§ IV.

СПОСОБЫ ЯКОБИ ДЛЯ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧИ ПФАФФА.

1. Изъ всего изложеннаго въ предъидущемъ § достаточно видно, какимъ образомъ интегрированіе p системъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій между 2p, 2p—2, 2p—4, и т. д. и наконецъ между двумя перемѣнными приводитъ къ открытію p отношеній, представляющихъ полную систему интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія между 2p перемѣнными. Теперь интересно ознакомиться съ слѣдующимъ предложеніемъ Якоби, которое будетъ въ нѣкоторомъ смыслѣ обратнымъ прежняго, а именно:

2. Если дана система p уравненій съ числомъ p постоянныхъ произвольныхъ, удовлетворяющая дифференціальному уравненію

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots\ldots + X_{2p-1}\,\partial x_{2p-1} = 0, \quad (1)$$

то изъ нея всегда можно вывести полную систему интеграловъ для системы 2p—1 обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій Пфаффа.

3. Пусть

$$u_1 = g_1, \; u_2 = g_2, \; \ldots \ldots u_p = g_p \quad (2)$$

будутъ интегральными отношеніями даннаго уравненія (1); въ такомъ разѣ, какъ уже извѣстно, всегда существуютъ p множителей $G_1, G_2, \ldots \ldots G_p$, посредствомъ которыхъ получается тожество:

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots \ldots + X_{2p-1}\,\partial x_{2p-1} = G_1\,\partial x_1 + G_2\,\partial x_2 + \ldots \ldots + G_p\,\partial x_p \quad (3)$$

Такъ какъ каждая изъ частей этого равенства есть 0, то имѣемъ:

$$\frac{G_1}{G_p}\partial x_1 + \frac{G_2}{G_p}\partial x_2 + \ldots \ldots + \frac{G_{p-1}}{G_p}\partial x_{p-1} + \partial x_p = 0 \quad (4)$$

Теперь утвердительно говоримъ, что если $2p-1$ величинъ

$$u_1, \; u_2, \ldots \ldots u_p, \; \frac{G_1}{G_p}, \; \frac{G_2}{G_p}, \ldots \ldots \frac{G_{p-1}}{G_p}$$

приравняемъ постояннымъ произвольнымъ, то получаемыя $2p-1$ равенства, составятъ полную систему интегральныхъ отношеній, принадлежащихъ первой системѣ дифференціальныхъ уравненій Пфаффа.

4. Величины G опредѣляются формулами (49) § III, но для удобнѣйшаго доказательства сейчасъ только высказанной мысли, мы дадимъ имъ другой видъ.

Изъ уравненій (2) можно $x, x_1, x_2, \ldots \ldots x_{p-1}$ выразить въ $x_p, x_{p+1}, \ldots \ldots x_{2p-1}$ и произвольныхъ величинахъ $g_1, g_2, \ldots \ldots g_p$, которыя когда замѣстимъ черезъ $u_1, u_2, \ldots \ldots u_p$, то будемъ имѣть:

$$\partial x_k = \frac{\partial x_k}{\partial x_p}\partial x_p + \frac{\partial x_k}{\partial x_{p-1}}\partial x_{p+1} + \ldots \ldots + \frac{\partial x_k}{\partial x_{2p-1}}\partial x_{2p-1} + \frac{\partial x_k}{\partial u_1}\partial u_1 + \frac{\partial x_k}{\partial u_2}\partial u_2 + \ldots \ldots + \frac{\partial x_k}{\partial u_p}\partial u_p,$$

гдѣ k измѣняется отъ 0 до $p-1$.

Введя эти выраженія ∂x_k въ данное дифференціальное уравненіе, получимъ равенство:

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots\ldots + X_{2p-1}\,\partial x_{2p-1} =$$

$$\left(X\frac{\partial x}{\partial x_p} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_p} + \ldots\ldots + X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p} + X_p\right)\partial x_p$$

$$+\left(X\frac{\partial x}{\partial x_{p+1}} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{p+1}} + \ldots\ldots + X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_{p+1}} + X_{p+1}\right)\partial x_{p+1}$$

$$+\ldots\ldots+\left(X\frac{\partial x}{\partial x_{2p-1}} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{2p-1}} + \ldots\ldots + X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_{2p-1}}\right.$$

$$\left.+ X_{2p-1}\right)\partial x_{2p-1} + \left(X\frac{\partial x}{\partial u_1} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \ldots\ldots + X_{p-1}\right.$$

$$\left.\frac{\partial x_{p-1}}{\partial u_1}\right)\partial u_1 + \left(X\frac{\partial x}{\partial u_2} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial u_2} + \ldots\ldots + X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial u_2}\right)\partial u_2$$

$$+\ldots\ldots+\left(X\frac{\partial x}{\partial u_p} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial u_p} + \ldots\ldots + X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial u_p}\right)\partial u_p,$$

которое, въ силу формулы (3), разобьется на два слѣдующія:

$$\left(X\frac{\partial x}{\partial x_p} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_p} + \ldots\ldots + X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p} + X_p\right)\partial x_p$$

$$+\ldots\ldots+\left(X\frac{\partial x}{\partial x_{p+1}} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{p+1}} + \ldots\ldots + X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_{p+1}}\right.$$

$$\left.+ X_{p+1}\right)\partial x_{p+1} + \ldots\ldots + \left(X\frac{\partial x}{\partial x_{2p-1}} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{2p-1}} + \ldots\ldots\right.$$

$$\left.+ X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_{2p-1}} + X_{2p-1}\right)\partial x_{2p-1} = 0,$$

$$\left(X\frac{\partial x}{\partial u_1} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \ldots\ldots + X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial u_1}\right)\partial u_1 + \left(X\frac{\partial x}{\partial u_2}\right.$$

$$\left.+ X_1\frac{\partial x_1}{\partial u_2} + \ldots\ldots + X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial u_2}\right)\partial u_2 + \ldots\ldots + \left(X\frac{\partial x}{\partial u_p}\right.$$

$$+ X_1 \frac{\partial x_1}{\partial u_p} + \ldots + X_{p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial u_p} \Big) \partial u_p = G_1\, \partial u_1 + G_2\, \partial u_2$$
$$+ \ldots\ldots + G_p\, \partial u_p.$$

Такъ какъ теперь $\partial x_p, \partial x_{p+1}, \ldots\ldots \partial x_{2p-1}$ должны оставаться совершенно какими угодно, а второе равенство должно быть тожествомъ, то получимъ, во первыхъ, систему формулъ:

$$\left.\begin{array}{l} X\frac{\partial x}{\partial x_p} + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_p} + \ldots + X_{p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p} + X_p = 0, \\ X\frac{\partial x}{\partial x_{p+1}} + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_{p+1}} + \ldots + X_{p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_{p+1}} + X_{p+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X\frac{\partial x}{\partial x_{2p-1}} + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_{2p-1}} + \ldots + X_{p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_{2p-1}} + X_{2p-1} = 0 \end{array}\right\} (5)$$

а во вторыхъ, выраженія:

$$\left.\begin{array}{l} G_1 = X\frac{\partial x}{\partial g_1} + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial g_1} + \ldots\ldots + X_{p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial g_1}, \\ G_2 = X\frac{\partial x}{\partial g_2} + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial g_2} + \ldots\ldots + X_{p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial g_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_p = X\frac{\partial x}{\partial g_p} + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial g_p} + \ldots\ldots + X_{p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial g_p}, \end{array}\right\} (6)$$

гдѣ величины $g_1, g_2, \ldots\ldots g_p$ замѣнили собою количества $u_1, u_2, \ldots\ldots u_p$.

5. Сдѣлавши

$$\frac{G_1}{G_p} = h_1, \frac{G_2}{G_p} = h_2, \ldots\ldots \frac{G_{p-1}}{G_p} = h_{p-1}, \quad (7)$$

гдѣ $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots \mathfrak{h}_{p-1}$ постоянныя произвольныя величины, въ силу (6), формулы эти можно будетъ написать такъ:

$$\left.\begin{aligned}
&X\frac{\partial x}{\partial g_1}+X_1\frac{\partial x_1}{\partial g_1}+\ldots+X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial g_1}+M\mathfrak{h}_1=0,\\
&X\frac{\partial x}{\partial g_2}+X_1\frac{\partial x_1}{\partial g_2}+\ldots+X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial g_2}+M\mathfrak{h}_2=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&X\frac{\partial x}{\partial g_p}+X_1\frac{\partial x_1}{\partial g_p}+\ldots+X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial g_p}+M\mathfrak{h}_p=0
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

гдѣ можетъ быть $\mathfrak{h}_p=1$.

Послѣ этого если докажемъ, что, по исключеніи количества M изъ (8), получаемая система $p-1$ отношеній въ совокупности со (2) дѣйствительно даетъ всѣ интегралы системы Пфаффа, то предложеніе Якоби и будетъ подтверждено.

6. Посредствомъ p уравненій вида

$$X\frac{\partial x}{\partial g_j}+X_1\frac{\partial x_1}{\partial g_j}+\ldots\ldots+X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial g_j}+M\mathfrak{h}_j=0 \quad (9)$$

$p+1$ величинъ $x_p, x_{p+1}, \ldots\ldots x_{2p-1}$, M, можно выразить черезъ одну которую-нибудь изъ нихъ, напримѣръ черезъ M; въ такомъ случаѣ какъ эти величины, такъ и $x, x_1, x_2, \ldots\ldots x_{p-1}$ будутъ функціями отъ M, отъ $g_1, g_2, \ldots\ldots g_p$ и отъ $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots\ldots \mathfrak{h}_p$. Если дифференцированіе, соотвѣтствующее этому предположенію, будемъ изображать черезъ d, а черезъ ∂ — дифференцированіе подъ тѣмъ условіемъ, что $x, x_1, x_2, \ldots\ldots x_{p-1}$ суть функціи отъ $x_p, x_{p+1}, \ldots\ldots x_{2p-1}, g_1, g_2, \ldots\ldots g_p$; то, допустивъ k однимъ изъ чиселъ 0, 1, 2, $\ldots\ldots p-1$, получимъ:

$$\frac{dx_k}{dg_j}=\frac{\partial x_k}{\partial g_j}+\frac{\partial x_k}{\partial x_p}\cdot\frac{dx_p}{dg_j}+\frac{\partial x_k}{\partial x_{p+1}}\cdot\frac{dx_{p+1}}{dg_j}+\ldots\ldots+\frac{\partial x_k}{\partial x_{2p-1}}\,\frac{dx_{2p-1}}{dg_j}$$

Послѣдовательное подстановленіе вмѣсто k чиселъ 0, 1, 2, ... доставитъ намъ p такихъ равенствъ, которыя, когда помножимъ соотвѣтственно на X, X_1, X_2, ... X_{p-1} и составимъ сумму слѣдствій, найдемъ:

$$X\frac{dx}{dg_j}+X_1\frac{dx_1}{dg_j}+X_2\frac{dx_2}{dg_j}+\ldots\ldots+X_{p-1}\frac{dx_{p-1}}{dg_j}=$$

$$X\frac{\partial x}{\partial g_j}+X_1\frac{\partial x_1}{\partial g_j}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial g_j}+\ldots\ldots+X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial g_j}$$

$$+\left(X\frac{\partial x}{\partial x_p}+X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_p}+\ldots\ldots+X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p}\right)\frac{dx_p}{dg_j}$$

$$+\left(X\frac{\partial x}{\partial x_{p+1}}+X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{p+1}}+\ldots\ldots+X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_{p+1}}\right)\frac{dx_{p+1}}{dg_j}$$

. . . .

$$+\left(X\frac{\partial x}{\partial x_{2p-1}}+X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{2p-1}}+\ldots\ldots+X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_{2p-1}}\right)\frac{dx_{2p-1}}{dg_j}$$

$$=-Mh_j-X_p\frac{dx_p}{dg_j}-X_{p+1}\frac{dx_{p+1}}{dg_j}-\ldots\ldots-X_{2p-1}\frac{dx_{2p-1}}{dg_j};$$

или

$$X\frac{dx}{dg_j}+X_1\frac{dx_1}{dg_j}+X_2\frac{dx_2}{dg_j}+\ldots\ldots+X_{2p-1}\frac{dx_{2p-1}}{dg_j}$$

$$+Mh_j=0\quad(10).$$

7. Продифференцировавъ это равенство по M, получимъ:

$$\frac{dX}{dM}\cdot\frac{dx}{dg_j}+\frac{dX_1}{dM}\,\frac{dx_1}{dg_j}+\ldots\ldots+\frac{dX_{2p-1}}{dM}\cdot\frac{dx_{2p-1}}{dg_j}+$$

$$X\frac{d^2x}{dg_jdM}+X_1\frac{d^2x_1}{dg_jdM}+\ldots\ldots+X_{2p-1}\frac{d^2x_{2p-1}}{dg_jdM}+h_j=0.$$

Разсматривая теперь въ уравненіи (1) всѣ величины функціями отъ M, оно можетъ написаться такъ:

$$X\frac{dx}{dM}+X_1\frac{dx_1}{dM}+\ldots\ldots+X_{2p-1}\frac{dx_{2p-1}}{dM}=0; \quad (11)$$

а продифференцировавъ послѣднее по g_j найдемъ:

$$X\frac{d^2x}{dM.dg_j}+X_1\frac{d^2x_1}{dM\,dg_j}+\ldots\ldots+X_{2p-1}\frac{d^2x_{2p-1}}{dM.dg_j}+$$

$$\frac{dX}{dg_j}\frac{dx}{dM}+\frac{dX_1}{dx_j}\frac{dx_1}{dM}+\ldots\ldots+\frac{dX_{2p-1}}{dg_j}\frac{dx_{2p-1}}{dM}=0.$$

