О равновѣсіи упругихъ цилиндрическихъ тѣлъ.

В. А. Стеклова.

§ 1.

Такъ называемая задача С. Венана, какъ извѣстно, состоитъ въ слѣдующемъ: опредѣлить состояніе равновѣсія цилиндрическаго (изотропнаго) тѣла, предполагая, что на боковую поверхность его и внутреннія массы не дѣйствуетъ никакихъ силъ, а къ одному изъ крайнихъ сѣченій приложены (сплошнымъ образомъ) силы, проекціи вектора и момента которыхъ на координатныя оси суть A, B, C, и A', B', C' (заданныя величины). Строгое рѣшеніе этой задачи предложено впервые С. Венаномъ (отъ имени котораго она и получила свое названіе) въ двухъ мемуарахъ: „De la torsion des prismes" и „Memoire sur la flexion des prismes etc" *). Оба сочиненія носятъ чисто геометрическій характеръ. Аналитическое изложеніе задачи находимъ у Clebsch'а и отчасти Kirchhoff'а **), полагающихъ въ основаніе гипотезу о распредѣленіи давленій внутри призмы, предложенную С. Венаномъ. Относя тѣло къ прямоугольной системѣ координатъ, начало которыхъ находится въ какой-либо точкѣ основанія цилиндра, а ось z-овъ параллельна его оси, назовемъ, по обыкновенію, черезъ u, v и w проекціи на эти оси перемѣщенія какой-либо точки тѣла, координаты которой въ естественномъ состояніи суть x, y и z, и черезъ X_x, Y_y, Z_z, $X_y = Y_x$, $Z_x = X_z$, $Y_z = Z_y$ проекціи на оси координатъ напряженій, дѣйствующихъ въ какой-либо точкѣ разсматриваемаго тѣла. Полагая затѣмъ

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

---

*) См. Mémoires des savants étrangers, 1855, и Journal de Mathématiqnes pures et appliquées, Série II, Tome I, 1856.

**) См. Clebsch, „Theorie des Elasticität fester Körper", Leipsig, 1862, S. 70 etc.—Kirchhoff, „Vorles. ü. Math. Physik", Leipzig, 1883, S. 369 etc.

и вводя обозначеніе

$$\varDelta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

приводимъ рѣшеніе задачи къ интегрированію слѣдующей системы дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ

$$\left.\begin{aligned} (2k+1)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \varDelta_2 u = 0\,, \\ (2k+1)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \varDelta_2 v = 0\,, \\ (2k+1)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \varDelta_2 w = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

гдѣ k постоянная, зависящая отъ физическихъ свойствъ матеріи, при поверхностныхъ условіяхъ

$$\left.\begin{aligned} X_x\cos\alpha + X_y\sin\alpha = 0\,, \\ Y_x\cos\alpha + Y_y\sin\alpha = 0\,, \\ Z_x\cos\alpha + Z_y\sin\alpha = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

гдѣ α уголъ, составляемый нормалью къ боковой поверхности цилиндра съ осью x'овъ, а $X_x \ldots Z_z$ выражаются черезъ частныя производныя по координатамъ отъ u, v, w слѣдующимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} X_x &= 2K\left(k\Theta + \frac{\partial u}{\partial x}\right), & Z_y = Y_z &= K\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \\ Y_y &= 2K\left(k\Theta + \frac{\partial v}{\partial y}\right), & X_z = Z_x &= K\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ Z_z &= 2K\left(k\Theta + \frac{\partial w}{\partial z}\right), & X_y = Y_x &= K\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^{*)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (5)$$

---

*) Здѣсь K вторая постоянная, входящая въ выраженіе f, потенціала упругихъ силъ для изотропнаго тѣла. Для такого тѣла, какъ извѣстно,

$$f = K[x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}y_z^2 + \frac{1}{2}z_x^2 + \frac{1}{2}x_y^2 + k(x_x + y_y + z_z)^2]\,,$$

гдѣ

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,, \quad y_z = z_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\,,$$

$$y_y = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad z_x = x_z = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\,,$$

$$z_z = \frac{\partial w}{\partial z}\,, \quad x_y = y_x = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

См. Kirchhoff. „Vorles. ü. Math. Physik“. S. 390 etc.

При настоящихъ средствахъ анализа нельзя рѣшить этихъ уравненій, не дѣлая никакихъ гипотезъ относительно величинъ $X_x, Y_y \ldots Z_z$, т. е. относительно распредѣленій напряженій внутри призмы. С. Венанъ разбиваетъ призму на безконечно тонкіе стержни съ прямоугольнымъ основаніемъ и допускаетъ, что боковыя поверхности этихъ элементарныхъ призмъ не оказываютъ давленій другъ на друга, или, выражая это аналитически, полагаетъ $X_x = 0$, $Y_y = 0$ и $X_y = Y_x = 0$. Въ этомъ предположеніи Clebsch (и Kirchhoff) рѣшаетъ уравненія (3) при условіи

$$Z_x \cos\alpha + Z_y \sin\alpha = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4_1)$$

къ которому приводятся равенства (4); и, присоединивъ къ нимъ необходимыя условія опредѣленности задачи, состоящія въ томъ, что при

$$x = y = z = 0$$

$$u = v = w = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

получаетъ для u, v и w выраженія

$$\left.\begin{aligned} u &= U_0 + U_1 z + U_2 z^2 + U_3 z^3, \\ v &= V_0 + V_1 z + V_2 z^2 + V_3 z^3, \\ w &= W_0 + W_1 z + W_2 z^2. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (6)$$

U_i, V_i $(i = 1, 2, 3)$ и W_i $(i = 1, 2)$ суть вполнѣ опредѣленныя функціи координатъ и шести произвольныхъ постоянныхъ, которыя опредѣляются при помощи уравненій, выражающихъ, что на крайнемъ сѣченіи векторъ и моментъ напряженій равенъ вектору и моменту дѣйствующихъ силъ, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &\int X_z dq = A, && \int (yZ_z - lY_z) dq = A', \\ &\int Y_z dq = B, && \int (lX_z - xZ_z) dq = B', \\ &\int Z_z dq = C, && \int (xY_z - yX_z) dq = C', \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (7)$$

гдѣ dq элементъ площади сѣченія, l — высота цилиндра.

Обозначимъ черезъ ξ, η, ζ координаты точки x, y, z послѣ деформаціи, а черезъ u', v' значенія u и v по занесеніи въ нихъ ζ вмѣсто z; уравненіе изогнутаго волокна, параллельнаго до деформаціи оси цилиндра, какъ извѣстно, будетъ

$$\xi = x + u',$$

$$\eta = y + v'.$$

Принимая во вниманіе выраженія u и v черезъ z (фор. (6)), можемъ сказать, что при деформаціяхъ, соотвѣтствующихъ рѣшенію С. Венана, всякая прямая, параллельная оси цилиндра до деформаціи, преобразуется въ алгебраическую кривую третьяго порядка. Весьма естественно возникаетъ вопросъ, возможно-ли при условіи, что на боковую поверхность и массу цилиндрическаго тѣла не дѣйствуетъ никакихъ силъ, преобразованіе вышеупомянутыхъ прямыхъ въ алгебраическія кривыя какой либо другой степени подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ только къ крайнему сѣченію, и, если возможно, то какова эта степень (или степени) и каково рѣшеніе, соотвѣтствующее этому допущенію; каковы при этомъ величины напряженій? Такимъ образомъ приходимъ къ обратной постановкѣ вопроса: вмѣсто гипотезы о распредѣленіи давленій внутри призмы, задаемъ характеръ деформацій и, найдя соотвѣтствующее имъ рѣшеніе, опредѣлимъ и напряженіе внутри призмы. Подобнымъ путемъ рѣшаетъ Clebsch нѣкоторые вопросы о движеніи твердаго тѣла въ жидкости и, еще ближе, Maurice Lévy изслѣдуетъ вопросъ о равновѣсіи упругихъ пластинокъ *).

§ 2.

Итакъ, предположимъ, что u, v, w выражаются цѣлыми раціональными функціями z-а, и, не ограничивая сначала величину степени, полагаемъ

$$u=\sum U_i \frac{z^i}{i!}, \quad v=\sum V_i \frac{z^i}{i!}, \quad w=\sum W_i \frac{z^i}{i!}, \quad \Theta=\sum \Theta_i \frac{z^i}{i!}, \quad . \, (8)$$

гдѣ U_i, V_i, W_i, Θ_i $(i=1, 2\ldots\infty)$ четыре, пока неопредѣленныя, функціи x и y **).

Внося эти выраженія u, v и w въ уравненія (1) и (3) и замѣчая, что они должны быть удовлетворены при всякомъ z, получаемъ слѣдующій рядъ уравненій

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{a)} & (2k+1)\dfrac{\partial \Theta_i}{\partial x}+\Delta_2 U_i+U_{i+2}=0, \\[2ex]
\text{b)} & (2k+1)\dfrac{\partial \Theta_i}{\partial y}+\Delta_2 V_i+V_{i+2}=0, \\[2ex]
\text{c)} & (2k+1)\,\Theta_{i+1}+\Delta_2 W_i+W_{i+2}=0, \\[2ex]
\text{d)} & \Theta_i=\dfrac{\partial U_i}{\partial x}+\dfrac{\partial V_i}{\partial y}+W_{i+1}.
\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \, (9)$$

---

*) Maurice Lévy, „Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes", Journal de Mathématiques pures et appliquées, Série III, Tome III (1877).

**) См. вышеупомянутый мемуаръ M. Lévy.

При помощи первыхъ трехъ изъ уравненій (9) получаемъ

$$\Delta_2 \Theta_i + \Theta_{i+2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Обозначивъ черезъ $\Delta_2^i F$ повторенную i разъ операцію $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ надъ функціей F и примѣняя послѣдовательно уравненіе (10) къ Θ_2, $\Theta_3 \ldots$ и т. д., найдемъ слѣдующія выраженія функціи Θ четнаго и нечетнаго значка черезъ функціи Θ_0 и Θ_1

$$\Theta_{2j} = (-1)^j \Delta_2^j \Theta_0, \quad \Theta_{2j+1} = (-1)^j \Delta_2^j \Theta_1 \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Подобнымъ же образомъ первыя два изъ уравненій (9) и только что полученныя выраженія Θ_{2j}, Θ_{2j+1} дадутъ

$$\left.\begin{aligned}
U_{2j} &= (-1)^j \left[\Delta_2^j U_0 + j(2k+1) \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \Theta_0}{\partial x} \right], \\
U_{2j+1} &= (-1)^j \left[\Delta_2^j U_1 + j(2k+1) \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \Theta_1}{\partial x} \right], \\
V_{2j} &= (-1)^j \left[\Delta_2^j V_0 + j(2k+1) \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \Theta_0}{\partial y} \right], \\
V_{2j+1} &= (-1)^j \left[\Delta_2^j V_1 + j(2k+1) \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \Theta_1}{\partial y} \right].
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (12)$$

Наконецъ, при помощи послѣдняго изъ уравненій (9), получимъ

$$\left.\begin{aligned}
W_{2j-1} &= (-1)^j \left[\Delta_2^{j-1} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) + [j(2k+1) - 2(k+1)] \Delta_2^{j-1} \Theta_0 \right], \\
W_{2j} &= (-1)^j \left[\Delta_2^{j-1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) + [j(2k+1) - 2(k+1)] \Delta_2^{j-1} \Theta_1 \right].
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Въ этихъ выраженіяхъ j должно давать всѣ значенія отъ 1 и т. д., исключая $j = 0$. Для этого же послѣдняго значенія j, т. е. для W_0, будемъ имѣть

$$\Delta_2 W_0 = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} - 2(k+1)\Theta_1 \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

Функціи U_0, V_0, U_1, V_1, Θ_0, Θ_1 и W_0 можемъ разсматривать какъ неизвѣстныя искомыя функціи, изъ которыхъ первыя шесть вполнѣ произвольны по отношенію къ уравненіямъ (9), а W_0 удовлетворяетъ дифференціальному уравненію въ частныхъ производныхъ (14). Найдя какимъ-бы то ни было способомъ эти шесть функцій, удовлетворяющихъ данной задачѣ упругости, найдемъ затѣмъ по формуламъ (12) и (13) всѣ U_i, V_i $(i=2, 3\ldots)$, W_i $(i=1, 2, 3\ldots)$ и W_0 по уравненію (14). Характеръ этихъ функцій U_0, V_0, U_1, V_1, Θ_0 и Θ_1, при всякихъ значеніяхъ которыхъ удовлетворяются уравненія упругости, зависитъ существеннымъ образомъ отъ предѣльныхъ условій задачи.

Положивъ далѣе по Maurice Lévy

$$X_x=\sum X_x^{(i)}\frac{z^i}{i!},\quad Y_y=\sum Y_y^{(i)}\frac{z^i}{i!},\quad Z_z=\sum Z_z^{(i)}\frac{z^i}{i!};$$

$$Z_y=Y_z=\sum Y_z^{(i)}\frac{z^i}{i!},\quad X_z=Z_x=\sum Z_x^{(i)}\frac{z^i}{i!},\quad X_y=Y_x=\sum Y_x^{(i)}\frac{z^i}{i!},$$

и воспользовавшись выраженіями (5), получимъ

$$\left.\begin{array}{l}
\text{a)}\left\{\begin{array}{l}
X_x^{2j}=(-1)^j 2K\left[k\Delta_2^j\Theta_0+(2k+1)j\dfrac{\partial^2\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x^2}+\Delta_2^j\dfrac{\partial U_0}{\partial x}\right],\\[2ex]
X_x^{2j+1}=(-1)^j 2K\left[k\Delta_2^j\Theta_1+(2k+1)j\dfrac{\partial^2\Delta_2^{j-1}\Theta_1}{\partial x^2}+\Delta_2^j\dfrac{\partial U_1}{\partial x}\right],
\end{array}\right.\\[4ex]
\text{b)}\left\{\begin{array}{l}
Y_y^{2j}=(-1)^j 2K\left[k\Delta_2^j\Theta_0+(2k+1)j\dfrac{\partial^2\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial y^2}+\Delta_2^j\dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right],\\[2ex]
Y_y^{2j+1}=(-1)^j 2K\left[k\Delta_2^j\Theta_1+(2k+1)j\dfrac{\partial^2\Delta_2^{j-1}\Theta_1}{\partial y^2}+\Delta_2^j\dfrac{\partial V_1}{\partial y}\right],
\end{array}\right.\\[4ex]
\text{c)}\left\{\begin{array}{l}
Z_z^{2j}=(-1)^j 2K\left[[1+k-j(2k+1)]\Delta_2^j\Theta_0-\Delta_2^j\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial x}+\dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right)\right],\\[2ex]
Z_z^{2j+1}=(-1)^j 2K\left[[1+k-j(2k+1)]\Delta_2^j\Theta_1-\Delta_2^j\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial x}+\dfrac{\partial V_1}{\partial y}\right)\right],
\end{array}\right.\\[4ex]
\text{d)}\left\{\begin{array}{l}
Z_y^{(2j)}=(-1)^j K\left[-2[1+k-j(2k+1)]\dfrac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_1}{\partial y}+\dfrac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial x}+\dfrac{\partial V_1}{\partial y}\right)}{\partial y}+\Delta_2^j V_1\right],\\[3ex]
Z_y^{(2j-1)}=(-1)^j K\left[-2[1+k-j(2k+1)]\dfrac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial y}+\dfrac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial x}+\dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial y}+\Delta_2^j V_0\right],
\end{array}\right.\\[4ex]
\text{e)}\left\{\begin{array}{l}
Z_x^{(2j)}=(-1)^j K\left[-2[1+k-j(2k+1)]\dfrac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_1}{\partial x}+\dfrac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial x}+\dfrac{\partial V_1}{\partial y}\right)}{\partial x}+\Delta_2^j U_1\right],\\[3ex]
Z_x^{(2j-1)}=(-1)^j K\left[-2[1+k-j(2k+1)]\dfrac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x}+\dfrac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial x}+\dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial x}+\Delta_2^j U_0\right],
\end{array}\right.
\end{array}\right\}(15)$$

$$
\text{f)}\left\{\begin{aligned}
X_y^{(2j)} &= (-1)^j K\left[2j(2k+1)\frac{\partial^2 \Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x\,\partial y} + \Delta_2^j\left(\frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x}\right)\right],\\
X_y^{(2j+1)} &= (-1)^j K\left[2j(2k+1)\frac{\partial^2 \Delta_2^{j-1}\Theta_1}{\partial x\,\partial y} + \Delta_2^j\left(\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x}\right)\right].
\end{aligned}\right\}\quad(15)
$$

Формулы a), b), c) и f) справедливы для всякаго j отъ 0 и т. д., а d) и e) для $j = 1, 2\ldots$ Кромѣ того

$$
\left.\begin{aligned}
Z_y^{(0)} &= K\left(\frac{\partial W_0}{\partial y} + V_1\right),\\
Z_x^{(0)} &= K\left(\frac{\partial W_0}{\partial x} + U_1\right).
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(16)
$$

§ 3.

