отдѣла анализа, какъ теорія дифференціальныхъ уравненій, и побудило меня къ изданію настоящаго труда, представляющаго переработку моихъ университетскихъ лекцій. Эта цѣль опредѣлила какъ объемъ, такъ и характеръ самаго соченія. Я старался выдержать соразмѣрность въ развитіи различныхъ статей и, не вдаваясь въ излишнія подробности, не упустить ничего существеннаго для ознакомленія читателя съ пріемами, выработанными до сихъ поръ наукою для интегрированія тѣхъ или другихъ видовъ дифференціальныхъ уравненій.

Курсъ свой я раздѣляю на два отдѣла. Первый, который теперь издается, содержитъ теорію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій; во второй войдутъ теоріи совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій, уравненій въ полныхъ дифференціалахъ и уравненій въ частныхъ производныхъ.

Первый отдѣлъ содержитъ шесть главъ, изъ которыхъ первая знакомитъ съ происхожденіемъ различныхъ видовъ дифференціальныхъ уравненій. Во второй главѣ излагаются пріемы интегрированія дифференціальныхъ уравненій перваго порядка. Здѣсь я старался, по возможности, ознакомить читателя съ примѣненіемъ способовъ раздѣленія перемѣнныхъ и интегрирующаго множителя къ интеграціи всѣхъ наиболѣе извѣстныхъ формъ уравненій перваго порядка и первой степени. Далѣе я излагаю пріемъ, предложенный для интеграціи дифференціальныхъ уравненій дерптскимъ профессоромъ Миндингомъ и привожу приложеніе его къ интеграціи уравненія вида $Mdx + Ndy = 0$, гдѣ M, N функціи второй степени отъ x, y, сдѣланное бывшимъ харьковскимъ профессоромъ Е. И. Бейеромъ. Съ цѣлью показать возможность примѣненія къ разысканію полнаго интеграла различныхъ уравненій и иныхъ частныхъ пріемовъ, я заимствовалъ нѣсколько наиболѣе выдающихся примѣровъ изъ мемуара Лагранжа «Sur l'intégration de quelques équations différentielles»[1]. Глава эта заканчивается изложеніемъ пріемовъ интегрированія дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, но степеней выше первой.

Третья глава посвящена изложенію пріемовъ интегрированія уравненій высшихъ порядковъ. Прежде всего останавливаюсь на уравненіяхъ линейныхъ. Изъ общихъ свойствъ ихъ я привожу только главныя, имѣющія непосредственное значеніе для построенія пріемовъ интегрированія. Затѣмъ я излагаю интегрированіе линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ постоянными коэффиціентами, при чемъ, однако, ограничиваюсь приведеніемъ одного изъ нѣсколькихъ извѣстныхъ пріемовъ. Изъ линейныхъ уравненій съ перемѣнными коэффиціентами я останавливаюсь преимущественно на уравненіяхъ втораго порядка безъ придаточнаго члена. Наконецъ, въ заключеніе, указываю на тѣ частныя формы дифференціальныхъ уравненій высшихъ порядковъ, въ которыхъ интегрированіе сводится на квадратуры или, по меньшей мѣрѣ, на интегрированіе уравненій низшаго порядка чѣмъ данное.

---

[1] Oevres, T. II, p. 5.

Четвертая глава знакомитъ съ пріемами интегрированія дифференціальныхъ уравненій при помощи безконечныхъ строкъ и опредѣленныхъ интеграловъ.

Въ пятой главѣ излагается теорія особенныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій какъ перваго, такъ и высшихъ порядковъ. Статьѣ этой, въ виду теоретическаго интереса, ею представляемаго, я позволилъ себѣ дать довольно значительное развитіе и ввести въ нее нѣкоторые результаты моихъ собственныхъ изслѣдованій, напечатанныхъ въ Московскомъ математическомъ сборникѣ.

Шестая и послѣдняя глава этого отдѣла посвящена изложенію главнѣйшихъ геометрическихъ приложеній теоріи дифференціальныхъ уравненій.

Что касается до втораго отдѣла, съ изданіемъ котораго я надѣюсь не замедлить, то онъ будетъ посвященъ, какъ замѣчено уже выше, изложенію теоріи совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій, уравненій въ частныхъ производныхъ и уравненій въ полныхъ дифференціалахъ. Значеніе, которое отдѣлъ этотъ имѣетъ для прикладныхъ математическихъ наукъ, побуждало меня обратить на него особенное вниманіе и попытаться ознакомить читателя съ сущностію замѣчательныхъ изслѣдованій Якоби, Бертрана, Льювиля, Бура, Гамильтона и другихъ ученыхъ, обогатившихъ своими трудами теорію интегрированія какъ совокупныхъ уравненій, такъ и уравненій въ частныхъ производныхъ. Такая попытка, при теперешнемъ состояніи науки, при той незаконченности, которою еще страдаютъ многіе изъ методовъ интеграціи этихъ классовъ уравненій, представляла значительныя трудности, требуя постоянной и значительной переработки научнаго матеріала. Я позволяю себѣ поэтому надѣяться, что эти обстоятельства послужатъ, въ глазахъ компетентныхъ судей, извиненіемъ мнѣ въ тѣхъ недостаткахъ, которые естественно будутъ встрѣчаться въ моемъ трудѣ.

Въ заключеніе считаю необходимымъ сдѣлать замѣчаніе относительно обозначеній, мною употребляемыхъ. Вездѣ, гдѣ это не можетъ повести къ недоразумѣніямъ, я пользуюсь для означенія производныхъ, берущихся по измѣняемости того или другаго перемѣннаго, обыкновенною характеристикою d; напротивъ, въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ, рядомъ съ *частными* производными функціи, приходится разсматривать и производныя ея, взятыя относительно перемѣннаго и всего, что съ нимъ измѣняется, я первыя означаю характеристикою ∂, а вторыя — характеристикою d. Такъ, $\frac{\partial u}{\partial x}$ выражаетъ частную производную отъ u, взятую исключительно относительно одного x, а $\frac{du}{dx}$ означаетъ производную, взятую по измѣняемости x и количествъ, отъ него зависящихъ. Для частныхъ производныхъ $\frac{du}{dx}$ употребляю, гдѣ это удобно, и обозначеніе $D_x u$, предложенное Коши. Результатъ подстановки въ функціональное выраженіе V вмѣсто перемѣннаго x его значенія x_0 я означаю часто чрезъ $\Big|^{x_0} V$, разность двухъ выраженій $\Big|^{x_1} V$ и $\Big|^{x_0} V$, представляю чрезъ $\Big|_{x_0}^{x_1} V$, т. е. пишу

$$\Big|^{x_1} V - \Big|^{x_0} V = \Big|_{x_0}^{x_1} V.$$

Эти обозначенія введены были, какъ извѣстно, Коши.

Рукопись издаваемаго мною теперь перваго отдѣла моего курса была уже сдана въ типографію, когда я получилъ первый выпускъ сочиненія бывшаго варшавскаго профессора Н. Н. Алексѣева, озаглавленнаго «Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій». Представляя обработку лекцій, читанныхъ имъ въ университетѣ, трудъ почтеннаго профессора, по своей цѣли, соотвѣтствуетъ издаваемому мною курсу. Въ виду этого для меня естественно возникъ вопросъ: не излишнимъ ли становится теперь мое руководство? Ознакомившись однако съ появившимся выпускомъ сочиненія г-на Алексѣева, я рѣшился не останавливать своего изданія. Во-первыхъ, важность теоріи дифференціальныхъ уравненій такова, что появленіе и нѣсколькихъ руководствъ къ ея изученію представляется далеко не роскопью; во-вторыхъ, лекціи почтеннаго профессора разнятся отъ моего курса какъ выборомъ научнаго матеріала, такъ и его обработкой; мнѣ кажется, поэтому, что оба сочиненія могутъ пополнять, а не исключать одно другое.

Относительно самой внѣшности изданія позволяю себѣ надѣяться, что я сдѣлалъ все, что было возможно въ провинціи, гдѣ и средства типографій, и наборщики далеко не тѣ, какъ въ столицахъ. Избѣжать опечатокъ мнѣ не удалось, но я прилагаю списокъ тѣхъ изъ нихъ, которыя были мною замѣчены.

Какъ бы ни былъ несовершенъ мой трудъ, но если онъ принесетъ свою долю пользы тѣмъ, кто пожелаетъ изучить теорію дифференціальныхъ уравненій, то я буду считать себя вполнѣ вознагражденнымъ за усилія, потраченныя мною на него.

Харьковъ.
1880 г. 3-го марта.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

ТЕОРІЯ ОБЫКНОВЕННЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

ТЕОРІЯ ОБЫКНОВЕННЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Глава шестая.

Глава шестая.

О частныхъ интегрирующихся формахъ нелинейныхъ дифференцiальныхъ уравненiй порядковъ выше перваго.

89. Переходя теперь къ нелинейнымъ дифференцiальнымъ уравненiямъ, замѣтимъ прежде всего, что въ тѣхъ случаяхъ, когда данное уравненiе не содержитъ явнымъ образомъ зависимаго перемѣннаго y, а заключаетъ только различныя производныя его, порядокъ этого уравненiя всегда можетъ быть пониженъ на единицу.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣя уравненiе вида

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \tag{1}$$

и допустивъ

$$\frac{dy}{dx} = z, \tag{2}$$

мы приведемъ данное уравненiе къ формѣ

$$f\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right) = 0. \tag{3}$$

Результатъ этотъ представляетъ уже дифференцiальное уравненiе $(n-1)$-аго порядка. Если мы въ состоянiи окажемся проинтегрировать его и выразить z посредствомъ x и $n-1$ произвольныхъ постоянныхъ количествъ, то, внеся найденное выраженiе z въ формулу (2) и проинтегрировавъ слѣдствiе, найдемъ

$$y = \int z dx + C,$$

уравненiе, которое и будетъ выражать полный интегралъ даннаго уравненiя (1).

Высказанное замѣчанiе особенно примѣнимо въ случаѣ уравненiй втораго порядка. Имѣя уравненiе вида

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

и положивъ

$$\frac{dy}{dx}=z,$$

мы получаемъ непосредственно

$$f\left(x,\ z,\ \frac{dz}{dx}\right)=0,$$

т. е. уравненіе перваго порядка. Если это послѣднее относится къ интегрирующимся видамъ, то найдемъ чрезъ его интеграцію

$$z=F(x,\ c_1),$$

т. е.

$$\frac{dy}{dx}=F(x,\ c_1);$$

слѣдовательно

$$y=\int F(x,\ c_1)\,dx+c_2.$$

90. Если-бы данное дифференціальное уравненіе не заключало явнымъ образомъ не только самаго зависимаго перемѣннаго, но и нѣскольких послѣдовательныхъ его производныхъ, то порядокъ его могъ бы быть пониженъ на нѣсколько единицъ. Въ самомъ дѣлѣ, имѣя уравненіе вида

$$f\left(x,\frac{d^iy}{dx^i},\ldots\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0 \tag{1}$$

и положивъ

$$\frac{d^iy}{dx^i}=z, \tag{2}$$

мы непосредственно свели бы данное уравненіе на

$$f\left(x,\ z,\ \frac{dz}{dx},\ldots\frac{d^{n-i}z}{dx^{n-i}}\right)=0. \tag{2}$$

Интеграція этого послѣдняго уравненія (если-бы мы оказались въ состояніи произвести ее) доставила бы для z выраженіе вида

$$z=\Phi(x,c_1,c_2,\ldots c_{n-1}),$$

внеся которую въ формулу (2), мы получили бы

$$\frac{d^i y}{dx^i} = \Phi(x, c_1, c_2, \dots c_{n-i}).$$

Интегрированіе этой послѣдней формулы доставило бы затѣмъ послѣдовательно

$$\frac{d^{i-1} y}{dx^{i-1}} = \int \Phi(x, c_1, c_2, \dots c_{n-i})\, dx + c_{n-i+1},$$

$$\frac{d^{i-2} y}{dx^{i-2}} = \iint \Phi(x, c_1, c_2, \dots c_{n-i})\, dx^2 + c_{n-i+1} x + c_{n-i+2},$$

. . . .

$$y = \iint \dots \int \Phi(x, c_1, \dots c_{n-i})\, dx^i = c'_{n-i+1} x^{i-1} + c'_{n-i+2} x^{i-2} + \dots + c_{n-i} x + c_n.$$

Послѣднее выраженіе и представляло бы полный интегралъ даннаго уравненія.