Въ слѣдствіе того, послѣ помноженія обоихъ равенствъ на dM, получимъ:

$$\partial X\frac{dx}{dg_j}+\partial X_1\frac{dx_1}{dg_j}+\ldots\ldots+\partial X_{2p-1}\frac{dx_{2p-1}}{dg_j}$$

$$-\partial x\frac{dX}{dg_j}-\partial x_1\frac{dX_1}{dg_j}-\ldots\ldots-\partial x_{2p-1}\frac{dX_{2p-1}}{dg_j}+h_j\partial M=0.$$

Исключивъ отсюда при помощи (9) количество h_j, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{array}{l}\partial X\dfrac{dx}{dg_j}+\partial X_1\dfrac{dx_1}{dg_j}+\ldots+X_{2p-1}\dfrac{dx_{2p-1}}{dg_j}\\ -\partial x.\dfrac{dX}{dg_j}-\partial x_1\dfrac{dX_1}{dg_j}-\ldots-\partial x_{2p-1}\dfrac{dX_{2p-1}}{dg_j}\\ -\dfrac{\partial M}{M}\Big\{X\dfrac{dx}{dg_j}+X_1\dfrac{dx_1}{dg_j}+\ldots+X_{2p-1}\dfrac{dx_{2p-1}}{dg_j}=0.\end{array}\right\}\quad(12)$$

8. Сдѣлавши $h_p=1$, посредствомъ того-же самаго анализа, для остальныхъ $p-1$ постоянныхъ произвольныхъ $h_1, h_2, \ldots\ldots h_{p-1}$, мы получимъ формулы сходныя съ (10) и (12); а именно:

$$X\frac{dx}{dh_j}+X_1\frac{dx_1}{dh_j}+\ldots\ldots+X_{p-1}\frac{dx_{p-1}}{dh_j}=$$

$$\left\{X\frac{\partial x}{\partial x_p}+X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_p}+\ldots\ldots+X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p}\right\}\frac{dx_p}{dh_j}+$$

$$\left\{X\frac{\partial x}{\partial x_{p+1}}+X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{p+1}}+\ldots\ldots+X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_{p+1}}\right\}\frac{dx_{p+1}}{dh_j}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left\{X\frac{\partial x}{\partial x_{2p-1}}+X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{2p-1}}+\ldots\ldots+X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_{2p-1}}\right\}\frac{dx_{2p-1}}{dh_j}=$$

$$-\left\{X_p\frac{dx_p}{dh_j}+X_{p+1}\frac{dx_{p+1}}{dh_j}+\ldots\ldots+X_{2p-1}\frac{dx_{2p-1}}{dh_j}\right\}$$

или

$$X\frac{dx}{dh_j}+X_1\frac{dx_1}{dh_j}+\ldots\ldots+X_{2p-1}\frac{dx_{2p-1}}{dh_j}=0 \qquad (13)$$

9. Продифференцировавъ это уравненіе по M, а (12) по h_j, и отнявъ одинъ результатъ отъ другаго, по умноженіи на ∂M, будемъ имѣть:

$$\partial X\frac{dx}{dh_j}+\partial X_1\frac{dx_1}{dh_j}+\ldots\ldots+\partial X_{2p-1}\frac{dx_{2p-1}}{dh_j}$$

$$-\partial x\frac{dX}{dh_j}-\partial x_1\frac{dX_1}{dh_j}-\ldots\ldots-\partial x_{2p-1}\frac{dX_{2p-1}}{dh_j}=0$$

Если еще отсюда отнимемъ произведеніе (13) на $\frac{\partial M}{M}$, то получимъ:

$$\left.\begin{aligned}&\partial X\frac{dx}{dh_j}+\partial X_1\frac{dx_1}{dh_j}+\ldots\ldots+\partial X_{2p-1}\frac{dx_{2p-1}}{dh_j}\\&-\partial x\frac{dX}{dh_j}-\partial x_1\frac{dX_1}{dh_j}-\ldots\ldots-\partial x_{2p-1}\frac{dX_{2p-1}}{dh_j}\\&-\frac{\partial M}{M}\left\{X\frac{dx}{dh_j}+X_1\frac{dx_1}{dh_j}+\ldots\ldots+X_{2p-1}\frac{dx_{2p-1}}{dh_j}\right\}\end{aligned}\right\} (14)$$

10. Замѣтивъ, что

$$\frac{dX_\kappa}{dg_j}=\frac{\partial X_\kappa}{\partial x}\,\frac{dx}{dg_j}+\frac{\partial X_\kappa}{\partial x_1}\,\frac{dx_1}{dg_j}+\ldots\ldots+\frac{\partial X_\kappa}{\partial x_{2p-1}}\cdot\frac{dx_{2p-1}}{dg_j},$$

$$\frac{dX_\kappa}{dh_j}=\frac{\partial X_\kappa}{\partial x}\,\frac{dx}{dh_j}+\frac{\partial X_\kappa}{\partial x_1}\,\frac{dx_1}{dh_j}+\ldots\ldots+\frac{\partial X_\kappa}{\partial x_{2p-1}}\,\frac{dx_{2p-1}}{dh_j};$$

формулы (12) и (14) перейдутъ въ:

$$T\frac{dx}{dg_j}+T_1\frac{dx_1}{dg_j}+\ldots\ldots+T_{2p-1}\frac{dx_{2p-1}}{dg_j}=0\quad(15),$$

$$T\frac{dx}{dh_j}+T_1\frac{dx_1}{dh_j}+\ldots\ldots+T_{2p-1}\frac{dx_{2p-1}}{dh_j}=0;\quad(16)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned}
T&=\partial X-\left\{\frac{\partial X}{\partial x}\partial x+\frac{\partial X_1}{\partial x}\partial x_1+\ldots\ldots+\frac{\partial X_{2p-1}}{\partial x}\right.\\
&\qquad\qquad\left.\partial x_{2p-1}\right\}-\frac{X\,\partial M}{M},\\
T_1&=\partial X_1-\left\{\frac{\partial X}{\partial x_1}\partial x+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\partial x_1+\ldots\ldots+\frac{\partial X_{2p-1}}{\partial x_1}\right.\\
&\qquad\qquad\left.\partial x_{2p-1}\right\}-\frac{X_1\partial M}{M},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
T_{2p-1}&=\partial X_{2p-1}-\left\{\frac{\partial X}{\partial x_{2p-1}}\partial x+\frac{\partial X_1}{\partial x_{2p-1}}\partial x_1+\ldots\right.\\
&\qquad\left.\ldots+\frac{\partial X_{2p-1}}{\partial x_{2p-1}}\partial x_{2p-1}\right\}-\frac{X_{2p-1}\partial M}{M}.
\end{aligned}\right\}(17)$$

11. Умноживъ эти равенства на $\partial x,\ \partial x_1,\ \ldots.\ \partial x_{2p-1}$ и сложивъ, въ силу отношеній

$$X\,\partial x+X_1\,\partial x_1+\ldots\ldots+X_{2p-1}\,\partial x_{2p-1}=0$$

$$\frac{\partial X_\kappa}{\partial x}\partial x+\frac{\partial X_\kappa}{\partial x_1}\partial x_1+\ldots\ldots+\frac{\partial X_\kappa}{\partial x_{2p-1}}\partial x_{2p-1}=\partial X_\kappa$$

будемъ имѣть:

$$T\,\partial x + T_1\,\partial x_1 + \ldots\ldots + T_{2p-1}\,\partial x_{2p-1} = 0, \quad (18)$$

что можно еще написать такъ:

$$T\frac{dx}{dM} + T_1\frac{dx_1}{dM} + \ldots\ldots + T_{2p-1}\frac{dx_{2p-1}}{dM} = 0, \quad (19)$$

если только $x, x_1, x_2, \ldots\ldots x_{2p-1}$ разсматривать функціями отъ M и отъ $g_1, g_2, \ldots g_p$; $h_1, h_2, \ldots\ldots h_{p-1}$.

12. Изъ p уравненій (15), $p-1$ уравненій (16) и одного уравненія (19), вытекаютъ $2p$ уравненій

$$T = 0,\ T_1 = 0, \ldots\ldots T_{2p-1} = 0\ , \quad (20)$$

которыя совпадутъ съ Пфаффовой системой дифференціальныхъ отношеній, коль-скоро въ нихъ $\frac{\partial M}{M}$ замѣнить черезъ N.

13. Объяснить существованіе равенствъ (20) очень легко. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая одновременно g_1, $g_2, \ldots\ldots g_p$, $h_1, h_2 \ldots\ldots h_{p-1}$, M какъ перемѣнныя, уравненія, построенныя между этими величинами и между $x, x_1, \ldots\ldots x_{2p-1}$ не допускаютъ никакого отношенія между одними послѣдними $2p$ количествами; но они показываютъ только какимъ образомъ одна система $2p$ перемѣнныхъ выражается черезъ другую систему $2p$ измѣняемыхъ. Означивъ произвольныя измѣненія величинъ $x, x_1, \ldots\ldots x_{2p-1}$ черезъ $\delta x, \delta x_1, \ldots\ldots \delta x_{2p-1}$; эти послѣднія должны быть независимы одни отъ другихъ, потому что между одними $x, x_1, \ldots\ldots x_{2p-1}$ не должно быть никакого отношенія. Пусть $\delta g_1, \delta g_2, \ldots$ $\ldots\ldots \delta g_p, \delta h_1, \delta h_2, \ldots\ldots \delta h_{p-1}, \delta M$ будутъ измѣненія-

ми, соотвѣтствующими перемѣннымъ $g_1, g_2, \ldots . g_p, h_1, h_2, \ldots . h_{p-1}$, M; будемъ имѣть:

$$\delta x_k = \frac{dx_k}{dg_1}\delta g_1 + \frac{dx_k}{dg_2}\delta g_2 + \ldots . + \frac{dx_k}{dg_p}\delta g_p$$
$$+ \frac{dx_k}{dh_1}\delta h_1 + \frac{dx_k}{dh_2}\delta h_2 + \ldots . + \frac{dx_k}{dh_{p-1}}\delta h_{p-1} + \frac{dx_k}{dM}\delta M.$$

Умноживъ p уравненій (15) соотвѣтственно на $\delta g_1, \delta g_2, \ldots . \delta g_p$; p—1 уравненій (16) послѣдовательно на $\delta h_1, \delta h_2, \ldots . \delta h_{p-1}$; а (19) на δM и составивъ сумму получимъ:

$$T\,\delta x + T_1\,\delta x_1 + \ldots\ldots + T_{2p-1}\,\delta x_{2p-1} = 0 \quad (21)$$

равенство, которое въ силу произвольности $\delta x, \delta x_1, \ldots \ldots \delta x_{2p-1}$ не иначе возможно какъ только подъ условіемъ

$$T = 0\,,\ T_1 = 0\,, \ldots\ldots T_{2p-1} = 0\,;$$

что и требовалось доказать.

14. Легко понять, что построеніемъ предложенія въ n° 3 мы оправдали истину n° 2. Но чтобъ дать этой мысли всю наглядность, стоитъ только опредѣлить количества $G_1, G_2, \ldots . G_p$ не формами (6) n° 4, каковa, напримѣръ,

$$G_k = X\frac{dx}{dg_k} + X_1\frac{dx_1}{dg_k} + \ldots . + X_{p-1}\frac{dx_{p-1}}{dg_k}\,, \quad (22)$$

а формулами (49) предъидущаго §, т. е.

$$G_k = \frac{X\,\Delta'\left(\frac{\partial u_k}{\partial x}\right) + X_1\,\Delta'\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_1}\right) + \ldots + X_{p-1}\,\Delta'\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_{p-1}}\right)}{\Delta} \quad (25)$$

Въ такомъ разѣ, въ полныхъ интегралахъ первой системы дифференціальныхъ уравненій, по n° 3, каждое изъ отношеній $\frac{G_j}{G_p}$ изобразится такъ:

$$\frac{G_j}{G_p}=\frac{X\,\Delta'\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)+X_1\Delta'\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_1}\right)+\ldots\ldots+X_{p-1}\Delta'\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_{p-1}}\right)}{X\,\Delta'\left(\frac{\partial u_p}{\partial x}\right)+X_1\Delta'\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_1}\right)+\ldots\ldots+X_{p-1}\Delta'\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_{p-1}}\right)};\quad(24)$$

и мы получимъ слѣдующее общее правило для составленія частныхъ $\frac{G_j}{G_p}$ изъ функцій $u_1, u_2, \ldots\ldots u_p$ и изъ коэффиціентовъ даннаго дифференціальнаго уравненія (1): Вычислить опредѣлитель Δ слѣдующей системы p^2 частныхъ производныхъ:

$$\begin{array}{l}\frac{\partial u_1}{\partial x},\ \frac{\partial u_2}{\partial x},\ \ldots\ldots\ \frac{\partial u_p}{\partial x},\\[2mm] \frac{\partial u_1}{\partial x_1},\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1},\ \ldots\ldots\ \frac{\partial u_p}{\partial x_1},\qquad(25)\\[2mm] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\[2mm] \frac{\partial u_1}{\partial x_{p-1}},\ \frac{\partial u_2}{\partial x_{p-1}},\ \ldots\ldots\ \frac{\partial u_p}{\partial x_{p-1}},\end{array}$$

взять отъ него производныя сначала по измѣняемости членовъ, расположенныхъ въ $j^{\text{мъ}}$ вертикальномъ столбцѣ, потомъ по измѣняемости членовъ въ $p^{\text{мъ}}$ вертикальномъ столбцѣ, трактуя въ обоихъ случаяхъ всѣ эти члены какъ простыя перемѣнныя; тѣ и другіе выводы помножить соотвѣтственно на $X, X_1, X_2, \ldots\ldots X_{p-1}$ и сумму первыхъ произведеній раздѣлить на сумму вторыхъ произведеній.

