довольно общему случаю дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія, заключающему въ себѣ случаи какъ установившихся, такъ и періодическихъ движеній.

Случай этотъ есть тотъ, когда можно предполагать, что при $t \geqq t_0$ для функцій A_s существуетъ нѣкоторый положительный низшій предѣлъ A, а для функцій M_s нѣкоторый высшій предѣлъ M, и когда при тѣхъ-же значеніяхъ t можно назначить нѣкоторый высшій предѣлъ и для числовыхъ значеній всѣхъ коэффиціентовъ $p_{s\sigma}$.

Мы начнемъ при этомъ съ разсмотрѣнія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, соотвѣтствующихъ первому приближенію.

О нѣкоторыхъ системахъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

6. Прежде всего условимся въ нѣкоторыхъ терминахъ и докажемъ нѣкоторыя вспомогательныя предложенія.

Будемъ разсматривать функціи вещественной перемѣнной t, конечныя и вполнѣ опредѣленныя для всякаго t, большаго нѣкотораго предѣла t_0 или равнаго ему.

Всякую такую функцію будемъ называть *ограниченною* (limitée), если модули ея при $t > t_0$ остаются всегда менѣе нѣкотораго предѣла. Напротивъ, функцію, модули которой надлежащимъ выборомъ значеній t, бóльшихъ t_0, могутъ быть сдѣланы бóльшими всякой данной положительной величины, какъ-бы она ни была велика, будемъ называть *неограниченною*. Наконецъ, ограниченную функцію, которая съ безпредѣльнымъ возрастаніемъ t приближается къ предѣлу, равному нулю, будемъ называть *исчезающею*.

Разсматривая одновременно съ функціей x функцію $\frac{1}{x}$, будемъ предполагать, что функція x не обращается въ нуль при значеніяхъ t, бóльшихъ или равныхъ t_0.

Лемма I. — *Если x есть ограниченная функція t, то $xe^{-\lambda t}$ при всякомъ положительномъ постоянномъ λ есть функція исчезающая.*

Лемма непосредственно вытекаетъ изъ предыдущихъ опредѣленій.

Лемма II. — *Если x не есть исчезающая функція t, то $xe^{\lambda t}$ при всякомъ положительномъ постоянномъ λ есть функція неограниченная.*

Въ самомъ дѣлѣ, если x не есть исчезающая функція, то всегда найдется такая положительная постоянная a, при которой надлежащимъ выборомъ значеній t, бóльшихъ произвольно заданнаго предѣла T, какъ-бы онъ великъ ни былъ, модуль функціи x можно будетъ сдѣлать превосходящимъ a. Тогда, разсматривая только выбранныя такимъ образомъ значенія t, будемъ имѣть:

$$|xe^{\lambda t}| > ae^{\lambda T}.$$

А этимъ и доказывается лемма, ибо вторую часть неравенства выборомъ достаточно большаго T можно сдѣлать насколько угодно большою.

Лемма III. — *Разумѣя подъ x нѣкоторую функцію t, а подъ λ_1 и λ' нѣкоторыя вещественныя постоянныя, допустимъ, что функція $z = xe^{\lambda t}$ при $\lambda = \lambda_1$ есть исчезающая, а при $\lambda = \lambda'$ неограниченная. Тогда можно найти такое вещественное число λ_0, что функція z при $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$ будетъ неограниченною для всякаго положительнаго постояннаго ε и исчезающею для всякаго отрицательнаго постояннаго ε.*

Дѣйствительно, изъ предыдущихъ леммъ слѣдуетъ, что если существуетъ такое постоянное значеніе λ, при которомъ функція z есть ограниченная не исчезающая, то это значеніе и будетъ искомымъ.

Въ противномъ случаѣ, вставляя между числами λ_1 и λ' рядъ промежуточныхъ чиселъ и послѣдовательно переходя въ этомъ ряду отъ меньшихъ чиселъ къ бóльшимъ, начиная отъ λ_1 (ибо λ_1 необходимо менѣе λ'), сначала будемъ встрѣчать только числа, для которыхъ z есть исчезающая, затѣмъ только числа, для которыхъ она есть неограниченная функція.