Въ виду этого уравненія третьяго порядка вида

$$f\left(x, \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}\right) = 0$$

чрезъ допущеніе $\frac{d^2 y}{dx^2} = z$ сводятся на уравненія перваго порядка

$$f\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

91. Порядокъ дифференціальнаго уравненія можетъ быть пониженъ на одну единицу и въ томъ случаѣ, когда въ него не входитъ явнымъ образомъ независимое перемѣнное. Въ самомъ дѣлѣ, имѣя уравненіе вида

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

и положивъ

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

мы найдемъ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2p}{dx^2} = \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p + \frac{d^2p}{dy^2} \cdot p^2,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot,$$

почему данное уравненіе преобразуется въ уравненіе вида

$$f_1\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0.$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Если-бы мы оказались въ состояніи проинтегрировать это послѣднее, то нашли бы

$$p = \varphi(y, c_1, c_2, \ldots c_{n-1}),$$

т. е.

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, c_1, c_2, \ldots c_{n-1}),$$

Интеграція этой послѣдней формулы доставила бы затѣмъ

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y, c_1, c_2, \ldots c_{n-1})} + c_n.$$

Примѣръ. — Пусть дано уравненіе втораго порядка

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$$

Полагаемъ $\frac{dy}{dx} = p$, отъ чего данное уравненіе сводится на уравненіе 1-го порядка

$$yp \cdot \frac{dp}{dy} + p^2 + 1 = 0,$$

принимающее форму

$$\frac{dy}{y} + \frac{p \cdot dp}{1+p^2} = 0.$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, получаемъ

$$\log y + \log \sqrt{1+p^2} = c',$$

или

$$\log y\sqrt{1+p^2} = c'.$$

Слѣдовательно

$$y\sqrt{1+p^2} = e^{c'} = c$$

или

$$1+p^2 = \frac{c^2}{y^2},$$

или

$$p^2 = \frac{c^2}{y^2} - 1,$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c^2-y^2}{y^2}}.$$

Отсюда

$$dx = \frac{-y\,.\,dy}{\sqrt{y^2-c^2}}$$

и слѣдовательно

$$x = -\int\frac{y\,.\,dy}{\sqrt{y^2-c^2}} + c_1,$$

т. е.

$$x = -\sqrt{y^2-c^2} + c_1$$

или окончательно,

$$(x_1-c_1)^2 + y^2 - c^2 = 0.$$

92. Уравненія вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} = X,$$

гдѣ X функція одного перемѣннаго x, всегда интегрируются непосредственно, такъ-какъ въ этомъ случаѣ

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int X dy + c,$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \iint X dx^2 + cx + c',$$

. . . .

$$y = \iint \ldots X dx^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_n.$$

Что-же касается до уравненія

$$\frac{d^n y}{dx^n} = Y,$$

гдѣ Y функція одного y, то оно можетъ быть проинтегрировано когда $n = 2$. Въ самомъ дѣлѣ, имѣя

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y,$$

мы находимъ

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = 2Y\frac{dy}{dx},$$

формула, первая часть которой точная производная отъ $\left[\frac{dy}{dx}\right]^2$; поэтому

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int Y dy + c,$$

слѣдовательно

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2\int Y dy + c},$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2\int Y dy + c}},$$

и наконецъ

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int Y dy + c}} + c'.$$

93. Къ интегрирующимся формамъ уравненій высшихъ порядковъ слѣдуетъ отнести вообще уравненія вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right). \qquad (1)$$

Допустивъ здѣсь

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = z, \qquad (2)$$

уравненіе (1) сводимъ на

$$\frac{dz}{dx} = f(z),$$

откуда

$$dx = \frac{dz}{f(z)}$$

и слѣдовательно

$$x = \int \frac{dz}{f(z)} + c. \qquad (3)$$

Если интегралъ, входящій въ послѣднюю формулу, можетъ быть выраженъ въ извѣстныхъ намъ функціяхъ, такъ-что формула (3) въ окончательномъ результатѣ дастъ

$$z = \varphi(x, c),$$

то внеся это выраженіе z въ отношеніе (2), получимъ

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \varphi(x, c) \qquad (4)$$

и разысканіе y сведется на квадратуры.

Если-бы мы не могли изъ уравненія (3) выразить z алгебраически въ x и c, то нужно было бы поступать иначе. Изъ уравненія (2) мы получаемъ

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int z dx = \int \frac{z dz}{f(z)} + c,$$

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int dx \left[\int \frac{z dz}{f(z)} + c \right] + c' = \int \frac{dz}{f(z)} \left[\int \frac{z dz}{f(z)} + c \right] + c',$$

. . . .

$$y=\int\frac{dz}{f(z)}\left[\int\frac{dz}{f(z)}\ldots\left[\int\frac{dz}{f(z)}+c\right]+c'\right]\ldots+c^{(n-2)}\Bigg].$$

Произведя въ послѣдней формулѣ означенныя интеграціи и затѣмъ исключивъ z при помощи формулы (3), мы и найдемъ полный интегралъ даннаго уравненія (1).

Примѣръ. Пусть дано уравненіе

$$a\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3}=\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Положивъ $\frac{d^2y}{dx^2}=z$, находимъ

$$az\frac{dz}{dx}=\sqrt{1+z^2},$$

откуда

$$x=c+a\sqrt{1+z^2}. \qquad (\alpha)$$

Слѣдуя первому изъ указанныхъ передъ этимъ пріемовъ, т. е. рѣшая уравненіе (α) относительно z, получаемъ:

$$z=\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{\left(\frac{x-c}{a}\right)^2-1},$$

откуда

$$y=\iint\sqrt{\left(\frac{(x-c)^2}{a^2}-1\right)}dx^2+c_1x+c_2. \qquad (\beta)$$

Если употребить второй изъ указанныхъ пріемовъ, то получимъ

$$dx=\frac{az\,dz}{\sqrt{1+z^2}},$$

далѣе

$$\frac{dy}{dx}=\int zdx=\int\frac{az^2dz}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{az\sqrt{1+z^2}}{2}-\frac{a}{2}\log[z+\sqrt{1+z^2}]+c'.$$

Умноживъ вторую часть на

$$\frac{az\,dz}{\sqrt{1+z^2}}=dx,$$

а первую часть на dx и проинтегрировавъ, получимъ:

$$y=\frac{a^2z^3}{6}-\frac{a^2}{2}\sqrt{1+z^2}\log[z+\sqrt{1+z^2}]+\frac{a^2}{2}z+ac'\sqrt{1+z^2}+c''.$$

Теперь изъ этого уравненія и уравненія (α) остается исключить z.

94. Имѣя уравненіе вида

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$$

нужно положить $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=z$, отъ чего данное уравненіе приметъ видъ

$$\frac{d^2z}{dx^2}=f(z).$$

Будучи проинтегрировано, оно доставитъ

$$x=\int\frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz+C}}+C'. \qquad (\alpha)$$

Если изъ этого послѣдняго уравненія z можно будетъ выразить въ x, C и C', то получимъ:

$$z=\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\varphi(x, C, C'),$$

въ виду чего разысканіе выраженія y сведется на квадратуры. Если-бы мы не были въ состояніи изъ уравн. (α) опредѣлить z, то можно было бы прибѣгнуть ко второму изъ пріемовъ, изложенныхъ въ нумерѣ 92.

95. Между уравненіями порядковъ выше перваго, которыя во многихъ случаяхъ удавалось проинтегрировать, слѣдуетъ отмѣтить однородныя уравненія.

Дифференціальное уравненіе называется *однороднымъ*, когда, принимая перемѣнныя x, y и ихъ дифференціалы dx, dy, d^2y,

$d^3y, \ldots$ за множители первой степени, мы находимъ, что всѣ члены уравненія одной степени. Такъ, уравненіе

$$x^2d^2y + xdx^2 + ydy^2 = 0$$

должно считаться однороднымъ, потому что всѣ его члены третьей степени. Но коль-скоро dx, dy, $d^2y, \ldots$ принимаются за множители первой степени, выраженіе $p = \frac{dy}{dx}$ должно будетъ приниматься за количество степени 0, выраженіе $q = \frac{d^2y}{dx^2}$ за количество степени -1 и т. д. Въ виду этого, если дифференціальное уравненіе выражено въ x, y, p, $q, \ldots$, то для того, чтобы оно было однороднымъ, нужно, чтобы всѣ члены его оказались одной степени, когда x, y принимаются за множители первой степени, p за множитель нулевой степени, q за множитель -1-й степени, и т. д. Отсюда слѣдуетъ, что если сдѣлать $y = zx$, $q = \frac{t}{x}, \ldots$, то всѣ члены будутъ содержать x въ одной и той же степени; поэтому перемѣнное x исчезаетъ изъ уравненія и исчезновеніе это составляетъ именно отличительный признакъ однородныхъ уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, такъ-какъ x исчезаетъ отъ допущенія $y = zx$, $q = \frac{t}{x}, \ldots$, то послѣ этого получается уравненіе, содержащее только количества z, t, $p \ldots$ и потому одно изъ этихъ количествъ всегда выразится въ остальныхъ. Въ случаѣ уравненія втораго порядка z, t, p будутъ единственными количествами, входящими въ уравненіе; такъ-какъ при этомъ изъ уравненій

$$dy = pdx, \quad zdx + xdz = dy$$

получаемъ

$$zdx + xdz = pdx, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{p - z},$$

то будетъ

$$dp = qdx = \frac{t}{x}\,dx,$$

откуда

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{t}.$$

Сравненіе двухъ выраженій $\frac{dx}{x}$ доставляетъ

$$\frac{dz}{p-z} = \frac{dp}{t}$$

или

$$tdz = pdp - zdp, \qquad (\alpha)$$

уравненіе перваго порядка, интегрированіе котораго совершится извѣстными способами. Интегрированіе это сведется собственно на квадратуры въ слѣдующихъ случаяхъ:

1) Когда $t = qx$ будетъ однородною функціею отъ p и z, потому что въ этомъ случаѣ уравненіе (α) само будетъ однороднымъ и притомъ первой степени.

2) Когда t представляетъ ту или другую функцію p, потому что въ этомъ случаѣ уравн. (α) перваго порядка и первой степени относительно z, и, приведенное къ формѣ

$$dz + z\,\frac{dp}{t} = \frac{pdp}{t},$$

оно приводитъ къ интегралу вида

$$e^{\int\frac{dp}{t}} = \int e^{\int\frac{dp}{t}} \cdot \frac{pdp}{t}.$$

3) Когда t представляетъ функцію разности $p - z$, потому что при допущеніи $p - z = u$ количество t сдѣлается функціею u, а такъ-какъ $p = z + u$, уравненіе (α) обратится въ

$$tdz = udu + udt$$

и мы получимъ

$$dz = \frac{udu}{t-u},$$

$$z = \int \frac{udu}{t-u}.$$

4) Когда, допустивъ $p - z = u$, получаемъ

$$t = u + \frac{Pu}{Qz + Rz^n},$$

гдѣ P, Q, R нѣкоторыя функціи u, потому что въ этомъ случаѣ уравненіе (α) приводится къ виду уравненія

$$Pdz = Qz \,.\, du + Rz^n \,.\, du,$$

которое относится къ интегрирующимся чрезъ квадратуры.

5) Когда имѣемъ

$$t = u + Mu^2 + Nu^n,$$

гдѣ M, N функціи z, потому что въ этомъ случаѣ уравненіе (α) принимаетъ видъ

$$Mu \,.\, dz + Nu^{n-1} dz = du.$$

Приведемъ примѣры.