Допустимъ теперь, что ряды, опредѣляющіе u, v, w и Θ, выражаются ограниченнымъ рядомъ членовъ, расположенныхъ по степенямъ перемѣнной z. Самое общее допущеніе, какъ видно изъ выраженій (11), (12) и (13), которое можетъ быть сдѣлано относительно Θ_0, U_0, V_0, Θ_1, U_1, V_1, необходимое и достаточное для выполненія требуемаго условія, состоитъ въ предположеніи, что эти функціи удовлетворяютъ уравненіямъ

$$
\Delta_2^n\Theta_0 = 0,\quad \Delta_2^n U_0 = 0,\quad \Delta_2^n V_0 = 0;\ \ldots\ldots(17)
$$

$$
\Delta_2^{n'}\Theta_1 = 0,\quad \Delta_2^{n'} U_1 = 0,\quad \Delta_2^{n'} V_1 = 0,\ \ldots\ldots(18)
$$

гдѣ n и n' какія либо цѣлыя числа, причемъ всегда можемъ принять $n = n'$. При этомъ поверхностныя условія (4), которыя должны быть удовлетворены при всякомъ z, разобьются на рядъ такихъ условій для функцій Θ_0, U_0, V_0, Θ_1, U_1 и V_1 и одно для W_0, при помощи котораго по уравненію (14) опредѣлится и функція W_0, если будутъ найдены U_1 и V_1. Принимая во вниманіе выраженія (15) и (16), представимъ равенства (4) въ видѣ слѣдующаго ряда таковыхъ для функцій Θ_0, U_0, V_0

$$
\left.\begin{aligned}
&2\left[k\Delta_2^j\Theta_0 + (2k+1)j\,\frac{\partial^2\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x^2} + \Delta_2^j\frac{\partial U_0}{\partial x}\right]\cos\alpha +\\
&+\left[2j(2k+1)\frac{\partial^2\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x\,\partial y} + \Delta_2^j\left(\frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x}\right)\right]\sin\alpha = 0,
\end{aligned}\right\}\ldots(19)
$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[2j(2k+1)\frac{\partial^2 \Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x\,\partial y}+\Delta_2^j\left(\frac{\partial U_0}{\partial y}+\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)\right]\cos\alpha+\\
&\quad+\left[k\Delta_2^j\Theta_0+(2k+1)j\frac{\partial^2\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial y^2}+\Delta_2^j\frac{\partial V_0}{\partial y}\right]\sin\alpha=0\,,\\
&\left[m_j\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x}+\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial x}+\Delta_2^j U_0\right]\cos\alpha+\\
&\quad+\left[m_j\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial y}+\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial y}+\Delta_2^j V_0\right]\sin\alpha=0\,,
\end{aligned}\right\}. \quad (19)$$

гдѣ j должно дать всѣ значенія отъ n до 0 въ первыхъ двухъ и отъ n до 1 въ послѣднемъ, а $m_j=-2[1+k-j(2k+1)]\ldots\ldots(\alpha)$

Точно такой же рядъ условій получимъ и для функцій Θ_1, U_1 и V_1, стоитъ только замѣнить въ выраженіяхъ (19) значокъ 0 значкомъ 1. Сверхъ того для функціи W_0 будемъ имѣть поверхностное условіе

$$\left(\frac{\partial W_0}{\partial x}+U_1\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial W_0}{\partial y}+V_1\right)\sin\alpha=0\,.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(19_1)$$

Уравненія (7), равносильныя уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned}
&\int X_z\,dq=A\,, && \int yZ_z\,dq=A'+Bl\,,\\
&\int Y_z\,dq=B\,, && \int xZ_z\,dq=Al-B'\,,\\
&\int Z_z\,dq=C\,, && \int(xY_z-yX_z)\,dq=C'\,,
\end{aligned}\right\}\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\ (7_1)$$

которыя должны имѣть мѣсто для какого угодно l, также разобьются на рядъ уравненій (каждое). При этомъ для всякаго $j>0$ эти уравненія будутъ

$$\left.\begin{aligned}
&\int\left[m_j\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x}+\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial x}+\Delta_2^j U_0\right]dq=0\,,\\
&\int\left[m_j\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial y}+\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial y}+\Delta_2^j V_0\right]dq=0\,,\\
&\qquad\int\left[\frac{m_j}{2}\Delta_2^j\Theta_0+\Delta_2^j\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)\right]dq=0\,,
\end{aligned}\right\}. \quad (20)'$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int x\left[\frac{m_j}{2}\Delta_2^j\Theta_0+\Delta_2^j\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)\right]dq=0\,,\\
&\int y\left[\frac{m_j}{2}\Delta_2^j\Theta_0+\Delta_2^j\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)\right]dq=0\,,\\
&\int\left\{x\left[m_j\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial y}+\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial y}+\Delta_2^jV_0\right]-\right.\\
&\left.-y\left[m_j\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\Theta_0}{\partial x}+\frac{\partial\Delta_2^{j-1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial x}+\Delta_2^jU_0\right]\right\}dq=0\,.
\end{aligned}\right\}.(20)'$$

Точно такія-же уравненія будутъ имѣть мѣсто и для функцій Θ_1, U_1 и V_1; выписывать ихъ я не буду.

Рѣшеніе вопроса приводится, такимъ образомъ, къ отысканію семи функцій W_0, Θ_0, U_0, V_0, Θ_1, U_1, V_1, удовлетворяющихъ дифференціальнымъ уравненіямъ въ частныхъ производныхъ (14), (17) и (18), поверхностнымъ условіямъ (19), (19_1) и уравненіямъ (20)'.

§ 4.

Такъ какъ условія, опредѣляющія Θ_0, U_0, V_0, Θ_1, U_1, V_1, совершенно одинаковы для всякаго $j>0$, то достаточно будетъ разсмотрѣть первыя три функціи; все сказанное о нихъ будетъ справедливо и для функцій Θ_1, U_1 и V_1 во всякомъ случаѣ, пока $j>0$. Итакъ, предположимъ, что Θ_0, U_0 и V_0 удовлетворяютъ уравненіямъ (17). Написавъ рядъ поверхностныхъ условій, начиная съ послѣдняго, по уравненіямъ (19), давая j значенія n, $(n-1)$, $(n-2)$, получимъ три группы такихъ условій въ видѣ

$$\text{a)}\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Delta_2^{n-1}\Theta_0}{\partial x^2}\cos\alpha+\frac{\partial^2\Delta_2^{n-1}\Theta_0}{\partial x\partial y}\sin\alpha=0\,,\\
&\frac{\partial^2\Delta_2^{n-1}\Theta_0}{\partial x\partial y}\cos\alpha+\frac{\partial^2\Delta_2^{n-1}\Theta_0}{\partial y^2}\sin\alpha=0\,,\\
&\left[m_n\frac{\partial\Delta_2^{n-1}\Theta_0}{\partial x}+\frac{\partial\Delta_2^{n-1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial x}\right]\cos\alpha+\\
&+\left[m_n\frac{\partial\Delta_2^{n-1}\Theta_0}{\partial y}+\frac{\partial\Delta_2^{n-1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial y}\right]\sin\alpha=0\,;
\end{aligned}\right\}.\,(20)$$

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{b)}\left\{\begin{array}{l}
2\left[k\Delta_2^{n-1}\Theta_0+(n-1)(2k+1)\dfrac{\partial^2\Delta_2^{n-2}\Theta_0}{\partial x^2}+\Delta_2^{n-1}\dfrac{\partial U_0}{\partial x}\right]\cos\alpha+\\
+\left[2(n-1)(2k+1)\dfrac{\partial^2\Delta_2^{n-2}\Theta_0}{\partial x\,\partial y}+\Delta_2^{n-1}\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial y}+\dfrac{\partial V_0}{\partial x}\right)\right]\sin\alpha=0,\\
\left[2(n-1)(2k+1)\dfrac{\partial^2\Delta_2^{n-2}\Theta_0}{\partial x\,\partial y}+\Delta_2^{n-1}\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial y}+\dfrac{\partial V_0}{\partial x}\right)\right]\cos\alpha+\\
+\left[k\Delta_2^{n-1}\Theta_0+(n-1)(2k+1)\dfrac{\partial^2\Delta_2^{n-2}\Theta_0}{\partial y^2}+\Delta_2^{n-1}\dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right]\sin\alpha=0,\\
\left[m_{n-1}\dfrac{\partial\Delta_2^{n-2}\Theta_0}{\partial x}+\dfrac{\partial\Delta_2^{n-2}\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial x}+\dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial x}+\Delta_2^{n-1}U_0\right]\cos\alpha+\\
+\left[m_{n-1}\dfrac{\partial\Delta_2^{n-2}\Theta_0}{\partial y}+\dfrac{\partial\Delta_2^{n-2}\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial x}+\dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial y}+\Delta_2^{n-1}V_0\right]\sin\alpha=0;
\end{array}\right.\\
\text{c)}\left\{\begin{array}{l}
2\left[k\Delta_2^{n-2}\Theta_0+(n-2)(2k+1)\dfrac{\partial^2\Delta_2^{n-3}\Theta_0}{\partial x^2}+\Delta_2^{n-2}\dfrac{\partial U_0}{\partial x}\right]\cos\alpha+\\
+\left[2(n-2)(2k+1)\dfrac{\partial^2\Delta_2^{n-3}\Theta_0}{\partial x\,\partial y}+\Delta_2^{n-2}\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial y}+\dfrac{\partial V_0}{\partial x}\right)\right]\sin\alpha=0,\\
\left[2(n-2)(2k+1)\dfrac{\partial^2\Delta_2^{n-3}\Theta_0}{\partial x\,\partial y}+\Delta_2^{n-2}\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial y}+\dfrac{\partial V_0}{\partial x}\right)\right]\cos\alpha+\\
+2\left[k\Delta_2^{n-2}\Theta_0+(n-2)(2k+1)\dfrac{\partial^2\Delta_2^{n-3}\Theta_0}{\partial y^2}+\Delta_2^{n-2}\dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right]\sin\alpha=0,\\
\left[m_{n-2}\dfrac{\partial\Delta_2^{n-3}\Theta_0}{\partial x}+\dfrac{\partial\Delta_2^{n-3}\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial x}+\dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial x}+\Delta_2^{n-2}U_0\right]\cos\alpha+\\
+\left[m_{n-2}\dfrac{\partial\Delta_2^{n-3}\Theta_0}{\partial y}+\dfrac{\partial\Delta_2^{n-3}\left(\dfrac{\partial U_0}{\partial x}+\dfrac{\partial V_0}{\partial y}\right)}{\partial y}+\Delta_2^{n-2}V_0\right]\sin\alpha=0.
\end{array}\right.
\end{array}\right\}\ (21)
$$

Положивъ для простоты

$$\Delta_2^{n-2}\Theta_0=\Theta_0';\quad \Delta_2^{n-2}U_0=U_0';\quad \Delta_2^{n-2}V_0=V_0',$$

приведемъ группы a) и b) къ виду

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{a}_1)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \Delta_2 \Theta_0'}{\partial x^2}\cos\alpha+\frac{\partial^2 \Delta_2 \Theta_0'}{\partial x\,\partial y}\sin\alpha=0\,,\\
&\frac{\partial^2 \Delta_2 \Theta_0'}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha+\frac{\partial^2 \Delta_2 \Theta_0'}{\partial y^2}\sin\alpha=0\,,\\
&\left[m_n\frac{\partial \Delta_2 \Theta_0'}{\partial x}+\frac{\partial \Delta_2\left(\frac{\partial U_0'}{\partial x}+\frac{\partial V_0'}{\partial y}\right)}{\partial x}\right]\cos\alpha+\\
&+\left[m_n\frac{\partial \Delta_2 \Theta_0'}{\partial y}+\frac{\partial \Delta_2\left(\frac{\partial U_0'}{\partial x}+\frac{\partial V_0'}{\partial y}\right)}{\partial y}\right]\sin\alpha=0\,;
\end{aligned}\right.\\
&\text{b}_1)\left\{\begin{aligned}
&2\left[k\Delta_2\Theta_0'+(n-1)(2k+1)\frac{\partial^2\Theta_0'}{\partial x^2}+\Delta_2\frac{\partial U_0'}{\partial x}\right]\cos\alpha+\\
&+\left[2(n-1)(2k+1)\frac{\partial^2\Theta_0'}{\partial x\,\partial y}+\Delta_2\left(\frac{\partial U_0'}{\partial y}+\frac{\partial V_0'}{\partial x}\right)\right]\sin\alpha=0\,,\\
&\left[2(n-1)(2k+1)\frac{\partial^2\Theta_0'}{\partial x\,\partial y}+\Delta_2\left(\frac{\partial U_0'}{\partial y}+\frac{\partial V_0'}{\partial x}\right)\right]\cos\alpha+\\
&+\left[k\Delta_2\Theta_0'+(n-1)(2k+1)\frac{\partial^2\Theta_0'}{\partial y^2}+\Delta_2\frac{\partial V_0'}{\partial y}\right]\sin\alpha=0\,,\\
&\left[m_{n-1}\frac{\partial\Theta_0'}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_0'}{\partial x}+\frac{\partial V_0'}{\partial y}\right)+\Delta_2 U_0'\right]\cos\alpha+\\
&+\left[m_{n-1}\frac{\partial\Theta_0'}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U_0'}{\partial x}+\frac{\partial V_0'}{\partial y}\right)+\Delta_2 V_0'\right]\sin\alpha=0\,,
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\}\;.(21_1)
$$

причемъ очевидно

$$\Delta_2(\Delta_2\Theta_0')=0\,,\quad \Delta_2(\Delta_2 U_0')=0\,,\quad \Delta_2(\Delta_2 V_0')=0\,,\;.\;.\;.\;.\;(22)$$

а слѣдовательно и

$$
\left.\begin{aligned}
&\Delta_2\frac{\partial\Delta_2\Theta_0'}{\partial x}=0\,,\quad \Delta_2\frac{\partial\Delta_2\Theta_0'}{\partial y}=0\,,\quad \Delta_2\frac{\partial\Delta_2 U_0'}{\partial x}=0\,,\\
&\Delta_2\frac{\partial\Delta_2 U_0'}{\partial y}=0\,,\quad \Delta_2\frac{\partial\Delta_2 V_0'}{\partial x}=0\,,\quad \Delta_2\frac{\partial\Delta_2 V_0'}{\partial y}=0\,.
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;(23)
$$

На основаніи этихъ уравненій, принимая во вниманіе поверхностныя условія α_1) (21_1), приходимъ къ заключенію, что необходимо

и

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \Delta_2 \Theta_0'}{\partial x}\right]=0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \Delta_2 \Theta_0'}{\partial x}\right]=0, \\ &\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \Delta_2 \Theta_0'}{\partial y}\right]=0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \Delta_2 \Theta_0'}{\partial y}\right]=0, \\ &\frac{\partial}{\partial x}\left[m_n \Delta_2 \Theta_0' + \Delta_2\left(\frac{\partial U_0'}{\partial x}+\frac{\partial V_0'}{\partial y}\right)\right]=0, \\ &\frac{\partial}{\partial y}\left[m_n \Delta_2 \Theta_0' + \Delta_2\left(\frac{\partial U_0'}{\partial x}+\frac{\partial V_0'}{\partial y}\right)\right]=0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (24)$$

т. е. что

$$\frac{\partial \Delta_2 \Theta_0'}{\partial x}=A_1, \quad \frac{\partial \Delta_2 \Theta_0'}{\partial y}=A_2$$

и

$$m_n \Delta_2 \Theta_0' + \Delta_2\left(\frac{\partial U_0'}{\partial x}+\frac{\partial V_0'}{\partial y}\right)=A,$$

гдѣ A_1, A_2, A произвольныя постоянныя.

Отсюда, обозначивъ черезъ A_3 новую произвольную постоянную, получаемъ

$$\Delta_2 \Theta_0' = A_1 x + A_2 y + A_3, \quad \ldots\ldots\ldots (25)$$

и еще

$$\Delta_2\left(\frac{\partial U_0'}{\partial x}+\frac{\partial V_0'}{\partial y}\right)=[A-m_n A_3]-m_n A_1 x - m_n A_2 y. \quad \ldots (26)$$

Приэтомъ третье, четвертое и пятое изъ уравненій (20) даютъ (при $j=n-1$)

$$\int Z_z^{2(n-1)} dq = 0, \quad \int Z_z^{2(n-1)} x dq = 0, \quad \int Z_z^{2(n-1)} y dq = 0. \quad \ldots (27)$$

Такъ какъ далѣе

$$Z_z^{2(n-1)} = (-1)^{(n+1)}\left[\frac{m_{n-1}}{2}\Delta_2 \Theta_0' + \Delta_2\left(\frac{\partial U_0'}{\partial x}+\frac{\partial V_0'}{\partial y}\right)\right],$$

то

$$Z_z^{2(n-1)} = (-1)^{n+1}\left[\left(\frac{m_{n-1}-2m_n}{2}A_3 + A\right) + \frac{m_{n-1}-2m_n}{2}A_1 x + \frac{m_{n-1}-2m_n}{2}A_2 y\right].$$

Положивъ для сокращенія

$$\alpha_1 = \left[\frac{m_{n-1} - 2m_n}{2} A_3 + A\right], \quad \alpha_2 = \frac{m_{n-1} - 2m_n}{2} A_1, \quad \alpha_3 = \frac{m_{n-1} - 2m_n}{2} A_2,$$

получимъ, на основаніи уравненій (27)

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 q + \alpha_2 \int x dq + \alpha_3 \int y dq = 0\,, \\ \alpha_1 \int x dq + \alpha_2 \int x^2 dq + \alpha_3 \int yx dq = 0\,, \\ \alpha_1 \int y dq + \alpha_2 \int xy dq + \alpha_3 \int y^2 dq = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (28)$$

гдѣ q величина площади сѣченія разсматриваемаго цилиндра.