Поэтому въ послѣднемъ случаѣ, послѣдовательными вставками промежуточныхъ чиселъ по закону, надлежащимъ образомъ выбранному, мы всегда можемъ получить два безконечныхъ ряда чиселъ:

неубывающій: $\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \ldots$

и невозрастающій: $\lambda', \quad \lambda'', \quad \lambda''', \ldots$

— такихъ, чтобы каждое число перваго ряда было менѣе каждаго числа второго, чтобы разность

$$\lambda^{(n)} - \lambda_n$$

выборомъ достаточно большаго n можно было сдѣлать насколько угодно малою, и чтобы функція

$$xe^{\lambda_n t}$$

для всякаго n была исчезающею, а функція

$$xe^{\lambda^{(n)} t}$$

для всякаго n неограниченною.

Эти два ряда опредѣлятъ число λ_0, не меньшее ни одного изъ чиселъ перваго ряда и не большее ни одного изъ чиселъ второго, которое и будетъ искомымъ.

Число λ_0 будемъ называть *характеристичнымъ числомъ* функціи x.

Примѣчаніе. — Функція x, для которой произведеніе $xe^{\lambda t}$ есть исчезающая функція при всякомъ λ или неограниченная при всякомъ λ, не имѣетъ характеристичнаго числа. Но мы можемъ условиться говорить, что въ первомъ случаѣ характеристичное число есть $+\infty$, во второмъ $-\infty$. При этомъ условіи всякая функція будетъ имѣть конечное или безконечное характеристичное число.

Приведемъ примѣры.

Для всякой отличной отъ нуля постоянной характеристичное число есть нуль, а для нуля $+\infty$.

Для функціи t^m (m постоянная) характеристичное число равно 0,

„ „ $e^{t\cos\frac{1}{t}}$ „ „ „ -1,

„ „ $e^{-t\cos\frac{1}{t}}$ „ „ „ $+1$,

„ „ $e^{\pm t\sin t}$ „ „ „ -1,

„ „ $e^{te^{\sin t}}$ „ „ „ e,

„ „ $e^{-te^{\sin t}}$ „ „ „ $+\frac{1}{e}$,

„ „ t^t „ „ „ $-\infty$,

„ „ t^{-t} „ „ „ $+\infty$.

Примѣчаніе. — Вообще если $f(t)$ есть такая вещественная функція t, а λ такая вещественная постоянная, что величину

$$|\lambda - f(t)|$$

надлежащимъ выборомъ значеній t, бо́льшихъ произвольно заданнаго предѣла, можно сдѣлать насколько угодно малою, и если при томъ для всякаго положительнаго постояннаго ε, какъ-бы оно мало ни было, можно найти такой предѣлъ T, что

$$\lambda - f(t) < \varepsilon$$

для всѣхъ значеній t, бо́льшихъ T, то λ есть характеристичное число функціи

$$e^{-tf(t)}$$

При доказательствѣ слѣдующихъ предложеній мы ограничиваемся случаемъ, когда характеристичныя числа данныхъ функцій конечны. Но изъ этихъ предложеній леммы IV, V и VIII можно будетъ считать справедливыми и для всѣхъ случаевъ безконечныхъ характеристичныхъ чиселъ, въ которыхъ онѣ не утрачиваютъ опредѣленнаго смысла.

Лемма IV. — *Характеристичное число суммы двухъ функцій равно наименьшему изъ характеристичныхъ чиселъ этихъ функцій, когда эти числа различны, и не менѣе ихъ, когда они равны.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть λ_1 и λ_2 суть характеристичныя числа функцій x_1 и x_2, и пусть $\lambda_1 \leqq \lambda_2$.