1) Пусть дано уравненіе

$$x^2 d^2 y = x \,.\, dx\, dy + 3y \,.\, dx^2,$$

т. е.

$$x^2 q = xp + 3y,$$

гдѣ $p = \dfrac{dy}{dx}$, $q = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$. Допустивъ

$$y = zx,\ q = \frac{t}{x},$$

получимъ

$$\frac{dx}{x}=\frac{dp}{t}=\frac{dp}{p+3z}=\frac{dz}{p-z}.$$

или

$$(p+3z)\,dz=pdp-zdp,$$

откуда

$$p=z+\sqrt{4z^2+c_1},$$

$$\log x=\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\log\frac{2z+\sqrt{4z^2+c_1}}{c_2}=\frac{1}{2}\log\frac{z+\sqrt{c'+z^2}}{c_2},$$

потому что

$$x^2=\frac{z+\sqrt{c'+z^2}}{c_2}=\frac{y+\sqrt{c'x^2+y^2}}{c_2x},\ y=c_2x^2-\frac{c'}{x}.$$

2) Пусть дано уравненіе

$$nx^3d^2y=(ydx-xdy)^2.$$

Дѣлая тѣ-же допущенія, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, получимъ:

$$ndp=(p-z)\,dz,$$

а положивъ затѣмъ $p-z=u$, найдемъ

$$dz-\frac{ndu}{u-n}=0,\ x=\frac{u-n}{c_1u},$$

$$y=nx\log\frac{u-n}{c_2}=nx\log\frac{nc_1x}{c_2(1-c_1x)}.$$

3) Дано уравненіе

$$(dx^2+dy^2)^{3/2}=ndx\,d^2y\sqrt{x^2+y^2}.$$

Найдемъ

$$(1+p^2)^{3/2}dz=n(p-z)\,dp\sqrt{1+z^2}.$$

Чтобы проинтегрировать это уравненіе, положимъ

$$p = \operatorname{tang}\alpha,\ z = \operatorname{tang}\beta;$$

получимъ:

$$d\alpha = \frac{d\alpha - d\beta}{1 - n\sin(\alpha - \beta)} = \frac{d\gamma}{1 - n\sin\gamma},$$

гдѣ $\gamma = \alpha - \beta$; далѣе

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{p-z} = \frac{d\beta.\cos\alpha}{\cos\beta.\sin\gamma} = \frac{(\cos\beta.\cos\gamma - \sin\beta.\sin\gamma)\,d\beta}{\cos\beta.\sin\gamma}$$

$$= \frac{\cos\gamma\, d\beta}{\sin\gamma} - \frac{\sin\beta.d\beta}{\cos\beta} = \frac{n.\cos\gamma.d\beta}{1 - n.\sin\gamma} - \frac{\sin\beta.d\beta}{\cos\beta},$$

потому что

$$d\beta = \frac{n\sin\gamma.d\gamma}{1 - n.\sin\gamma};$$

слѣдовательно

$$x = \frac{c_1\cos\beta}{1 - n\sin\gamma},\ y = \frac{c_1\sin\beta}{1 - n\sin\gamma},\ \beta = \int\frac{nd\gamma}{1 - n\sin\gamma}.$$

96. Къ числу дифференціальныхъ уравненій втораго порядка, интегрированіе которыхъ всегда можетъ быть сведено на интегрированіе уравненія перваго порядка, относятся еще уравненія, дѣлающіяся однородными, если въ нихъ разсматривать y какъ количество n-ой степени, а p и q какъ количества $(n-1)$-ой и $(n-2)$-ой степеней. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ въ такомъ уравненіи

$$y = x^n z,\ p = x^{n-1}t,\ q = x^{n-2}u,$$

въ силу отношеній $dy = p\,dx$, $dp = q.dx$, получимъ:

$$x.dz + nz.dx = tdx,\ xdt + (n-1)tdx = u.dx,$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{t - nz} = \frac{dt}{u - (n-1)t},$$

$$dz(u - (n-1)t) = (t - nz)dt;$$

но, по положенію, если въ данномъ уравненіи замѣнить y, p, q ихъ значеніями въ z, t, u, перемѣнное x исчезаетъ и результатъ подстановки будетъ, поэтому, содержать только z, t, u; изъ этого послѣдняго уравненія опредѣлится значеніе u, которое и внесется въ уравненіе перваго порядка между z и t. Послѣ этого интегрированіе закончится при помощи извѣстныхъ уже пріемовъ.

Пояснимъ это примѣромъ.

Пусть имѣемъ уравненіе

$$x^2 d^2 y = ay.dx^2 + bx.dx.dy,$$

или

$$qx^2 = ay + bpx.$$

Въ этомъ примѣрѣ $n = 0$. Сдѣлавъ

$$p = \frac{t}{x},\ q = \frac{u}{x^2},$$

получимъ

$$u = ay + bt;$$

поэтому дифференціальное уравненіе

$$dz(u-(n-1)t) = (t-nz)dt$$

обратится въ

$$aydy + (b+1)tdy = tdt.$$

Сдѣлаемъ $t = yz$; получимъ

$$ady + (b+1)zdy = yzdz + z^2 dy,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{zdz}{a+(b+1)z+z^2},$$

а полагая

$$a + (b+1)z - z^2 = (\alpha + z)(\beta - z),$$

найдемъ:

$$a\beta = a,\quad \beta - \alpha = b + 1,$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}dz}{\alpha+z}+\frac{\frac{\beta}{\alpha+\beta}dz}{\beta-z},$$

$$\log y=c_1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\log(\alpha+z)-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\log(\beta-z),$$

или

$$y(\alpha+z)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}(\beta-z)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}=c_1.$$

Съ другой стороны

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{(\alpha+z)(\beta-z)},$$

или

$$\frac{dx}{x}=\frac{1}{\alpha+\beta}\frac{dz}{\alpha+z}+\frac{1}{\alpha+\beta}\frac{dz}{\beta-z},$$

$$x=c_2\left(\frac{\alpha+z}{\beta-z}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}},\ \frac{\alpha+z}{\beta-z}=\left(\frac{x}{c_2}\right)^{\alpha+\beta},\ z=\frac{\beta x^{\alpha+\beta}-\alpha c_2^{\alpha+\beta}}{c_2^{\alpha+\beta}+x^{\alpha+\beta}};$$

подставляя эти выраженія и положивъ $\frac{c_1}{\alpha+\beta}=c'$, получимъ наконецъ

$$y=c'\left(\frac{c_2^{\alpha}}{x^{\alpha}}+\frac{x^{\alpha}}{c_2^{\beta}}\right).$$

97. Къ уравненіямъ перваго порядка приводятся еще тѣ уравненія втораго порядка, въ которыя зависимое перемѣнное y и его дифференціалы dy, d^2y входятъ во всѣ члены въ одной и той-же степени. Въ самомъ дѣлѣ, если допустить

$$dy=p.dx,\ dp=q.dx,$$

то количества y, p, q будутъ имѣть однѣ и тѣ-же степени и въ преобразованномъ уравненіи; сдѣлавъ же $p=uy$, $q=vy$, найдемъ, что y, какъ входящее во всѣ члены въ одной и той же степени, сократится. Преобразованное уравненіе будетъ содержать только x, u, v и изъ него можно будетъ выразить v въ x и u. Изъ двухъ уравненій

$$p = uy,\ dp = qdx$$

найдемъ въ то-же время

$$dy = uydx,\ udy + ydu = vydx;$$

слѣдовательно

$$\frac{dy}{y} = udx,\quad \frac{dy}{y} = \frac{vdx - du}{u},$$

$$du + u^2dx = vdx.$$

Послѣ этого останется только подставить вмѣсто v, въ это уравненіе перваго порядка, его значеніе въ x и u для того, чтобы, проинтегрировавъ, опредѣлить значеніе u въ x. Наконецъ y и интегралъ даннаго уравненія найдутся при посредствѣ уравненія

$$\log y = \int udx,\ y = e^{\int udx}.$$

Уравненіе

$$du + u^2dx = vdx$$

при допущеніи

$$v = u^2 + V$$

обращается въ

$$du = Vdx$$

и интегрируется: 1° когда $V = \frac{X}{U}$, гдѣ X функція x, а U функція u; 2° когда V однородная функція нулевой степени отъ x и u; 3° когда имѣемъ $V = X_1u + X_2u^n$, гдѣ X_1, X_2

функціи x; 4° когда $V=\frac{1}{U_1x+U_2x^n}$, гдѣ U_1, U_2 функціи u.

Для примѣра возьмемъ уравненіе

$$\alpha yd^2y+\beta dy^2=\frac{ydxdy}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

т. е.

$$\alpha yq+\beta p^2=\frac{py}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Дѣлая $p=uy$, $q=vy$, получаемъ:

$$\alpha v+\beta u^2=\frac{u}{\sqrt{a^2+x^2}},\ v=\frac{u}{\alpha\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{\beta u^2}{\alpha},$$

$$du+u^2dx=\frac{udx}{\alpha\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{\beta u^2dx}{\alpha},$$

или, сдѣлавъ $u=\frac{1}{s}$,

$$ds+\frac{sdx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right).dx.$$

Помноживъ это уравненіе на $(x+\sqrt{a^2+x^2})^{\frac{1}{\alpha}}$ и проинтегрировавъ слѣдствіе, найдемъ

$$s\,(x+\sqrt{a^2+x^2})^{\frac{1}{\alpha}}=\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right).\int(x+\sqrt{a^2+x^2})^{\frac{1}{2}}dx.$$

Допустимъ еще

$$x+\sqrt{a^2+x^2}=t^\alpha,$$

откуда

$$a^2=t^{2\alpha}-2t^\alpha x,$$

$$x=\frac{t^{2\alpha}-a^2}{2t^\alpha}=\frac{1}{2}t^\alpha-\frac{1}{2}a^2t^{-\alpha},\ dx=\frac{\alpha}{2}dt\,(t^{\alpha-1}+a^2t^{-\alpha-1}),$$

$$st=\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\int\frac{\alpha}{2}(t^\alpha+a^2t^{-\alpha})dt,\ st=c_1+\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}+a^2\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right);$$

но $\dfrac{dy}{y}=udx=\dfrac{dx}{s}$, и мы имѣемъ

$$\frac{dx}{s}\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{ds}{s}+\frac{dx}{\alpha\sqrt{a^2+x^2}};$$

слѣдовательно

$$\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\log y=\log s+\frac{1}{\alpha}\log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)=\log st+c_2,$$

$$y=c'(st)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

и сдѣлавъ $c_1=\dfrac{\alpha+\beta}{2}c''$,

$$y=c'\left(c''+\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\frac{a^2t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}},$$

и такъ-какъ

$$t=\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

то

$$c_1y^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}=A+\frac{1}{\alpha+1}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}+\frac{a^2}{1-\alpha}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

98. Къ интегрирующимся уравненіямъ втораго порядка относится еще уравненіе

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}+F(y)\frac{dy^2}{dx^2}=0,$$

изслѣдованное впервые Льювилемъ. Этотъ ученый проинтегрировалъ его пользуясь пріемомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, но покойный академикъ нашъ Остроградскій показалъ, что оно можетъ быть проинтегрировано непосредственно, если только раздѣлить его предварительно на $\frac{dy}{dx}$. Оно чрезъ это приводится къ виду

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}dx}{\frac{dy}{dx}}+f(x)\,dx+F(y)\,dy=0$$

и интегрированіе его прямо доставляетъ

$$\log\frac{dy}{dx}+\int f(x)\,dx+\int F(y)\,dy=C,$$

или

$$\frac{dy}{dx}=C\,.\,e^{-\int f(x)\,dx}\;e^{-\int F(y)\,dy},$$

откуда

$$e^{\int F(y)\,dy}\,dy=ce^{-\int f(x)\,dx}dx$$

и слѣдовательно

$$\int e^{\int F(y)\,dy}\,dy=c\int e^{-\int f(x)\,dx}dx+c',$$

гдѣ c и c' произвольныя постоянныя. Это и есть полный интегралъ даннаго уравненія.

Объ интегрирующихъ множителяхъ дифференціальныхъ уравненій высшихъ порядковъ.