Такъ какъ, вообще говоря, опредѣлитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} q\,, & \int x dq\,, & \int y dq \\ \int x dq\,, & \int x^2 dq\,, & \int yx dq \\ \int y dq\,, & \int xy dq\,, & \int y^2 dq \end{vmatrix}$$

не равенъ нулю *), то необходимо

$$\alpha_1 = \frac{m_{n-1} - 2m_n}{2} A_3 + A = 0, \quad \alpha_2 = \frac{m_{n-1} - 2m_n}{2} A_1 = 0\,,$$

$$\alpha_3 = \frac{m_{n-1} - 2m_n}{2} A_2 = 0\,,$$

а слѣдовательно $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$.

Такимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2 \Theta'_0 = A_3\,, \quad \Delta_2 \frac{\partial \Theta'_0}{\partial x} = 0\,, \quad \Delta_2 \frac{\partial \Theta'_0}{\partial y} = 0 \\ \text{и} \qquad \Delta_2 \left(\frac{\partial U'_0}{\partial x} + \frac{\partial V'_0}{\partial y}\right) = -\frac{m_{n-1} A_3}{2}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (29)$$

---

*) Я пока оставляю координатную систему вполнѣ произвольной. Если начало координатъ помѣстить въ центрѣ тяжести сѣченія, то $\Delta = q \int x^2 dq \cdot \int y^2 dq$ величина существенно положительная.

Представивъ второе изъ уравненій (22) въ видѣ

$$\frac{\partial^2 \varDelta_2 U_0'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varDelta_2 U_0'}{\partial y^2} = 0\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22_1)$$

продифференцировавъ послѣднее изъ уравненій (29) по x и вычтя результатъ изъ (22_1), получимъ

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\varDelta_2\left(\frac{\partial V_0'}{\partial x} - \frac{\partial U_0'}{\partial y}\right)\right] = 0\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

и точно также, при помощи третьяго изъ уравненій (22), найдемъ, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\varDelta_2\left(\frac{\partial V_0'}{\partial x} - \frac{\partial U_0'}{\partial y}\right)\right] = 0\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30_1)$$

такъ что

$$\varDelta_2\left(\frac{\partial V_0'}{\partial x} - \frac{\partial U_0'}{\partial y}\right) = B\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

гдѣ B произвольная постоянная.

§ 5.

Очевидно, что функціи Θ_0', U_0' и V_0', удовлетворяющія уравненіямъ (29) предыдущаго параграфа, непосредственно отождествляютъ группу (a_1) поверхностныхъ условій (21_1). Необходимо еще удовлетворить всѣмъ остальнымъ условіямъ, начиная съ группы (b_1).

На основаніи выраженій (29) и (31) первое изъ уравненій этой группы приметъ видъ (по сокращеніи на 2).

$$\left.\begin{aligned}&\left[kA_3 + \frac{\partial}{\partial x}\left\{(n-1)(2k+1)\frac{\partial \Theta_0'}{\partial x} + \varDelta_2 U_0'\right\}\right]\cos\alpha + \\ &+\left[\frac{B}{2} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{(n-1)(2k+1)\frac{\partial \Theta_0'}{\partial x} + \varDelta_2 U_0'\right\}\right]\sin\alpha = 0\,.\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (32)$$

Введемъ новую функцію F, положивъ

$$F = (n-1)(2k+1)\frac{\partial \Theta_0'}{\partial x} + \varDelta_2 U_0' + kA_3 x + \frac{B}{2}y + D_1'\,,$$

разумѣя подъ D_1' произвольную постоянную.

Такъ какъ, очевидно, функція F удовлетворяетъ уравненію

$$\varDelta_2 F = 0\,,$$

то заключаемъ, что

$$(n-1)(2k+1)\frac{\partial \Theta_0'}{\partial x} + \varDelta_2 U_0' + kA_3 x + \frac{B}{2}y + D_1 = 0\,, \quad . \quad . \quad (33)$$

гдѣ D_1 новая произвольная постоянная.

Точно также убѣдимся при помощи второго уравненія изъ группы (b_1) поверхностныхъ условій (21_1), что

$$(n-1)(2k+1)\frac{\partial \Theta_0'}{\partial y} + \varDelta_2 V_0' + kA_3 y - \frac{B}{2}x + D_2 = 0\,. \quad . \quad . \quad (33_1)$$

D_2 обозначаетъ произвольную постоянную.

При помощи уравненій (33) и (33_1) заключаемъ, что $A_3 = 0$. Въ самомъ дѣлѣ, продифференцировавъ первое изъ нихъ по x, второе по y и сложивъ, получимъ равенство

$$(n-1)(2k+1)\varDelta_2\Theta_0' + \varDelta_2\left(\frac{\partial U_0'}{\partial x} + \frac{\partial V_0'}{\partial y}\right) + 2kA_3 = 0\,,$$

которое, въ силу перваго и послѣдняго изъ уравненій (29), приметъ видъ

$$\left[2k + (n-1)(2k+1) - \frac{m_{n-1}}{2}\right] A_3 = 0\,,$$

или, принимая во вниманіе обозначеніе (α) § 3,

$$(3k+1)A_3 = 0\,,$$

откуда необходимо слѣдуетъ, что $A_3 = 0$ (ибо $3k+1$ не равно нулю), *) и уравненія (33) и (33_1) будутъ

---

*) Постоянная k связана съ постоянной μ, выражающей отношеніе величины поперечнаго линейнаго сжатія (или растяженія) къ величинѣ продольнаго растяженія (или сжатія) при растягиваніи (или сжатіи) цилиндра силами, приложенными къ его основанію, соотношеніемъ

$$\frac{1}{1-2\mu} = 2k+1\,.$$

Такъ какъ средняя величина μ (по опыту) равна 0,25, то $k = \frac{1}{2}$ и $3k+1 = \frac{5}{2}$. См. Бобылевъ, Гидростатика и теорія упругости. СПБ. 1886 года § 37, ст. 109 и 110.

$$\left.\begin{aligned} &(n-1)(2k+1)\frac{\partial \Theta_0'}{\partial x}+\varDelta_2 U_0'+\frac{B}{2}y+D_1=0\,,\\ &(n-1)(2k+1)\frac{\partial \Theta_0'}{\partial y}+\varDelta_2 V_0'-\frac{B}{2}x+D_2=0\,, \end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;(34)$$

а первое и послѣднее изъ уравненій (29) приведутся къ слѣдующимъ

$$\varDelta_2\Theta_0'=0 \quad \text{и} \quad \varDelta_2\left(\frac{\partial U_0'}{\partial x}+\frac{\partial V_0'}{\partial y}\right)=0\;\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(35)$$

§ 6.

Переходимъ теперь къ опредѣленію постоянныхъ B, D_1, D_2. Покажемъ, что онѣ необходимо равны нулю при данныхъ условіяхъ задачи. Послѣднее изъ поверхностныхъ условій группы (b_1), по занесеніи въ него вмѣсто $\varDelta_2 U_0'$ и $\varDelta_2 V_0'$ ихъ выраженій черезъ производныя отъ Θ_0', слѣдующихъ изъ уравненій (34), если положимъ для сокращенія

$$k_1=[m_{n-1}-(n-1)(2k+1)]\,,\;\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\beta)$$

представится въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} &\left[k_1\frac{\partial \Theta_0'}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_0'}{\partial x}+\frac{\partial V_0'}{\partial y}\right)-D_1-\frac{B}{2}y\right]\cos\alpha+\\ &+\left[k_1\frac{\partial \Theta_0'}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U_0'}{\partial x}+\frac{\partial V_0'}{\partial y}\right)-D_2+\frac{B}{2}x\right]\sin\alpha=0\,. \end{aligned}\right\}\;.\;(36)$$

Обозначивъ черезъ F_1 функцію вида

$$F_1=k_1\Theta_0'+\left[\frac{\partial U_0'}{\partial x}+\frac{\partial V_0'}{\partial y}\right)-D_1x-D_2y-D_3\,,$$

гдѣ D_3 нѣкоторая постоянная, получимъ

$$\left[\frac{\partial F_1}{\partial x}-\frac{B}{2}y\right]\cos\alpha+\left[\frac{\partial F_1}{\partial y}+\frac{B}{2}x\right]\sin\alpha=0\;.\;.\;.\;.\;.\;(37)$$

Такимъ образомъ функція F_1 удовлетворяетъ на поверхности (собственно на периферіи какого либо сѣченія, нормальнаго къ оси цилиндра) условію (37), а внутри цилиндра, какъ не трудно видѣть, уравненію

$$\varDelta_2F_1=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(38)$$

Уравненіе (38) въ связи съ поверхностнымъ условіемъ (37) вполнѣ опредѣляетъ функцію F_1, аналогичную функціи $b_0 B_0$ (по обозначенію Клебша) *), характеризующей явленіе крученія въ задачѣ С. Венана. Положивъ

$$F_1 = \frac{B}{2} F_2 ,$$

заключаемъ, что F_2 удовлетворяетъ уравненію

$$\Delta_2 F_2 = 0 , \ldots \ldots \ldots \ldots (38_1)$$

и на поверхности условію

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial F_2}{\partial y} \sin\alpha = y \cos\alpha - x \sin\alpha \ldots \ldots (37_1)$$

Предположимъ, что найдена такая (вполнѣ опредѣленная для каждаго сѣченія) функція координатъ, которую обозначимъ черезъ φ, тогда коэффиціенты при $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ въ выраженіи (36) будутъ

$$\frac{B}{2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right] \text{ и } \frac{B}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right).$$

Такъ какъ при этомъ

$$\int Z_x^{2(n-1)} dq = 0 , \quad \int Z_y^{2(n-1)} dq = 0$$

и

$$Z_x^{2(n-1)} = \frac{B}{2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right], \quad Z_y^{2(n-1)} = \frac{B}{2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right],$$

то

$$\frac{B}{2}\int\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right] dq = 0 , \quad \frac{B}{2}\int\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right] dq = 0 \ldots . (39)$$

Исключая предположеніе, что интегралы $\int\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right] dq$ и $\int\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right] dq$ одновременно равны нулю, заключаемъ, что необходимо $B = 0$. Допущеніе неравенства нулю вышеупомянутыхъ интеграловъ мнѣ кажется весьма естественнымъ при произвольномъ выборѣ координатной системы и произвольности периферіи сѣченія. Для подтвержденія сдѣланнаго общаго предположенія разсмотримъ случай эллиптическаго сѣченія, предполагая начало координатъ не въ центрѣ тяжести его и принимая для простоты за координатныя оси прямыя, параллельныя

*) См. Clebsch, „Theorie d. Elasticität fester Körper", § 24 etc.

главнымъ осямъ. Такъ какъ уравненіе (38_1) и условіе (37_1) опредѣляютъ вполнѣ функцію F_2, то всякая F_2, удовлетворяющая имъ, будетъ общимъ рѣшеніемъ уравненія (38_1) при условіи (37_1). Пусть

$$F_2 = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy\,,$$

гдѣ α_1, α_2, α_3 постоянныя, подлежащія опредѣленію. Называя черезъ α и β координаты центра тяжести и принявъ во вниманіе уравненіе эллипса

$$\frac{(x+\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y+\beta)^2}{b^2} = 1\,,$$

получаемъ, удовлетворяя условію (37_1), для опредѣленія α_i ($i=1, 2, 3$) слѣдующую систему уравненій

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 b^2 + (\alpha_3+1)a^2\beta &= 0\,,\\ \alpha_2 a^2 + (\alpha_3-1)b^2\alpha &= 0\,,\\ (\alpha_3-1)b^2 + (\alpha_3+1)a^2 &= 0\,,\\ b^2\alpha\alpha_1 + a^2\alpha_2\beta &= 0\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Три неизвѣстныхъ α_1, α_2, α_3 удовлетворяютъ четыремъ уравненіямъ (40), но послѣднее изъ нихъ есть слѣдствіе трехъ первыхъ, которыя даютъ

$$\alpha_3 = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\,,\qquad \alpha_2 = \frac{2b^2\alpha}{a^2+b^2}\,,\qquad \alpha_1 = -\frac{2a^2\beta}{a^2+b^2}\,,$$

четвертое удовлетворится само собою.

Такимъ образомъ

$$F_2 = -\frac{2a^2\beta}{a^2+b^2}\,x + \frac{2b^2\alpha}{a^2+b^2}\,y + \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\,xy = \varphi$$

и

$$\int\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right]dq = -\frac{2a^2}{b^2+a^2}\int(\beta+y)\,dq = -\frac{4a^2\beta q}{a^2+b^2}\,,$$

величинѣ отличной отъ нуля при такомъ-же β.

Впрочемъ, чтобы избѣжать недоразумѣній и не ограничивать доказательства, можно еще слѣдующимъ образомъ убѣдиться, что B необходимо равно нулю (всегда).

Послѣднее изъ уравненій (7) даетъ для всякаго $j>0$, а въ данномъ случаѣ для $j=(n-1)$ (n предполагается >1)

$$\int\left(xZ_y^{2(n-1)} - yZ_x^{2(n-1)}\right)dq = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7_6)$$

или

$$\frac{B}{2}\int\left[x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)-y\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)\right]dq=0\,,$$

откуда необходимо слѣдуетъ, что

$$\text{или}\quad B=0\,,\ \text{или}\quad \int\left[x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)-y\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)\right]dq=0\,.\,.\,(41)$$

Не трудно убѣдиться въ невозможности послѣдняго допущенія. Возьмемъ, въ самомъ дѣлѣ, интегралъ, распространенный на всю площадь сѣченія цилиндра, отъ функціи

$$\psi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)^2.$$

Обозначивъ его черезъ J, имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}J=\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)^2\right]dq=\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]dq+\\+2\int\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dq+\int(y^2+x^2)\,dq\,.\end{aligned}\right\}(42)$$

Такъ какъ φ удовлетворяетъ уравненію $\Delta_2\varphi=0$ (и предполагается однозначной непрерывной функціей координатъ), то

$$J_1=\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]dq=\int\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\sin\alpha\right)ds\,.\quad.\,(43)$$

Послѣдній изъ интеграловъ распространяется на всю периферію разсматриваемаго сѣченія.

Отсюда, въ силу условія (37_1), заключаемъ, что

$$J_1=\int\varphi(y\cos\alpha-x\sin\alpha)ds\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(44)$$

Съ другой стороны

$$J_2=\int\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dq=\int\left[\frac{\partial(x\varphi)}{\partial y}-\frac{\partial(y\varphi)}{\partial x}\right]dq=$$

$$=-\int\varphi(y\cos\alpha-x\sin\alpha)ds\,,$$

а потому, на основаніи равенствъ (43) и (44), находимъ

$$-\int\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dq=\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]dq\,,$$

и наконецъ

$$\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)^2\right]dq=\int\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}+x^2+y^2\right)dq\,. \quad (45)$$

Изъ этого равенства слѣдуетъ, что второе изъ условій (41) возможно лишь въ томъ случаѣ, когда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}+x=0\,, \quad \ldots\ldots\ldots (46)$$

чего, несомнѣнно, не можетъ быть. Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что вообще необходимо

$$B=0\,.$$

§ 7.

Итакъ, находимъ, что Θ'_0, U'_0 и V'_0 должны удовлетворять уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned}(n-1)\,(2k+1)\frac{\partial\Theta'_0}{\partial x}+\varDelta_2 U'_0+D_1=0\,,\\ (n-1)\,(2k+1)\frac{\partial\Theta'_0}{\partial y}+\varDelta_2 V'_0+D_2=0\,,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (34_1)$$

а функція F_1 уравненію (38) и условію

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial F_1}{\partial y}\sin\alpha=0\,, \quad \ldots\ldots\ldots (37_2)$$

откуда слѣдуетъ, что

$$k_1\Theta'_0+\left(\frac{\partial U'_0}{\partial x}+\frac{\partial V'_0}{\partial y}\right)-D_1x-D_2y-D_3=0 \quad \ldots\ldots (47)$$

Переходимъ теперь къ опредѣленію постоянныхъ D_1, D_2 и D_3.

Прежде всего обратимъ вниманіе на слѣдующее обстоятельство. Если имѣемъ двѣ функціи ψ_1 и ψ_2 (однозначныя и непрерывныя въ извѣстной части плоскости), удовлетворяющія уравненію

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi_2}{\partial y}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

и на поверхности условію

$$\psi_1 \cos\alpha + \psi_2 \sin\alpha = 0\,,\ \ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

то

$$\int \psi_1 dq = 0 \quad \text{и} \quad \int \psi_2 dq = 0\,,$$

гдѣ интеграція распространяется на всю площадь, ограниченную данной кривой, внутри которой эти функціи остаются непрерывными. Въ самомъ дѣлѣ, помножая поверхностное уравненіе (49) на x, и интегрируя по всей периферіи, имѣемъ

$$K = \int x(\psi_1 \cos\alpha + \psi_2 \sin\alpha)ds = 0\,.$$

Преобразуя этотъ линейный интегралъ въ поверхностный и принявъ во вниманіе уравненіе (48), получаемъ непосредственно

$$K = \int \psi_1 dq = 0\,.\ \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

Точно также легко убѣдиться, что и

$$\int \psi_2 dq = 0\,,\ \ldots\ldots\ldots \quad (50_1)$$

и кромѣ того

и

$$\left.\begin{aligned} &\int x\psi_1 dq = 0\,, \quad \int y\psi_2 dq = 0\,, \\ &\int (y\psi_1 + x\psi_2)dq = 0\,. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (51)$$

Послѣднія равенства получимъ, помноживъ уравненіе (49) соотвѣтственно на x^2, y^2 и xy и выполнивъ предыдущія преобразованія. Такъ какъ группы (a_1) и (b_1) поверхностныхъ условій (21_1) удовлетворяются сами собою, то переходимъ къ условіямъ группы (c) уравненій (21), которыя могутъ быть представлены (если примемъ во вниманіе выраженія (15)), въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} &X_x^{2(n-2)} \cos\alpha + X_y^{2(n-2)} \sin\alpha = 0\,, \\ &Y_x^{2(n-2)} \cos\alpha + Y_y^{2(n-2)} \sin\alpha = 0\,, \\ &Z_x^{2(n-2)} \cos\alpha + Z_y^{2(n-2)} \sin\alpha = 0\,. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (52)$$

Изъ этихъ выраженій легко получить нѣкоторыя равенства, при посредствѣ которыхъ убѣдимся, что постоянныя D_1, D_2 и D_3 необходимо равны нулю.