15. Разсмотрѣнная въ предъидущихъ нумерахъ теорія явилась въ первый разъ въ 1837 году, въ 17 то-

мѣ Журнала Крелля, и для рѣшенія задачи Пфаффа имѣетъ величайшую важность. Есть поводъ думать, что теорему n° 2 хотѣлъ положить Якоби въ основаніе новаго способа интегрировать линейныя дифференціальныя уравненія съ четнымъ числомъ перемѣнныхъ. Хотя самъ онъ не извлекъ изъ нея прямымъ путемъ никакихъ заключеній, но нѣтъ никакой трудности сдѣлать это и придти къ тѣмъ-же результатамъ, которые гораздо позже, въ Theoria novi multiplicatoris, объяснилъ Якоби изъ другихъ источниковъ.

16. Такимъ образомъ, если отношенія (2) вмѣстѣ съ формулами (7) представляютъ полную систему интеграловъ для первой системы дифференціальныхъ уравненій Пфаффа, то прежде всего мы можемъ отсюда заключить и на-оборотъ, что между интегральными отношеніями первой Пфаффовой системы содержатся всѣ p интеграловъ даннаго дифференціальнаго уравненія.

17. Значитъ, если бы въ каждомъ случаѣ мы могли указать a priori, которыя именно изъ интегральныхъ формулъ этой системы имѣютъ свойство быть необходимыми и достаточными для рѣшенія уравненія (1), то, разумѣется, все дѣло ограничилось бы разсмотрѣніемъ одной первой системы дифференціальныхъ уравненій.

18. Изслѣдованіе это становится излишнимъ. Содержаніе n°n° 2 и 14 доставляетъ средство доказать безъ всякихъ новыхъ выкладокъ, что рѣшеніе задачи Пфаффа дѣйствительно всегда можетъ быть сведено только на розысканіе интеграловъ первой системы дифференціальныхъ уравненій.

19. Въ самомъ дѣлѣ, возможность разсматривать частныя

$$\frac{G_j}{G_p}$$

нѣкоторыми функціями отъ u_1, u_2, ... u_p, приводитъ насъ къ такимъ важнѣйшимъ заключеніямъ:

Въ совокупности полныхъ интеграловъ, соотвѣтствующихъ первой системѣ 2p—1 дифференціальныхъ уравненій не только не всѣ интегральныя уравненія существенно различны между собою, но что изъ нихъ, говоря вообще, *каждыя* p—1 выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{G_1}{G_p}=h_1, \frac{G_2}{G_p}=h_2 \ldots\ldots \frac{G_{p-1}}{G_p}=h_{p-1} \qquad (26)$$

черезъ другія p равенствъ:

$$u_1=g_1,\ u_2=g_2, \ldots . u_p=g_p \qquad (27)$$

при чемъ G_1, G_2, ... G_p удерживаютъ значенія, опредѣляемыя формулою (23).

20. Послѣ этого часто упоминаемая система 2p—1 дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, собственно говоря, интегрируется только числомъ p интегральныхъ формулъ. А потому она должна обладать тѣмъ свойствомъ, чтобъ при посредствѣ какихъ-нибудь p интеграловъ, изъ числа 2p—1 уравненій *каждыя* p—1 вытекали сами собою изъ остальныхъ p равенствъ.

21. Теоремы эти сдѣлаются совершенно понятными, если мы прибавимъ, что система (2), принятая нами за интегралы уравненія (1), можетъ измѣняться, смотря потому какія изъ количествъ a, b, ... въ преобра-

зованныхъ уравненіяхъ (30), (35) . . . . § III будемъ принимать за постоянныя, но что всѣ предшествующія сужденія нисколько не зависятъ отъ формы уравненій (2).

22. Предложеніе nº 20 заключаетъ въ себѣ отвѣтную мысль на положеніе nº 18; оно составляетъ конечную цѣль теоремы nº 2 и позволяетъ довести способъ Пфаффа до крайней простоты.

И точно, построивъ первую систему дифференціальныхъ уравненій и найдя p какихъ-нибудь ея интеграловъ, мы въ то-же время получимъ полную систему интегральныхъ отношеній для даннаго дифференціальнаго уравненія о числѣ $2p$ измѣняемыхъ.

23. Еще болѣе значительное упрощеніе метода Пфаффа вытекаетъ изъ слѣдующихъ соображеній: если намъ удастся открыть только $p-1$ интеграловъ первой системы, то опредѣленіе $p^{аго}$ интеграла можно свести на рѣшеніе одного линейнаго дифференціальнаго уравненія, между $p+1$ измѣняемыхъ, удовлетворяющаго условіямъ интегральности.

24. Въ самомъ дѣлѣ, предположивъ, что какимъ-нибудь образомъ найдены сказанные $p-1$ интегральныхъ отношеній, мы вычислимъ изъ нихъ выраженія для $p-1$ перемѣнныхъ, напр. $x, x_1, \ldots\ldots x_{p-2}$, въ зависимости отъ остальныхъ измѣняемыхъ $x_{p-1}, x_p, \ldots\ldots x_{2p-1}$, и внесемъ эти значенія въ уравненіе (1); тогда въ результатѣ подстановленія получимъ линейный дифференціалъ между $p+1$ перемѣнныхъ величинъ:

$$\left(X\frac{\partial x}{\partial x_{p-1}}+X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{p-1}}+\ldots+X_{p-2}\frac{\partial x_{p-2}}{\partial x_{p-1}}+X_{p-1}\right)\partial x_{p-1}+$$

$$\left(X\frac{\partial x}{\partial x_p} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_p} + \ldots\ldots + X_{p-2}\frac{\partial x_{p-2}}{\partial x_p} + X_p \right)\partial x_p +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \quad (28)$$

$$\left(X\frac{\partial x}{\partial x_{2p-1}} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{2p-1}} + \ldots + X_{p-2}\frac{\partial x_{p-2}}{\partial x_{2p-1}} + X_{2p-1} \right)\partial x_{2p-1},$$

въ которомъ, по требованію теоріи, одну изъ перемѣнныхъ, напр. x_{p-1}, должно разсматривать какъ функцію остальныхъ измѣняемыхъ количествъ. Поэтому, коэффиціенты при ∂x_{p-1}, ∂x_p, ... ∂x_{2p-1} необходимо должны быть подчинены извѣстнымъ условіямъ интегральности, и, слѣдовательно, розысканіе послѣдняго интеграла совершится по способамъ § I.

25. Результатъ этотъ есть ни что иное какъ обобщеніе мыслей Якоби, высказанныхъ имъ въ «Theoria novi multiplicatoris» (Mathematische Werke, Band 1, Seite 157) слѣдующими словами:

«Methodum ad solvendum problema Pfaffianum ab ipso autore adhibitam per plures et altiores procedere integrationes quam methodus vera et genuina poscat. Quam novam methodum pro exemplo simplice explicabo. Ad æquationem differentialem

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + X_3\,\partial x_3 = 0$$

per duas æquationes integrandam poscit Pfaffiana methodus integrationem completam systematis trium æquationum differentialium primi ordinis inter quatuor variabiles. Illius igitur systematis integrali uno invento, secundum illam methodum restat integratio completa duarum æquationum differentialium primi ordinis inter tres variabiles sive unius æquationis differentialis secundi ordinis inter duas variabiles ac deinde æquationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles. At observo, si integrali illo invento exprimatur x_3 per x, x_1, x_2 æquationem differentialem propositam abire in aliam linearem primi ordinis inter tres variabiles, conditioni integrabilitatis satisfacientem; cujus integrationem absolvi posse per integrationes separatas duarum æquationum differentialium primi ordinis inter duas variabiles. Unde in locum æquationis differentialis secundi ordinis tantum integrandæ sunt duæ æquationes differentiales separatæ primi ordinis; integrationi autem æquationis differentialis primi ordinis postremo præstandæ omnino supersedetur».

26. Въ 17 томѣ Журнала Крелля, на страницахъ 161 и 162, Якоби предложилъ новый способъ для интеграціи уравненія

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2\,X_3\,\partial x_3 + \ldots\ldots + X_{2p-1}\,\partial x_{2p-1} = 0. \qquad (29)$$

По внѣшности способъ этотъ находится въ обратномъ отношеніи съ методомъ Пфаффа, но въ существѣ своемъ совершенно отличается отъ послѣдняго. Пфаффъ начинаетъ изслѣдованіе прямо съ даннаго уравненія между числомъ 2p измѣняемыхъ и потомъ постепенно переходитъ къ разсматриванію уравненій между 2p—2, 2p—4, ... 4, 2 перемѣнными. Якоби поступаетъ наоборотъ, т. е. беретъ дифференціальное уравненіе между двумя измѣняемыми количествами; отъ него переходитъ къ уравненію между четырьмя перемѣнными величинами; отъ послѣдняго къ новому между шестью измѣняемыми и т. д. Увеличивая послѣдовательно число перемѣнныхъ все двумя единицами, онъ достигаетъ до уравненій между $2p-2$ и $2p$ перемѣнными. Якоби приводитъ только нѣсколько формулъ безъ всякаго доказательства; впрочемъ, при помощи сдѣланныхъ имъ указаній и при посредствѣ соображеній, развитыхъ мною въ n°n° 6 и 7 § II, не трудно найдти ключъ къ полному разъясненію этой новой теоріи.

27. Въ способѣ, о которомъ хотимъ теперь говорить, первое дифференціальное уравненіе получается изъ даннаго чрезъ предположеніе $x_2, x_3, \ldots x_{2p-1}$ величинами постоянными и слѣдовательно $\partial x_2, \partial x_3, \ldots \partial x_{2p-1}$ нулями. Оно есть

$$X \,\partial x \,\partial x_1 + X_1 = 0. \qquad (30)$$

28. Пусть интегрирующій множитель этого двучленнаго дифференціала будетъ M, а u такая функція отъ всѣхъ $x, x_1, x_2, \ldots x_{2p-1}$, дифференціалъ которой, будучи взятъ только по измѣняемости x и x_1, удовлетворяетъ равенству:

$$M\ (X\,\partial x + X_1\,\partial x_1) = \partial u. \quad (31)$$

Въ такомъ разѣ допустивъ:

$$\frac{1}{M} = U, \quad (32)$$

будемъ имѣть:

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 = U\,\partial u. \qquad (33)$$

А потому формула

$$u = c \qquad (34)$$

гдѣ c величина произвольная, напримѣръ постоянная, будетъ полнымъ интеграломъ уравненія (30), и слѣдовательно можетъ быть принята за первое изъ искомыхъ интегральныхъ отношеній даннаго дифференціальнаго уравненія (29).

29. Выразивъ изъ (34) x чрезъ c и x_1, или все равно черезъ u и x_1, будетъ:

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial u}\partial u + \frac{\partial x}{\partial x_1}\partial x_1 .$$

Въ слѣдствіе того равенство (33) перейдетъ въ:

$$X\frac{\partial x}{\partial u}\partial u + \left(X\frac{\partial x}{\partial x_1} + X_1\right)\partial x_1 = U\,\partial u,$$

которое разобьется на два слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} X\frac{\partial x}{\partial u} &= U, \\ X\frac{\partial x}{\partial x_1} + X_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Справедливость послѣдняго обнаруживается сама собою потому, что оно есть не что иное какъ (30), которому удовлетворяетъ (34). Въ вѣрности перваго мы убѣждаемся такъ:

$$\frac{1}{M} = X\frac{\partial x}{\partial u}, \text{ слѣдовательно } M = \frac{1}{X\frac{\partial x}{\partial u}}, \text{ или}$$

$$M = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{X};$$

форма весьма хорошо извѣстная изъ началъ теоріи дифференціальныхъ уравненій; а потому и прочее.

30. Замѣтивъ это, будемъ разсматривать вмѣстѣ съ x

и x_1 также x_2 и x_3 перемѣнными величинами; уравненіе для интегрированія будетъ:

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + X_3\,\partial x_3 = 0. \quad (36)$$

По теоріи Монжа, съ точки зрѣнія n° 6 въ § II, оно можетъ допускать три интегральныхъ отношенія, изъ которыхъ два избраны по произволу, а третіе приличнымъ образомъ опредѣлено. Для перваго изъ этихъ отношеній возьмемъ (34). Если для удобства въ дальнѣйшихъ вычисленіяхъ выведемъ изъ него x въ функціи u, x_1, x_2, x_3, и найденное значеніе вставимъ въ (36), то получимъ:

во 1-хъ, $$\partial x = \frac{\partial x}{\partial u}\,\partial u + \frac{\partial x}{\partial x_1}\,\partial x_1 + \frac{\partial x}{\partial x_2}\,\partial x_2 + \frac{\partial x}{\partial x_3}\,\partial x_3,$$

во 2-хъ, $$X\frac{\partial x}{\partial u}\,\partial u + \left(X\frac{\partial x}{\partial x_1} + X_1\right)\partial x_1 + \left(X\frac{\partial x}{\partial x_2} + X_2\right)\partial x_2 + \left(X\frac{\partial x}{\partial x_3} + X_3\right)\partial x_3 = 0,$$

или, въ силу (34)

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + X_3\,\partial x_3 = U\,\partial u + U^{(1)}\,\partial x_2 + U^{(2)}\,\partial x_3, \quad (37)$$

гдѣ U, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ суть функціи отъ u, x_1, x_2, x_3.

31. Обозначимъ теперь черезъ v_1 какую-нибудь опредѣленную, впрочемъ произвольно выбранную функцію отъ u, x_2, x_3, . . . ; въ такомъ случаѣ, на основаніи n° n° 6 и 7 § II, посредствомъ двухъ равенствъ

$$v_1 = c_1,\ v_2 = c_2, \quad (38)$$

гдѣ c_1, c_2 постоянныя произвольныя, а v_2 — частное рѣшеніе линейнаго уравненія въ частныхъ производныхъ между тремя перемѣнными независимыми u, x_2, x_3 и зависящею отъ нихъ функціею v_2, вида

$$P\frac{\partial v_2}{\partial u}+Q\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+R\frac{\partial v_2}{\partial x_3}=0,$$

найдемъ слѣдующую формулу преобразованія:

$$U\partial u+U^{(1)}\partial x_2+U^{(2)}\partial x_3=V_1\partial v_1+V_2\partial v_2, \quad (39)$$

а за нею и

$$X\partial x+X_1\partial x_1+X_2\partial x_2+X_3\partial x_3=V_1\partial v_1+V_2\partial v_2. \quad (40)$$

Отношеніе

$$v_2=c_2 \quad (41)$$

будетъ вторымъ интеграломъ дифференціальнаго уравненія (29).