99. Разысканіе множителя, обращающаго первую часть дифференціальнаго уравненія n-аго порядка

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

въ точную производную дифференціальнаго выраженія, представляется a priori самымъ естественнымъ путемъ для интеграціи даннаго уравненія. Лагранжъ доказалъ въ самомъ дѣлѣ, что такіе *интегрирующіе* множители существуютъ, вообще, для каждаго дифференціальнаго уравненія.

Предположимъ себѣ, что данное уравненіе разрѣшено относительно наивысшей изъ входящихъ въ нее производныхъ зависимаго перемѣннаго и приведено такимъ образомъ къ виду

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \varphi\left(x, y, \ldots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = 0. \qquad (1)$$

Пусть, въ то-же время,

$$F\left(x, y, \ldots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = c \qquad (2)$$

одинъ изъ первыхъ интеграловъ этого уравненія. Продифференцировавъ уравненіе (2) и допуская, при этомъ, для удобства обозначеній, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$, $\ldots y^{(n-1)} = \frac{d^{n-1} y}{dx}$, получимъ:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' + \frac{dF}{dy'} y'' + \ldots + \frac{dF}{dy^{(n-1)}} y^{(n)} = 0,$$

откуда

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' + \ldots + \frac{dF}{dy^{(n-2)}}y^{(n-1)}}{\frac{dF}{dy^{(n-1)}}} \qquad (3)$$

Такъ-какъ уравненіе (2) есть одно изъ *первыхъ* рѣшеній уравненія (1), а вторая часть формулы (3) уже не содержитъ произвольнаго постояннаго количества, то выраженіе, доставляемое для $\frac{d^n y}{dx^n}$ уравненіемъ (3), должно быть тождественно съ выраженіемъ, получающимся для $\frac{d^n y}{dx^n}$ изъ уравненія (1); слѣдовательно

$$f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}) = \frac{\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' + \ldots + \frac{dF}{dy^{(n-2)}}y^{(n-1)}}{\frac{dF}{dy^{(n-1)}}}.$$

Придавъ къ обѣимъ частямъ $\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)}$, получимъ:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$$

$$= \frac{\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' + \ldots + \frac{dF}{dy^{(n-2)}}y^{(n-1)} + \frac{dF}{dy^{(n-1)}}y^{(n)}}{\frac{dF}{dy^{(n-1)}}},$$

или

$$\frac{dF}{dy^{(n-1)}}\left\{\frac{d^n y}{dx^n} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)\right\} = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' + \ldots$$

$$\ldots + \frac{dF}{dy^{(n-1)}}y^{(n)}.$$

Правая часть этой формулы представляетъ однако точную производную отъ $F(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$, а потому и обнаруживается, что для обращенія лѣвой части даннаго уравненія (1) въ точную производную достаточно умножить ее на выраженіе $\frac{dF}{dy^{(n-1)}}$.

И такъ, *всегда существуетъ выраженіе порядка единицею низшаго чѣмъ данное уравненіе, которое представляетъ множитель, обращающій лѣвую часть дифференціальнаго уравненія n-аго порядка (1) въ точную производную выраженія (n-1)-аго порядка.*

100. Нѣтъ сомнѣнія въ теоретической важности доказаннаго общаго предложенія; но на дѣлѣ разысканіе интегрирующихъ множителей для уравненій порядковъ выше перваго встрѣчаетъ большія трудности и удавалось геометрамъ только въ отдѣльныхъ частныхъ случаяхъ. Чтобы представить образчикъ тѣхъ частныхъ пріемовъ, къ которымъ приходится прибѣгать для разысканія интегрирующихъ множителей и интеграціи при помощи ихъ уравненій высшихъ порядковъ, возьмемъ уравненіе втораго порядка

$$d^2y + \frac{ay\,dx}{[by^2+c+2dx+ex^2]^2} = 0 \qquad (1)$$

и проинтегрируемъ его пріемомъ, употребленнымъ Эйлеромъ.

Разсмотримъ прежде всего — нельзя ли первую часть этого уравненія обратить въ точный дифференціалъ чрезъ умноженіе ея на выраженіе вида

$$2X_1dy + 2X_2ydx,$$

гдѣ X_1, X_2 функціи x, требующія опредѣленія.

Означимъ черезъ

$$X_1dy^2 + 2X_2y\,dx\,dy + Udx^2 = Cdx^2,$$

гдѣ U функція y, x, интегралъ произведенія

$$2d^2y(X_1dy + X_2ydx) + \frac{2ay\,dx^2[X_1dy + X_2ydx]}{[by^2+c+2fx+ex^2]^2};$$

въ такомъ случаѣ необходимо будетъ

$$d^2y(dX_1+2X_2dx)+2y.dx\,dX_2\,dy+dx^2\,dU-$$
$$-\frac{2ay\,dx^2(X_1dy+X_2\,ydx)}{[by^2+c+2fx+ex^2]^2}=0.$$

Уравненіе это можетъ привести чрезъ интегрированіе къ опредѣленію U только при допущеніи

$$dX_1+2X_2dx=0; \qquad (2)$$

въ этомъ случаѣ оно сведется на

$$dU=\frac{ay(2X_1dy-yd\,X_1)}{[by^2+c+2fx+ex^2]^2}-2ydy\frac{dX_2}{dx},$$

гдѣ вторая часть представляетъ дифференціалъ, взятый относительно y, выраженія

$$\frac{-aX_1}{b[by^2+c+2fx+ex^2]}-y^2\frac{dX_2}{dx}; \qquad (3)$$

поэтому будетъ

$$U=\frac{-aX_1}{b(by^2+c+2fx+ex^2)}-y^2\frac{dX_2}{dx}, \qquad (4)$$

если только дифференціалъ выраженія (3), взятый относительно x, равенъ нулю, т. е. если

$$\frac{-a.dX_1(by^2+c+2fx+ex^2)+2aX_1(f+ex)}{b(by^2+c+2fx+ex^2)^2}-y^2\frac{d^2X_2}{dx}$$
$$=-\frac{ay^2dX_1}{(by^2+c+2fx+ex^2)^2}; \qquad (5)$$

но этому уравненію можно удовлетворить допуская

$$\frac{d^2X_2}{dx^2}=0,\ -dX_1(c+2fx+ex^2)+2X_1dx(f+ex)=0, \quad (6)$$

а потому нужно еще разсмотрѣть совмѣстимы ли эти два условія съ условнымъ уравненіемъ (2). Второе изъ уравненій (6) даетъ

$$X_1 = c_1 + 2fx + ex^2,$$

почему первое изъ уравненій (6) и ур. (2) обратятся въ

$$X_2 = -\frac{dX_1}{2dx} = -f - ex \text{ и } \frac{d^2X_2}{dx^2} = 0$$

и будутъ существовать совмѣстно. Слѣдовательно условія (6) могутъ существовать совмѣстно со (2) и искомый интегрирующій множитель даннаго уравненія оказывается равнымъ

$$2dy(c + 2fx + ex^2) - 2ydx(f + ex). \qquad (7)$$

По введеніи этого множителя въ данное уравненіе лѣвая часть его дѣлается точнымъ дифференціаломъ выраженія

$$(c + 2fx + ex^2)dy^2 - 2(f + ex)ydydx$$
$$-\left[\frac{a(c + 2fx + ex^2)}{b(by^2 + c + 2fx + ex^2)} + ey^2\right]dx^2,$$

а потому первый интегралъ даннаго уравненія будетъ:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2(c + 2fx + ex^2) - 2y\frac{dy}{dx}(f + ex)$$
$$-\frac{a(c + 2fx + ex^2)}{b(by^2 + c + 2fx + ex^2)} + ey^2 = c_1. \qquad (8)$$

Теперь остается найдти полный интегралъ. Для этого къ обѣимъ частямъ ур. (8) придаемъ $\frac{a}{b}$; получаемъ:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2(c + 2fx + ex^2) - 2y\frac{dy}{dx}(f + ex)$$
$$+\frac{ay^2}{by^2 + c + 2fx + ex^2} + ey^2 = c'.$$

Если сдѣлать затѣмъ

$$c + 2fx + ex^2 = bz^2,$$

откуда

$$f + ex = \frac{bz\,dz}{dx},$$

то послѣднее уравненіе обратится въ

$$\frac{bz^2dy^2}{dx^2} - \frac{2byz\,dy\,dz}{dx^2} + ey^2 + \frac{ay^2}{b(y^2+z^2)} = \frac{C}{b}$$

и допустивъ $y = uz$, мы получимъ

$$\frac{bz^4du^2}{dx^2} - \frac{bu^2z^2dz^2}{dx^2} + eu^2z^2 + \frac{au^2}{b(1+u^2)} = \frac{C}{b};$$

но

$$\frac{z^2dz^2}{dx^2} = \frac{(f+ex)^2}{b^2},$$

а потому

$$\frac{bz^4du^2}{dx^2} + \frac{ce-f^2}{b}u^2 = \frac{C+(C-a)u^2}{b(1+u^2)},$$

или

$$\frac{b^2z^4du^2}{dx^2} = \frac{C+(C-a+f^2-ce)u^2+(f^2-ce)u^4}{1+u^2}.$$

Замѣнивъ, наконецъ, z его выраженіемъ, найдемъ

$$\frac{dx}{c+2fx+ex^2} + \frac{du\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{C+(C-a+f^2-ce)u^2+(f^2-ce)u}},$$

уравненій, въ которомъ перемѣнныя раздѣлены и которое поэтому непосредственно интегрируется и даетъ

$$\int\frac{dx}{c+2fx+ex^2} + \int\frac{\sqrt{1+u^2}.dy}{\sqrt{C+(C-a+f^2-ce)u^2+(f-ce)u}} = C_1.$$

Внеся сюда вмѣсто u его выраженіе

$$u = \frac{y}{z} = \frac{y\sqrt{b}}{\sqrt{c+2fx+ex_2}},$$

мы и получимъ полный интегралъ даннаго уравненія.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій при помощи строкъ и опредѣленныхъ интеграловъ.

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій при помощи строкъ.

---

101. Недостаточность имѣющихся въ нашемъ распоряженіи пріемовъ опредѣленія полнаго первообразнаго каждаго даннаго дифференціальнаго уравненія, зависящаго отъ двухъ перемѣнныхъ, вынуждаетъ часто стараться проинтегрировать то или другое данное дифференціальное уравненіе по крайней мѣрѣ при помощи безконечныхъ строкъ. Въ этомъ случаѣ, вмѣсто того, чтобы стараться опредѣлить общее уравненіе, связывающее зависимое перемѣнное y съ независимымъ x и отвѣчающее отношенію между этими количествами и производными перваго изъ нихъ, выражаемому самымъ дифференціальнымъ уравненіемъ, задаются просто разысканіемъ для y такой безконечной строки, содержащей произвольныя постоянныя количества въ числѣ, соотвѣтствующемъ порядку дифференціальнаго уравненія, которая, завися отъ x, доставляла бы для y выраженіе, удовлетворяющее дифференціальному уравненію. Конечно, получаемыя строки должны быть сходящимися. При этомъ, когда окажется возможнымъ найдти точное выраженіе суммы, полученной для y строки, найдется въ сущности и полный интегралъ дифференціальнаго уравнeнія, приведенный къ конечной формѣ; но и при невозможности найдти сумму строки, строка все-таки позволяетъ вычислять, съ требуемою степенью приближенія, значенія y, соотвѣтствующія тѣмъ или другимъ значеніямъ x. Отсюда то значеніе, которое пріемъ интегрированія дифференціальныхъ уравненій при помощи строкъ имѣетъ для прикладныхъ математическихъ наукъ.