Тогда функціи

$$x_1 e^{(\lambda_1+\varepsilon)t}, \quad x_2 e^{(\lambda_1+\varepsilon)t}$$

будутъ исчезающими для всякаго отрицательнаго ε. Такою-же будетъ, поэтому, и сумма ихъ. Если-же при томъ $\lambda_1 < \lambda_2$, то при

$$0 < \varepsilon < \lambda_2 - \lambda_1$$

первая изъ этихъ функцій будетъ неограниченною, вторая исчезающею, а слѣдовательно сумма ихъ неограниченною. Но тогда послѣдняя будетъ неограниченною и для всякаго положительнаго ε.

Поэтому характеристичное число функціи $x_1 + x_2$, будучи во всякомъ случаѣ не менѣе λ_1, при послѣднемъ условіи равно λ_1.

Примѣчаніе. — Когда слагаемыя функціи, имѣющія равныя характеристичныя числа, таковы, что отношеніе ихъ есть величина чисто мнимая или вообще комплексная съ постояннымъ аргументомъ, отличнымъ отъ нечетной кратности π, то характеристичное число суммы всегда равно характеристичному числу слагаемыхъ.

Лемма V. — *Характеристичное число произведенія двухъ функцій не менѣе суммы ихъ характеристичныхъ чиселъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, если λ_1 и λ_2 суть характеристичныя числа функцій x_1 и x_2, то функція

$$x_1 x_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2+\varepsilon)t} = x_1 e^{(\lambda_1+\frac{\varepsilon}{2})t}\, x_2 e^{(\lambda_2+\frac{\varepsilon}{2})t}$$

есть исчезающая для всякаго отрицательнаго ε.

Что характеристичное число произведенія можетъ быть болѣе суммы характеристичныхъ чиселъ производителей, достаточно ясно видно изъ приведенныхъ выше примѣровъ.

Слѣдствіе. — *Сумма характеристичныхъ чиселъ функцій x и $\frac{1}{x}$ не болѣе нуля.*

Лемма VI. — *Если*

$$x = e^{-t(f+i\varphi)}$$

гдѣ $i = \sqrt{-1}$, а f и φ суть нѣкоторыя вещественныя функціи t, то для того, чтобы сумма характеристичныхъ чиселъ функцій x и $\frac{1}{x}$ была равною нулю, необходимо и достаточно, чтобы функція f съ безпредѣльнымъ возрастаніемъ t приближалась къ нѣкоторому предѣлу.

Достаточность сказаннаго условія очевидна, ибо если функція f съ безпредѣльнымъ возрастаніемъ t стремится къ нѣкоторому предѣлу, то послѣдній служитъ характеристичнымъ числомъ функціи x.

Что-же касается его необходимости, то она слѣдуетъ изъ того, что если λ и $-\lambda$ суть характеристичныя числа функцій x и $\frac{1}{x}$, то при всякомъ данномъ положительномъ ε, какъ-бы оно мало ни было, обѣ функціи

$$e^{-t(\varepsilon-\lambda+f)} \quad \text{и} \quad e^{-t(\varepsilon+\lambda-f)}$$

будутъ исчезающими; а послѣднее возможно только при условіи, что

$$|\lambda - f| < \varepsilon$$

для всѣхъ значеній t, большихъ нѣкотораго достаточно большаго предѣла.

Лемма VII.—*Если сумма характеристичныхъ чиселъ функцій* x *и* $\frac{1}{x}$ *равна нулю, то характеристичное число произведенія* z *изъ функціи* x *и какой-либо функціи* y *равно суммѣ характеристичныхъ чиселъ этихъ послѣднихъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть λ, μ, S суть характеристичныя числа функцій x, y, z, и пусть характеристичное число функціи $\frac{1}{x}$ равно $-\lambda$.

Тогда, прилагая лемму V къ каждому изъ двухъ равенствъ

$$z = xy, \qquad y = z\frac{1}{x},$$

найдемъ

$$S \geqq \lambda + \mu, \quad \mu \geqq S - \lambda,$$

откуда

$$S = \lambda + \mu.$$

Пусть x есть интегрирующаяся функція t.