Такъ какъ несомнѣнно

$$\frac{\partial X_y^{2(n-2)}}{\partial x}+\frac{\partial Y_y^{2(n-2)}}{\partial y}=0\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

въ чемъ легко убѣдиться при помощи уравненій (34_2), то, на основаніи предыдущихъ сужденій, заключаемъ, что

$$\left.\begin{aligned}&\int X_x^{2(n-2)}dq=0\,,\ \int Y_y^{2(n-2)}dq=0\ \text{ и }\ \int X_y^{2(n-2)}dq=0\,,\\&\int xX_x^{2(n-2)}dq=0\,,\ \int yX_y^{2(n-2)}dq=0\,,\ \int xX_y^{2(n-2)}dq=0\,,\\&\int yY_y^{2(n-2)}dq=0,\ \int(yX_x^{2(n-2)}+xY_y^{2(n-2)})dq=0,\ \int(yX_y^{2(n-2)}+xY_y^{2(n-2)})dq=0.\end{aligned}\right\}(54)$$

Изъ этихъ равенствъ, какъ легко видѣть, слѣдуютъ еще

$$\int xY_y^{2(n-2)}dq=0\ \text{ и }\ \int yX_x^{2(n-2)}dq=0\,.\quad\ldots\ldots\quad(54_1)$$

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ (54) въ силу пятаго изъ нихъ получается первое изъ (54_1), вслѣдствіе котораго предпослѣднее изъ (54) даетъ и второе. Отсюда заключаемъ еще, что

$$\left.\begin{aligned}&\int[X_x^{2(n-2)}+Y_y^{2(n-2)}]dq=0\,,\quad \int x[X_x^{2(n-2)}+Y_y^{2(n-2)}]dq=0\\&\text{и}\\&\qquad\int y[X_x^{2(n-2)}+Y_y^{2(n-2)}]dq=0\,.\end{aligned}\right\}.\ (55)$$

Эти равенства мы и желали получить.

Замѣняя въ послѣднихъ выраженіяхъ $X_x^{2(n-2)}$ и $Y_y^{2(n-2)}$ ихъ выраженіями въ функціяхъ Θ_0, U_0 и V_0 (на основаніи равенства (15)), получаемъ

$$\left.\begin{aligned}&\int\left\{[2k+(n-2)(2k+1)]\varDelta_2^{n-2}\Theta_0+\varDelta_2^{n-2}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)\right\}dq=0\,,\\&\int x\left\{[2k+(n-2)(2k+1)]\varDelta_2^{n-2}\Theta_0+\varDelta_2^{n-2}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)\right\}dq=0\,,\\&\int y\left\{[2k+(n-2)(2k+1)]\varDelta_2^{n-2}\Theta_0+\varDelta_2^{n-2}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)\right\}dq=0\,,\end{aligned}\right\}(55_1)$$

или, подставивъ вмѣсто $\varDelta_2^{n-2}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)$ его выраженіе черезъ $\varDelta_2^{n-2}\Theta_0$, слѣдующее изъ уравненія (47), и принявъ во вниманіе обозначенія (α) и (β) (§§ 3, 7), находимъ

$$\left.\begin{aligned}&\int[(2k+1)\Delta_2^{n-2}\Theta_0+D_1x+D_2y+D_3]dq=0\,,\\&\int x\,[(2k+1)\Delta_2^{n-2}\Theta_0+D_1x+D_2y+D_3]dq=0\,,\\&\int y\,[(2k+1)\Delta_2^{n-2}\Theta_0+D_1x+D_2y+D_3]dq=0\,.\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (55_2)$$

Такъ какъ предполагается $n>2$ и такъ какъ для всякаго $j>0$ имѣютъ мѣсто три послѣднія изъ уравненій (20) (§ 3), то, кромѣ послѣднихъ уравненій (55_2), имѣемъ еще (подставивъ въ уравненія (20) вмѣсто $\Delta_2^{n-2}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)$ его выраженіе черезъ $\Delta_2\Theta_0$) слѣдующую систему условій

$$\left.\begin{aligned}&\int(k\Delta_2^{n-2}\Theta_0-D_1x-D_2y-D_3)\,dq=0\,,\\&\int x\,(k\Delta_2^{n-2}\Theta_0-D_1x-D_2y-D_3)\,dq=0\,,\\&\int y\,(k\Delta_2^{n-2}\Theta_0-D_1x-D_2y-D_3)\,dq=0\,,\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ (56)$$

ибо $\frac{m_{n-2}}{2}-k_1=k$ (въ силу обозначеній (α) и (β)).

Умноживъ каждое изъ уравненій (56) на $(2k+1)$, а каждое изъ уравненій (55_2) на k, и вычтя соотвѣтственно однѣ изъ другихъ, получимъ

$$\left.\begin{aligned}&D_3q+D_1\int xdq+D_2\int ydq=0\,,\\&D_3\int xdq+D_1\int x^2dq+D_2\int xydq=0\,,\\&D_3\int ydq+D_1\int xydq+D_2\int y^2dq=0,\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ (57)$$

откуда, подобно тому какъ въ § 4, заключаемъ, что необходимо

$$D_1=0\,,\quad D_2=0\,,\quad D_3=0\,,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (58)$$

что и требовалось доказать.

§ 8.

Такимъ образомъ убѣждаемся, что если функціи Θ_0, U_0 и V_0 удовлетворяютъ уравненіямъ (въ частныхъ производныхъ $2n$-аго порядка)

$$\Delta_2^n\Theta_0=0\,,\quad \Delta_2^nU_0=0\,,\quad \Delta_2^nV_0=0\,,$$

представляющимъ самыя общія условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы u, v, w и Θ выражались ограниченнымъ числомъ членовъ, расположенныхъ по степенямъ перемѣнной z, то онѣ при данныхъ условіяхъ задачи (высказанныхъ въ § 1), необходимо удовлетворятъ и уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} &(n-1)(2k+1)\frac{\partial \Delta_2^{n-2}\Theta_0}{\partial x}+\Delta_2^{n-1}U_0=0\,, \\ &(n-1)(2k+1)\frac{\partial \Delta_2^{n-2}\Theta_0}{\partial y}+\Delta_2^{n-1}V_0=0\,, \\ &k_1\Delta_2^{n-2}\Theta_0+\Delta_2^{n-2}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)=0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (59)$$

въ которыя обращаются уравненія (34_1) и (47) при $D_1=D_2=D_3=0$.

Задача приводится къ отысканію такихъ функцій Θ_0, U_0 и V_0, которыя, удовлетворяя этимъ уравненіямъ и уравненіямъ (7_1) (§ 3), отождествляли бы въ тоже время и рядъ поверхностныхъ условій, начиная съ группы (c) уравненій (21).

Не трудно замѣтить, что уравненія (59) могутъ быть представлены въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_2\left[(n-2)(2k+1)\frac{\partial \Delta_2^{n-3}\Theta_0}{\partial x}+\Delta_2^{n-2}U_0\right]+(2k+1)\frac{\partial \Delta_2^{n-2}\Theta_0}{\partial x}=0\,, \\ &\Delta_2\left[(n-2)(2k+1)\frac{\partial \Delta_2^{n-3}\Theta_0}{\partial y}+\Delta_2^{n-2}V_0\right]+(2k+1)\frac{\partial \Delta_2^{n-2}\Theta_0}{\partial y}=0\,. \end{aligned}\right\} (60)$$

Но, въ силу уравненій (11) и (12) (при $j=(n-2)$), имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} &(-1)^{(n-2)}\Delta_2^{n-2}\Theta_0=\Theta_{2(n-2)} \quad \text{и} \\ &(-1)^{(n-2)}\left[\Delta_2^{n-2}U_0+(n-2)(2k+1)\frac{\partial \Delta_2^{n-3}\Theta_0}{\partial x}\right]=U_{2(n-2)}\,, \\ &(-1)^{(n-2)}\left[\Delta_2^{n-2}V_0+(n-2)(2k+1)\frac{\partial \Delta_2^{n-3}\Theta_0}{\partial y}\right]=V_{2(n-2)}\,, \end{aligned}\right\} . (61)$$

а слѣдовательно функціи $\Theta_{2(n-2)}$, $U_{2(n-2)}$ и $V_{2(n-2)}$ удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_2 U_{2(n-2)}+(2k+1)\frac{\partial \Theta_{2(n-2)}}{\partial x}=0\,, \\ &\Delta_2 V_{2(n-2)}+(2k+1)\frac{\partial \Theta_{2(n-2)}}{\partial y}=0\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (62)$$

Дифференцируя второе изъ уравненій (61) по x, третье по y и складывая, имѣемъ

$$(-1)^{(n-2)}\left[\Delta_2^{n-2}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)+(n-2)(2k+1)\Delta_2^{n-2}\Theta_0\right]=\frac{\partial U_{2(n-2)}}{\partial x}+\frac{\partial V_{2(n-2)}}{\partial y},$$

а принявъ во вниманіе третье изъ уравненій (59) и замѣтивъ, что

$$(n-2)(2k+1)-k_1=1,$$

приводимъ предыдущее равенство (на основаніи перваго изъ уравненій (61)) къ виду

$$\Theta_{2(n-2)}=\frac{\partial U_{2(n-2)}}{\partial x}+\frac{\partial V_{2(n-2)}}{\partial y}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(63)$$

Первыя же два изъ поверхностныхъ условій (c) (равенствъ (21)), выраженныя въ функціяхъ $\Theta_{2(n-2)}$, $U_{2(n-2)}$ и $V_{2(n-2)}$, дадутъ

$$\left.\begin{aligned}2\left[k\Theta_{2(n-2)}+\frac{\partial U_{2(n-2)}}{\partial x}\right]\cos\alpha+\left[\frac{\partial U_{2(n-2)}}{\partial y}+\frac{\partial V_{2(n-2)}}{\partial x}\right]\sin\alpha=0,\\ \left[\frac{\partial U_{2(n-2)}}{\partial y}+\frac{\partial V_{2(n-2)}}{\partial x}\right]\cos\alpha+2\left[k\Theta_{2(n-2)}+\frac{\partial V_{2(n-2)}}{\partial y}\right]\sin\alpha=0.\end{aligned}\right\}.\;(64)$$

Такимъ образомъ функціи $\Theta_{2(n-2)}$, $U_{2(n-2)}$ и $V_{2(n-2)}$, удовлетворяя уравненіямъ (62) и (63), должны, между прочимъ, на поверхности отождествлять уравненія (64). Несомнѣнно, какъ то слѣдуетъ изъ уравненій (62) и (63), функціи эти можемъ разсматривать какъ проекціи на оси координатъ перемѣщеній точекъ при деформаціяхъ плоской фигуры въ ея плоскости, когда на массу ея площади, а также и на периферію, не дѣйствуетъ никакихъ силъ (что видно изъ уравненій (64)). Функціи $\Theta_{2(n-2)}$, $U_{2(n-2)}$ и $V_{2(n-2)}$, слѣдовательно, были бы равны нулю при условіяхъ опредѣленности задачи о равновѣсіи упругихъ тѣлъ. Въ данномъ случаѣ такихъ условій поставить нельзя, а потому выраженія этихъ функцій черезъ координаты точекъ тѣла будутъ содержать три произвольныхъ постоянныхъ, а самый общій видъ ихъ, какъ рѣшеній уравненій (62) и (63) при условіяхъ (64), будетъ

$$\Theta_{2(n-2)}=0\,,\quad U_{2(n-2)}=a+cy\,,\quad V_{2(n-2)}=b-cx\,.$$

Намъ нѣтъ пока надобности опредѣлять постоянныя a, b и c, важно замѣтить только, что (въ силу перваго изъ только что приведенныхъ уравненій)

$$\Delta_2^{n-2}\Theta_0=0\,,$$

откуда, принимая въ разсчетъ уравненія (59), заключаемъ, что необходимо

$$\Delta_2^{n-2} U_0 = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_2^{n-2} V_0 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (65)$$

§ 9.

Предыдущій анализъ приводитъ, такимъ образомъ, къ заключенію, что, если функціи Θ_0, U_0 и V_0 удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\Delta_2^n \Theta_0 = 0 , \quad \Delta_2^n U_0 = 0 , \quad \Delta_2^n V_0 = 0 ,$$

то, при извѣстныхъ условіяхъ разсматриваемой задачи, онѣ необходимо будутъ удовлетворять и уравненіямъ

$$\Delta_2^{n-1} \Theta_0 = 0 , \quad \Delta_2^{n-1} U_0 = 0 , \quad \Delta_2^{n-1} V_0 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (66)$$

Разсмотримъ ближе эти условія.

Сопоставляя все изложенное въ предыдущихъ параграфахъ, убѣждаемся, что только что сказанное будетъ справедливо для всякаго n, коль скоро 1) имѣютъ мѣсто группы a, b и c поверхностныхъ условій (21) *) и 2) уравненія равенства вектора и момента заданныхъ силъ и силъ напряженій, развивающихся при этомъ, вида (20).

Разсматривая уравненія (7_1), находимъ, что равенства (20) будутъ справедливы для всякаго $j > 0$, и, слѣдовательнс, для всякаго $n > 2$; что же касается поверхностныхъ условій (21), то для всякаго $n > 2$ несомнѣнно найдется три группы ихъ вида (21), причемъ для $n = 2$ третье условіе изъ группы (c) замѣнится поверхностнымъ условіемъ для функціи W_0

$$\left[\frac{\partial W_0}{\partial x} + U_1\right] \cos\alpha + \left[\frac{\partial W_0}{\partial y} + V_1\right] \sin\alpha = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (19_1)$$

Такимъ образомъ, если функціи Θ_0, U_0 и V_0 удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\Delta_2^n \Theta_0 = 0 , \quad \Delta_2^n U_0 = 0 , \quad \Delta_2^n V_0 = 0 ,$$

то *для всякаго* $n > 2$

$$\Delta_2^{n-1} \Theta_0 = 0 , \quad \Delta_2^{n-1} U_0 = 0 , \quad \Delta_2^{n-1} V_0 = 0 .$$

Для случая же $n = 2$, этого заключенія сдѣлать нельзя.

---

*) Въ послѣдней группѣ необходимы лишь два первыхъ изъ нихъ.

Однако все сказанное въ §§ 4, 5, 6 до 7 будетъ приложимо и для $n = 2$, ибо группы (a) и (b) поверхностныхъ условій (21), какъ замѣчено выше, а также и уравненія (7_6), будутъ имѣть мѣсто и при данномъ допущеніи, такъ что для $n = 2$ функціи Θ_0, U_0, V_0 необходимо будутъ удовлетворять уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} &(2k+1)\frac{\partial \Theta_0}{\partial x} + \Delta_2 U_0 + D_1 = 0\,, \\ &(2k+1)\frac{\partial \Theta_0}{\partial y} + \Delta_2 V_0 + D_2 = 0\,, \\ &k_1' \Theta_0 + \left[\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y}\right] - D_1 x - D_2 y - D_3 = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (67)$$

гдѣ $k_1' = -1$, а D_1, D_2 и D_3 вполнѣ опредѣленныя постоянныя, отличныя отъ нуля. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (55) имѣютъ мѣсто и въ разсматриваемомъ случаѣ и представятся въ видѣ

$$\text{и} \quad \left.\begin{aligned} &\int[X_x^{(0)} + Y_y^{(0)}]dq = 0\,, \quad \int x[X_x^{(0)} + Y_y^{(0)}]dq = 0\,, \\ &\int y[X_x^{(0)} + Y_y^{(0)}]dq = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (68)$$

а уравненія (56) замѣнятся, какъ легко видѣть изъ общихъ уравненій (7_1), слѣдующими

$$\int Z_z^{(0)} dq = C\,, \quad \int x Z_z^{(0)} dq = A\,, \quad \int y Z_z^{(0)} dq = A' . \; . \; . \; . \; . \; (69)$$

Но, принявъ во вниманіе равенства (15) и уравненія (67), находимъ, что

$$\left.\begin{aligned} X_x^{(0)} + Y_y^{(0)} &= 2K[(2k+1)\Theta_0 + D_1 x + D_2 y + D_3]\,, \\ Z_z^{(0)} &= 2K[k\Theta_0 - D_1 x - D_2 y - D_3]\,, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (70)$$

и слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned} &\int[(2k+1)\Theta_0 + D_1 x + D_2 y + D_3]dq = 0\,, \\ &\int x[(2k+1)\Theta_0 + D_1 x + D_2 y + D_3]dq = 0\,, \\ &\int y[(2k+1)\Theta_0 + D_1 x + D_2 y + D_3]dq = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (71)$$

и (уравненія (69))

$$\left.\begin{aligned}
&2K\int[k\Theta_0 - D_1x - D_2y - D_3)dq = C,\\
&2K\int x[k\Theta_0 - D_1x - D_2y - D_3)dq = A,\\
&2K\int y[k\Theta_0 - D_1x - D_2y - D_3)dq = A'.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (72)$$

Отсюда получаемъ такую систему уравненій для опредѣленія D_1, D_2 и D_3

$$\left.\begin{aligned}
&D_3\int dq + D_1\int xdq + D_2\int ydq = -\frac{C}{2K}\frac{(2k+1)}{(3k+1)},\\
&D_3\int xdq + D_1\int x^2dq + D_2\int xydq = -\frac{A}{2K}\frac{(2k+1)}{(3k+1)},\\
&D_3\int ydq + D_1\int xydq + D_2\int y^2dq = -\frac{A'}{2K}\frac{(2k+1)}{(3k+1)}.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (73)$$

Принимая начало координатъ въ центрѣ тяжести, а за оси x и y главныя оси инерціи сѣченія, находимъ

$$D_3 = -\frac{C(2k+1)}{2K(3k+1)q},\quad D_1 = -\frac{A\,(2k+1)}{2K(3k+1)}\frac{1}{q\lambda^2},\quad D_2 = -\frac{A'\,(2k+1)}{2K(3k+1)}\frac{1}{q\mu^2}, \quad (74)$$

гдѣ q площадь сѣченія, а λ и μ главные радіусы инерціи.