102. Сущность самаго пріема интегрированія дифференціальныхъ уравненій при помощи строкъ весьма проста. Имѣя уравненіе n-аго порядка, приведенное къ формѣ

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}), \qquad (1)$$

гдѣ черезъ $y', y'', \ldots y^{(n)}$ мы для простоты обозначаемъ различныя производныя y, возьмемъ произвольное частное значеніе x, напримѣръ x_0, и пусть $y_0, y'_0, \ldots y_0^{(n-1)}$ соотвѣтствующія ему значенія y и его $(n-1)$ производныхъ. Уравненіе (1) опредѣлитъ намъ въ такомъ случаѣ соотвѣтствующее значеніе $y^{(n)}$; мы будемъ именно имѣть:

$$y_0^{(n)} = f(x_0, y_0, y'_0, \ldots y_0^{(n-1)}) = P. \qquad (2)$$

Сверхъ того простое дифференцированіе ур. (1) приведетъ къ опредѣленію и всѣхъ значеній производныхъ y порядковъ выше n-аго, отвѣчающихъ $x_0, y_0, \ldots y_0^{(n-1)}$; мы именно получимъ выраженія вида

$$y_0^{(n+1)} = Q,\ y_0^{(n+2)} = R, \ldots \qquad (3)$$

гдѣ $Q, R, \ldots$ опредѣленнымъ образомъ выражены въ $x_0, y^0, \ldots y_0^{(n-1)}$.

Теперь, въ силу извѣстной формулы Тайлора, предполагая y непрерывною функціею x, можемъ написать

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{1} y'_0 + \frac{(x-x_0)^2}{1.2} y''_0 + \ldots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} y_0^{(n-1)}$$
$$+ \frac{(x-x_0)^n}{n!} y_0^{(n)} + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} y_0^{(n+1)} + \ldots$$

Здѣсь формулы (2) и (3) опредѣляютъ $y_0^{(n)}$, $y_0^{(n+1)}, \ldots$ въ количествахъ $y_0, y'_0 \ldots y_0^{(n-1)}$, остающихся произвольными, хотя и постоянными величинами, такъ что получаемъ:

$$y = C + (x - x_0)C_1 + (x - x_0)C_2 + \ldots + (x - x_0)^{n-1}C_{n-1} + \frac{(x-x_0)^n}{n!}P + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}Q + \ldots, \qquad (4)$$

гдѣ собственно

$$C = y_0,\ C_1 = y'_0,\ C_2 = \frac{1}{2}y''_0, \ldots C_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}y_0^{(n-1)}.$$

Формула эта, въ предѣлахъ сходимости строки, составляющей правую ея часть, во-первыхъ, удовлетворяетъ данному дифференціальному уравненію, а во-вторыхъ—выражаетъ y посредствомъ x и n произвольныхъ постоянныхъ; поэтому она и можетъ быть принимаема за полный интегралъ даннаго уравненія.

Вмѣсто формулы Тайлора иногда выгоднѣе пользоваться формулою Маклорена, отвѣчающею допущенію $x_0 = 0$; но для этого необходимо, конечно, чтобы для $x = x_0$ строка, входящая въ формулу (4), оставалась сходящеюся.

103. Для уясненія себѣ только-что указаннаго пріема приведемъ примѣръ.

Пусть требуется проинтегрировать при помощи строкъ дифференціальное уравненіе втораго порядка

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + nxy = 0. \qquad (1)$$

Чрезъ дифференцированіе его находимъ:

$$x\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + nx\frac{dy}{dx} + ny = 0,$$

$$x\frac{d^4y}{dx^4} + 4\frac{d^3y}{dx^3} + nx\frac{d^2y}{dx^2} + 2n\frac{dy}{dx} = 0,$$

. . . .

$$x\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}+(m+1)\frac{d^my}{dx^m}+nx\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+(m-1)n\frac{dy}{dx}=0.$$

Полагая во всѣхъ этихъ уравненіяхъ $x=0$, получимъ

$$\frac{dy}{dx}=0,\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{n}{3}y,\ \frac{d^3y}{dx^3}=0,\ \frac{d^4y}{dx^4}=\frac{n^2}{5}y,\ldots$$

и вообще, если m нечетное число,

$$\frac{d^my}{dx^m}=0,$$

а если m четное число, то

$$\frac{d^my}{dx^m}=+\frac{n^{\frac{m}{2}}.y}{m+1}$$

или

$$\frac{d^my}{dx^m}=-\frac{n^{\frac{m}{2}}.y}{m+1}$$

смотря по тому — будетъ ли m дѣлиться на 4 или не будетъ.

Изъ отношенія $\frac{dy}{dx}=0$ обнаруживается, что значеніе y, соотвѣтствующее допущенію $x=0$, представляетъ произвольное постоянное количество. Означивъ его черезъ y_0, будемъ имѣть:

$$\frac{dy_0}{dx}=0,\ \frac{d^2y_0}{dx^2}=-\frac{n}{3}y_0,\ \frac{d^3y_0}{dx^3}=0,\ \frac{d^4y_0}{dx^4}=\frac{n^2}{5}y_0,\ldots.$$

и по формулѣ Маклорена мы получимъ:

$$y=y_0\left(1-\frac{nx^2}{1.2.3}+\frac{n^2x^4}{1.2.3.4.5}-\frac{n^3x^6}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots\right)$$

т. е.

$$y = y_0 \frac{\sin x\sqrt{n}}{x\sqrt{n}},$$

или, полагая

$$\frac{y_0}{\sqrt{n}} = C,$$

$$y = \frac{C.\sin x\sqrt{n}}{x}. \qquad (2)$$

Это выраженіе, какъ содержащее только одно произвольное постоянное количество, не можетъ быть принимаемо за полный интегралъ даннаго уравненія; оно представляетъ не болѣе какъ частный интегралъ, но зная частный интегралъ даннаго уравненія можно найдти и полный интегралъ, разсматривая C какъ функцію перемѣннаго x.

Принимая C за функціональное количество и внося выраженіе y изъ формулы (2) въ данное уравненіе (1), мы получаемъ:

$$\frac{d^2C}{dx^2} + 2\sqrt{n}\frac{dC}{dx}\operatorname{cotg} x\sqrt{n} = 0,$$

а допуская $\frac{dC}{dx} = p$, находимъ:

$$p = \frac{C_1}{\sin^2 x\sqrt{n}},$$

гдѣ C_1 произвольное постоянное. Отсюда выведемъ

$$C = C' + C'' \operatorname{cotg} x\sqrt{n},$$

гдѣ C', C'' произвольныя постоянныя.

Внеся это выраженіе C въ формулу (2), получимъ теперь

$$y = \frac{C'\sin x\sqrt{n} + C''\cos x\sqrt{n}}{x}, \qquad (3)$$

выраженіе y, которое уже содержитъ два произвольныхъ постоянныхъ количества, а потому уравненіе (3) и можетъ быть уже принято за полный интегралъ уравненія (1).

Допущеніе $x_0 = 0$ и употребленіе формулы Маклорена привело насъ на первыхъ порахъ не къ полному, а къ частному интегралу даннаго уравненія (1); но если положить x_0 вообще отличнымъ отъ нуля и означить черезъ y_0, y_0' соотвѣтствующія значенія y и $\frac{dy}{dx}$, остающіяся произвольными величинами, то изъ уравненія (1) и тѣхъ уравненій, которыя изъ него выводятся путемъ дифференцированія, получимъ:

$$\left|^{x_0} \frac{d^2y}{dx^2} = -\left\{\frac{2y'_0}{x_0} + ny_0\right\},\right.$$

$$\left|^{x_0} \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{(6-nx_0^2)}{x_0^2}\, y_0' + \frac{2ny_0}{x_0},\right.$$

$$\left|^{x_0} \frac{d^4y}{dx^4} = 6\,\frac{(nx_0^2-4)}{x_0^3}\, y'_0 + \left(n^2 - \frac{8n}{x_0^2}\right) y_0 - \frac{2n}{x_0}\, y_0 y_0'\right.$$

. . . .

гдѣ черезъ $\left|^{x_0} \frac{d^2y}{dx^2}\right.$, $\left|^{x_0} \frac{d^3y}{dx^3}\right.$, ... выражаемъ значенія производныхъ $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ... для $x = x_0$. Въ виду этого формула Тайлора даетъ:

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{1}\, y_0' - \frac{(x-x_0)^2}{1.2}\left\{\frac{2y_0'}{x_0} - ny_0\right\}$$
$$+ \frac{(x-x_0)^3}{1.2.3}\left\{\frac{(6-nx_0^2)}{x_0^2}\, y'_0 + \frac{2ny_0}{x_0}\right\}$$
$$+ \frac{(x-x_0)^4}{1.2.3.4}\left\{6\,\frac{nx_0^2-4}{x_0^3}\, y_0' + \left(n^2 - \frac{8n}{x_0^2}\right) y_0 - \frac{2n}{x_0}\, y_0\, y_0'\right\} + \ldots.$$

Строка, составляющая вторую часть, содержитъ уже два произвольныхъ постоянныхъ количества, а потому формула эта, при выборѣ для x такихъ предѣловъ измѣняемости, при которыхъ строка оставалась бы сходящеюся, будетъ выражать полный интегралъ даннаго уравненія (1).

104. Часто для разысканія полнаго интеграла дифференціальнаго уравненія, выраженнаго при помощи строки, вмѣсто формулъ Тайлора и Маклорена, прибѣгаютъ къ методу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Путь этотъ иногда выгоднѣе, а въ тѣхъ случаяхъ, когда строка, выражающая искомый интегралъ уравненія, должна содержать отрицательныя степени независимаго перемѣннаго, онъ даже единственный, отвѣчающій цѣли.

Ходъ сужденій здѣсь слѣдующ. Имѣя уравненіе n-го порядка

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),$$

полагаютъ

$$y=y_0+A_1(x-x_0)^\alpha+A_2(x-x_0)^{\alpha+1}+A_3(x-x_0)^{\alpha+2}+\dots,$$

или, сдѣлавъ $x-x_0=z$, $dx=dz$,

$$y=y_0+A_1z^\alpha+A_2z^{\alpha+1}+A_3z^{\alpha+2}+\dots,$$

и за-тѣмъ стараются опредѣлить коэффиціенты $A_1, A_2, A_3, \dots$ и показатель степени α при помощи условія, чтобы выраженіе y удовлетворяло данному уравненію и чтобы какъ само y, такъ и $(n-1)$ его послѣдовательныхъ производныхъ, для $x=x_0$, принимали соотвѣтственно данныя значенія $y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)}$.

Пусть, для бо́льшей ясности, дано уравненіе

$$dy-ydx-bx^mdx=0$$

и требуется найдти значеніе y, ему удовлетворяющее и обращающееся въ 0 для $x=0$. Полагая

$$y=A_1z^\alpha+A_2z^{\alpha+1}+A_3z^{\alpha+2}+\dots.$$

найдемъ:

$$bz^m - A_1 \alpha z^{\alpha-1} + [A_1 - A_2(\alpha+1)]z^\alpha$$
$$+ [A_2 - A_3(\alpha+2)]z^{\alpha+1} + \ldots = 0.$$

Это уравненіе должно удовлетворяться, каково бы ни было z, и такъ-какъ b, по положенію, не равно нулю, то нужно сперва сдѣлать $\alpha - 1 = m$, $a = m+1$; отъ этого данное уравненіе перейдетъ въ слѣдующее:

$$[b - A_1(m+1)]z^m + [A_1 - A_2(m+2)]z^{m+1}$$
$$+ [A_2 - A_3(m+3)]z^{m+2} + \ldots = 0$$

и повлечетъ за собою равенства

$$b - A_1(m+1) = 0,\ A_1 - A_2(m+2) = 0,\ A_2 - A_3(m+3) = 0, \ldots$$

изъ которыхъ

$$A_1 = \frac{b}{m+1},\ A_2 = \frac{b}{(m+1)(m+2)},\ A_3 = \frac{b}{(m+1)(m+2)(m+3)}, \ldots$$

Слѣдовательно

$$y = \frac{b}{m+1} x^{m+1} \left\{1 + \frac{x}{m+2} + \frac{x^2}{(m+2)(m+3)} + \ldots\right\}.$$

Строка, входящая въ правую часть, всегда — сходящаяся, а потому найденная формула и можетъ быть принимаема за выраженіе интеграла даннаго уравненія, хотя и не полнаго, а частнаго, такъ-какъ въ нее не входитъ произвольнаго постояннаго количества.