Означая черезъ t_1 какое-либо не меньшее t_0 данное число, разсмотримъ интегралъ

$$u = \int_{t_1}^{t} x\, dt,$$

если характеристичное число функціи x отрицательно или равно нулю, и интегралъ

$$u = \int_{t}^{\infty} x\, dt,$$

если это характеристичное число положительно.

Тогда докажется слѣдующее предложеніе:

Лемма VIII. — *Характеристичное число интеграла не менѣе характеристичнаго числа подъинтегральной функціи.*

Пусть λ есть характеристичное число функціи x. Тогда функція

$$xe^{(\lambda - \eta)t}$$

при всякой положительной постоянной η будетъ исчезающею и слѣдовательно ограниченною. Означимъ черезъ M высшій предѣлъ ея модулей для $t \geqq t_0$.

При $\lambda > 0$ и $\eta < \lambda$ будемъ имѣть

$$|u| < M \int_t^\infty e^{-(\lambda-\eta)t} dt = \frac{M}{\lambda-\eta} e^{-(\lambda-\eta)t},$$

откуда слѣдуетъ, что

$$ue^{(\lambda-\varepsilon)t}$$

есть исчезающая функція при всякомъ ε, бо́льшемъ η. Но η можно предполагать насколько угодно малымъ. Поэтому предыдущая функція есть исчезающая при всякомъ положительномъ ε.

При $\lambda \leqq 0$ будемъ имѣть

$$|u| < M \int_{t_1}^{t} e^{-(\lambda-\eta)t} dt = \frac{M}{\eta-\lambda} e^{-(\lambda-\eta)t} + \text{Const.},$$

откуда слѣдуетъ, что

$$ue^{(\lambda-\varepsilon)t}$$

есть исчезающая функція при всякомъ ε, бо́льшемъ η, а слѣдовательно и при всякомъ положительномъ ε.

Далѣе намъ придется разсматривать группы, состоящія изъ нѣсколькихъ функцій. При этомъ мы введемъ понятіе о *характеристичномъ числѣ группы*, называя такъ наименьшее изъ характеристичныхъ чиселъ функцій, составляющихъ группу.

7. Разсмотримъ систему линейныхъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n, \qquad (s=1,2,\ldots,n) \tag{15}$$

предполагая, что всѣ коэффиціенты $p_{s\sigma}$ опредѣленнымъ образомъ заданы по крайней мѣрѣ для всѣхъ значеній t, не меньшихъ нѣкотораго предѣла t_0, и представляютъ непрерывныя и ограниченныя вещественныя функціи t.

Говоря о какомъ-либо рѣшеніи этой системы уравненій, будемъ подразумѣвать, что рѣчь идетъ о группѣ n функцій

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

совокупно удовлетворяющихъ этимъ уравненіямъ (а слѣдовательно опредѣленныхъ и непрерывныхъ) при *всякомъ* t, не меньшемъ t_0. Такія группы функцій, какъ уже было замѣчено раньше, всегда могутъ быть найдены. При томъ всегда найдется n такихъ группъ, которыя составятъ систему n независимыхъ рѣшеній.

Теорема I. — *Всякое рѣшеніе системы дифференціальныхъ уравненій (15), отличное отъ очевиднаго*

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

имѣетъ конечное характеристичное число.

Будемъ разсматривать только рѣшенія, въ которыхъ не всѣ функціи x_s тожественно равны нулю. При этомъ сначала разсмотримъ рѣшенія вещественныя, т. е. такія, въ которыхъ всѣ x_s суть вещественныя функціи t.

Разумѣя подъ λ нѣкоторую вещественную постоянную, положимъ:

$$z_s = x_s e^{\lambda t}. \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \qquad \textbf{(16)}$$

Тогда уравненія (15) преобразуются въ слѣдующія:

$$\frac{dz_s}{dt} = p_{s1} z_1 + p_{s2} z_2 + \cdots + (p_{ss} + \lambda) z_s + \cdots + p_{sn} z_n, \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

изъ которыхъ выведемъ:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{n} z_s^2 = \sum_{s=1}^{n}(p_{ss} + \lambda) z_s^2 + \sum (p_{s\sigma} + p_{\sigma s}) z_s z_\sigma,$$

предполагая, что вторая сумма во второй части равенства распространена на всевозможныя различныя комбинаціи различныхъ чиселъ s и σ, взятыхъ изъ ряда $1, 2, \ldots, n$.