32. Опредѣливъ изъ (38) количества u, x_2 въ функціяхъ отъ v_1, v_2, x_3, будемъ имѣть:

$$\partial u=\frac{\partial u}{\partial v_1}\partial v_1+\frac{\partial u}{\partial v_2}\partial v_2+\frac{\partial u}{\partial x_3}\partial x_3,$$

$$\partial x_2=\frac{\partial x_2}{\partial v_1}\partial v_1+\frac{\partial x_2}{\partial v_2}\partial v_2+\frac{\partial x_2}{\partial x_3}\partial x_3.$$

Отсюда тождество (39) перейдетъ въ:

$$\left(U\frac{\partial u}{\partial v_1}+U^{(1)}\frac{\partial x_2}{\partial v_1}\right)\partial v_1+\left(U\frac{\partial u}{\partial v_2}+U^{(1)}\frac{\partial x_2}{\partial v_2}\right)\partial v_2+$$

$$\left(U\frac{\partial u}{\partial x_3}+U^{(1)}\frac{\partial x_2}{\partial x_3}+U^{(2)}\right)\partial x_3=V_1\partial v_1+V_2\partial v_2;$$

откуда получимъ:

$$\left.\begin{aligned}U\frac{\partial u}{\partial v_1}+U^{(1)}\frac{\partial x_2}{\partial v_1}&=V_1\\U\frac{\partial u}{\partial v_2}+U^{(1)}\frac{\partial x_2}{\partial v_2}&=V_2\\U\frac{\partial u}{\partial x_3}+U^{(1)}\frac{\partial x_2}{\partial x_3}+U^{(2)}&=0\end{aligned}\right\}\quad(42)$$

равенства, которыя всегда могутъ быть повѣрены.

33. Принявъ ихъ къ свѣдѣнію, кромѣ x, x_1, x_2, x_3 будемъ трактовать измѣняемыми еще x_4, x_5; въ такомъ разѣ намъ должно будетъ имѣть дѣло съ уравненіемъ:

$$X\partial x + X_1\partial x_1 + X_2\partial x_2 + X_3\partial x_3 + X_4\partial x_4 + X_5\partial x_5 = 0. \quad (43)$$

Это послѣднее, по теоремѣ Монжа, въ состояніи допустить пять интегральныхъ отношеній, между которыми четыре могутъ быть назначены произвольно, а пятое должно быть опредѣлено искуснымъ образомъ. Вмѣсто первыхъ трехъ уравненій беремъ систему формулъ (34) и (38). Посредствомъ (34) выражаемъ x черезъ u, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, найденную величину вносимъ въ (43) и получаемъ, сначала:

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial u}\partial u + \frac{\partial x}{\partial x_1}\partial x_1 + \frac{\partial x}{\partial x_2}\partial x_2 + \frac{\partial x}{\partial x_3}\partial x_3 + \frac{\partial x}{\partial x_4}\partial x_4 + \frac{\partial x}{\partial x_5}\partial x_5,$$

потомъ:

$$X\frac{\partial x}{\partial u}\partial u + \left\{X\frac{\partial x}{\partial x_1} + X_1\right\}\partial x_1 + \left\{X\frac{\partial x}{\partial x_2} + X_2\right)\partial x_2 + \left\{X\frac{\partial x}{\partial x_3} + X_3\right\}\partial x_3 + \left\{X\frac{\partial x}{\partial x_4} + X_4\right\}\partial x_4 + \left\{X\frac{\partial x}{\partial x_5} + X_5\right\}\partial x_5 = 0;$$

что, въ силу (35), принимаетъ видъ:

$$U\partial u + U^{(1)}\partial x_2 + U^{(2)}\partial x_3 + \left\{X\frac{\partial x}{\partial x_4} + X_4\right\}\partial x_4 + \left\{X\frac{\partial x}{\partial x_5} + X_5\right\}\partial x_5 = 0.$$

34. Изъ равенствъ (38) вычисляемъ u, x_2 черезъ v_1, v_2, x_3, x_4, x_5; подставляемъ въ предъидущее уравненіе вмѣсто ∂u, ∂x_2, выраженія:

$$\partial u = \frac{\partial u}{\partial v_1}\partial v_1 + \frac{\partial u}{\partial v_2}\partial v_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}\partial x_3 + \frac{\partial u}{\partial x_4}\partial x_4 + \frac{\partial u}{\partial x_5}\partial x_5,$$

$$\partial x_2 = \frac{\partial x_2}{\partial v_1}\partial v_1 + \frac{\partial x_2}{\partial v_2}\partial v_2 + \frac{\partial x_2}{\partial x_3}\partial x_3 + \frac{\partial x_2}{\partial x_4}\partial x_4 + \frac{\partial x_2}{\partial x_5}\partial x_5,$$

и находимъ:

$$\left\{ U\frac{\partial u}{\partial v_1} + U(^1)\frac{\partial x_2}{\partial v_1}\right\}\partial v_1 + \left\{ U\frac{\partial u}{\partial v_2} + U(^1)\frac{\partial x_2}{\partial v_2}\right\}\partial v_2 +$$
$$\left(U\frac{\partial u}{\partial x_3} + U(^1)\frac{\partial x_2}{\partial x_3} + U(^2)\right\}\partial x_3 +$$
$$+\left\{ U\frac{\partial u}{\partial x_4} + U(^1)\frac{\partial x_2}{\partial x_4} + X\frac{\partial x}{\partial x_4} + X_4\right\}\partial x_4$$
$$+\left\{ U\frac{\partial u}{\partial x_5} + U(^1)\frac{\partial x_2}{\partial x_5} + X\frac{\partial x}{\partial x_5} + X_5\right\}\partial x_5 = 0;$$

отсюда, въ силу (42), имѣемъ:

$$V_1\,\partial v_1 + V_2\,\partial v_2 + V(^1)\,\partial x_4 + V(^2)\,\partial x_5 = 0 \quad (44)$$

или:

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + \ldots + X_5\,\partial x_5 = V_1\,\partial v_1 + V_2\,\partial v_2 +$$
$$V(^1)\,\partial x_4 + V(^2)\,\partial x_5, \quad (45)$$

гдѣ V_1, V_2, $V(^1)$, $V(^2)$ суть функціи отъ v_1, v_2, x_3, x_4, x_5.

35. Изобразивъ черезъ w_1, w_2 двѣ какія-нибудь опредѣленныя, однакожъ произвольно выбранныя функціи отъ v_1, v_2, x_4, x_5..., помощію уравненій

$$w_1 = c_3,\; w_2 = c'_3,\; w_3 = c_4, \quad (46)$$

въ которыхъ w_3 должно быть частнымъ рѣшеніемъ линейнаго уравненія въ частныхъ производныхъ, вида:

$$P_1\frac{\partial w_3}{\partial v_1} + Q_1\frac{\partial w}{\partial v_2} + R_1\frac{\partial w_3}{\partial x_4} + S_1\frac{\partial w_3}{\partial x_5} = 0,$$

между четырьмя перемѣнными независимыми и одною зависящею отъ нихъ функціею w_3, найдемъ:

$$V_1 \partial v_1 + V_2 \partial v_2 + V^{(1)} \partial x_4 + V^{(2)} \partial x_5 = W_1 \partial w_1 + W_2 \partial w_2 + W_3 \partial w_3 \quad (47)$$

или

$$X \partial x + X_1 \partial x_1 + X_2 \partial x_2 + \ldots + X_5 \partial x_5 = W_1 \partial w_1 + W_2 \partial w_2 + W_3 \partial w_3 \quad (48)$$

и отношеніе

$$w_3 = c_4 \quad (49)$$

можетъ быть принято за третій искомый интегралъ уравненія (29).

36. Разрѣшивъ опять (46) относительно v_1, v_2, x_4, будемъ имѣть, во-первыхъ:

$$\partial v_1 = \frac{\partial v_1}{\partial w_1} \partial w_1 + \frac{\partial v_1}{\partial w_2} \partial w_2 + \frac{\partial v_1}{\partial w_3} \partial w_3 + \frac{\partial v_1}{\partial x_5} \partial x_5,$$

$$\partial v_2 = \frac{\partial v_2}{\partial w_1} \partial w_1 + \frac{\partial v_2}{\partial w_2} \partial w_2 + \frac{\partial v_2}{\partial w_3} \partial w_3 + \frac{\partial v_2}{\partial x_5} \partial x_5,$$

$$\partial x_4 = \frac{\partial x_4}{\partial w_1} \partial w_1 + \frac{\partial x_4}{\partial w_3} \partial w_2 + \frac{\partial x_4}{\partial w_3} \partial w_3 + \frac{\partial x_4}{\partial x_5} \partial x_5,$$

во-вторыхъ:

$$\left\{ V_1 \frac{\partial v_1}{\partial w_1} + V_2 \frac{\partial v_2}{\partial w_1} + V^{(1)} \frac{\partial x_4}{\partial w_1} \right\} \partial w_1 +$$
$$\left\{ V_1 \frac{\partial v_1}{\partial w_2} + V_2 \frac{\partial v_2}{\partial w_2} + V^{(1)} \frac{\partial x_4}{\partial w_2} \right\} \partial w_2 +$$
$$\left\{ V_1 \frac{\partial v_1}{\partial w_3} + V_2 \frac{\partial v_2}{\partial w_3} + V^{(1)} \frac{\partial x_4}{\partial w_3} \right\} \partial w_3 +$$
$$\left\{ V_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_5} + V_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_5} + V^{(1)} \frac{\partial x_4}{\partial x_5} + V^{(2)} \right\} \partial x_5 = W_1 \partial w_1 + W_2 \partial w_2 + W_3 \partial w_3,$$

и въ-третьихъ:

$$\left.\begin{aligned}
V_1\frac{\partial v_1}{\partial w_1}+V_2\frac{\partial v_2}{\partial w_1}+V^{(1)}\frac{\partial x_4}{\partial w_1}&=W_1,\\
V_1\frac{\partial v_1}{\partial w_2}+V_2\frac{\partial v_2}{\partial w_2}+V^{(1)}\frac{\partial x_4}{\partial w_2}&=W_2;\\
V_1\frac{\partial v_1}{\partial w_3}+V_2\frac{\partial v_2}{\partial w_3}+V^{(1)}\frac{\partial x_4}{\partial w_3}&=W_3,\\
V_1\frac{\partial v_1}{\partial x_5}+V_2\frac{\partial v_2}{\partial x_5}+V^{(1)}\frac{\partial x_4}{\partial x_5}+V^{(2)}&=0
\end{aligned}\right\}\quad(50)$$

37. Послѣ этого, если придется имѣть дѣло съ уравненіемъ:

$$X\,\partial x+X_1\,\partial x_1+\ldots+X_6\,\partial x_6+X_7\,\partial x_7=0,\quad(51)$$

то при постепенномъ употребленіи формулъ (34), (38) ... равенству нашему дадимъ видъ:

$$W_1\,\partial w_1+W_2\,\partial w_2+W_3\,\partial w_3+W^{(1)}\,\partial x_6+W^{(2)}\,\partial x_7=0;\quad(52)$$

а это послѣднее посредствомъ отношеній

$$t_1=c_5,\ t_2=c'_5,\ t_3=c''_5,\ t_4=c_6,\quad(53)$$

гдѣ t_1, t_2, t_3 функціи, взятыя произвольно отъ w_1, w_2, w_3, x_6, x_7 . . . , а t частное рѣшеніе уравненія

$$P_2\frac{\partial t_4}{\partial w_1}+Q_2\frac{\partial t_4}{\partial w_2}+R_2\frac{\partial t_4}{\partial w_3}+S_2\frac{\partial t_4}{\partial x_6}+T_2\frac{\partial t_4}{\partial x_7}=0,$$

приведется къ:

$$T_1\,\partial t_1+T_2\,\partial t_2+T_3\,\partial t_3+T_4\,\partial t_4=0\quad(54)$$

и слѣдовательно будемъ имѣть:

$$X\,\partial x+X_1\,\partial x_1+\ldots+X_6\,\partial x_6+X_7\,\partial x_7=T_1\,\partial t_1+T_2\,\partial t_2+T_3\,\partial t_3+T_4\,\partial t_4,\quad(55)$$

гдѣ T_1, T_2, T_3, T_4 суть функціи отъ t_1, t_2, t_3, t_4, и т. д.

38. Не продолжая далѣе развитія формулъ, потому что ходъ дѣйствій обозначенъ очень явственно, мы перейдемъ прямо къ общему заключенію:

Интегрируя сначала обыкновенное дифференціальное уравненіе перваго порядка между двумя измѣняемыми, а потомъ, постепенно, уравненія въ частныхъ производныхъ перваго порядка между 3, 4, . . . p и, наконецъ, между $p + 1$ перемѣнныхъ независимыхъ, мы находимъ рядъ p уравненій:

$$u = c, \; v_2 = c_2, \; w_3 = c_4, \; t_4 = c_6, \; \ldots \; s_p = c_{2p-2}, \qquad (56)$$

которыя и будутъ искомыми интегральными отношеніями даннаго дифференціальнаго уравненія (29).

39. Въ этомъ способѣ очевидно приходится интегрировать столько-же различныхъ системъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, какъ и у Пфаффа, при чемъ въ обоихъ случаяхъ соотвѣтственныя системы составлены одинакимъ числомъ уравненій.