Возьмемъ еще уравненіе

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + ny = 0,$$

которое разсматривалось уже нами въ предыдущемъ нумерѣ. Сдѣлаемъ вообще

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots$$

и постараемся опредѣлить коэффиценты $A, B, C, \ldots$ и показатели степени $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ такъ, чтобы эта формула представляла рѣшеніе даннаго уравненія. Дифференцируя послѣднюю формулу, найдемъ:

$$\frac{dy}{dx} = A\alpha x^{\alpha-1} + B\beta x^{\beta-1} + C\gamma x^{\gamma-1} + \ldots,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\alpha(\alpha - 1x^{\alpha-2} + B\beta(\beta-1)x^{\beta-2} + C\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} + \ldots,$$

такъ-что результатъ подстановки этихъ выраженій въ данное уравненіе будетъ таковъ:

$$A\alpha(\alpha+1)x^{\alpha-2} + nAx^{\alpha} + B\beta(\beta+1)x^{\beta-2} + nBx^{\beta}$$
$$+ C\gamma(\gamma+1)x^{\gamma-2} + nCx^{\gamma} + \ldots = 0.$$

При допущеніи, что $\alpha < \beta < \gamma \ldots, \alpha - 2$ будетъ наименьшимъ изъ показателей степени x въ этомъ уравненіи и такъ-какъ, при томъ, послѣднее уравненіе не можетъ имѣть мѣста при всякомъ x иначе, какъ при равенствѣ нулю всѣхъ коэффиціентовъ при различныхъ степеняхъ x, то прежде всего нужно, чтобы мы имѣли

$$A\alpha(\alpha+1) = 0,$$

условіе, которое требуетъ, чтобы было

$$\alpha = 0$$

или

$$\alpha = -1.$$

Возьмемъ сперва $\alpha = -1$. Два наименьшіе изъ слѣдующихъ показателей степени суть α и $\beta - 2$. Они могутъ быть или равны, или неравны другъ другу. Если они равны между собою, членъ

$$\cdots B\beta(\beta+1)x^{\beta-2},$$

который не можетъ сократиться ни съ однимъ изъ прочихъ, долженъ быть равенъ нулю, для чего необходимо, чтобы имѣли $\beta=0$ или $\beta=-1$. Но положить $\beta=-1$ нельзя, такъ-какъ по положенію β должно быть болѣе α, а потому нужно допустить $\beta=0$. Теперь перейдемъ къ показателямъ степени α и $\gamma-2$, которые нужно будетъ приравнять между собою, потому что членъ nx^α не можетъ самъ по себѣ обратиться въ нуль, а долженъ уничтожиться съ другимъ; отсюда слѣдуетъ

$$\gamma=1,\ nA+C\gamma(\gamma+1)=0.$$

Продолжая и далѣе точно такъ-же, получимъ:

$$\delta=2,\ nB+D\delta(\delta+1)=0,$$

$$\varepsilon=3,\ nC+E\varepsilon(\varepsilon+1)=0,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Два первые коэффиціента останутся неопредѣленными и послужатъ произвольными постоянными; остальные выразятся такимъ образомъ:

$$C=-\frac{nA}{1.2},\ D=-\frac{nB}{1.2.3},$$

$$E=\frac{n^2A}{1.2.3.4},\ F=\frac{n^2B}{1.2.3.4.5},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

такъ-что въ итогѣ получится

$$y=A\left(\frac{p}{x}-\frac{nx}{1.2}+\frac{n^2x^3}{1.2.3.4}+\ldots\right)$$

$$+B\left(1-\frac{nx^2}{1.2.3}+\frac{n^2x^4}{1.2.3.4}-\ldots\right);$$

или

$$y = A\frac{\cos\sqrt{n.x}}{x} + B\frac{\sin\sqrt{n.x}}{\sqrt{n.x}},$$

или

$$y = \frac{C'\cos\sqrt{n.x} + C''\sin\sqrt{n.x}}{x}.$$

Это и есть полный интегралъ даннаго уравненія.

Если-бы мы допустили $\alpha = 0$, то пришли бы къ строкѣ, выражающей не полный, а частный интегралъ даннаго уравненія.

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій при помощи опредѣленныхъ интеграловъ.

105. Въ иныхъ случаяхъ функціональное количество y, опредѣляемое дифференціальнымъ уравненіемъ, выражается при помощи опредѣленныхъ интеграловъ, а потому не излишне показать какимъ путемъ приходятъ обыкновенно къ выраженію интеграловъ дифференціальныхъ уравненій въ такой формѣ, оказывающейся весьма удобною въ нѣкоторыхъ вопросахъ математической физики.

Обыкновенно начинаютъ съ разысканія выраженія интеграла дифференціальнаго уравненія въ формѣ безконечной строки и затѣмъ, для выраженія суммы строки, прибѣгаютъ къ посредству опредѣленныхъ интеграловъ. Какъ именно поступаютъ при этомъ— всего лучше можно выяснить на примѣрахъ.

106. Пусть имѣемъ уравненіе.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{m}{x}\,\frac{dy}{dx} + ny = 0, \qquad (1)$$

встрѣчающееся во многихъ вопросахъ физики и механики. Полагаемъ

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + Dx^{\delta} + Ex^{\varepsilon} + \ldots, \qquad (2)$$

гдѣ коэффиціенты A, B, C.... и показатели степени α, β, γ... нужно опредѣлить такъ, чтобы формула (2) представила собою рѣшеніе уравненія (1). Продифференцировавъ формулу (2), получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = A\alpha x^{\alpha-1} + B\beta x^{\beta-1} + C\gamma x^{\gamma-1} + D\delta x^{\delta-1} + \ldots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + B\beta(\beta-1)x^{\beta-2} + C\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} + \ldots,$$

и внеся эти выраженія y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ въ уравненіе (1), будемъ имѣть

$$A\alpha[m+\alpha-1]x^{\alpha-2} + B\beta[m+\beta-1]x^{\beta-2} + C\gamma[m+\gamma-1]x^{\gamma-2}$$
$$\ldots + nAx^{\alpha} + nBx^{\beta} + nCx^{\gamma} + = 0. \quad (3)$$

Полагая, что $\alpha < \beta < \gamma < \delta\ldots$, будемъ имѣть, что $\alpha - 2$ наименьшій изъ показателей степени x; поэтому прежде всего должно быть

$$A\alpha[m+\alpha-1] = 0,$$

откуда

$$\alpha = 0 \text{ или } \alpha = -m+1.$$

Примемъ $\alpha = 0$ и затѣмъ допустимъ, что

$$\beta - 2 = \alpha,\ \gamma - 2 = \beta,\ \delta - 2 = \gamma,$$

т. е. что

$$\beta = 2,\ \gamma = 4,\ \delta = 6,\ \varepsilon = 8, \ldots$$

Послѣ этого, приравнивая нулю коэффиціенты при различныхъ степеняхъ x въ уравненіи (3), получимъ:

$$2B(m+1) + nA = 0,$$

$$4C(m+3) + nB = 0,$$

$$6D(m+5) + nC = 0,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

откуда

$$B=\frac{-\frac{n}{2}}{1(m+1)}A,\quad C=\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{1.2(m+1)(m+3)}A,$$

$$D=\frac{-\left(\frac{n}{2}\right)^3}{1.2.3.(m+1)(m+3)(m+5)}A,\ldots$$

Слѣдовательно формула (1) приметъ видъ:

$$y=A\left\{1-\frac{\frac{n}{2}x^2}{1(m+1)}+\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2x^4}{1.2.(m+1)(m+3)}\right.$$

$$\left.-\frac{\frac{n^3}{2}x^6}{1.2.3\,(m+1)(m+3)(w+5)}+\ldots\right\}\quad(4)$$

Это, очевидно, частный интегралъ даннаго уравненія, содержащій всего одно постоянное произвольное количество A.

Если допустить $\alpha=-m+1$, то равенства

$$\beta-2=\alpha,\ \gamma-2=\beta,\ \delta-2=\gamma,\ldots$$

доставятъ

$$\beta=-m+3,\ \gamma=-m+5.\ \delta=-m+7,\ldots$$

и приравнивая нулю коэффиціенты при различныхъ степеняхъ x въ уравненіи (3), мы найдемъ

$$B=\frac{-\frac{n}{2}}{-m+3}A,\ C=\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{1.2\,(-m+3)\,(-m+5)}$$

$$A,\ D=\frac{-\left(\frac{n}{2}\right)^3}{1.2.3\,(-m+3)\,(-m+5)\,(-m+7)}A\ldots.$$

и слѣдовательно формула (2) обратится въ

$$y = A\left\{x^{-m+1} - \frac{\frac{n}{2}x^{-m+3}}{1.(-m+3)} + \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 x^{-m+5}}{1.2(-m+3)(-m+5)}\right.$$

$$\left. - \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^3 x^{-m+7}}{1.2.3(-m+3)(-m+5)(-m+7)} + \ldots\right\} \ldots \qquad (5)$$

Эта формула опять представляетъ частное рѣшеніе даннаго уравненія (1).

Относительно фурмулъ (4) и (5) нужно замѣтить, что строка, входящая въ первую изъ нихъ, становится расходящеюся при m нечетномъ отрицательномъ числѣ, а строка, входящая во вторую изъ нихъ, напротивъ, дѣлается расходящеюся, когда m нечетное положительное число. Слѣдовательно, во всякомъ случаѣ, одна изъ формулъ (4) и (5) непремѣнно имѣетъ мѣсто, а зная одинъ частный интегралъ уравненія (1) всегда можно будетъ найдти и его полный интегралъ.

107. Возьмемъ теперь формулу

$$\cos(\alpha\cos\omega) = 1 - \frac{\alpha^2\cos^2\omega}{1.2} + \frac{\alpha^4\cos^4\omega}{1.2.3.4} - \ldots$$

$$+ \frac{(-\alpha^2)^p\cos^{2p}\omega}{1.2.3\ldots 2p} + \ldots, \qquad (6)$$

умножимъ обѣ части ея на

$$\sin^{m-1}\omega.d\omega$$

и слѣдствіе проинтегрируемъ между предѣлами 0 и π, полагая впрочемъ m числомъ положительнымъ, безъ чего получающійся интегралъ былъ бы безконечностью. Принимая во вниманіе формулу

$$\int_0^\pi \cos^{2i}\omega.\sin^\mu\omega.d\omega = \frac{1.3.5\ldots(2i-3)(2i-1)}{(\mu+2)(\mu+4)\ldots(\mu+2i-2)(\mu+2i)}\int_0^\pi \sin^\mu\omega.d\omega,$$

выводимую извѣстными пріемами интегрированія тригонометрическихъ функцій и въ которой нужно допустить, для того, чтобы интегралы были конечными величинами, $\mu > -1$, мы придемъ къ уравненію

$$\int_0^\pi \cos(\alpha.\cos\omega)\sin^{m-1}\omega.d\omega = \int_0^\pi \sin^{m-1}\omega.d\omega - \ldots$$

$$+ \frac{\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right)^p \int_0^\pi \sin^{m-1}\omega.d\omega}{1.2.3\ldots p\,(m+1)(m+3)\ldots(m+2p-1)} + \ldots,$$

а положивъ $\alpha = x\sqrt{n}$ и выведя $\int_0^\pi \sin^{m-1}\omega.d\omega$ за скобки, получимъ:

$$\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}.\cos\omega)\sin^{m-1}\omega.d\omega$$

$$= \int_0^\pi \sin^{m-1}\omega.d\omega \left[1 - \frac{\frac{nx^2}{2}}{1.(m+1)} + \frac{\left(\frac{nx^2}{2}\right)^2}{1.2.(m+1)(m+3)} - \ldots + \frac{\left(-\frac{nx^2}{2}\right)^p}{1.2\ldots p(m+1)(m+3)\ldots(m+2p-1)} + \ldots \right] \qquad (7)$$

Здѣсь правая часть отличается отъ правой части формулы (4) предыдущаго нумера только постояннымъ множителемъ, почему интегралъ уравненія (1), выражаемый формулою (4), можетъ быть представленъ въ формѣ

$$y = B\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}.\cos\omega)\sin^{m-1}\omega.d\omega, \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

если только $m > 0$.