Вторая часть послѣдняго равенства есть нѣкоторая квадратичная форма величинъ $z_1, z_2, \ldots, z_n$, въ которой коэффиціенты зависятъ отъ λ и t. При томъ въ силу предположенной ограниченности функцій $p_{s\sigma}$ зависимость эта такова, что, очевидно, всегда можно найти такія значенія λ, при которыхъ эта форма будетъ положительною для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній t, оставаясь всегда болѣе формы

$$\frac{1}{2} N (z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2) \qquad \textbf{(17)}$$

при произвольно заданномъ положительномъ постоянномъ N. Также очевидно, что можно найти и такія значенія λ, при которыхъ для тѣхъ-же значеній t эта форма будетъ отрицательною, оставаясь всегда численно большею формы (17).

При всякомъ λ перваго рода получимъ неравенство

$$\frac{d}{dt}\sum z_s^2 > N\sum z_s^2,$$

изъ котораго, означая черезъ C нѣкоторую положительную постоянную, выведемъ

$$\sum z_s^2 > Ce^{Nt}$$

для всякаго t, бо́льшаго нѣкотораго предѣла.

При значеніи λ второго рода будемъ имѣть

$$\frac{d}{dt}\sum z_s^2 < -N\sum z_s^2,$$

откуда (если C по прежнему означаетъ положительную постоянную)

$$\sum z_s^2 < Ce^{-Nt}$$

также для всякаго t, бóльшаго нѣкотораго предѣла.

Поэтому въ первомъ случаѣ величина $\sum z_s^2$ съ безпредѣльнымъ возрастаніемъ t будетъ безпредѣльно возрастать; во второмъ она будетъ приближаться при этомъ къ предѣлу, равному нулю.

Такимъ образомъ убѣждаемся, что можно найти какъ такія значенія λ, при которыхъ въ группѣ функцій (16) непремѣнно находятся неограниченныя, такъ и такія, при которыхъ всѣ эти функціи суть исчезающія.

Отсюда на основаніи предыдущаго заключаемъ, что въ каждомъ вещественномъ рѣшеніи

$$x_1\,,\ x_2\,,\ .\ .\ .\ .\ ,\ x_n\,, \tag{18}$$

отличномъ отъ очевиднаго $x_1 = x_2 = \ .\ .\ . = x_n = 0$, непремѣнно найдутся функціи съ конечными характеристичными числами и не найдется ни одной съ характеристичнымъ числомъ $-\infty$. Поэтому характеристичное число группы функцій (18) всегда конечно.

Чтобы обнаружить справедливость теоремы вообще, достаточно теперь только замѣтить, что всякое рѣшеніе

$$x_1 = u_1 + \sqrt{-1}\, v_1\,,\quad x_2 = u_2 + \sqrt{-1}\, v_2\,,\ .\ .\ .\ .\ ,\ x_n = u_n + \sqrt{-1}\, v_n \tag{19}$$

системы уравненій (15) будетъ составлено изъ двухъ вещественныхъ рѣшеній

$$\left.\begin{array}{l} u_1\,,\quad u_2\,,\ .\ .\ .\ .\ ,\ u_n\,, \\ v_1\,,\quad v_2\,,\ .\ .\ .\ .\ ,\ v_n\,, \end{array}\right\} \tag{20}$$

той-же системы, и что на основаніи леммы IV и сдѣланнаго къ ней примѣчанія характеристичное число группы функцій (19) равно характеристичному числу группы функцій (20).