40. Изложенный нами методъ имѣетъ нѣкоторое сходство съ тѣмъ образомъ веденія Пфаффовой теоріи, который сообщенъ въ n° 43 § III, и различіе между ними точно такое-же, какое находится между общимъ способомъ § II и собственнымъ пріемомъ Пфаффа.

41. Наконецъ, сравнивая между собою теоріи § II и настоящую, мы заключаемъ тотчасъ, что онѣ находятся совершенно въ обратномъ отношеніи одна съ другою.

42. Хотя Якоби ограничился только случаемъ четнаго числа перемѣнныхъ въ линейномъ дифференціальномъ уравненіи, но легко понять, что тотъ-же самый способъ съ одинакимъ удобствомъ прикладывается и къ уравненіямъ съ нечетнымъ числомъ измѣняемыхъ.

43. Объяснимъ эту мысль на уравненіи:

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + X_3\,\partial x_3 + X_4\,\partial x_4 = 0 \quad (57)$$

Оно получается изъ (43) въ предположеніи $\partial x_5 = 0$; поэтому и всѣ формулы преобразованій, соотвѣтствующія теперешнему случаю, выведутся изъ прежнихъ при томъже самомъ допущеніи.

44. Значитъ, сдѣлавши въ (45) $\partial x_5 = 0$, будемъ имѣть:

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + X_3\,\partial x_3 + X_4\,\partial x_4 = V_1\,\partial v_1 + V_2\,\partial v_2 + V^{(1)}\,\partial x_4 \quad (58)$$

гдѣ V_1, V_2, $V^{(1)}$ суть функціи отъ v_1, v_2, x_2, x_3, x_4.

Предположивъ w_2 какою-нибудь опредѣленною, хотя произвольно выбранною функціею отъ v_1, v_2, x_4, помощію равенства

$$w_2 = c_3 \quad (59)$$

мы опредѣлимъ w_3, т. е. частное рѣшеніе нѣкотораго линейнаго уравненія въ частныхъ производныхъ такъ, что формула

$$w_3 = c_4 \quad (60)$$

въ совокупности съ (34) и (41) дастъ намъ полную систему интеграловъ для уравненія (57). Слѣдовательно и прочее.

45. Еще одинъ путь къ рѣшенію уравненія

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots\ldots + X_{2p-1}\,\partial x_{2p-1} = 0 \quad (61)$$

указалъ Якоби въ теоріи новаго множителя (Mathematische Werke, Band 1, Seite 144). Этотъ новый образъ разсматриваній основалъ Якоби на слѣдующемъ предложеніи:

46. Въ уравненіи (61) коэффиціентъ при дифференціалѣ одной перемѣнной, напримѣръ при ∂x, всегда можетъ быть допущенъ равнымъ — 1, а предстоящіе множителей $\partial x_1, \partial x_2, \ldots . \partial x_{2p-1}$ — независимыми отъ x.

47. Доказательство этого предложенія очень легко. Въ самомъ дѣлѣ, если мы употребимъ предположенія Пфаффа:

$$x = x,\ x_1 = f\ (x, \xi_1, \xi_2, \ldots . . \xi_{2p-1}), \ldots . . x_{2p-1} = f_{2p-1}\ (x_1, \xi, , \xi_2, \ldots . . . \xi_{2p-1})$$

и неопредѣленными дѣйствіями $f_1 \ldots . . f_{2p-1}$ расположимъ такъ, чтобъ въ преобразованномъ уравненіи:

$$\Pi\ \partial x + \Pi_1\ \partial\xi_1 + \Pi_2\ \partial\xi_1 + \ldots . . + \Pi_{2p-1}\ \partial\xi_{2p-1} = 0 \quad (62)$$

предстоящее

$$\Pi = X + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + X_{2p-1} \frac{\partial x_{2p-1}}{\partial x} = -1, \quad (63)$$

а коэффиціенты:

$$\Pi_j = X \frac{\partial x}{\partial \xi_j} + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j} + \ldots + X_{2p-1} \frac{\partial x_{2p-1}}{\partial \xi_j}, \quad (64)$$

заключали x только въ общемъ ихъ множителѣ; то анализомъ n°5 въ § III, во-первыхъ, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}
N\ X_1 &= (1.0) + (1,1) \frac{\partial x_1}{\partial x} + (1.2) \frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots . . \\
&\qquad (1.2p-1) \frac{\partial x_{2p-1}}{\partial x}, \\
N\ X_2 &= (2.0) + (2.1) \frac{\partial x_1}{\partial x} + (2.2) \frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots . . \\
&\qquad + (2.2p-1) \frac{\partial x_{2p-1}}{\partial x}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
N\ X_{2p-1} &= (2p-1.0) + (2p-1.1) \frac{\partial x_1}{\partial x} + (2p-1.2) \\
&\qquad \frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots . . + (2p-1.2p-1) \frac{\partial x_{2p-1}}{\partial x};
\end{aligned}\right\} (65)$$

во-вторыхъ, когда эти равенства помножимъ соотвѣтственно на $\frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{\partial x_2}{\partial x}, \ldots\ldots \frac{\partial x_{2p-1}}{\partial x}$ и составимъ сумму слѣдствій; тогда при помощи отношенія (63), получимъ еще одно уравненіе:

$$N(X+1) = (0.0) + (0.1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (0.2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots\ldots$$
$$+ (0.2p-1)\frac{\partial x_{2p-1}}{\partial x}$$

и, слѣдовательно, будемъ имѣть систему формулъ достаточную для опредѣленія всѣхъ неизвѣстныхъ величинъ:

$$\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{1}{N}\frac{\partial x_2}{\partial x}, \ldots\ldots \frac{1}{N}\frac{\partial x_{2p-1}}{\partial x};$$

а за тѣмъ и для построенія системы $2p-1$ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка между $2p$ перемѣнными.

48. Поступивъ съ этою послѣднею системою такъ какъ въ способѣ Пфаффа, мы опредѣлимъ неизвѣстныя дѣйствія $f_1, f_2, \ldots\ldots f_{2p-1}$; а слѣдовательно для коэффиціентовъ Πj и для общаго ихъ множителя найдемъ выраженія совершенно опредѣленныя.

49. Назвавши этого множителя черезъ M, раздѣливъ на него все преобразованное уравненіе (62), и сдѣлавши для сокращенія

$$\frac{\partial x}{M} = \partial\xi, \quad (66)$$

получимъ уравненіе

$$\partial\xi = X_1\,\partial\xi_1 + X_2\,\partial\xi_2 + \ldots\ldots + X_{2p-1}\,\partial\xi_{2p-1}, \qquad (67)$$

въ которомъ всѣ X зависятъ отъ однихъ только $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots \xi_{2p-1}$, что и требовалось доказать.

50. Теперь, если дифференціальное уравненіе съ четнымъ числомъ $2p$ измѣняемыхъ разсматривать подъ формою (67), то задача Пфаффа, слѣдуя Якоби, сведется на рѣшеніе такого вопроса:

Привести линейный дифференціалъ

$$X_1\, \partial\xi_1 + X_2\, \partial\xi_2 + \ldots\ldots + X_{2p-1}\, \partial\xi_{2p-1}, \qquad (68)$$

съ нечетнымъ числомъ $2p-1$ измѣняемыхъ, къ виду полнаго дифференціала $\partial\xi$, посредствомъ $p-1$ конечныхъ уравненій.

51. Когда вопросъ этотъ будетъ разрѣшенъ, тогда очевидно послѣднее, т. е. p^{oe} уравненіе задачи Пфаффа, получится черезъ одни квадратуры:

$$\xi + \text{пост.} = \int \Big\{ X_1\, \partial\xi_1 + X_2\, \partial\xi_2 + \ldots + X_{2p-1}\, \partial\xi_{2p-1} \Big) \quad (69)$$

52. Очень вѣроятно, что Якоби зналъ отвѣтъ на постановленный имъ вопросъ тѣмъ болѣе, что далъ и систему формулъ, необходимую для того, чтобъ начать преобразованіе; но неизвѣстно по какимъ причинамъ скрылъ отъ насъ полное рѣшеніе.

53. Вотъ какимъ образомъ дошелъ онъ до необходимой здѣсь системы уравненій:

Прикладывая буквально къ (67) способъ преобразованій Пфаффа, т. е. полагая:

$$\xi_1 = f_1\,(\xi,\ a_1,\ a_2 \ldots\ldots a_{2p-1}), \ldots\ldots \xi_{2p-1} = f_{2p-1}\,(\xi,\ a_1,\ a_2 \ldots\ldots\ldots a_{2p-1})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и подчиняя дѣйствія $f_1,\ f_2 \ldots\ldots f_{2p-1}$ его же условіямъ, получается рядъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}
-\mathrm{N} &= (0.0) + (0\,1)\frac{\partial\xi_1}{\partial\xi} + (0.2)\frac{\partial\xi_2}{\partial\xi} + \ldots\ldots \\
&\qquad + (0.2p-1)\frac{\partial\xi_{2p-1}}{\partial\xi}, \\
\mathrm{N}X_1 &= (1.0) + (1.1)\frac{\partial\xi_1}{\partial\xi} + (1.2)\frac{\partial\xi_2}{\partial\xi} + \ldots\ldots \\
&\qquad + (2.2p-1)\frac{\partial\xi_{2p-1}}{\partial\xi}, \\
\mathrm{N}X_2 &= (2.0) + (2.1)\frac{\partial\xi_1}{\partial\xi} + (2.2)\frac{\partial\xi_2}{\partial\xi} + \ldots\ldots \\
&\qquad + (2.2p-1)\frac{\partial\xi_{2p-1}}{\partial\xi}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathrm{N}X_{2p-1} &= (2p-1.0) + (2p-1.1)\frac{\partial\xi_1}{\partial\xi} + (2p-1.2) \\
&\quad \frac{\partial\xi_2}{\partial\xi} + \ldots\ldots + (2p-1.2p-1)\frac{\partial\xi_{2p-1}}{\partial\xi},
\end{aligned}\right\}\quad(70)$$

въ которомъ очевидно:

$$(0\,.\,0)=0,\ (0\,.\,1)=0,\ (0\,.\,2)=0,\ \ldots\ldots\ (0{,}2p-1)=0;$$

а слѣдовательно и

$$\mathrm{N}=0. \qquad (71)$$

Отъ этого написанная нами система формулъ переходитъ въ такую:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= (1.1)\,\partial\xi_1 + (1.2)\,\partial\xi_2 + \ldots\ldots + (1.2p-1)\,\partial\xi_{2p-1}, \\
0 &= (2.1)\,\partial\xi_1 + (2.2)\,\partial\xi_2 + \ldots\ldots + (2.2p-1)\,\partial\xi_{2p-1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= (2p-1.1)\,\partial\xi_1 + (2p-1.2)\,\partial\xi_2 + \ldots\ldots + (2p-1. \\
&\qquad 2p-1)\,\partial\xi_{2p-1},
\end{aligned}\right\}\quad(72)$$

гдѣ одно уравненіе, напримѣръ первое, заключается въ остальныхъ. Это и есть та самая система Якоби, о которой мы говорили.

54. Изъ такого начала хотя трудно вывести какія-нибудь заключенія полезныя для нашей цѣли, но, на основаніи соображеній, которыя вполнѣ будутъ развиты въ слѣдующемъ §, вопросъ n°50 я рѣшаю рядомъ такихъ сужденій:

Система (72), заключая 2p—2 уравненія, позволяетъ опредѣлить 2p—2 дифференціальныхъ частныхъ:

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_1}, \ldots\ldots \frac{\partial \xi_{2p-1}}{\partial \xi_1},$$

и тѣмъ самымъ указываетъ на то, что $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_{2p-1}$ должно разсматривать функціями отъ ξ_1 и отъ постоянныхъ произвольныхъ, которыя введутся чрезъ интегрированіе системы (72). Назвавши эти постоянныя произвольныя, напр. черезъ $a_2, a_3, \ldots\ldots a_{2p-1}$, дѣйствія $f_2, \ldots\ldots f_{2p-1}$, посредствомъ которыхъ перемѣнныя ξ_1, $\xi_2, \ldots\ldots \xi_{2p-1}$ связывались съ ξ, $a_1, a_2, \ldots\ldots a_{2p-1}$, должны обладать слѣдующимъ свойствомъ: не заключать ξ, но зависѣть отъ ξ_1, $a_2, a_3, \ldots\ldots a_{2p-1}$; что же касается символа f_1, то онъ долженъ переходить просто въ ξ_1. Поэтому, выведя изъ подъ знаковъ $f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots f_{2p-1}$ количество ξ, и сдѣлавши $\xi_1 = a_1$, нужно будетъ допустить рядъ отношеній:

$$\xi_1 = \xi_1 = a_1, \ \xi_2 = f_2(a_1, a_2, \ldots\ldots a_{2p-1}), \ldots\ldots \xi_{2p-1} = f_{2p-1}(a_1, a_2, \ldots\ldots a_{2p-1}),$$

которыя опредѣлятся сполна интегрированіемъ системы (72).

55. Введя эти выраженія въ уравненіе (67) получимъ равенство:

$$\partial\xi = Q_1\, \partial a_1 + Q_2\, \partial a_2 + \ldots\ldots + Q_{2p-1}\, \partial a_{2p-1}, \quad (73)$$

гдѣ

$$Q_1 = X_1 + X_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial a_1} + \ldots + X_{2p-1} \frac{\partial \xi_{2p-1}}{\partial a_1} = X_1 + \sum_{h=2}^{h=2p-1} X_h \frac{\partial \xi_h}{\partial a_1}, \quad (74)$$

а

$$Q_j = X_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial a_j} + \ldots\ldots + X_{2p-1} \frac{\partial \xi_{2p-1}}{\partial a_j} = \sum_{h=2}^{h=2p-1} X_h \frac{\partial \xi_h}{\partial a_j},$$

гдѣ j измѣняется отъ 2 до $p-1$, а Q и Qj суть вполнѣ опредѣленныя функціи отъ $a_1, a_2, \ldots\ldots a_{2p-1}$.