Что касается до формулы (5), то ее можно написать такимъ образомъ:

$$y = Ax^{-m+1}\left[\begin{array}{l} 1 - \dfrac{\frac{nx^2}{2}}{1.(-m+3)} + \dfrac{\left(\frac{nx^2}{2}\right)^2}{1.2.(-m+3)(-m+5)} + \ldots \\ + \dfrac{\left(-\frac{nx^2}{2}\right)^p}{1.2\ldots p(-m+3)(-m+5)\ldots(-m+2p+1)} + \ldots \end{array}\right] \ldots (9)$$

Теперь ясно, что строка, входящая въ формулу (7), обращается въ строку, содержащуюся въ формулѣ (9), отъ замѣны m чрезъ $-m+2$; поэтому, при $m < 2$, формулу (9) можно привести къ виду:

$$y = B_1 x^{1-m}\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}.\cos\omega)\sin^{1-m}\omega.d\omega, \qquad (10)$$

гдѣ B_1 означаетъ произвольное постоянное.

Такъ-какъ, при существованіи условій

$$m > 0, \quad m < 2,$$

формулы (8) и (10) обѣ имѣютъ мѣсто, то въ этомъ случаѣ мы будемъ имѣть два частныхъ рѣшенія линейнаго уравненія (1), а потому полный его интегралъ выразится уравненіемъ:

$$y = B\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}.\cos\omega)\sin^{m-1}\omega\, d\omega$$

$$+ Bx^{1-m}\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}.\cos\omega)\sin^{1-m}\omega.d\omega. \qquad (11)$$

108. Разсмотримъ теперь случай, когда $m=0$ и уравненіе (1) сводится на

$$\frac{d^2y}{dx^3}+ny=0.$$

Здѣсь формула (4) не имѣетъ мѣста, а потому мы будемъ имѣть только частный интегралъ даннаго уравненія въ формѣ

$$y=B_1x\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}.\cos\omega)\sin\omega.d\omega.$$

Производя здѣсь интегрированіе на дѣлѣ и означивъ черезъ C произвольное постоянное количество, получимъ:

$$y=C.\sin x\sqrt{n},$$

а переходя отъ этого частнаго интеграла къ полному, найдемъ

$$y=C\sin x\sqrt{n}+C_1\cos x\sqrt{n},$$

результатъ, который, впрочемъ, получился бы гораздо проще прямымъ путемъ интегрированія даннаго уравненія.

109. Допустимъ теперь $m=2$. Уравненіе (1) приметъ видъ

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+ny=0.$$

Въ этомъ случаѣ формула (5) не имѣетъ мѣста, почему мы получимъ частный интегралъ даннаго уравненія въ формѣ

$$y=B\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}.\cos\omega)\sin\omega.d\omega,$$

такъ что, произведя самую интеграцію, найдемъ

$$y=\frac{C\sin x\sqrt{n}}{x}.$$

Перейдя отъ этого частнаго интеграла къ полному, найдемъ:

$$y=\frac{C\sin x\sqrt{n}+C_1\cos x\sqrt{n}}{x}.$$

110. Въ случаѣ, когда $m = 1$, оба члена правой части формулы (10) сводятся на одинъ и потому формула (11) выражаетъ уже не полный, а частный интегралъ уравненія.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + ny = 0.$$

Можно, впрочемъ, формулу (11) видоизмѣнить такъ, чтобы она и въ этомъ случаѣ доставляла полный интегралъ. Замѣнимъ во второмъ членѣ правой части формулы (11) количество m черезъ $1+\delta$; получимъ:

$$B_1 x^{-\delta}\int_0^{\pi}\cos(x\sqrt{n}.\cos\omega)(\sin\omega)^{-\delta}d\omega.$$

Теперь

$$x^{-\delta} = 1 - \delta.\log x + \frac{\delta^2}{1.2}(\log x)^2 - \ldots,$$

$$(\sin\omega)^{-\delta} = 1 - \delta\log(\sin\omega) + \frac{\delta^2}{1.2}[\log(\sin\omega)]^2 - \ldots,$$

а потому

$$x^{-\delta}(\sin\omega)^{-\delta} = 1 - \delta(\log x + \log\sin\omega) + \ldots$$

и вторая часть выраженія y обращается, когда отбросимъ члены, содержащіе δ въ степени выше первой, въ слѣдующее выраженіе:

$$B_1\int_0^{\pi}\cos(x\sqrt{n}.\cos\omega)d\omega$$

$$- B_1\delta\int_0^{\pi}\cos(x\sqrt{n}\cos\omega)(\log x + \log\sin\omega)d\omega;$$

въ то-же время первая часть выраженія y принимаетъ точно также видъ

$$B\int\limits_0^\pi \cos(x\sqrt{n}.\cos\omega)\,d\omega + B\delta\int\limits_0^\pi \cos(x\sqrt{n}.\cos\omega)\log\sin\omega.d\omega.$$

Сложивъ эти два выраженія и положивъ $B+B_1=C$, получимъ:

$$y = C\int\limits_0^\pi \cos(x\sqrt{n}.\cos\omega)\,d\omega$$

$$+(B-C)\delta\int\limits_0^\pi \cos(x\sqrt{n}.\cos\omega)(\log x+\log\sin\omega)\,d\omega$$

$$+B\delta\int\limits_0^\pi \cos(x\sqrt{n}.\cos\omega)\log\sin\omega.d\omega.$$

Допустимъ теперь, что δ стремится къ нулю, а $B\delta$ къ произвольному постоянному количеству C_1; въ такомъ случаѣ для *полнаго* значенія y получимъ, перейдя къ предѣлу и замѣтивъ, что $\log x + 2\log\sin\omega = \log(x\sin^2\omega)$,

$$y = C\int\limits_0^\pi \cos(x\sqrt{n}.\cos\omega)\,d\omega$$

$$+C_1\int\limits_0^\pi \cos(x\sqrt{n}.\cos\omega)\log(x\sin^2\omega)\,d\omega.$$

Это и есть полный интегралъ уравненія

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+ny=0.$$

111. Не мѣшаетъ замѣтить, что всякій разъ, когда m будетъ четнымъ, положительнымъ или отрицательнымъ числомъ, одинъ изъ членовъ правой части выраженія y въ формулѣ 11 (нум. 107) можно будетъ выразить не прибѣгая къ знаку интегрированія; что касается до другаго члена, то онъ исчезаетъ въ-слѣдствіе того, что m будетъ внѣ предѣловъ 0 и 2. Чтобы доказать это означимъ, вообще, чрезъ A_p опредѣленный интегралъ

$$\int_0^\pi \cos(\lambda\cos\omega)\sin^p\omega.d\omega;$$

интегрированіе по частямъ доставитъ, принимая, что $p>3$, слѣдующее отношеніе

$$A_p=\frac{(p-1)\,(p-2)}{\lambda^2}A_{p-2}-\frac{(p-1)\,(p-3)}{\lambda^2}A_{p-4}.$$

Если p нечетное число, то при помощи этой формулы сведемъ опредѣленіе A_p на разысканіе $A_0=\int_0^\pi\cos(\lambda\cos\omega)d\omega$, который не выражается конечнымъ образомъ въ функціи λ. Напротивъ, когда p четное число, A_p выразится въ интегралахъ A_1 и A_3, которые вычисляются точно и выражаются формулами

$$A_1=\frac{2\sin\lambda}{\lambda},\quad A_3=\frac{4}{\lambda^3}(\sin\lambda-\lambda\cos\lambda),$$

почему и обнаруживается, что одинъ изъ интеграловъ, входящихъ въ формулу (11), выразится въ x въ конечной формѣ, когда m число нечетное, положительное или отрицательное.

112. Интегралъ уравненія

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{m}{x}\frac{dy}{dx}+ny=0, \tag{1}$$

можетъ быть представленъ въ формѣ, отличной отъ той, въ которой мы его вывели передъ этимъ, и при томъ болѣе удобной во многихъ случаяхъ, особенно когда m четное, положительное или отрицательное число.

Положимъ

$$y = Ax^{\alpha}\varphi(x) + A_1 x^{\alpha+1}\varphi'(x) + A_2 x^{\alpha+2}\varphi''(x) + \ldots, \qquad (2)$$

гдѣ постоянныя A, A_1, $A_2, \ldots$ и функція $\varphi(x)$ принимаются за неопредѣленныя количества. Подставимъ это выраженіе y въ уравненіи (1) и будемъ стараться неопредѣленные коэффиценты формулы (2) опредѣлить такимъ образомъ, чтобы уравненіе (1) удовлетворялось тождественно помянутою подстановкою.

Дифференцированіе формулы (2) доставляетъ:

$$\frac{m}{x}\frac{dy}{dx} = mA\alpha x^{\alpha-2}\varphi(x) + mA_1(\alpha+1)x^{\alpha-1}\varphi'(x)$$

$$+ mA_2(\alpha+2)x^{\alpha}\varphi''(x) + \ldots + mAx^{\alpha-1}\varphi'(x) + mA_1 x^{\alpha}\varphi''(x) + \ldots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\varphi(x) + A_1(\alpha+1)\alpha x^{\alpha-1}\varphi'(x)$$

$$+ A_2(\alpha+2)(\alpha+1)x^{\alpha}\varphi''(x) + \ldots + 2A\alpha x^{\alpha-1}\varphi'(x)$$

$$+ 2A_1(\alpha+1)x^{\alpha}\varphi''(x) + \ldots + Ax^{\alpha}\varphi''(x) + \ldots$$

и если внести эти выраженія въ уравненіе (1) и приравнять нулю коэффиціентъ общаго члена, содержащаго $x^{\alpha+p-2}$, то получимъ:

$$[(\alpha+p)(\alpha+p+m-1)A_p + (2\alpha+2p+m-2)A_{p-1}$$

$$+ A_{p-2}]\varphi^{p}(x) + nA_{p-2}\varphi^{p-2}(x) = 0,$$

причемъ, для упрощенія этого отношенія между $\varphi^{p}(x)$ и $\varphi^{p-2}(x)$ и освобожденія его отъ p, допустимъ

$$(\alpha+p)(\alpha+p+m-1)A_p + (2\alpha+2p+m-2)A_{p-1} = 0.$$

Отсюда будетъ слѣдовать, что

$$\varphi^{p}(x) + n\varphi^{p-2}(x) = 0,$$

уравненіе, которому можно удовлетворить, каково бы ни было p, допущеніемъ

$$\varphi''(x) + n\varphi(x) = 0,$$

откуда найдемъ

$$\varphi(x) = C \sin x\sqrt{n} + C' \cos x\sqrt{n},$$

гдѣ C, C' произвольныя постоянныя количества.

Нужно замѣтить, что приведенное вычисленіе не прилагается ко всѣмъ членамъ строки, получаемой отъ подстановки выраженія (2) y въ уравненіе (1); вычисленіе это предполагаетъ p по меньшей мѣрѣ равнымъ 2-мъ и притомъ необходимо отдѣльно разсматривать два члена, содержащіе $(\alpha-1)$-ую и $(\alpha-2)$-ую степени x. Приравнивая нулю коэффиціенты при этихъ степеняхъ x, получаемъ:

$$\alpha(\alpha-1)+m\alpha=0, \quad A_1(\alpha+1)(\alpha+m)+A(m+2\alpha)=0.$$

Первое изъ этихъ уравненій доставляетъ

$$\alpha=0 \text{ или } \alpha=1-m,$$

а второе, какъ въ томъ, такъ и въ другомъ изъ этихъ случаевъ, даетъ

$$A_1=-A.$$

Разсмотримъ послѣдовательно разложенія, соотвѣтствующія обоимъ этимъ значеніямъ α.