Итакъ, самыя общія выраженія для функцій Θ_0, U_0 и V_0, соотвѣтствующія требованію, чтобы u, v и w выражались цѣлыми раціональными функціями z, получатся рѣшеніемъ системы дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ втораго порядка (67) при поверхностныхъ условіяхъ

$$\left.\begin{aligned}
&2\left[k\Theta_0 + \frac{\partial U_0}{\partial x}\right]\cos\alpha + \left[\frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x}\right]\sin\alpha = 0,\\
&\left[\frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x}\right]\cos\alpha + 2\left[k\Theta_0 + \frac{\partial V_0}{\partial y}\right]\sin\alpha = 0.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (75)$$

§ 10.

Все сказанное о функціяхъ Θ_0, U_0 и V_0 относится и къ Θ_1, U_1 и V_1, такъ какъ, очевидно изъ уравненій (4) § 1, выраженій (11) и (12) § 2 и уравненій (7_1) § 3, онѣ удовлетворяютъ тѣмъ же условіямъ, какъ и первыя, и уравненіямъ

$$\Delta_2^{n_1}\Theta_1 = 0,\quad \Delta_2^{n_1}U_1 = 0,\quad \Delta_2^{n_1}V_1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (76)$$

гдѣ n_1 какое угодно цѣлое число. Поэтому приходимъ къ заключенію, что и самый общій видъ функцій Θ_1, U_1 и V_1, соотвѣтствующій разсматриваемому требованію, опредѣляется уравненіями

$$\Delta_2^2 \Theta_1 = 0\,, \quad \Delta_2^2 U_1 = 0\,, \quad \Delta_2^2 V_1 = 0\,,$$

которыя, въ свою очередь, приводятся къ слѣдующимъ

$$\left.\begin{aligned} &(2k+1)\frac{\partial \Theta_1}{\partial x} + \Delta_2 U_1 + E_1 = 0\,, \\ &(2k+1)\frac{\partial \Theta_1}{\partial y} + \Delta_2 V_1 + E_2 = 0\,, \\ &-\Theta_1 + \left[\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y}\right] - E_1 x - E_2 y - E_3 = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (77)$$

гдѣ E_1, E_2 и E_3 постоянныя, опредѣляемыя при помощи равенствъ

$$\left.\begin{aligned} &\int [X_x^{(1)} + Y_y^{(1)}]\,dq = 0, \;\; \int x[X_x^{(1)} + Y_y^{(1)}]\,dq = 0, \;\; \int y[X_x^{(1)} + Y_y^{(1)}]\,dq = 0, \\ &\qquad \int Z_z^{(1)}\,dq = 0, \;\; \int x Z_z^{(1)}\,dq = B', \;\; \int y Z_z^{(1)}\,dq = B, \end{aligned}\right\} (78)$$

какъ легко видѣть изъ уравненій (7_1).

Выражая $X_x^{(1)}$, $Y_y^{(1)}$, $Z_z^{(1)}$ черезъ Θ_1, получимъ уравненія аналогичныя (73), стоитъ только замѣнить въ послѣднихъ постоянныя D_i черезъ $E_i (i = 1\,,\,2\,,\,3)$, C нулемъ, а A и A' соотвѣтственно черезъ $-B'$ и B, т. е. уравненія

$$\left.\begin{aligned} &E_3 \int dq + E_1 \int x dq + E_2 \int y dq = 0\,, \\ &E_3 \int x dq + E_1 \int x^2 dq + E_2 \int xy dq = \frac{B'}{2K}\frac{(2k+1)}{(3k+1)}, \\ &E_3 \int y dq + E_1 \int xy dq + E_2 \int y^2 dq = -\frac{B}{2K}\frac{(2k+1)}{(3k+1)}, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (79)$$

которыя при системѣ координатъ съ началомъ въ центрѣ тяжести и осями x, y, направленными по главнымъ осямъ инерціи, дадутъ

$$E_3 = 0\,, \quad E_1 = \frac{B'}{2K}\frac{(2k+1)}{(3k+1)}\frac{1}{q\lambda^2}, \quad E_2 = -\frac{B}{2K}\frac{(2k+1)}{(3k+1)}\frac{1}{q\mu^2}. \quad . \; (80)$$

Поверхностныя условія, соотвѣтствующія уравненіямъ (77), будутъ

$$\left.\begin{aligned}&2\left[k\Theta_1+\frac{\partial U_1}{\partial x}\right]\cos\alpha+\left[\frac{\partial U_1}{\partial y}+\frac{\partial V_1}{\partial x}\right]\sin\alpha=0\,,\\&\left[\frac{\partial U_1}{\partial y}+\frac{\partial V_1}{\partial x}\right]\cos\alpha+\left[k\Theta_1+\frac{\partial V_1}{\partial y}\right]\sin\alpha=0\,.\end{aligned}\right\}\ldots(81)$$

Опредѣливъ Θ_0, U_0, V_0, Θ_1, U_1, и V_1 по уравненіямъ (67), (77) при условіяхъ (75) и (81), найдемъ затѣмъ и W_0 изъ уравненія

$$\varDelta_2 W_0=\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial V_1}{\partial y}-2(k+1)\Theta_1\,,\ \ldots\ldots(14)$$

при условіи на поверхности

$$\left[\frac{\partial W_0}{\partial x}+U_1\right]\cos\alpha+\left[\frac{\partial W_0}{\partial y}+V_1\right]\sin\alpha=0\,.\ \ldots\ (19_1)$$

§ 11.

Составимъ теперь выраженія для Θ_i, U_i, V_i $(i>1)$.

Принимая во вниманіе равенства (11), находимъ (на основаніи уравненій (67)),

$$\left.\begin{aligned}&U_2=+D_1\,,\quad U_3=+E_1\,,\ \text{и всякое}\ U_j=0\ \text{при}\ j>3\\&V_2=+D_2\,,\quad V_3=+E_2\,,\ \text{и всякое}\ V_j=0\ \text{при}\ j>3\\&W_1=-D_1x-D_2y-D_3\,,\\&W_2=-E_1x-E_2y-D_3\,,\ \text{а всякое}\ W_j=0\ \text{при}\ j>2.\end{aligned}\right\}.(82)$$

Такимъ образомъ проекціи перемѣщеній точекъ на координатныя оси будутъ

$$\left.\begin{aligned}u&=U_0+U_1z+U_2\frac{z^2}{2}+U_3\frac{z^3}{3!}\,,\\v&=V_0+V_1z+V_2\frac{z^2}{2}+V_3\frac{z^3}{3!}\,,\\w&=W_0+W_1z+W_2\frac{z^2}{2}\,.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(83)$$

Назовемъ деформацію, при которой всякая прямая параллельная оси z'овъ преобразуется въ алгебраическую кривую какой либо степени, параболической деформаціей (ибо деформированная кривая въ этомъ случаѣ необходимо парабола соотвѣтствующей степени). Сопоставляя все сказанное въ предыдущихъ параграфахъ и принявъ во вниманіе выраженія (83), приходимъ прежде всего къ слѣдующему заключенію: *если на боковую поверхность цилиндра и на внутреннія его массы не дѣйствуетъ никакихъ силъ, а къ одному изъ крайнихъ сѣченій приложены силы, проекціи вектора и момента которыхъ на координатныя оси имѣютъ заданныя величины* (A, B, C, A', B', C'), *то никакая параболическая деформація степени выше третьей невозможна.*

Иначе говоря: всякая прямая, въ естественномъ состояніи параллельная оси z'овъ (или образующей цилиндра), не можетъ преобразоваться въ алгебраическую кривую (параболу) выше третьей степени.

Принимая же во вниманіе аналогичную теорему, доказанную Maurice Lévy относительно задачи о равновѣсіи пластинокъ (Clebsch'а), и только что высказанное предложеніе, заключаемъ, что вообще при деформаціяхъ цилиндрическихъ тѣлъ, на массу которыхъ не дѣйствуетъ никакихъ силъ, а 1) къ одному изъ основаній приложены силы даннаго вектора и момента при отсутствіи силъ, дѣйствующихъ на боковую поверхность (условія задачи С. Венана), или 2) на боковую поверхность дѣйствуютъ заданныя силы (въ функціи координатъ) при отсутствіи силъ, дѣйствующихъ на основанія цилиндра (задача Clebsch'а) *невозможно, чтобы какая либо прямая, параллельная оси цилиндра до деформаціи, преобразовалась въ алгебраическую кривую (параболу) порядка выше третьяго.*

Что же касается напряженій X_x, Y_y . . . Z_z, то, на основаніи выраженій (15) и уравненій (67) и (77), заключаемъ, что

$$X_x^{(i)} = Y_y^{(i)} = Z_z^{(i)} = X_y^{(i)} = 0 \text{ при } i > 1$$

и

$$Z_x^{(i)} = Z_y^{(i)} = 0 \text{ при } i > 0 \,.$$

Отыскавъ затѣмъ функціи Θ_0, U_0 . . . W_0 по уравненіямъ (67), (77) и (14) при поверхностныхъ условіяхъ (75), (81) и (19_1), опредѣлимъ въ функціи координатъ и остальныя напряженія.

§ 12.

Такъ какъ уравненія (67) и условія (75) для функцій Θ_0, U_0 и V_0 вполнѣ аналогичны съ такими же уравненіями (77) и условіями (81) для функцій Θ_1, U_1 и V_1, можно остановиться на любыхъ изъ нихъ и, найдя рѣшенія, удовлетворяющія разсматриваемымъ уравненіямъ, по аналогіи непосредственно написать рѣшенія и для вторыхъ съ соотвѣтствующимъ измѣненіемъ буквъ и значковъ. Остановимся на первыхъ изъ нихъ.

Такъ какъ, далѣе, уравненія (67) могутъ быть разсматриваемы, или, лучше сказать, легко приводятся къ уравненіямъ, опредѣляющимъ слагающія перемѣщеній точекъ плоской фигуры въ ея плоскости подъ дѣйствіемъ нѣкоторыхъ (опредѣленныхъ) силъ, приложенныхъ къ ея периферіи, то всякія, какимъ бы то ни было путемъ найденныя функціи, удовлетворяющія этимъ уравненіямъ и соотвѣтствующимъ поверхностнымъ условіямъ, будутъ единственными необходимыми рѣшеніями разсматриваемыхъ уравненій. Не трудно видѣть, что уравненіямъ (67) можно удовлетворить, полагая

$$(2k+1)\frac{\partial \Theta_0}{\partial x} = -D_1, \quad (2k+1)\frac{\partial \Theta_0}{\partial y} = -D_2, \quad \Delta_2 U_0 = 0, \quad \Delta_2 V_0 = 0. \quad (84)$$

Отсюда

$$\Theta_0 = A_1 x + A_2 y + A_3 ,$$

гдѣ

$$A_1 = -\frac{D_1}{2k+1}, \; A_2 = -\frac{D_2}{2k+1}, \; A_3$$

нѣкоторыя, пока произвольныя, постоянныя.

При этомъ, какъ то слѣдуетъ изъ третьяго уравненія (67),

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} + 2k(A_1 x + A_2 y + A) = 0 , \quad . \; . \; . \; . \; . (85)$$

гдѣ A новая произвольная постоянная.

Отсюда, при помощи двухъ послѣднихъ изъ уравненій (84), называя черезъ B произвольную постоянную, находимъ

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} - \frac{\partial U_0}{\partial y} = -2k(A_1 y - A_2 x - B). \quad . \; . \; . \; . \; . (86)$$

Вслѣдствіе этого поверхностныя условія (75) принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned}
&\left[k(A_1x + A_2y + A_3) + \frac{\partial U_0}{\partial x}\right]\cos\alpha + \left[k(A_2x - A_1y + B) + \frac{\partial U_0}{\partial y}\right]\sin\alpha = 0,\\
&\left[k(A_1y - A_2x - B) + \frac{\partial V_0}{\partial x}\right]\cos\alpha + \left[k(A_1x + A_2y + A_3) + \frac{\partial V_0}{\partial y}\right]\sin\alpha = 0.
\end{aligned}\right\} (87)$$

Называя черезъ ψ_1 и ψ_2 двѣ функціи вида

$$\psi_1 = k\left[A_1 \frac{x^2 - y^2}{2} + A_2 xy + A_3 x + By\right],$$

$$\psi_2 = k\left[A_1 xy - A_2 \frac{x^2 - y^2}{2} - Bx + A_3 y\right],$$

находимъ, что

$$\frac{\partial(U_0+\psi_1)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial(U_0+\psi_1)}{\partial y}\sin\alpha=0\,,$$

$$\frac{\partial(V_0+\psi_2)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial(V_0+\psi_2)}{\partial y}\sin\alpha=0\,,$$

а такъ какъ очевидно

$$\varDelta_2(U_0+\psi_1)=0 \quad \text{и} \quad \varDelta_2(V_0+\psi_2)=0\,,$$

то

$$U_0+\psi_1=C_1 \quad \text{и} \quad V_0+\psi_2=C_2\,,$$

гдѣ C_1 и C_2 произвольныя постоянныя.

Такимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} U_0&=-k\Big[A_1\frac{x^2-y^2}{2}+A_2xy+A_3x+By\Big]+C_1\,,\\ V_0&=-k\Big[A_1xy+A_2\frac{y^2-x^2}{2}-Bx+A_3y\Big]+C_2\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (88)$$

Изъ этихъ уравненій, въ связи съ уравненіемъ (85), слѣдуетъ, между прочимъ, что $A=A_3$.

Разсуждая совершенно такъ же относительно функцій Θ_1, U_1 и V_1, получимъ

$$\left.\begin{aligned} U_1&=-k\Big[B_1\frac{x^2-y^2}{2}+B_2xy+B_3x+Cy\Big]+H_1\,,\\ V_1&=-k\Big[B_1xy+B_2\frac{y^2-x^2}{2}-Cx+B_3y\Big]+H_2\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (89)$$

гдѣ $B_i(i=1\,,\,2\,,\,3)$, C, H_1 и H_2 произвольныя постоянныя, причемъ

$$B_1=-\frac{E_1}{2k+1}\,,\quad B_2=-\frac{E_2}{2k+1}\,.$$

Уравненіе же, опредѣляющее функцію W_0, будетъ

$$\varDelta_2 W_0+2(2k+1)(B_1x+B_2y+B_3)=0\,. \quad \ldots \ldots (90)$$

При этомъ

$X_x^{(i)}=0$, $Y_y^{(i)}=0$ и $X_y^{(i)}=0$ при всякомъ i, начиная отъ нуля,

$Z_z^{(0)}=(3k+1)(A_1x+A_2y+A_3)$, $Z_z^{(1)}=(3k+1)(B_1x+B_2y+B_3)$,

$Z_x^{(0)}$ и $Z_y^{(0)}$ опредѣлятся по формуламъ (16), когда будетъ найдена функція W_0, а $Z_x^{(i)}=0$ и $Z_y^{(i)}=0$ при $i>0$ (какъ замѣчено раньше).

Изъ сказаннаго уже очевидно, что рѣшеніе, получаемое такимъ образомъ, совпадаетъ вполнѣ съ рѣшеніемъ С. Венана *); дальнѣйшаго изслѣдованія по этому производить не будемъ.

Принимая во вниманіе заключенія § 11, можемъ сказать, что *единственное общее рѣшеніе, обнимающее собою всѣ возможные случаи, когда всякая прямая, параллельная оси цилиндровъ, преобразуется въ алгебраическую (параболическую) кривую, есть рѣшеніе С. Венана.*

§ 13.

Предыдущій анализъ, кромѣ этихъ, непосредственно слѣдующихъ, заключеній, приводитъ и къ нѣкоторымъ другимъ, которыя, на мой взглядъ, могутъ имѣть нѣкоторый интересъ.