56. Теперь не трудно доказать, что коэффиціенты $Q_1, Q_2, \ldots\ldots Q_{2p-1}$ подчинены такому условію: Если взять интегралъ $\int Q_1\, \partial a_1$ въ предположеніи $a_2, a_3, \ldots$ $\ldots\, a_{2p-1}$ постоянными, сдѣлать

$$\int Q_1\, \partial a_1 = \int \left(X_1 + \sum_{h=2}^{h=2p-1} X_h \frac{\partial \xi_h}{\partial a_1} \right) \partial a_1 = A_1$$

и изобразить черезъ $\frac{\partial A_1}{\partial a_j}$ производную по aj отъ A_1, трактуя измѣняемыми всѣ величины въ него входящія, то разности

$$Q_j - \frac{\partial A_1}{\partial a_j} = \sum_{h=2}^{h=2p-1} X_h \frac{\partial \xi_h}{\partial a_j} - \int \left(\frac{dX_1}{da_j} + \sum_{h=2}^{h=2p-1} \frac{dX_h}{da_j} \frac{\partial \xi_h}{\partial a_1} + \sum_{h=2}^{h=2p-1} X_h \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial a_1\, \partial a_j} \right) \partial a_1$$

не должны содержать количества a_1, т. е. что

$$\frac{d\left(Q_j - \frac{\partial A_1}{\partial a_j}\right)}{da_1} = 0. \quad (75)$$

57. Развивши какъ слѣдуетъ лѣвую часть этого равенства, и замѣстивши a_1 черезъ ξ_1, найдемъ:

$$\sum_{h=2}^{h=2p-1} \frac{dX_h}{d\xi_1}\frac{\partial\xi_h}{\partial a_j} + \sum_{h=2}^{h=2p-1} X_h \frac{\partial^2\xi_h}{\partial a_j\,\partial\xi_1} - \frac{dX_1}{da_j} - \sum_{h=2}^{h=2p-1}$$

$$\frac{dX_h}{da_j}\frac{\partial\xi_h}{\partial\xi_1} - \sum_{h=2}^{h=2p-1} X_h \frac{\partial^2\xi_h}{\partial\xi_1\,\partial a_j}$$

Замѣтивъ, что

$$\frac{dX_h}{d\xi_1} = \frac{\partial X_h}{\partial\xi_1} + \sum_{g=2}^{g=2p-1} \frac{\partial X_h}{\partial\xi_g}\frac{\partial\xi_g}{\partial\xi_1},$$

$$\frac{dX_h}{da_j} = \sum_{g=2}^{g=2p-1} \frac{\partial X_h}{\partial\xi_g}\cdot\frac{\partial\xi_g}{\partial a_j},$$

$$\frac{dX_1}{da_j} = \sum_{g=2}^{g=2p-1} \frac{\partial X_1}{\partial\xi_g}\frac{\partial\xi_g}{\partial a_j},$$

получимъ:

$$\sum_{h=2}^{h=2p-1}\sum_{g=2}^{g=2p-1} \frac{\partial X_h}{\partial\xi_g}\cdot\frac{\partial\xi_g}{\partial\xi_1}\frac{\partial\xi_h}{\partial a_j} - \sum_{h=2}^{h=2p-1}\sum_{h=2}^{h=2p-1}$$

$$\frac{\partial X_h}{\partial\xi_g}\frac{\partial\xi_g}{\partial a_j}\frac{\partial\xi_h}{\partial\xi_1} + \sum_{h=2}^{h=2p-1}\frac{\partial X_h}{\partial\xi_1}\frac{\partial\xi_h}{\partial a_j} - \sum_{g=2}^{g=2p-1}\frac{\partial X_1}{\partial\xi_g}\frac{\partial\xi_g}{\partial a_j}.$$

Такъ какъ g и h измѣняются въ однихъ и тѣхъ-же предѣлахъ 2 и 2p—1, то легко согласиться въ справедливости слѣдующихъ равенствъ:

$$\sum_{h=2}^{h=2p-1}\sum_{g=2}^{g=2p-1}\frac{\partial X_h}{\partial \xi_g}\frac{\partial \xi_g}{\partial a_j}\frac{\partial \xi_h}{\partial \xi_1}=\sum_{h=2}^{h=2p-1}\sum_{g=2}^{g=2p-1}\frac{\partial X_g}{\partial \xi_h}\frac{\partial \xi_h}{\partial a_j}\frac{\partial \xi_g}{\partial \xi_1}, \quad \sum_{g=2}^{g=2p-1}\frac{\partial X_1}{\partial \xi_g}\frac{\partial \xi_g}{\partial a_j}=\sum_{h=2}^{h=2p-1}\frac{\partial X_1}{\partial \xi_h}\frac{\partial \xi_h}{\partial a_j} \tag{76}$$

Въ слѣдствіе того будемъ имѣть:

$$\frac{d\left(Q_j-\frac{\partial A_1}{\partial a_j}\right)}{da_1}=\sum_{h=2}^{h=2p-1}\sum_{g=2}^{g=2p-1}\left(\frac{\partial X_h}{\partial \xi_g}-\frac{\partial X_g}{\partial \xi_h}\right)\frac{\partial \xi_h}{\partial a_j}\cdot\frac{\partial \xi_g}{\partial \xi_1}+\sum_{h=2}^{h=2p-1}\left(\frac{\partial X_h}{\partial \xi_1}-\frac{\partial X_1}{\partial \xi_h}\right)\frac{\partial \xi_h}{\partial a_j}. \tag{77}$$

Наконецъ, развернувши знаки Σ въ правой части, получимъ выраженіе:

$$\begin{aligned}\frac{d\left(Q_j-\frac{\partial A_1}{\partial a_j}\right)}{da_1}=&\Bigg(\left(\frac{\partial X_2}{\partial \xi_1}-\frac{\partial X_1}{\partial \xi_2}\right)+\left(\frac{\partial X_2}{\partial \xi_2}-\frac{\partial X_2}{\partial \xi_2}\right)\frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_1}\\&+\left(\frac{\partial X_2}{\partial \xi_3}-\frac{\partial X_3}{\partial \xi_2}\right)\frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_1}+\ldots\ldots\ldots\\&+\left(\frac{\partial X_2}{\partial \xi_{2p-1}}-\frac{\partial X_{2p-1}}{\partial \xi_2}\right)\frac{\partial \xi_{2p-1}}{\partial \xi_1}\Bigg)\frac{\partial \xi_2}{\partial a_j}\\&+\Bigg(\left(\frac{\partial X_3}{\partial \xi_1}-\frac{\partial X_1}{\partial \xi_3}\right)+\left(\frac{\partial X_3}{\partial \xi_2}-\frac{\partial X_2}{\partial \xi_3}\right)\frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_1}\\&+\left(\frac{\partial X_3}{\partial \xi_3}-\frac{\partial X_3}{\partial \xi_3}\right)\frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_1}+\ldots\ldots\ldots\\&+\left(\frac{\partial X_3}{\partial \xi_{2p-1}}-\frac{\partial X_{2p-1}}{\partial \xi_3}\right)\frac{\partial \xi_{2p-1}}{\partial \xi_1}\Bigg)\frac{\partial \xi_3}{\partial a_j}\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

$$+\left(\left(\frac{\partial X_{2p-1}}{\partial \xi_1}-\frac{\partial X_1}{\partial \xi_{2p-1}}\right)+\left(\frac{\partial X_{2p-1}}{\partial \xi_2}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\partial X_2}{\partial \xi_{2p-1}}\right)\frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_1}+\left(\frac{\partial X_{2p-1}}{\partial \xi_3}-\frac{\partial X_3}{\partial \xi_{2p-1}}\right)\frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_1}$$

$$\left.+\ldots\ldots+\left(\frac{\partial X_{2p-1}}{\partial \xi_{2p-1}}-\frac{\partial X_{2p-1}}{\partial \xi_{2p-1}}\right)\frac{\partial \xi_{2p-1}}{\partial \xi_1}\right)\frac{\partial \xi_{2p-1}}{\partial a_j},$$

въ которомъ коэффиціенты при $\frac{\partial \xi_2}{\partial a_j}$, $\frac{\partial \xi_3}{\partial a_j}$, ... $\frac{\partial \xi_{2p-1}}{\partial a_j}$, въ силу системы (72), окажутся нулями, если только припомнимъ знакоположеніе Лагранжа

$$(h\,g)=\left(\frac{\partial X_h}{\partial \xi_g}-\frac{\partial X_g}{\partial \xi_h}\right).$$

58. Обнаруженное свойство коэффиціентовъ Q допускаетъ слѣдующее преобразованіе интегрируемой формулы (67):

Прибавивъ въ правой части уравненія (73) выраженіе:

$$\partial A_1-\frac{\partial A_1}{\partial a_1}\partial a_1-\frac{\partial A_2}{\partial a_2}\partial a_2-\ldots\ldots-\frac{\partial A_1}{\partial a_{2p-1}}\partial a_{2p-1}=0,$$

въ коемъ ∂A_1 изображаетъ полный дифференціалъ отъ A_1 по измѣняемости всѣхъ величинъ a_1, a_2, ... a_{2p-1}, найдемъ:

$$\partial \xi=\partial A_1+\left(Q_2-\frac{\partial A_1}{\partial a_2}\right)\partial a_2+\ldots\ldots$$

$$+\left(Q_{2p-1}-\frac{\partial A_1}{\partial a_{2p-1}}\right)\partial a_{2p-1},$$

или

$$\partial\,(\xi-A_1)=A_2\,\partial a_2+\ldots\ldots+A_{2p-1}\,\partial a_{2p-1}, \qquad (78)$$

гдѣ A_2, ... A_{2p-1} не зависятъ уже отъ a_1.

59. Допустивъ для однообразія

$$\xi - A_1 = \eta,\ a_2 = \eta_1,\ a_3 = \eta_2, \ldots\ldots a_{2p-1} = \eta_{2p-2}\ A_2 = Y_1,\ A_3 = Y_2, \ldots\ldots A_{2p-1} = Y_{2p-2} \qquad (79)$$

предъидущая формула приметъ видъ:

$$\partial\eta = Y_1\,\partial\eta_1 + Y_2\,\partial\eta_2 + \ldots\ldots\ldots + Y_{2p-2}\,\partial\eta_{2p-2} \qquad (80)$$

и рѣшеніе задачи приведется къ тому, чтобъ линейный дифференціалъ съ четнымъ числомъ $2p-2$ перемѣнныхъ:

$$Y_1\,\partial\eta_1 + Y_2\,\partial\eta_2 + \ldots\ldots + Y_{2p-2}\,\partial\eta_{2p-2},$$

посредствомъ $p-1$ конечныхъ интегральныхъ отношеній привести къ полному дифференціалу $\partial\eta$.

60. Въ настоящемъ случаѣ преобразованія n°n° 53 и слѣдующихъ не имѣютъ мѣста, поэтому одно изъ нумерованныхъ η можемъ приравнять постоянной произвольной. Сдѣлавши, напримѣръ,

$$\eta_{2p-2} = a_{2p-1} = \text{пост.} \qquad (81)$$

мы получимъ одинъ изъ искомыхъ интеграловъ, и кромѣ того будемъ имѣть дѣло съ уравненіемъ совершенно одного вида съ (79):

$$\partial\eta = Y_1\,\partial\eta_1 + Y_2\,\partial\eta_2 + \ldots\ldots + Y_{2p-3}\,\partial\eta_{2p-3}, \qquad (82)$$

между $2p-4$ измѣняемыми; слѣдовательно къ нему приложатся отъ слова до слова всѣ предъидущія сужденія.

61. Не считая нужнымъ долѣе останавливаться на этомъ предметѣ, я перехожу къ новому §, въ которомъ буду имѣть довольно поводовъ къ подробнѣйшему развитію пріема, составлявшаго предметъ нашихъ разсужденій въ послѣднихъ нумерахъ.

§ V.

ИНТЕГРИРОВАНІЕ ЛИНЕЙНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ СЪ НЕЧЕТНЫМЪ ЧИСЛОМЪ ИЗМѢНЯЕМЫХЪ.

1. Преобразованія, изложенныя мною въ n° n° 58, 59, предшествующаго §, содержатъ полную теорію интегрированія какого угодно линейнаго дифференціальнаго уравненія, заключающаго нечетное число измѣняемыхъ. Но чтобы открыть самый источникъ этихъ преобразованій возьмемъ опять дифференціальное уравненіе вида

$$X \partial x + X_1 \partial x_1 + \ldots + X_m \partial x_m = 0, \quad (1)$$

гдѣ уже m равно 2p, и на первый разъ, по примѣру § III, введемъ m + 1 вспомогательныхъ величинъ

$$a, a_1, a_2, \ldots a_m,$$

которыя съ прежними измѣняемыми свяжемъ посредствомъ неопредѣленныхъ дѣйствій $f, f_1, \ldots f_m$.

Допустивъ:

$$x = f(a, a_1, a_2, \ldots a_m), \; x_1 = f_1(a, a_1, a_2, \ldots a_m), \ldots x_m = f_m(a, a_1, a_2, \ldots a_m), \ldots (2)$$

искомое преобразованное уравненіе напишемъ снова подъ формою

$$P \partial a + P_1 \partial a_1 + P_2 \partial a_2 + \ldots + P_m \partial a_m = 0 \ldots (3),$$

гдѣ вообще

$$P_j = X \frac{\partial x}{\partial a_j} + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial a_j} + \ldots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial a_j} \ldots (4)$$

предполагая, что $_j$ принимаетъ всѣ цѣлыя значенія отъ 0 до m. Если к будетъ одно изъ чиселъ 1, 2, ... m, то между коэффиціентами $P_к$ и предстоящимъ P вновь будетъ имѣть мѣсто отношеніе (8) изъ § III.