1) Пусть сперва $\alpha=1-m$. Въ этомъ случаѣ общее отношеніе между A_p и A_{p-1} переходитъ въ

$$p(p-m+1)A_p=(m-2p)A_{p-1}.$$

Измѣняя послѣдовательно p въ $p-1$, $p-2$,... опредѣлимъ A_p какъ функцію A_1, а такъ-какъ $A_1=-A$, то будемъ имѣть выраженіе коэффиціента A_p въ количествѣ A, остающемся неопредѣленнымъ, но которое можно будетъ приравнять 1 въ виду двухъ произвольныхъ постоянныхъ C, C'.

Такимъ образомъ найдемъ:

$$A_p = -\frac{(m-2p)(m-2p+2)\ldots(m-4)}{(p-m+1)(p-m)\ldots(3-m)1.2\ldots p}$$

и выраженіе y приметъ форму

$$y = x^{1-m}\left\{\begin{aligned}&C\sin x\sqrt{n} + C'\cos x\sqrt{n} - x\frac{d(C\sin x\sqrt{n}+C'\cos x\sqrt{n})}{dx} + \ldots\\ &+\frac{(m-4)\ldots(m-2p)}{(m-3)\ldots(m-p-1)}\frac{(-x)^p}{1.2\ldots p}\frac{d^p(C\sin x\sqrt{n}+C'\cos x\sqrt{n})}{dx^p}\end{aligned}\right\}.$$

Когда для нѣкотораго коэффиціента A_p найдется выраженіе равное нулю, строка, законченная предшествующимъ членомъ, будетъ удовлетворять данному дифференціальному уравненію и, слѣдовательно, *полный интегралъ будетъ выраженъ посредствомъ конечнаго числа членовъ.* Случай этотъ будетъ имѣть мѣсто всякій разъ, когда m будетъ положительнымъ четнымъ числомъ.

2) Пусть теперь $\alpha = 0$. Отношеніе между A_{p-1} и A_p перейдетъ теперь въ слѣдующее:

$$A_p = -\frac{m+2p-2}{p(m+p-1)}A_{p-1},$$

изъ котораго выведемъ, принимая опять A равнымъ единицѣ, что

$$A_p = \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2p-2)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+p-1)}\frac{(-1)^p}{1.2\ldots p},$$

такъ что для y получимъ выраженіе

$$y = C\sin x\sqrt{n} + C'\cos x\sqrt{n} - x\frac{d(C\sin x\sqrt{n}+C'\cos x\sqrt{n})}{dx} + \ldots$$

$$+\frac{(-x)^p(m+2)(m+4)\ldots(m+2p-2)}{1.2\ldots p(m+1)(m+2)\ldots(m+p+1)}\frac{d^p(C\sin x\sqrt{n}+C'\cos x\sqrt{n})}{dx^p} + \ldots$$

И эту строку заканчиваютъ членомъ, коэффиціентъ котораго равенъ нулю, что всегда случается, когда m четное отрицательное число.

И такъ, *полный интегралъ уравненія (1) всегда выражается конечнымъ числомъ членовъ, когда m четное, положительное или отрицательное число.*

113. Возьмемъ еще уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = be^{px} \tag{1}$$

и положимъ въ немъ

$$y = \frac{1}{au} \cdot \frac{du}{dx} \tag{2}$$

отъ чего самое уравненіе преобразуется въ

$$\frac{d^2u}{dx^2} = abue^{px}. \tag{3}$$

Если допустить, далѣе,

$$\frac{2\sqrt{ab}}{p} e^{\frac{1}{2}px} = z,$$

то получимъ:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{du}{dz} - u = 0. \tag{4}$$

Это преобразованное уравненіе не болѣе какъ частный случай уравненія, изслѣдованнаго въ предыдущихъ нумерахъ, а потому мы получимъ:

$$u = C\int_0^\pi \cos(z\sqrt{-1}\cos\omega)\,d\omega$$

$$+ C_1\int_0^\pi \cos(z\sqrt{-1}.\cos\omega)\log(z\sin^2\omega)\,d\omega,$$

или

$$u = C' \int_0^\pi (e^{z \cos \omega} + e^{-z \cos \omega})\, d\omega$$

$$+ C'' \int_0^\pi (e^{z \cos \omega} + e^{-z \cos \omega}) \log (z \sin^2 \omega)\, d\omega. \quad (5)$$

Въ этой формулѣ остается замѣнить z его значеніемъ въ x. Затѣмъ, для разысканія выраженія y, останется формулу (5) продифференцировать и найденное выраженіе $\frac{du}{dx}$ подставить въ формулу (2).

114. Размотримъ еще уравненіе

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[p^2 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right] y = 0,$$

встрѣчающееся въ приложеніяхъ физики.

Допустивъ $y = x^{m+1} z$, получимъ:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2(n+1)}{x} \frac{dz}{dx} + p^2 z = 0,$$

уравненіе, по формѣ своей сходное съ уравненіемъ выше проинтегрированнымъ.

Если допустить n числомъ положительнымъ, хотя и какимъ угодно, $2(n+1)$ не будетъ заключаться между 0 и 2 и потому можно будетъ выразить посредствомъ опредѣленнаго интеграла только частное рѣшеніе послѣдняго уравненія. Мы, именно, получимъ:

$$z = A \int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}.\cos \omega) \sin^{2n+1} \omega . d\omega$$

и можно будетъ отъ этого частнаго интеграла перейдти къ полному интегралу.

Въ частномъ случаѣ, когда $p^2 = n = 1$, данное уравненіе принимаетъ видъ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(p^2 - \frac{2}{x^2}\right) y = 0$$

и мы будемъ имѣть

$$y = Ax^2 \int_0^\pi \cos(px \cos\omega) \sin^2\omega . d\omega,$$

а произведя на самомъ дѣлѣ интегрированіе:

$$y = B\left(\frac{\sin px}{px} - \cos px\right),$$

гдѣ B произвольное постоянное. Замѣною B функціею x легко перейдти отъ этого частнаго рѣшенія и къ полному интегралу даннаго дифференціальнаго уравненія.

О разысканіи выраженій опредѣленныхъ интеграловъ при помощи интегрированія дифференціальныхъ уравненій.

115. Если опредѣленные интегралы служатъ во многихъ случаяхъ, какъ мы видѣли, къ выраженію интеграловъ дифференціальныхъ уравненій, то и наоборотъ — разысканіе опредѣленнаго интеграла можетъ быть сводимо на интегрированіе дифференціальнаго уравненія между однимъ изъ постоянныхъ, входящихъ подъ знакъ $\int$, и производными этого количества.

Производныя этого интеграла по отношенію къ помянутымъ постояннымъ всегда представляютъ сами интегралы, взятые между тѣми-же предѣлами, и если возможно при помощи такихъ дифференцированій возвратиться къ первоначальному интегралу, то исключеніе этого интеграла доставитъ уравненіе между его производными, взятыми по отношенію одного изъ постоянныхъ. Если уравненіе это окажется возможнымъ проинтегрировать, то будемъ имѣть выраженіе, содержащее опредѣленный интегралъ какъ частный случай, и нужно будетъ затѣмъ только опредѣлить произвольныя постоянныя такимъ образомъ, чтобы найденное выраженіе свелось на данный опредѣленный интегралъ.

Возьмемъ, напримѣръ, опредѣленный интегралъ

$$\int_0^\pi \cos(x.\cos\omega)\,d\omega.$$

Разсматривая его какъ функцію x и положивъ

$$y=\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\,d\omega, \qquad (1)$$

продифференцируемъ два раза это выраженіе по отношенію къ x; получимъ:

$$\frac{dy}{dx}=-\int_0^\pi \sin(x\cos\omega)\cos\omega.d\omega, \qquad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\cos^2\omega.d\omega. \qquad (3)$$

Для болѣе удобнаго сравненія этихъ выраженій между собою нужно ввести во второе изъ нихъ $\cos(x\cos\omega)$ вмѣсто $\sin(x\cos\omega)$, чего достигаютъ интегрированіемъ по частямъ.

Мы получаемъ:

$$-\sin\omega.\sin(x\cos\omega)-x\int\sin^2\omega.\cos(x\cos\omega)\,d\omega$$

и такъ-какъ первый членъ исчезаетъ для предѣловъ 0 и π, то будетъ:

$$\frac{dy}{dx} = -x\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\sin^2\omega.d\omega.$$

Дѣля на x и слѣдствіе сложивъ съ формулою (2), получаемъ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = -\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)d\omega,$$

а принявъ во вниманіе формулу (1), придемъ къ уравненію

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0, \qquad (4)$$

отъ интеграціи котораго и будетъ зависѣть опредѣленіе выраженія y, т. е. даннаго опредѣленнаго интеграла; интеграція же этого дифференціальнаго уравненія была уже указана нами выше. Правда, мы нашли только частный интегралъ уравненія (4), выраженный въ безконечной строкѣ, но въ настоящемъ случаѣ легко убѣдиться, что строка эта все-таки выражаетъ данный интегралъ $\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)d\omega$, если только произвольному постоянному приписать подходящее частное значеніе.

Въ самомъ дѣлѣ, развертывая въ строку выраженіе $\cos(x.\cos\omega)$, получаемъ:

$$\cos(x.\cos\omega) = 1 - \frac{x^2\cos^2\omega}{1.2} + \frac{x^4\cos^4\omega}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{x^{2m}\cos^{2m}\omega}{1.2\ldots2m} + \ldots$$

Умножимъ на $d\omega$ и проинтегрируемъ въ предѣлахъ 0 и π, замѣтивъ при этомъ, что

$$\int_0^\pi \cos^{2m}\omega . d\omega = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\pi,$$

получимъ:

$$\int_0^\pi \cos(x.\cos\omega)\, d\omega = \pi\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \ldots\right)$$

Слѣдовательно оказывается, что опредѣленный интегралъ $\int_0^\pi \cos(x.\cos\omega) d\omega$ не иное что, какъ частный интегралъ, который мы нашли для уравненія (2) и въ которомъ нужно только положить произвольное постоянное количество равнымъ π.

116. Разыщемъ еще дифференціальное уравненіе, которое опредѣляло бы опредѣленный интегралъ $\int_0^\infty e^{-m^2x^2}\cos 2nx.dx$.

Пусть

$$y = \int_0^\infty e^{-m^2x^2}\cos 2nx.\,dx;$$

получимъ:

$$\frac{dy}{dn} = -\int_0^\infty 2xe^{-m^2x^2}\sin 2nx.\,dx.$$

Но

$$\int 2xe^{-m^2x^2}\sin 2nx.\,dx = \frac{-1}{m^2}e^{-m^2x^2}\sin 2nx + \frac{2n}{m^2}\int e^{-m^2x^2}\cos 2nx.\,dx,$$

а потому

$$\frac{dy}{dn} = -\frac{2ny}{m^2},$$

или

$$y = Ce^{-\frac{n^2}{m^2}}.$$

Слѣдовательно $\int_0^\infty e^{-m^2x^2}\cos 2nx.\,dx$ заключается въ выраженіи $Ce^{-\frac{n^2}{m^2}}$, въ которомъ C не зависитъ отъ x и n; остается поэтому разсмотрѣть, какое значеніе должно принять C для того, чтобы $Ce^{-\frac{n^2}{m^2}}$ сдѣлалось равнымъ данному опредѣленному интегралу. Для $n=0$ интегралъ этотъ обращается въ

$$\int_0^\infty e^{-m^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2m}$$

а $Ce^{-\frac{n^2}{m^2}}$ переходитъ въ C; слѣдовательно значеніе произвольнаго постояннаго C должно быть равно $\frac{\sqrt{\pi}}{2m}$ и мы получаемъ;

$$\int_0^\pi e^{-m^2x^2}\cos 2nx.\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2m}\,e^{-\frac{n^2}{m^2}}.$$

Если-бы мы разсматривали $\int_0^\infty e^{-m^2x^2}\cos 2nx.dx$ какъ функцію m, то нашли бы:

$$\frac{dy}{dm} = \left(\frac{2n^2}{m^3} - \frac{1}{m}\right)y,$$

откуда

$$y = \frac{C}{m}\,e^{-\frac{n^2}{m^2}}$$

и мы нашли бы

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ и } y = \frac{\sqrt{\pi}}{2m}\,e^{-\frac{n^2}{m^3}}.$$