Прежде всего не трудно замѣтить, что высказанныя въ предыдущихъ параграфахъ сужденія будутъ справедливы и въ томъ случаѣ, когда силы (заданныя) дѣйствуютъ не только на одно изъ крайнихъ сѣченій цилиндрическаго тѣла, а также и на боковую его поверхность при извѣстныхъ, конечно, ограниченіяхъ. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что на послѣднюю дѣйствуютъ силы въ плоскостяхъ сѣченій, нормальныхъ къ оси цилиндра, проекціи которыхъ X и Y на координатныя оси суть

$$\left.\begin{aligned} X &= X_0 + X'z, \\ Y &= Y_0 + Y'z. \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(91)$$

Очевидно, что при этомъ весь рядъ поверхностныхъ условій до (75) и (81) останется неизмѣннымъ, а послѣднія приведутся къ виду

$$\left.\begin{aligned} 2\left[k\Theta_0+\frac{\partial U_0}{\partial x}\right]\cos\alpha+\left[\frac{\partial U_0}{\partial y}+\frac{\partial V_0}{\partial x}\right]\sin\alpha &= X_0, \\ \left[\frac{\partial U_0}{\partial y}+\frac{\partial V_0}{\partial x}\right]\cos\alpha+2\left[k\Theta_0-\frac{\partial V_0}{\partial y}\right]\sin\alpha &= Y_0, \end{aligned}\right\}\ldots(92)$$

и

$$\left.\begin{aligned} 2\left[k\Theta_1+\frac{\partial U_1}{\partial x}\right]\cos\alpha+\left[\frac{\partial U_1}{\partial y}+\frac{\partial V_1}{\partial x}\right]\sin\alpha &= X', \\ \left[\frac{\partial U_1}{\partial y}+\frac{\partial V_1}{\partial x}\right]\cos\alpha+2\left[k\Theta_1+\frac{\partial V_1}{\partial y}\right]\sin\alpha &= Y'. \end{aligned}\right\}\ldots(93)$$

---

*) См. Clebsch, „Theorie d. Elasticität fester Körper". Leipzig. 1862.

Уравненія же (67) и (77), для вывода которыхъ мы не пользовались уравненіями (75) и (81), будутъ имѣть мѣсто и въ разсматриваемомъ случаѣ.

Функціи X_0, Y_0, X' и Y'. выражающіяся въ четырехъ функціяхъ U_i, V_i $(i=0, 1)$, вполнѣ произвольны.

Задача, такимъ образомъ, приводится къ опредѣленію этихъ послѣднихъ четырехъ функцій по уравненіямъ (67) и (77) при условіяхъ (92) и (93), причемъ должны быть удовлетворены еще уравненія (7_1) при $j=0$ и $j=1$, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} \int Z_z^0\, dq = C, \quad \int Z_z^{(1)} dq = 0, \quad \int x Z_z^{(0)} dq = A, \\ \int x Z_z^{(1)} dq = -B', \quad \int y Z_z^{(0)} dq = A', \quad \int y Z_z^{(1)} dq = B, \\ \int X_z^{(0)} dq = A, \quad \int Y_z^{(0)} dq = B, \quad \int (x Y_z^{(0)} - y Z_x^{(0)}) dq = C'. \end{array}\right\} . \quad (94)$$

При этомъ, конечно, для полученія вполнѣ опредѣленнаго рѣшенія, необходимо удовлетворить общимъ условіямъ, что при $x=y=z=0$

$$\left.\begin{array}{c} u = v = w = 0, \\ \dfrac{dv}{dx} = 0, \quad \dfrac{dw}{dx} = 0, \quad \dfrac{dw}{dy} = 0. \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (95)$$

Такъ какъ (см. предыдущій §) задача приводится въ этомъ случаѣ къ опредѣленію деформацій двухъ плоскихъ пластинокъ въ ихъ плоскости (слагающія перемѣщеній которыхъ по осямъ координатъ соотвѣтственно равны U_0, V_0, U_1 и V_1) подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ кривыхъ ихъ ограничивающихъ, то выраженія черезъ координаты функцій U_i, V_i $(i=0, 1)$ будутъ содержать (для каждаго значенія i) три произвольныхъ постоянныхъ, изъ которыхъ постоянныя, соотвѣтствующія величинамъ U_0, V_0, обратятся въ нуль въ силу условій (95), а остальныя три, входящія въ выраженія функцій U_1 и V_1, и постоянныя D_i, E_i $(i=1, 2, 3)$ опредѣлятся по уравненіямъ (94) (ибо W_0 выражается при помощи U_1 и V_1).

Слагающія перемѣщеній u, v и w по прежнему будутъ цѣлыми функціями отъ z не выше третьей степени (выраж. (83)), а слѣдовательно можемъ сказать, что *если на одно изъ крайнихъ сѣченій цилиндрическаго тѣла дѣйствуютъ силы даннаго вектора и момента (ихъ проекціями на координатныя оси), а на боковую поверхность силы, лежащія въ плоскостяхъ сѣченій, перпендикулярныхъ къ образующимъ цилиндра, проекціи которыхъ на оси координатъ суть*

$$X = X_0 + X'z, \quad Y = Y_0 + Y'z,$$

то всякая прямая, параллельная оси цилиндра, не можетъ деформироваться въ алгебраическую (параболическую) кривую порядка выше третьяго. Иначе говоря, при разсматриваемыхъ условіяхъ не можетъ быть параболической деформаціи выше деформаціи третьяго порядка, и рѣшеніе ей соотвѣтствующее найдется рѣшеніемъ уравненій (67) и (77) при условіяхъ (92), (93), (94) и (95).

§ 14.

Рѣшимъ эту задачу сначала для простѣйшаго случая, когда сила, дѣйствующая на боковую поверхность, нормальна къ ней и равна $C_0 + C_1 z$, гдѣ C_0 и C_1 нѣкоторыя (данныя) постоянныя, т. е. представляетъ собою силу давленія (или растяженія), возрастающую пропорціонально растоянію сѣченій отъ основанія цилиндра.

Равенства (92) и (93) въ такомъ случаѣ принимаютъ, вообще говоря, видъ

$$\left.\begin{aligned}&\left[2\left(k\Theta_i + \frac{\partial U_i}{dx}\right) - C_i\right]\cos\alpha + \left(\frac{\partial U_i}{dy} + \frac{\partial V_i}{dx}\right)\sin\alpha = 0\,,\\&\left[\frac{\partial U_i}{dy} + \frac{\partial V_i}{dx}\right]\cos\alpha + \left[2\left(k\Theta_i + \frac{\partial V_i}{dy}\right) - C_i\right]\sin\alpha = 0\,,\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (96)$$

при $i = 0\,,\ 1$.

Уравненіямъ (67), подобно предыдущему, можно удовлетворить, полагая

$$\Delta_2 U_0 = 0\,, \quad \Delta_2 V_0 = 0\,, \quad \frac{\partial \Theta_0}{dx} = A_1\,, \quad \frac{\partial \Theta_0}{dy} = A_2\,, \quad . \; . \; . \; (97)$$

гдѣ

$$A_1 = -\frac{D_1}{2k+1}\,, \; A_2 = -\frac{D_2}{2k+1}\,,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}&\Theta_0 = A_1 x + A_2 y + A_3\,,\\&\frac{\partial U_0}{dx} + \frac{\partial V_0}{dy} + 2k(A_1 x + A_2 y + A) = 0\,,\\&\frac{\partial V_0}{dx} - \frac{\partial U_0}{dy} = -\,2k(A_1 y - A_2 x - B)\,.\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (98)$$

Условія (96) приэтомъ представятся въ видѣ (для $i = 0$)

$$\left.\begin{aligned}&\left[\frac{\partial U_0}{dx} + k(A_1 x + A_2 y + A_3')\right]\cos\alpha + \left[\frac{\partial U_0}{dy} - k(A_1 y - A_2 x - B)\right]\sin\alpha = 0,\\&\left[\frac{\partial V_0}{dx} + k(A_1 y - A_2 x - B)\right]\cos\alpha + \left[\frac{\partial V_0}{dy} + k(A_1 x + A_2 y + A_3')\right]\sin\alpha = 0,\end{aligned}\right\}(99)$$

ничѣмъ существенно не отличающемся отъ вида условій (97), причемъ

$$kA_3' = \left(kA_3 - \frac{C_0}{2}\right)$$

и A_3 произвольная постоянная.

Вводя, затѣмъ функціи ψ_1 и ψ_2:

$$\psi_1 = k[A_1 \frac{x^2-y^2}{2} + A_2xy + A_3'x + By],$$

$$\psi_2 = k[A_1xy - A_2 \frac{x^2-y^2}{2} - Bx + A_3'y],$$

найдемъ, что

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= -k[A_1 \frac{x^2-y^2}{2} + A_2xy + A_3'x + By] + F_1, \\ V_0 &= -k[A_1xy + A_2 \frac{y^2-x^2}{2} - Bx + A_3'y] + F_2, \end{aligned}\right\} . \quad (100)$$

и точно также

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1 &= B_1x + B_2y + B_3, \\ U_1 &= -k[B_1 \frac{x^2-y^2}{2} + B_2xy + B_3'x + Cy] + H_1, \\ V_1 &= -k[B_1xy + B_2 \frac{y^2-x^2}{2} - Cx + B_3'y] + H_2, \end{aligned}\right\} . \quad (101)$$

гдѣ C, F_1, F_2, H_1, H_2 и B_3 произвольныя постоянныя, а

$$kB_3' = \left(kB_3 - \frac{C_1}{2}\right),$$

при помощи же третьяго изъ уравненій (77) находимъ, что

$$B_1 = -\frac{E_1}{2k+1}, \quad B_2 = -\frac{E_2}{2k+1}, \quad B_3(2k+1) = C_1 + E_3 = 0.$$

Функція W_0 удовлетворяетъ уравненію

$$\Delta_2 W_0 = -2(2k+1)(B_1x + B_2y) - 2(2k+1)B_3 + C_1,$$

или

$$\Delta_2 W_0 = -2(2k+1)[B_1x + B_2y + B_3 - C_1'],$$

гдѣ

$$C_1' = \frac{C_1}{2(2k+1)}.$$

Полагая затѣмъ

$$W_0 = \Omega - (2k+1)\left[\frac{B_3 - C_1'}{2}(x^2+y^2) + B_1 xy^2 + B_2 yx^2\right] + C - H_1 x - H_2 y,$$

приводимъ окончательное рѣшеніе вопроса къ отысканію функціи Ω, удовлетворяющей уравненію

$$\Delta_2 \Omega = 0$$

при поверхностномъ условіи

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\sin\alpha = B_1\left\{\left[\frac{(3k+2)y^2 + kx^2}{2}\right]\cos\alpha + (5k+2)xy\sin\alpha\right\} +$$

$$+ B_2\left[(5k+2)xy\cos\alpha + \frac{(3k+2)x^2 + ky^2}{2}\sin\alpha\right] +$$

$$+ \left[(2k+1)(B_3 - C_1') + kB_3'\right]\left[x\cos\alpha + y\sin\alpha\right] + \left[kC(y\cos\alpha - x\sin\alpha)\right],$$

откуда заключаемъ, что

$$(2k+1)(B_3 - C_3') + kB_3' = 0, \quad \text{т. е. } B_3 = \frac{C_1}{3k+1}.$$

Составляя затѣмъ выраженія для u, v и w и удовлетворяя необходимымъ условіямъ опредѣленности задачи равновѣсія цилиндрическаго тѣла, находимъ

$$B = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad C = 0, \quad H_1 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_0, \quad H_2 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_0^{*)},$$

и величины u, v и w представятся въ видѣ

$$\left.\begin{aligned}
u = & -k\left[A_1\frac{x^2 - y^2}{2} + A_2 xy + A_3' x\right] - k\left[B_1\frac{x^2 - y^2}{2} + B_2 xy + Cy\right]z + \\
& + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_0 z - (2k+1)A_1\frac{z^2}{2} - (2k+1)\frac{B_1}{6}z^3 + C_1\frac{k+1}{2(3k+1)}xz, \\
v = & -k\left[A_1 xy + A_2\frac{y^2 - x^2}{2} + A_3' y\right] - k\left[B_1 xy + B_2\frac{y^2 - x^2}{2} - Cx\right]z + \\
& + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_0 z - (2k+1)A_2\frac{z^2}{2} - (2k+1)\frac{B_2}{6}z^3 + C_1\frac{k+1}{2(3k+1)}yz,
\end{aligned}\right\} \quad (102)$$

---

*) Скобки со значкомъ о внизу въ послѣднихъ двухъ равенствахъ обозначаютъ значеніе частныхъ производныхъ по x и y функціи Ω при $x = y = 0$.

$$\left.\begin{aligned} w = \Omega - \frac{k+1}{4(3k+1)} C_1(x^2+y^2) - B_1(2k+1)xy^2 - B_2(2k+1)yx^2 - \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)_0 x - \left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)_0 y + \\ + (2k+1)(A_1x + A_2y + A_3)z - C_0z + (2k+1)[B_1x + B_2y]\frac{z^2}{2} - \frac{kC_1}{3k+1}\frac{z^2}{2}. \end{aligned}\right\} (102)$$

Формулы эти, точно также какъ и соотвѣтствующія выраженія u, v и w въ рѣшеніи задачи С. Венана, содержатъ шесть произвольныхъ постоянныхъ A_1, A_2, A_3, B_1, B_3 и C. Всѣ онѣ опредѣлятся, какъ нетрудно убѣдиться, по уравненіямъ (7_1) независимо отъ постоянныхъ C_0 и C_1 черезъ A, B, C и A', B', C'. Деформаціи гнутія, крученія и растяженія сопровождаются въ разсматриваемомъ случаѣ особой деформаціей, которую получимъ, положивъ всѣ постоянныя A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 и C равными нулю, при которой, слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{C_0}{2}x + \frac{C_1(k+1)}{2(3k+1)}xz, \\ v &= \frac{C_0}{2}y + \frac{C_1}{2}\frac{(k+1)}{(3k+1)}yz, \\ w &= -C_0z - \frac{kC_1}{3k+1}\frac{z^2}{2} - \frac{k+1}{3k+1}\frac{C_1}{4}(x^2+y^2). \end{aligned}\right\} . (103)$$

Если будемъ разсматривать z какъ время и заставимъ цилиндръ вращаться равномѣрно ускоренно (въ положительномъ или отрицательномъ направленіи, смотря по общему знаку постоянныхъ C_0 и C_1, если знаки ихъ одинаковы), или равномѣрно замедленно (если знаки ихъ различны), то въ каждый моментъ времени прямая, перпендикулярная къ скорости какой-либо точки и по величинѣ равная ей, представитъ проекцію перемѣщенія этой точки на плоскость xoy для высоты z, соотвѣтствующей разсматриваемому моменту времени. Всякая прямая, параллельная оси цилиндра, остается прямой, а образующія нѣкотораго круговаго цилиндра

$$x^2 + y^2 = a^2$$

преобразуются въ прямолинейныя образующія гиперболоида (однополаго) вращенія, уравненіе котораго

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2\left[1 + \frac{C_0}{2} + \frac{C_1(k+1)}{2(3k+1)}\zeta\right]^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (104)$$

въ чемъ легко убѣдиться, подставляя вмѣсто x и y въ предыдущее уравненіе ихъ выраженія черезъ ξ, η и ζ, получаемыя изъ равенствъ

$$\xi = x + u', \quad \eta = y + v',$$

гдѣ ξ, η, ζ координаты точки x, y, z послѣ деформаціи, а u' и v' имѣютъ значеніе, указанное въ § 1.

Всякое сѣченіе $z = \text{const.}$ деформируется въ поверхность втораго порядка, уравненіе которой

$$\zeta = z - C_0 z - \frac{kC_1}{2(3k+1)} \frac{z^2}{2} + \frac{k+1}{3k+1} \frac{C_1}{4} (\xi^2 + \eta^2), \; . \; . \; (105)$$

т. е. въ параболоидъ вращенія, ось котораго параллельна оси z'овъ. Замѣтимъ еще, что если черезъ u_1, v_1 и w_1 назовемъ проекціи на оси координатъ перемѣщеній, соотвѣтствующихъ деформаціи подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ концу цилиндра, при отсутствіи силъ, дѣйствующихъ на боковую поверхность, а черезъ u_2, v_2 и w_2 тѣ же величины для деформаціи, обусловленной силой давленія $(C_0 + C_1 z)$, дѣйствующей на боковую поверхность при отсутствіи силъ, дѣйствующихъ на основанія, то u, v и w, полученныя при рѣшеніи разсматриваемой задачи, представляющей соединеніе первыхъ двухъ, равны суммѣ соотвѣтственныхъ величинъ въ послѣднихъ, такъ что

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2.$$

Не останавливаясь подробнѣе на этомъ частномъ случаѣ, перейдемъ къ рѣшенію болѣе общей задачи, предполагая X_0, X', Y_0 и Y' произвольными функціями координатъ, а основаніе цилиндра кругомъ радіуса a (простѣйшій случай).

§ 15.