2. Помня, что въ уравненіи (3) множители P, P_1, ... P_m остаются неопредѣленными до тѣхъ поръ, пока ни изберемъ какихъ-нибудь опредѣленныхъ дѣйствій для f, f_1, ... f_m, мы расположимъ послѣдними такъ, чтобъ въ формулѣ (3) членъ $P\,\partial a$ можно было разсматривать полнымъ дифференціаломъ нѣкоторой функціи A, взятымъ по измѣняемости a, и чтобъ разности

$$P_к - \frac{\partial A}{\partial a_к}$$

не зависѣли отъ a. Для аналитическаго выраженія этихъ условій, во-первыхъ, будемъ имѣть тожественно

$$P - \frac{\partial A}{\partial a} = 0,$$

и слѣдовательно также тожественно

$$\frac{\partial P}{\partial a_к} - \frac{\partial^2 A}{\partial a\, \partial a_к} = 0;$$

а во-вторыхъ

$$\frac{\partial P_к}{\partial a} - \frac{\partial^2 A}{\partial a_к\, \partial a} = 0.$$

Отсюда-же тотчасъ выведемъ:

$$\frac{\partial P_к}{\partial a} - \frac{\partial P}{\partial a_к} = 0 \quad (5)$$

3. Это значитъ, въ сдѣланныхъ предложеніяхъ разность

$$\frac{\partial P_к}{\partial a} - \frac{\partial P}{\partial a_к}$$

должна исчезать; и формула (8) § III перейдетъ въ

$$
\begin{aligned}
0 = \Big\{ &(0.0)\frac{\partial x}{\partial a} + (0.1)\frac{\partial x_1}{\partial a} + (0.2)\frac{\partial x_2}{\partial a} + \dots \\
&\qquad\qquad + (0.m)\frac{\partial x_m}{\partial a}\Big\}\frac{\partial x}{\partial a_\kappa} + \\
\Big\{ &(1.0)\frac{\partial x}{\partial a} + (1.1)\frac{\partial x_1}{\partial a} + (1.2)\frac{\partial x_2}{\partial a} + \dots \\
&\qquad\qquad + (1.m)\frac{\partial x_m}{\partial a}\Big\}\frac{\partial x_1}{\partial a_\kappa} + \\
\Big\{ &(2.0)\frac{\partial x}{\partial a} + (2.1)\frac{\partial x_1}{\partial a} + (2.2)\frac{\partial x_2}{\partial a} + \dots \qquad (6) \\
&\qquad\qquad + (2.m)\frac{\partial x_m}{\partial a}\Big\}\frac{\partial x_2}{\partial a_\kappa} + \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
\Big\{ &(m.0)\frac{\partial x}{\partial a} + (m.1)\frac{\partial x_1}{\partial a} + (m.2)\frac{\partial x_2}{\partial a} + \dots \\
&\qquad\qquad + (m.m)\frac{\partial x_m}{\partial a}\Big\}\frac{\partial x_m}{\partial a_\kappa}.
\end{aligned}
$$

4. Измѣняя здѣсь κ отъ 1 до m, мы получаемъ m такихъ равенствъ, которымъ можно удовлетворить заразъ допустивъ:

$$
\begin{aligned}
0 &= (0.0)\frac{\partial x}{\partial a} + (0.1)\frac{\partial x_1}{\partial a} + (0.2)\frac{\partial x_2}{\partial a} + \dots + (0.m)\frac{\partial x_m}{\partial a}, \\
0 &= (1.0)\frac{\partial x}{\partial a} + (1.1)\frac{\partial x_1}{\partial a} + (1.2)\frac{\partial x_2}{\partial a} + \dots + (1.m)\frac{\partial x_m}{\partial a}, \\
0 &= (2.0)\frac{\partial x}{\partial a} + (2.1)\frac{\partial x_1}{\partial a} + (2.2)\frac{\partial x_2}{\partial a} + \dots + (2.m)\frac{\partial x_m}{\partial a}, \quad (7) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
0 &= (m.0)\frac{\partial x}{\partial a} + (m.1)\frac{\partial x_1}{\partial a} + (m.2)\frac{\partial x_2}{\partial a} + \dots + (m.m)\frac{\partial x_m}{\partial a}.
\end{aligned}
$$

5. Чтобы всѣ слѣдствія выходили отсюда опредѣлительно, необходимо сдѣлать:

$$a = x; \quad (8)$$

въ такомъ случаѣ одно изъ уравненій, напр. первое, будетъ получаться изъ остальныхъ, и мы будемъ имѣть:

$$
\begin{aligned}
0&=(1.0)+(1.1)\frac{\partial x_1}{\partial x}+(1.2)\frac{\partial x_2}{\partial x}+\ldots+(1.m)\frac{\partial x_m}{\partial x}, \\
0&=(2.0)+(2.1)\frac{\partial x_1}{\partial x}+(2.2)\frac{\partial x_2}{\partial x}+\ldots+(2.m)\frac{\partial x_m}{\partial x}, \quad (9) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0&=(m.0)+(m.1)\frac{\partial x_1}{\partial x}+(m.2)\frac{\partial x_2}{\partial x}+\ldots+(m.m)\frac{\partial x_m}{\partial x},
\end{aligned}
$$

систему m уравненій съ такимъ-же числомъ неизвѣстныхъ дифференціальныхъ отношеній

$$\frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{\partial x_2}{\partial x}, \ldots \frac{\partial x_m}{\partial x}.$$

6. Такъ какъ m четное, то (9) представляетъ намъ систему уравненій совмѣстныхъ. Эта система очевидно есть та самая, которую нашелъ Якоби, и которую мы дали въ концѣ предыдущаго §; только теперь мы очень хорошо знаемъ, къ какимъ результатамъ она можетъ насъ привести.

Разрѣшивъ уравненія (9) относительно $\frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{\partial x_2}{\partial x}, \ldots \frac{\partial x_m}{\partial x}$ найдемъ

$$\frac{\partial x_1}{\partial x}=\frac{U_1}{U}, \frac{\partial x_2}{\partial x}=\frac{U_2}{U}, \ldots \frac{\partial x_m}{\partial x}=\frac{U_m}{U}, \quad (10)$$

систему m обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка между $m+1$ перемѣнныхъ. Если въ интегралахъ этой системы постояннымъ произвольнымъ сообщимъ значенія введенныхъ нами вспомогательныхъ величинъ $a_1, a_2, \ldots a_m$, то получимъ рядъ формулъ:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 (x, x_1, x_2, \ldots x_m) &= a_1 \\
\varphi_2 (x, x_1, x_2, \ldots x_m) &= a_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \qquad (11) \\
\varphi_m (x, x_1, x_2, \ldots x_m) &= a_m,
\end{aligned}$$

которыя останутся интегралами уравненій (10) и опредѣлятъ неизвѣстныя дѣйствія $f_1, f_2, \ldots f_m$, когда будутъ разрѣшены относительно $x_1, x_2, \ldots x_m$.

8. Розыскавъ такимъ образомъ коэффиціенты преобразованнаго уравненія (3), возьмемъ изъ него членъ $P\partial a = P\partial x$, и проинтегрируемъ по x. Изобразивъ результатъ интегрированія чрезъ A, составимъ отъ него полный дифференціалъ по измѣняемости всѣхъ перемѣнныхъ величинъ, и къ лѣвой части (3) прибавимъ разность

$$dA - \frac{\partial A}{\partial x}\partial x - \frac{\partial A}{\partial a_1}\partial a_1 - \frac{\partial A}{\partial a_2}.\partial a_2 - \ldots - \frac{\partial A}{\partial a_m}\partial a_m$$

тожественную съ нулемъ; тогда получимъ новое уравненіе вида

$$(12) \quad dA + (P_1 - \frac{\partial A}{\partial a_1})\partial a_1 + (P_2 - \frac{\partial A}{\partial a_2})\partial a_2 + \ldots + (P_m - \frac{\partial A}{\partial a_m})\partial a_m = 0,$$

или:

$$dA + A_1\partial a_1 + A_2\partial a_2 + \ldots + A_m\partial a_m = 0 \quad (13),$$

въ которомъ множители $A_1, A_2, \ldots A_m$ зависятъ только отъ $a_1, a_2, \ldots a_m$; что повѣряется анализомъ n° n° 56 и 57 въ § IV.

9. Давши дѣлу такой оборотъ, интеграцію линейныхъ уравненій съ нечетнымъ числомъ перемѣнныхъ, мы поставили въ параллель съ задачею Якоби, относившеюся къ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ, заключавшимъ четное число перемѣнныхъ.

Въ настоящемъ случаѣ требуется линейный дифференціалъ

$$A_1 \partial a_1 + A_2 \partial a_2 + \ldots + A_m \partial a_m \quad (14)$$

съ четнымъ числомъ измѣняемыхъ привести къ виду полнаго дифференціала — dA, посредствомъ $\frac{m}{2}$ конечныхъ интегральныхъ отношеній.

10. Рѣшить этотъ новый вопросъ можемъ слѣдующимъ образомъ: приравнять ∂a_m нулю, и слѣдовательно получить, во-первыхъ,

$$a_m = \text{const.} \quad (15)$$

т. е. одинъ изъ искомыхъ интеграловъ; а во-вторыхъ, преобразованное уравненіе

$$dA + A_1 \partial a_1 + A_2 \partial a_2 + \ldots + A_{m-1} \partial a_{m-1} = 0 \quad (16).$$

11. Послѣ этого намъ нужно имѣть дѣло съ линейнымъ дифференціаломъ

$$A_1 \partial a_1 + A_2 \partial a_2 + \ldots + A_{m-1} \partial a_{m-1}, \quad (17)$$

содержащимъ опять нечетное число измѣняемыхъ.

12. Принявъ для однообразія

$$a_1 = y, a_2 = y_1, \ldots a_{m-1} = y_{m-2} \quad (18)$$
$$A_1 = Y, A_2 = Y_1, \ldots A_{m-1} = Y_{m-2} \quad (19),$$

формула (17) перейдетъ въ

$$Y \partial y + Y_1 \partial y_1 + Y_2 \partial y_2 + \ldots + Y_{m-2} \partial y_{m-2} \quad (20).$$

Введя новыя вспомогательныя величины

$$b_1, b_2, \ldots b_{m-2},$$

и связавъ ихъ съ y-ми посредствомъ отношеній

$$y = y,\ y_1 = f_1\ (y, b_1\ b_2 \ldots b_{m-2}), \ldots y_{m-2} = f_{m-2}$$
$$(y, b_1, b_2, \ldots b_{m-2}), \quad (21)$$

гдѣ уже f, разумѣется, отличны отъ прежнихъ, для опредѣленія этихъ дѣйствій должно будетъ взять систему

$$0 = (0.0) + (0.1)\frac{\partial y_1}{\partial y} + (0.2)\frac{\partial y_2}{\partial y} + \ldots + (0.\,m-2)\frac{\partial y_{m-2}}{\partial y},$$

$$0 = (1.0) + (1.1)\frac{\partial y_1}{\partial y} + (1.2)\frac{\partial y_2}{\partial y} + \ldots + (1.\,m-2)\frac{\partial y_{m-2}}{\partial y},$$

$$0 = (2.0) + (2.1)\frac{\partial y_1}{\partial y} + (2.2)\frac{\partial y_2}{\partial y} + \ldots + (2.\,m-2)\frac{\partial y_{m-2}}{\partial y}, \quad (22)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 = (m-2.0) + (m-2.1)\frac{\partial y_1}{\partial y} + (m-2.2)\frac{\partial y_2}{\partial y} + \ldots + (m-2.\,m-2)\frac{\partial y_{m-2}}{\partial y},$$

въ которой опять верхнее уравненіе будетъ слѣдствіемъ остальныхъ, а символъ $(g, h) = \frac{\partial Y_g}{\partial y_h} - \frac{\partial Y_h}{\partial y_g}$.

13. Проинтегрировавъ ее, и съ постоянными произвольными поступивъ по прежнему, будемъ имѣть рядъ отношеній:

$$\psi_1(y, y_1, y_2, \ldots y_{m-2}) = b_1,$$
$$\psi_2(y, y_1, y_2, \ldots y_{m-2}) = b_2, \quad (23)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\psi_{m-2}(y, y_1, y_2, \ldots y_{m-2}) = b_{m-2}.$$

Вычисливъ отсюда $y_1, y_2, \ldots y_{m-2}$ чрезъ $y, b_1, \ldots b_{m-2}$, мы дадимъ формуламъ (21) опредѣленный видъ и сполна построимъ преобразованное выраженіе

$$Q\,\partial y + Q_1\,\partial b_1 + Q_2\,\partial b_2 + \ldots + Q_{m-2}\,\partial b_{m-2}. \quad (24).$$

14. Сдѣлавши въ немъ

$$Q\,\partial y = \partial B, \quad (25)$$

прибавивъ и вычтя dB, т. е. полный дифференціалъ отъ B по измѣняемости всѣхъ величинъ въ него входящихъ, получимъ:

$$dB + \left\{ Q_1 - \frac{\partial B}{\partial b_1} \right\} \partial b_1 + \left(Q_2 - \frac{\partial B}{\partial b_2}\right) \partial b_2 + \ldots$$
$$+ \left(Q_{m-2} - \frac{\partial B}{\partial b_{m-2}}\right) \partial b_{m-2}, \quad (26)$$

гдѣ разности $Q_к - \frac{\partial B}{\partial b_к}$ не зависятъ отъ y-ка. Въ слѣдствіе того уравненіе (13) приметъ видъ:

$$dA + dB + B_1\,\partial b_1 + B_2\,\partial b_2 + \ldots + B_{m-2}\,\partial b_{m-2} = 0 \quad (27),$$

и намъ нужно будетъ разсматривать линейный дифференціалъ

$$B_1\,\partial b_1 + B_2\,\partial b_2 + \ldots + B_{m-2}\,\partial b_{m-2} \quad (28)$$

съ четнымъ числомъ измѣняемыхъ.