Въ § 12 было упомянуто, что уравненія (67) (а также и (77)) могутъ быть приведены къ уравненіямъ, опредѣляющимъ проекціи на координатныя оси перемѣщеній точекъ плоской фигуры при деформаціи ея подъ дѣйствіемъ нѣкоторыхъ силъ, приложенныхъ къ периферіи, ея ограничивающей, и лежащихъ въ ея плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, введемъ вмѣсто функцій Θ_0, U_0, V_0 (чтобы остановиться на чемъ нибудь опредѣленномъ, я буду разсматривать, подобно предыдущему, только уравненія (67), ибо уравненія (77) ничѣмъ по существу не отличаются отъ первыхъ) три другія Θ'_0, U'_0, V'_0, связанныя съ первыми соотношеніями вида

$$\left.\begin{aligned} \Theta_0 &= \Theta'_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3, \\ U_0 &= U'_0 + \frac{\beta_1}{4}(x^2 + y^2), \\ V_0 &= V'_0 + \frac{\beta_2}{4}(x^2 + y^2), \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; (106)$$

гдѣ $\alpha_i \, (i = 1, \; 2, \; 3)$, $\beta_i \, (i = 1, \; 2)$ нѣкоторыя постоянныя.

Опредѣливъ эти постоянныя при помощи уравненій

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= 2(\alpha_1 + D_1), \quad (2k+1)\alpha_1 + \beta_1 + D_1 = 0, \\ \beta_2 &= 2(\alpha_2 + D_2), \quad (2k+1)\alpha_2 + \beta_2 + D_2 = 0, \\ & \alpha_3 + D_3 = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (107)$$

приводимъ уравненія (67) къ слѣдующимъ

$$\left.\begin{aligned} (2k+1)\frac{\partial \Theta'_0}{\partial x} + \Delta_2 U'_0 &= 0, \\ (2k+1)\frac{\partial \Theta'_0}{\partial y} + \Delta_2 V'_0 &= 0, \\ \Theta'_0 = \frac{\partial U'_0}{\partial x} &+ \frac{\partial V'_0}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (108)$$

Рѣшеніемъ этой системы дифференціальныхъ уравненій при поверхностныхъ условіяхъ

$$\left.\begin{aligned} 2\left[k\Theta'_0 + \frac{\partial U'_0}{\partial x}\right]\cos\alpha + \left[\frac{\partial U'_0}{\partial y} + \frac{\partial V'_0}{\partial x}\right]\sin\alpha &= X_1, \\ \left[\frac{\partial U'_0}{\partial y} + \frac{\partial V'_0}{\partial x}\right]\cos\alpha + 2\left[k\Theta'_0 + \frac{\partial V'_0}{\partial y}\right]\sin\alpha &= X_2, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (109)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \left[\frac{kD_1}{2k+3}x + \frac{3kD_2}{2k+3}y + kD_3\right]\cos\alpha - \left[\frac{2kD_2}{2k+3}x + \frac{2kD_1}{2k+3}y\right]\sin\alpha + X_0, \\ X_2 &= -\left[\frac{2kD_2}{2k+3}x + \frac{2kD_1}{2k+3}y\right]\cos\alpha + \left[\frac{3kD_1}{2k+3}x + \frac{kD_2}{2k+3}y + kD_3\right]\sin\alpha + Y_0, \end{aligned}\right\} (110)$$

а X_0 и Y_0 заданныя функціи координатъ (см. § 13), опредѣлимъ функціи Θ'_0, U'_0, V'_0, а по формуламъ (106) и искомыя Θ_0, U_0 и V_0.

Тоже самое должно, конечно, сказать и о функціяхъ Θ_1, U_1 и V_1.

Такимъ образомъ рѣшеніе вопроса приводится къ интегрированію двухъ уравненій въ частныхъ производныхъ вида

$$\left.\begin{aligned} 2(k+1)\frac{\partial^2 U'_0}{\partial y^2} + (2k+1)\frac{\partial^2 V'_0}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 U'_0}{\partial y^2} &= 0, \\ 2(k+1)\frac{\partial^2 V'_0}{\partial y^2} + (2k+1)\frac{\partial^2 U'_0}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 V'_0}{\partial x^2} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (111)$$

при условіяхъ (109). Введя новую постоянную μ вмѣсто k, связанную съ послѣдней соотношеніемъ $\frac{1}{1+k}=1-\mu$, получимъ

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial^2 U_0'}{\partial x^2}+(1+\mu)\frac{\partial^2 V_0'}{\partial x\partial y}+(1-\mu)\frac{\partial^2 U_0'}{\partial y^2}=0\,, \\ 2\frac{\partial^2 V_0'}{\partial y^2}+(1+\mu)\frac{\partial^2 U_0'}{\partial x\partial y}+(1-\mu)\frac{\partial^2 V_0'}{\partial x^2}=0\,, \end{aligned}\right\}\quad\ldots(111_1)$$

уравненія, тождественныя съ уравненіями, опредѣляющими деформацію упругой пластинки въ задачѣ Clebsch'а (см. его „Theorie d. Elasticität" ст. 166 etc).

Положивъ далѣе

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U_0'}{\partial x}+\frac{\partial V_0'}{\partial y}=\xi\,,\quad \frac{\partial U_0'}{\partial y}-\frac{\partial V_0'}{\partial x}=\eta\,, \\ \frac{\partial U_0'}{\partial x}-\frac{\partial V_0'}{\partial y}=\xi'\,,\quad \frac{\partial U_0'}{\partial y}+\frac{\partial V_0'}{\partial x}=\eta'\,, \end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(112)$$

и введя полярную систему координатъ съ полюсомъ въ центрѣ разсматриваемаго круга, служащаго основаніемъ цилиндру, приведемъ условія (109) къ виду

$$\left.\begin{aligned} (1-\mu)X_1=[(1+\mu)\xi+(1-\mu)\xi']\cos\vartheta+(1-\mu)\eta'\sin\vartheta\,, \\ (1-\mu)X_2=(1-\mu)\eta'\cos\vartheta+[(1+\mu)\xi-(1-\mu)\xi']\sin\vartheta\,. \end{aligned}\right\}.\,(113)$$

Выраженія эти аналогичны таковымъ же въ вышеупомянутой задачѣ Clebsch'а и отличаются отъ послѣднихъ лишь тѣмъ, что не содержатъ членовъ съ h^2 (h высота упругой пластинки). Поэтому мы можемъ прямо воспользоваться рѣшеніемъ Clebsch'а съ соотвѣтственными измѣненіями.

Такимъ образомъ заключаемъ, что

$$\left.\begin{aligned} \xi=\frac{1}{2}\left[\sum_0^\infty A_k r^k\cos k\vartheta+\sum_0^\infty B_k r^k\sin k\vartheta\right], \\ \eta=\frac{1}{(1-\mu)}\left[\sum_0^\infty B_k r^k\cos k\vartheta-\sum_0^\infty A_k r^k\sin k\vartheta\right], \end{aligned}\right\}\quad\ldots(114)$$

гдѣ A_k и B_k нѣкоторыя постоянныя, выражающіяся опредѣленнымъ образомъ черезъ функціи X_1 и X_2 (выраженія ихъ мы дадимъ нѣсколько позже).

*

Далѣе

$$\left.\begin{aligned}\xi' &= \varrho\cos 2\vartheta + \sigma\sin 2\vartheta + \sum_0^\infty C_k r^k \cos k\vartheta + \sum_0^\infty D_k r^k \sin k\vartheta\,,\\ \eta' &= \varrho\sin 2\vartheta - \sigma\cos 2\vartheta + \sum_0^\infty D_k r^k \cos k\vartheta - \sum_0^\infty C_k r^k \sin k\vartheta\,,\end{aligned}\right\}\ . \quad (115)$$

гдѣ C_k, D_k $(k = 0\,,\ 1 \ldots \infty)$ постоянныя, а

$$\left.\begin{aligned}\varrho &= -\frac{(1+\mu)}{4(1-\mu)}\left[\sum_0^\infty kB_k r^k \sin k\vartheta + \sum_0^\infty kA_k r^k \cos k\vartheta\right],\\ \sigma &= -\frac{(1+\mu)}{4(1-\mu)}\left[\sum_0^\infty kA_k r^k \sin k\vartheta - \sum_0^\infty kB_k r^k \cos k\vartheta\right].\end{aligned}\right\}\ . \ . \quad (116)$$

Равенства (113) затѣмъ, при посредствѣ выраженій (114), (115) и (116), дадутъ

$$\begin{aligned}(1-\mu)[X_1\cos\vartheta + X_2\sin\vartheta] &= \frac{(1+\mu)}{2}\left[\sum_0^\infty A_k a^k \cos k\vartheta + \sum_0^\infty B_k a^k \sin k\vartheta\right] -\\ &\quad - \frac{1+\mu}{4}\left[\sum_0^\infty kA_k a^k \cos k\vartheta + \sum_0^\infty kB_k a^k \sin k\vartheta\right] +\\ &\quad + (1-\mu)\left[\sum_2^\infty C_{k-2} a^{k-2} \cos k\vartheta + \sum_2^\infty D_{k-2} a^{k-2} \sin k\vartheta\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-\mu)[X_2\cos\vartheta - X_1\sin\vartheta] &= \frac{(1+\mu)}{4}\left[\sum_0^\infty kA_k a^k \sin k\vartheta - \sum_0^\infty kB_k a^k \cos k\vartheta\right] +\\ &\quad + (1-\mu)\left[\sum_2^\infty D_{k-2} a^{k-2} \cos k\vartheta - \sum_2^\infty C_{k-2} a^{k-2} \sin k\vartheta\right],\end{aligned}$$

откуда прежде всего находимъ, что

$$\left.\begin{aligned}A_0 &= \frac{1-\mu}{(1+\mu)\pi}\int_0^{2\pi} (X_1\cos\vartheta + X_2\sin\vartheta)\,d\vartheta\,,\\ A_1 &= \frac{4(1-\mu)}{a\pi(1+\mu)}\int_0^{2\pi} (X_1\cos\vartheta + X_2\sin\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta\,,\\ B_1 &= \frac{4(1-\mu)}{a\pi(1+\mu)}\int_0^{2\pi} (X_1\cos\vartheta + X_2\sin\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta\,,\end{aligned}\right\}\ . \ . \quad (117)$$

и затѣмъ для всякаго $k>1$

$$(1-\mu)\int_0^{2\pi}(X_1\cos\vartheta+X_2\sin\vartheta)\cos k\vartheta\,d\vartheta=$$

$$=-\pi\frac{(1+\mu)(k-2)}{4}a^kA_k+(1-\mu)\pi C_{k-2}a^{k-2},$$

$$(1-\mu)\int_0^{2\pi}(X_2\cos\vartheta-X_1\sin\vartheta)\sin k\vartheta\,d\vartheta=\pi\frac{1+\mu}{4}ka^kA_k-(1-\mu)\pi C_{k-2}a^{k-2},$$

$$(1-\mu)\int_0^{2\pi}(X_1\cos\vartheta+X_2\sin\vartheta)\sin k\vartheta\,d\vartheta=$$

$$=-\pi\frac{(1+\mu)(k-2)}{4}a^kB_k+(1-\mu)\pi a^{k-2}D_{k-2},$$

$$(1-\mu)\int_0^{2\pi}(X_2\cos\vartheta+X_1\sin\vartheta)\cos k\vartheta\,d\vartheta=$$

$$=-\pi\frac{1+\mu}{4}ka^kB_k+(1-\mu)\pi a^{k-2}D_{k-2}.$$

Рѣшая первыя два изъ этихъ уравненій относительно A_k и C_{k-2}, а послѣднія два относительно B_k и D_{k-2} и замѣнивъ въ выраженіяхъ C_{k-2}, D_{k-2} значекъ $k-2$ черезъ k, получимъ для всякаго k

$$\left.\begin{aligned}A_k&=\frac{2(1-\mu)}{(1+\mu)a^k\pi}\int_0^{2\pi}[X_1\cos(k+1)\vartheta+X_2\sin(k+1)\vartheta]d\vartheta,\\B_k&=\frac{2(1-\mu)}{(1+\mu)a^k\pi}\int_0^{2\pi}[X_1\sin(k+1)\vartheta-X_2\cos(k+1)\vartheta]d\vartheta.\end{aligned}\right\}\quad(118)$$

$$\left.\begin{aligned}C_k&=\frac{k+2}{2\pi a^k}\int_0^{2\pi}[X_1\cos(k+3)\vartheta+X_2\sin(k+3)\vartheta]d\vartheta-\\&\quad-\frac{1}{\pi a^k}\int_0^{2\pi}[X_2\cos\vartheta-X_1\sin\vartheta]\sin(k+2)\vartheta\,d\vartheta,\\D_k&=\frac{k+2}{2\pi a^k}\int_0^{2\pi}[X_1\sin(k+3)\vartheta-X_2\cos(k+3)\vartheta]d\vartheta+\\&\quad+\frac{1}{\pi a^k}\int_0^{2\pi}[X_2\cos\vartheta-X_1\sin\vartheta]\cos(k+2)\vartheta\,d\vartheta.\end{aligned}\right\}.\quad(119)$$

Итакъ, всѣ постоянныя выражаются черезъ функціи X_1 и X_2, содержащія три произвольныхъ постоянныхъ D_i $(i=1, 2, 3)$.

Такъ какъ далѣе

$$dU_0' = \frac{\xi+\xi'}{2}dx + \frac{\eta+\eta'}{2}dy\,,$$

$$dV_0' = -\frac{\eta-\eta'}{2}dx + \frac{\xi-\xi'}{2}dy\,,$$

а ξ, ξ', η и η' найдены въ функціи r и ϑ, найдемъ U_0' и V_0' въ функціи этихъ-же перемѣнныхъ, а именно

$$\left.\begin{aligned}
U_0' &= \mathrm{M}_1 + \frac{(3-\mu)}{8(1-\mu)}\left[\sum_0^\infty \frac{1}{k+1}A_k r^{k-1}\cos(k+1)\vartheta + \sum_0^\infty \frac{1}{k+1}B_k r^{k-1}\sin(k+1)\vartheta\right] - \\
&\quad - \frac{(1+\mu)}{8(1-\mu)}\Bigg[r(A_0\cos\vartheta - B_0\sin\vartheta) + A_1 r^2 + \sum_0^\infty r^{k+3}A_{k+2}\cos(k+1)\vartheta + \\
&\qquad\qquad + \sum_0^\infty r^{k+3}B_{k+2}\sin(k+1)\vartheta\Bigg] + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\sum_0^\infty \frac{1}{k+1}C_k r^{k+1}\cos(k+1)\vartheta + \sum_0^\infty \frac{1}{(k+1)}D_k r^{k+1}\sin(k+1)\vartheta\right], \\
V_0' &= \mathrm{M}_2 + \frac{3-\mu}{8(1-\mu)}\left[\sum_0^\infty \frac{1}{k+1}A_k r^{k+1}\sin(k+1)\vartheta - \sum_0^\infty \frac{1}{k+1}B_k r^{k+1}\cos(k+1)\vartheta\right] - \\
&\quad - \frac{1+\mu}{8(1-\mu)}\Bigg[r(A_0\sin\vartheta + B_0\cos\vartheta) - B_1 r^2 + \sum_0^\infty r^{k+3}A_{k+2}\sin(k+1)\vartheta - \\
&\qquad\qquad - \sum_0^\infty r^{k+3}B_{k+2}\cos(k+1)\vartheta\Bigg] + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\sum_0^\infty \frac{1}{(k+1)}C_k r^{k+1}\sin(k+1)\vartheta - \sum_0^\infty \frac{1}{k+1}D_k r^{k+1}\cos(k+1)\vartheta\right].
\end{aligned}\right\} \quad (120)$$

Эти выраженія содержатъ шесть произвольныхъ постоянныхъ M_1, M_2, B_0 и D_i $(i=1\,,\,2\,,\,3)$. Не трудно убѣдиться далѣе, на основаніи выраженій (110), (117), (118) и (119), что

$$A_0 = L_0' D_3 + N_0\,,$$

$$A_1 = L_1' D_1 + N_1\,,$$

$$B_1 = L_2' D_2 + N_2\,,\ ^{*)}$$

а остальныя постоянныя A_k и B_k $(k>1)$ и C_k, D_k (при всякомъ k) не зависятъ отъ постоянныхъ D_i $(i=1\,,\,2\,,\,3)$, такъ что, обозначивъ че-

*) Смыслъ обозначеній L_i', N_i' $(i=0\,,\,1\,,\,2)$ понятенъ самъ собой.

резъ S_1 и S_2 части, не зависящія отъ послѣднихъ въ выраженіяхъ (120), имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} U'_0 &= M_1 + L_0 D_3 r\cos\vartheta + L_1 D_1 r^2\cos 2\vartheta + L_2 D_2 r^2 \sin 2\vartheta + \\ &\qquad + L_3 D_1 r^2 + S_1\,, \\ V'_0 &= M_2 + L_0 D_3 r\sin\vartheta + L_1 D_1 r^2 \sin 2\vartheta - L_2 D_2 r^2\cos 2\vartheta - \\ &\qquad - L_3 D_2 r^2 + S_2\,, \end{aligned}\right\} \quad (121)$$

гдѣ L_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ нѣкоторыя (вполнѣ опредѣленныя) постоянныя.

Все сказанное относительно функцій Θ_0, U_0 и V_0 относится отъ слова до слова и къ функціямъ Θ_1, U_1 и V_1, стоитъ только замѣнить въ предыдущихъ формулахъ значекъ 0 на 1, постоянныя D_i черезъ E_i $(i=1,\ 2,\ 3)$, а постоянныя M_i $(i=1,\ 2)$, A_k, B_k, C_k, D_k соотвѣтственно черезъ M'_i $(i=1,\ 2)$, A'_k, B'_k, C'_k, D'_k $(k=0,\ 1\ldots\infty)$, выражающіяся черезъ функціи X' и Y' также какъ первыя черезъ X_0 и Y_0.

Такимъ образомъ заключаемъ непосредственно, что

$$\left.\begin{aligned} U'_1 &= M'_1 + L'_0 E_3 r\cos\vartheta + L'_1 E_1 r^2\cos 2\vartheta + L'_2 E_2 r^2 \sin 2\vartheta + L'_3 E_1 r^2 + S'_1\,, \\ V'_1 &= M'_2 + L'_0 E_3 r\sin\vartheta + L'_1 E_1 r^2 \sin 2\vartheta - L'_2 E_2 r^2\cos 2\vartheta - L'_3 E_2 r^2 + S'_2\,, \end{aligned}\right\} (122)$$

гдѣ M'_i, L'_i, *) E_i постоянныя, а S'_1 и S'_2 функціи, соотвѣтствующія S_1 и S_2 въ равенствахъ (121). По этимъ формуламъ найдемъ U_0, V_0, U_1 и V_1. Остается опредѣлить функцію W_0, удовлетворяющую уравненію

$$\Delta_2 W_0 = -\frac{1+\mu}{1-\mu}\left[\frac{\partial U'_1}{\partial x} + \frac{\partial V'_1}{\partial y}\right] + \frac{2}{1+\mu}[E'_1 x + E'_2 y + E_3], \quad (123)$$

къ которому легко приводится уравненіе (14) при помощи третьяго изъ уравненій (77), если замѣнимъ при этомъ постоянную k ея выраженіемъ черезъ μ; здѣсь E'_1 и E'_2 постоянныя, пропорціональныя E_1 и E_2.

Полагая далѣе

$$W_0 = \Omega + \frac{1}{1-\mu}\left[E_3\frac{x^2+y^2}{2} + E'_1 xy^2 + E'_2 yx^2\right], \ .\ .\ . \ (124)$$

находимъ

$$\Delta_2 \Omega = -\frac{1+\mu}{1-\mu}\left[\frac{\partial U'_1}{\partial x} + \frac{\partial V'_1}{\partial y}\right].$$

---

*) Постоянныя, обозначенныя здѣсь черезъ L'_i, отличны отъ постоянныхъ L'_i $(i=0,\ 1,\ 2)$ послѣднихъ формулъ предыд. стр.

Преобразуя это уравненіе къ полярнымъ координатамъ, получаемъ

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\vartheta^2}=-\frac{1+\mu}{1-\mu}\xi_1, \quad \ldots\ldots (125)$$

гдѣ ξ_1 соотвѣтствуетъ ξ въ предыдущихъ сужденіяхъ, такъ что

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\vartheta^2}=-\sum_0^{\infty}(A''_k r^k\cos k\vartheta+B''_k r^k\sin k\vartheta)\,, \quad (125_1)$$

причемъ положено для сокращенія

$$A''_k=\frac{1}{2}\frac{1+\mu}{1-\mu}A'_k\,,\quad B''_k=\frac{1}{2}\frac{1+\mu}{1-\mu}B'_k\,.$$

Частнымъ рѣшеніемъ этого уравненія, какъ легко замѣтить, будетъ функція

$$\Omega_1=\sum_0^{\infty}P_k r^{k+2}\cos k\vartheta+Q_k r^{k+2}\sin k\vartheta\,. \quad \ldots\ldots (126)$$

Составляя въ самомъ дѣлѣ уравненіе (125_1), находимъ

$$\sum_0^{\infty}\{[4(k+1)P_k+A''_k]r^k\cos k\vartheta+[4(k+1)Q_k+B''_k]r^k\sin k\vartheta\}=0\,,$$

и слѣдовательно

$$P_k=-\frac{A''_k}{4(k+1)}\quad \text{и}\quad Q_k=-\frac{B''_k}{4(k+1)}\,.$$

Общее его рѣшеніе представится въ видѣ суммы двухъ функцій Ω и Ω_2, изъ которыхъ послѣдняя должна удовлетворять уравненію

$$\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_2}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial\vartheta^2}=0\,. \quad \ldots\ldots (127)$$

Положимъ

$$\Omega_2=\sum_0^{\infty}(R_k\cos k\vartheta+S_k\sin k\vartheta)\,,$$

гдѣ R_k и S_k нѣкоторыя функціи r. Подставивъ это значеніе Ω_2 въ предыдущее уравненіе, получимъ слѣдующія уравненія для опредѣленія функцій R_k и S_k

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 R_k}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial R_k}{\partial r}-\frac{k^2R_k}{r^2}=0,\\&\frac{\partial^2 S_k}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial S_k}{\partial r}-\frac{k^2S_k}{r^2}=0.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (128)$$

Этимъ уравненіямъ можно удовлетворить, полагая

$$R_k = R_k' r^k + \frac{R_k''}{r^k}$$

$$S_k = S_k' r^k + \frac{S_k''}{r^k}$$

гдѣ R_k', S_k', R_k'', S_k'' произвольныя постоянныя.

Предполагая W_0 (а слѣдовательно и Ω) непрерывною функціей внутри разсматриваемаго сѣченія цилиндра, необходимо положить

$$R_k'' = 0 \quad \text{и} \quad S_k'' = 0 .$$

Такимъ образомъ

$$\Omega_2 = \sum_0^{\infty} (R_k' r^k \cos k\vartheta + S_k' r^k \sin k\vartheta) ,$$

и наконецъ

$$\Omega = \sum_0^{\infty} \{ r^k [R_k' + P_k r^2] \cos k\vartheta + r^k [S_k' + Q_k r^2] \sin k\vartheta \} . \; . \; . \; (129)$$

При этомъ равенство (19_1) даетъ

$$\frac{\partial W_0}{\partial r} = -[U_1 \cos\vartheta + V_1 \sin\vartheta] \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (130)$$

Такъ какъ

$$\frac{\partial W_0}{\partial r} = \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{(1+\mu)} [E_3 r + 3E_1' r^2 \cos\vartheta \sin^2\vartheta + 3E_2' r^2 \sin\vartheta \cos^2\vartheta] ,$$

то

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{1}{1-\mu} \left[E_3 r + 3E_k' r^2 \cos\vartheta \sin^2\vartheta + 3E_2' r^2 \sin\vartheta \cos^2\vartheta \right] = \\ &= -\left[\frac{\mu E_1'}{3-\mu} r^2 \cos\vartheta + \frac{\mu E_2'}{3-\mu} r^2 \sin\vartheta \right] - \left[U_1' \cos\vartheta + V_1' \sin\vartheta \right] . \end{aligned}\right\} (131)$$

Выраженія, опредѣляющія U_1' и V_1' въ видѣ рядовъ, расположенныхъ по sinus'амъ и cosinus'амъ кратныхъ дугъ, получатся, какъ было замѣчено выше, непосредственно изъ (120), стоитъ только замѣнить въ нихъ значекъ 0 значкомъ 1 при функціяхъ U' и V', а вмѣсто постоянныхъ M_i $(i=1, 2)$, A_k, B_k, C_k, D_k ввести аналогичныя имъ M_i' $(i=1, 2)$ A_k', B_k', C_k', D_k' $(k=0, 1..\infty)$.

На основаніи этого, пользуясь съ указанными измѣненіями вышеупомянутыми равенствами, находимъ

$$[U_1'\cos\vartheta + V_1'\sin\vartheta] = M_1'\cos\vartheta + M_2'\sin\vartheta +$$
$$+ \frac{3-\mu}{8(1-\mu)}\left\{\sum_0^\infty\left(\frac{1}{k+1}A_k'r^{k+1}\cos k\vartheta + \frac{1}{k+1}B_2'r^{k+1}\sin k\vartheta\right)\right\} -$$
$$- \frac{1+\mu}{8(1-\mu)}A_0'r - \frac{1+\mu}{8(1-\mu)}\left[\sum_0^\infty\left(A_{k+2}'r^{k+3}\cos k\vartheta + B_{k+2}'r^{k+3}\sin k\vartheta\right)\right] -$$
$$- \frac{1+\mu}{8(1-\mu)}A_1r^2\cos\vartheta + \frac{1+\mu}{8(1-\mu)}B_1r^2\sin\vartheta +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_0^\infty\left(\frac{1}{k+1}C_k'r^{k+1}\cos k\vartheta + \frac{1}{k+1}D_k'r^{k+1}\sin k\vartheta\right),$$

а положивъ для сокращенія

$$L_k' = \frac{3-\mu}{8(1-\mu)}\frac{1}{k+1}A_k'r^{k+1} - \frac{1+\mu}{8(1-\mu)}A_{k+2}'r^{k+3} + \frac{1}{2}\frac{1}{k+1}C_k'r^{k+1},$$

$$M_k' = \frac{3-\mu}{8(1-\mu)}\frac{1}{k+1}B_k'r^{k+1} - \frac{1+\mu}{8(1-\mu)}B_{k+2}'r^{k+3} + \frac{1}{2}\frac{1}{k+1}D_k'r^{k+1},$$

имѣемъ

$$[U_1'\cos\vartheta + V_1'\sin\vartheta] = - \frac{1+\mu}{8(1-\mu)}A_0'r + (M_k' - \frac{1+\mu}{8(1-\mu)}A_1r^2)\cos\vartheta +$$
$$+ (M_2' + \frac{1+\mu}{8(1-\mu)}B_1r^2)\sin\vartheta + \sum_0^\infty(L_k'\cos k\vartheta + M_k'\sin k\vartheta).$$

Замѣтивъ, что кромѣ того

$$[E_3r + 3E_1'r^2\cos\vartheta\sin^2\vartheta + 3E_2'r^2\sin\vartheta\cos^2\vartheta] =$$
$$= E_3r + \frac{3E_1'r^2}{4}[\cos\vartheta - \cos 3\vartheta] + \frac{3E_2'r^2}{4}(\sin\vartheta + \sin 3\vartheta),$$

подставивъ эти послѣднія выраженія въ (131) и собирая члены съ sinus'ами и cosinus'ами одинаковой кратности дугъ, получаемъ

$$\frac{\partial\Omega}{\partial r} = F_0 + F_1\cos\vartheta + H_1\sin\vartheta + F_3\cos 3\vartheta + H_3\sin 3\vartheta + \sum_0^\infty(L_k'\cos k\vartheta + M_k'\sin k\vartheta),$$

гдѣ

$$F_0 = \left[-\frac{E_3}{1-\mu} + \frac{1+\mu}{8(1-\mu)} A_0' \right] r,$$

$$F_1 = -\left[r^2 \left(\frac{3E_1'}{4(1-\mu)} + \frac{\mu E_1'}{3\cdot-\mu} - \frac{1+\mu}{8(1+\mu)} A_1 \right) + M_1' \right],$$

$$F_3 = \frac{3E_1' r^2}{4(1-\mu)},$$

$$H_1 = -\left[r^2 \left(\frac{3E_2'}{4(1-\mu)} + \frac{\mu E_2'}{3-\mu} + \frac{1+\mu}{8(1-\mu)} B_1 \right) + M_2' \right],$$

$$H_3 = -\frac{3E_2' r^2}{4(1-\mu)},$$

и слѣдовательно, вообще

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = \sum_0^{\infty} L_k \cos k\vartheta + M_k \sin k\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (132)$$

L_k и M_k нѣкоторыя вполнѣ опредѣленныя, какъ видно изъ предыдущаго, постоянныя (т. е. опредѣленнымъ образомъ выражающіяся въ функціи $E_0', \ldots A_k', \ldots D_k'$).

Съ другой стороны, дифференцируя выраженіе (129) по r, имѣемъ

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = \sum_0^{\infty} [(kR_k' r^{k-1} + (k+2) r^{k+1} P_k) \cos k\vartheta + (kS_k' r^{k-1} + (k+2) r^{k+1} Q_k) \sin k\vartheta],$$

а потому

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^{\infty} [(kR_k' r^{k-1} + (k+2) r^{k+1} P_k) \cos k\vartheta + (kS_k' r^{k-1} + (k+2) r^{k+1} Q_k) \sin k\vartheta] = \\ = \sum_0^{\infty} [L_k \cos k\vartheta + M_k \sin k\vartheta]. \end{aligned} \right\} (133)$$

Въ этомъ равенствѣ, имѣющемъ мѣсто на окружности основанія цилиндра, надо положить $r = a$ (радіусу основанія).

Отсюда получается слѣдующая система уравненій для опредѣленія постоянныхъ R_k' и S_k'

$$\left.\begin{aligned} R'_k &= \frac{L_k - P_k(k+2)a^{k+1}}{ka^{k-1}}, \\ S'_k &= \frac{M_k - Q_k(k+2)a^{k+1}}{ka^{k-1}}, \\ &(k = 1,\ 2,\ 3\ldots\infty) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (134)$$

и кромѣ того равенство

$$2P_0 a - L_0 = 0 .$$

Такимъ образомъ опредѣлится функція Ω, а по (124) и W_0. Постоянная R_0 должна при этомъ равняться нулю, ибо по условіямъ опредѣленности задачи $W_0 = 0$ при $r = 0$. Въ силу тѣхъ же условій обратятся въ нуль постоянныя M_1, M_2 и B_0 въ выраженіяхъ U'_0 и V'_0, останутся неопредѣленными только M'_1, M'_2, B'_0, E_i, D_i ($i = 1,\ 2,\ 3$) — девять постоянныхъ произвольныхъ.

Что касается величинъ напряженій, то, какъ видно изъ равенствъ (15), всякое

$$Z_x^{(i)} = X_z^{(i)} = 0 ,\quad Y_z^{(i)} = Z_y^{(i)} = 0 \text{ при } i > 0 .$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ

$$\Delta_2 \Theta_0 = 0 ,\quad \Delta_2^2 U_0 = 0 ,\quad \Delta_2^2 V_0 = 0 ,$$

$$\Delta_2 \Theta_1 = 0 ,\quad \Delta_2^2 U_1 = 0 ,\quad \Delta_2^2 V_1 = 0 ,$$

то всякое $Z_x^{(i)}$, $Z_y^{(i)}$ при $j > 1$, очевидно, обращается въ нуль, а при $j = 1$

$$Z_x^{(2)} = (2k+1)\frac{\partial \Theta_0}{\partial x} + \Delta_2 U_0 + D_1 = 0 ,$$

$$Z_x^{(1)} = (2k+1)\frac{\partial \Theta_1}{\partial x} + \Delta_2 U_1 + E_1 = 0 ,$$

въ силу уравненій (67) и (77), и точно также всякое $Z_z^{(i)} = 0$ при $i > 1$ (очевидно изъ выраженій (15)). Величины же $Z_z^{(0)}$ и $Z_z^{(1)}$, вообще говоря, не равны нулю.

Уравненія (7_1) разобьются на слѣдующую систему девяти уравненій

$$\int Z_x^0 dq = A ,\quad \int Z_y^0 dq = B ,\quad \int (xZ_y^0 - yZ_x^0) dq = C' ,$$

$$\int Z_z^{(0)} dq = C ,\quad \int Z_z^{(1)} dq = 0 ,\quad \int xZ_x^{(0)} dq = A ,$$

$$\int xZ_z^{(1)} dq = -B' ,\quad \int yZ_z^{(0)} dq = A' ,\quad \int yZ_z^{(1)} dq = B ,$$

достаточныхъ для опредѣленія девяти произвольныхъ постоянныхъ (см. § 13). При этомъ между силами, дѣйствующими на концѣ стержня, и силами, приложенными къ боковой его поверхности, должно существовать нѣкоторое соотношеніе, которое получится, если удовлетворимъ двумъ послѣднимъ условіямъ опредѣленности задачи равновѣсія, т. е. положимъ, что при

$$x = y = z = 0\,,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0\,.$$

Въ данномъ случаѣ эти требованія равносильны одному

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0\,,$$

которое (какъ видно изъ выраженій (129) и (134)) даетъ

$$R_0' = 0 = L_0 - 2P_0 a\,,$$

или, принимая во вниманіе выраженія L_0 и P_0 черезъ соотвѣтствующіе изъ коэффиціентовъ A_k', C_k', получаемъ

$$-\frac{E_3}{1-\mu}a - \frac{1+\mu}{8(1-\mu)}A_2' a^3 + \frac{1}{2}C_0' a = 0\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135)$$

Точно также, конечно, имѣютъ мѣсто соотношенія между величинами X_0, Y_0, X', Y', выражающія равенства нулю момента и вектора совокупности всѣхъ этихъ силъ, распредѣленныхъ по всей поверхности тѣла. Этимъ я и закончу изложеніе разсматриваемаго вопроса, оставляя въ сторонѣ дальнѣйшія подробности, относящіяся къ нему.

§ 16.

Подобнымъ же путемъ можетъ быть рѣшена задача о равновѣсіи цилиндра и для нѣкоторыхъ другихъ сѣченій, напримѣръ для эллиптическаго цилиндра. При этомъ придется воспользоваться методомъ ортогональныхъ координатъ. Само собою разумѣется, что предыдущія сужденія будутъ справедливы и для полыхъ цилиндровъ, и ходъ рѣшенія вопросовъ, относящихся къ нимъ, въ существѣ дѣла останется неизмѣннымъ.

Предыдущія разсужденія, замѣчу между прочимъ, могутъ привести и къ нѣкоторымъ другимъ слѣдствіямъ относительно зависимости высшей степени алгебраической деформаціи и степени цѣлыхъ функцій перемѣнной z, представляющихъ проекціи на оси координатъ силъ, дѣйствующихъ на боковую поверхность цилиндрическаго тѣла, но въ видахъ трудности найти соотвѣтствующее этимъ условіямъ рѣшеніе задачи, я не стану разсматривать ихъ.