15. Допустивъ $\partial b_{m-2} = 0$, равенство

$$b_{m-2} = \mathrm{const} \quad (29)$$

будетъ вторымъ искомымъ интеграломъ; а линейный дифференціалъ

$$B_1\,\partial b_1 + B_2\,\partial b_2 + \ldots + B_{m-3}\,\partial b_{m-3} \quad (30)$$

будетъ содержать нечетное число перемѣнныхъ; и слѣдовательно можетъ быть обработанъ по прежнему, т. е. приведенъ къ виду . . . .

$$dC + C_1\,\partial c_1 + C_2\,\partial c_2 + \ldots + C_{m-4}\,\partial c_{m-4}, \quad (31)$$

если предварительно было сдѣлано

$$b_1 = z,\ b_2 = z_1,\ \ldots\ b_{m-3} = z_{m-4},$$
$$B_1 = Z,\ B_2 = Z_1,\ \ldots\ B_{m-3} = Z_{m-4},$$

и $z = z,\ z_1 = f_1(z, c_1, c_2, \ldots c_{m-4})$, и т. д.

Отъ этого уравненіе (27) получитъ форму

$$dA + dB + dC + C_1 \partial c_1 + C_2 \partial c_2 + \ldots + C_{m-4} \partial c_{m-4} = 0, \quad (32)$$

съ которою можно поступать по прежнему.

16. Продолжая этотъ рядъ дѣйствій, дойдемъ до уравненія

$$dA + dB + dC + \ldots + dE + E_1 \partial e_1 + E_2 \partial e_2 = 0. \quad (33)$$

Сдѣлавши въ немъ $\partial e_2 = 0$, а

$$E_1 \partial e_1 = dF, \quad (34)$$

уравненіе

$$e_2 = \text{const} \quad (35)$$

будетъ интегралъ числомъ $\left(\frac{m}{2}\right)^{\text{й}}$; а преобразованное изобразится чрезъ

$$dA + dB + dC + \ldots + dE + dF = 0; \quad (36)$$

откуда:

$$A + B + C + \ldots + E + F = \text{const} \quad (37)$$

будетъ интегралъ счетомъ $\left(\frac{m}{2} + 1\right)^{\text{й}}$.

17. Если бы въ уравненіи (33) двучленный дифференціалъ

$$E_1 \partial e_1 + E_2 \partial e_2$$

мы привели къ виду

$$E_1 \partial e_1 + E_2 \partial e_2 = \frac{1}{\lambda}\, dg, \quad (38)$$

то непремѣнно должно быть

$$\frac{1}{\lambda} = \Theta'(g) \quad (39)$$

т. е. интегралъ числомъ $\left(\frac{m}{2}\right)^{\text{й}}$; а преобразованное

$$dA + dB + dC + \ldots + dE + d\Theta = 0 \quad (40)$$

дало бы

$$A + B + C + \ldots + E + \Theta = \text{const.} \quad (41)$$

$(\frac{m}{2} + 1)^{й}$ интегралъ.

18. Изъ предыдущей теорiи мы видимъ вновь, что линейное дифференцiальное уравненiе съ нечетнымъ числомъ $2p + 1$ перемѣнныхъ всегда можетъ быть проинтегрировано посредствомъ $p+1$ отношенiй съ такимъ-же числомъ постоянныхъ произвольныхъ.

19. Всѣ предыдущiя сужденiя, очевидно, самымъ строгимъ образомъ разрѣшаютъ и задачу Якоби въ n° 50 § IV; а при посредствѣ теоремы n° 46 § IV связываютъ опять однимъ и тѣмъ-же анализомъ интеграцiю линейныхъ дифференцiальныхъ уравненiй какъ съ четнымъ, такъ и нечетнымъ числомъ измѣняемыхъ величинъ.

20. Сколь ни удовлетворительна теорiя настоящаго §, но для полноты слѣдовало бы доказать, что найденныя интегральныя отношенiя не только необходимы, но и достаточны для интегрированiя уравненiя (1). Впрочемъ мы можемъ оставить это доказательство, замѣтивши, что оно во всемъ сходно съ тѣмъ, которое предложено въ n° n° 25, 26, . . . 32 § III.

21. Гораздо большей важности будетъ слѣдующiй вопросъ: нельзя-ли способъ, изложенный нами въ этомъ §, довести до такой-же простоты, къ какой приведенъ методъ Пфаффа въ § IV? Однако не желая въ настоящую минуту поверхностно касаться этого вопроса, мы откладываемъ полное его обсужденiе до другаго времени.

22. Результатъ соображенiй, изъясненныхъ въ n°n° 1, 2, ... 8, словесно можетъ быть представленъ въ формѣ слѣдующаго предложенiя:

Каждое уравненiе съ нечетнымъ числомъ измѣняемыхъ:

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + \ldots\ldots + X_{2p}\,\partial x_{2p} = 0 \quad (42)$$

способно приводиться къ другому виду, въ которомъ одинъ членъ изображается дифференцiаломъ нѣкотораго перемѣннаго количества, а коэффицiенты при дифференцiалахъ остальныхъ измѣняемыхъ не содержатъ этого послѣдняго количества.

23. Такъ какъ подобная истина имѣетъ мѣсто и для уравненiй съ четнымъ числомъ перемѣнныхъ величинъ, то мы въ состоянiи сказать вообще:

Во всякомъ линейномъ дифференцiальномъ уравненiи:

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + \ldots\ldots + X_m\,\partial x_m = 0 \quad (43)$$

коэффицiентъ при дифференцiалѣ одной изъ перемѣнныхъ, напримѣръ при ∂x, можно принять равнымъ -1, а предстоящiе при ∂x_1, ∂x_2, . . . ∂x_m, то есть при дифференцiалахъ другихъ измѣняемыхъ, могутъ быть допущены независимыми отъ x.

24. Уравненiя вида:

$$\partial x = X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots\ldots + X_m\,\partial x_m, \quad (44)$$

гдѣ X_1, X_2 . . . . . X_m суть функцiи отъ однихъ только x_1, x_2, ... x_m, обладаютъ весьма замѣчательнымъ свойствомъ, а именно: при $m+1$ четномъ допускаютъ интеграцiю по теорiи настоящаго §, то есть по способу интегрированiя уравненiй съ нечетнымъ числомъ перемѣнныхъ, а въ случаѣ $m+1$ нечетнаго удобно интегрируются по методу Пфаффа, то есть по теорiи, прикладываемой къ уравненiямъ о четномъ числѣ измѣняемыхъ.

25. Парадоксъ этотъ объясняется тѣмъ, что во время интеграціи формулы (44), собственно говоря, намъ приходится имѣть дѣло только съ линейнымъ дифференціаломъ:

$$X_1 \partial x_1 + X_2 \partial x_2 + \ldots\ldots + X_m \partial x_m \quad (45)$$

въ которомъ число членовъ нечетное когда $m+1$ четное и на-оборотъ — четное при $m+1$ нечетномъ.

26. Интегрированіе уравненія (44) для $m+1$ четнаго разсмотрѣнно нами со всѣми подробностями въ $n^o n^o$ 50, 51, ... § IV; скажемъ теперь нѣсколько словъ о случаѣ $m+1$ нечетнаго.

Если $m+1$ нечетное, то уравненіе (44) составляетъ такое-же точно исключеніе изъ теоріи этого §, какимъ было равенство n^o 49 въ § IV относительно способа Пфаффа.

Дѣйствительно, буквальное приложеніе преобразованій, данныхъ въ $n^o n^o$ 1, 2, ... 5, въ силу того обстоятельства, что

$$(1.0)=0,\ (2.0)=0, \ldots\ldots (2p.0)=0,$$

приводитъ насъ къ системѣ $2p-1$ уравненій:

$$0=(2.1)+(2.2)\frac{\partial x_2}{\partial x_1}+\ldots\ldots+(2.2p)\frac{\partial x_{2p}}{\partial x_1},$$

$$0=(3.1)+(3.2)\frac{\partial x_2}{\partial x_1}+\ldots\ldots+(3.2p)\frac{\partial x_{2p}}{\partial x_1},$$

. . . .

$$0=(2p.0)+(2p.1)\frac{\partial x_2}{\partial x_1}+\ldots\ldots+(2p.2p)\frac{\partial x_{2p}}{\partial x_1}$$

несовмѣстныхъ; а потому и проч.

27. Чтобъ отыскать то преобразованное уравненіе, которое здѣсь требуется, весьма удобно воспользоваться

способомъ преобразованій, объясненнымъ въ n° n° 14, 15, ... § III.

И точно, допустивъ

$$x_1 = f_1\,(x,\ \xi_1,\ \xi_2, \ldots \xi_{2p-1})\ \ x_2 = f_2\,(x,\ \xi_1,\ \xi_2, \ldots \xi_{2p-1}), \ldots\ x_{2p} = f_{2p}\,(x,\ \xi_1,\ \xi_2, \ldots \xi_{2p-1})$$

гдѣ $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{2p-1}$ новыя вспомогательныя величины, неопредѣленными дѣйствіями $f_1, f_2, \ldots f_{2p}$ должно будетъ расположить такъ, чтобъ въ преобразованномъ выраженіи линейной дифференціальной формулы:

$$X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots + X_{2p}\,\partial x_{2p},$$

то есть въ:

$$Q\,\partial x + Q_1\,\partial\xi_1 + \ldots + Q_{2p-1}\,\partial\xi_{2p-1},$$

коэффиціентъ при ∂x былъ нулемъ, а чтобъ остальныя предстоящія $Q_1, Q_2, \ldots Q_{2p-1}$ содержали x только въ общемъ ихъ множителѣ вида e^x.

28. Система уравненій для опредѣленія дѣйствій $f_1, f_2, \ldots f_{2p}$ по сказаннымъ условіямъ будетъ:

$$\begin{aligned}
X_1 &= (1.1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (1.2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + (1.2p)\frac{\partial x_{2p}}{\partial x},\\
X_2 &= (2.1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (2.2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + (2.2p)\frac{\partial x_{2p}}{\partial x},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)\\
X_{2p} &= (2p.1)\frac{\partial x_1}{\partial x} + (2p.2)\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots + (2p,2p)\frac{\partial x_{2p}}{\partial x}.
\end{aligned}$$

29. Когда ее проинтегрируемъ, интегральныя отношенія разрѣшимъ относительно $x_1, x_2, \ldots x_{2p}$ и по-

стоянныя произвольныя приравняемъ количествамъ x, ξ_1, ξ_2, ... ξ_{2p-1}; тогда получимъ тожество:

$$X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots\ldots + X_{2p}\,\partial x_{2p} = e^x\,(\mathfrak{X}_1\,\partial\xi_1$$

$$+ \mathfrak{X}_2\,\partial\xi_2 + \ldots\ldots + \mathfrak{X}_{2p-1}\,\partial\xi_{2p-1}), \quad (47)$$

въ которомъ $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, ... $\mathfrak{X}_{2p-1}$ будутъ совершенно опредѣленными функціями отъ ξ_1, ξ_2, ... ξ_{2p-1}.

30. Послѣ того уравненіе (44) приметъ видъ:

$$\partial x = e^x\,(X_1\,\partial\xi_1 + X_2\,\partial\xi_2 + \ldots\ldots + X_{2p-1}\,\partial\xi_{2p-1}),$$

или, по раздѣленіи обѣихъ частей на e^x и положеніи

$$\frac{\partial x}{e^x} = \partial\xi, \quad (47)$$

$$\partial\xi = \mathfrak{X}_1\,\partial\xi_1 + \mathfrak{X}_2\,\partial\xi_2 + \ldots\ldots + \mathfrak{X}_{2p-1}\,\partial\xi_{2p-1}. \quad (48)$$

31. Съ этимъ послѣднимъ можемъ поступить такъ: сдѣлать $\partial\xi_{2p-1} = 0$ и слѣдов.

$$\xi_{2p-1} = \text{const.} \quad (49)$$

принять за одинъ изъ розыскиваемыхъ интеграловъ; а къ уравненію:

$$\partial\xi = \mathfrak{X}_1\,\partial\xi_1 + \mathfrak{X}_2\,\partial\xi_2 + \ldots\ldots + \mathfrak{X}_{2p-2}\,\partial\xi_{2p-2} \quad (50)$$

приложить правила n°n° 27, 28, 29.

32. На основаніи предыдущихъ разсужденій, интегрированіе какихъ угодно линейныхъ дифференціальныхъ уравненій мы можемъ формулировать еще такъ:

Преобразовать уравненіе:

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + \ldots\ldots + X_m\,\partial x_m = 0 \quad (51)$$

въ слѣдующее:

$$\partial\xi = \mathfrak{X}_1\,\partial\xi_1 + \mathfrak{X}_2\,\partial\xi_2 + \ldots\ldots + \mathfrak{X}_m\,\partial\xi_m \quad (52)$$

по правиламъ § IV, когда $m+1$ четное; или по правиламъ n°n° 1, 2, ... 8 этого §, когда $m+1$ нечетное. За тѣмъ сдѣлать $\partial\xi_m = 0$, или,

$$\xi_m = \text{const.}, \qquad (53)$$

допустить однимъ изъ искомыхъ интегральныхъ отношеній; а потомъ рѣшать уравненіе:

$$\partial\xi = X_1\ \partial\xi_1 + X_2\ \partial\xi_2 + \dots\dots + X_{m-1}\ \partial\xi_{m-1} \qquad (54)$$

по теоріи Пфаффа въ случаѣ $m+1$ четнаго, или по третьему способу Якоби въ случаѣ $m+1$ нечетнаго.