Примѣчаніе. — Мы предполагали всѣ коэффиціенты $p_{s\sigma}$ въ уравненіяхъ (15) вещественными. Но доказавши теорему въ этомъ предположеніи, ее очевидно легко распространить и на случай комплексныхъ $p_{s\sigma}$, лишь-бы только это были непрерывныя и ограниченныя функціи t. Поэтому всѣ предложенія, доказываемыя далѣе относительно уравненій (15), будутъ справедливы и въ случаѣ комплексныхъ коэффиціентовъ.

Пусть для уравненій (15) найдено k рѣшеній

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}\,,\quad x_{21}\,,\ .\ .\ .\ .\ ,\ x_{n1}\,, \\ x_{12}\,,\quad x_{22}\,,\ .\ .\ .\ .\ ,\ x_{n2}\,, \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ , \\ x_{1k}\,,\quad x_{2k}\,,\ .\ .\ .\ .\ ,\ x_{nk}\,. \end{array}\right\} \tag{21}$$

Полагая

$$x_s = C_1 x_{s1} + C_2 x_{s2} + \ldots + C_k x_{sk}, \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

гдѣ C_1, C_2, ..., C_k суть нѣкоторыя постоянныя, изъ которыхъ *ни одна не нуль*, мы будемъ говорить, что рѣшеніе

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

есть *линейная комбинація* рѣшеній (21).

Изъ леммы IV слѣдуетъ, что характеристичное число рѣшенія, представляющаго линейную комбинацію нѣсколькихъ рѣшеній, не менѣе характеристичнаго числа системы комбинируемыхъ рѣшеній (т. е. характеристичнаго числа группы функцій, составляющихъ систему рѣшеній) и равно этому числу, когда характеристичныя числа всѣхъ комбинируемыхъ рѣшеній различны.

Изъ послѣдняго выводимъ, что всякія рѣшенія (конечно отличныя отъ $x_1 = x_2 = \ldots$ $\ldots = x_n = 0$), характеристичныя числа которыхъ различны, суть независимыя.

Отсюда заключаемъ о справедливости слѣдующаго предложенія.

Теорема II. — *Система уравненій (15) не можетъ имѣть болѣе n рѣшеній, отличныхъ отъ очевиднаго*

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

характеристичныя числа которыхъ были-бы всѣ различными.

Вездѣ далѣе будемъ разсуждать только о рѣшеніяхъ, въ которыхъ не всѣ функціи x_s тожественно равны нулю.

8. Пусть для системы уравненій (15) найдена какая-либо система n независимыхъ рѣшеній. Составляя изъ послѣднихъ всевозможныя линейныя комбинаціи, мы можемъ вывести изъ этой системы всякую другую полную систему независимыхъ рѣшеній.

Допустимъ, что всякая найденная система n независимыхъ рѣшеній преобразовывается въ другую по слѣдующему правилу: каждый разъ, когда изъ какихъ-либо рѣшеній этой системы можетъ быть составлена линейная комбинація, характеристичное число которой было бы болѣе характеристичнаго числа группы комбинируемыхъ рѣшеній, одно изъ послѣднихъ, а именно, одно изъ тѣхъ, характеристичныя числа которыхъ равны характеристичному числу группы, замѣняется въ разсматриваемой системѣ этою линейною комбинаціей.

Такъ-какъ число различныхъ характеристичныхъ чиселъ, которыми могутъ обладать рѣшенія системы уравненій (15), ограниченно, то поступая такимъ образомъ, мы получимъ наконецъ систему n рѣшеній такого свойства, что *всякая линейная комбинація всякихъ входящихъ въ ея составъ рѣшеній будетъ обладать характеристичнымъ числомъ, равнымъ характеристичному числу группы комбинируемыхъ рѣшеній.*

Всякую такую систему n рѣшеній (которыя, очевидно, независимы) будемъ называть *нормальною.*

Вслѣдствіе предполагаемой нами вещественности коэффиціентовъ $p_{s\sigma}$ въ уравненіяхъ (15), для уравненій этихъ можно найти систему n вещественныхъ независимыхъ рѣшеній. Исходя изъ такой системы, и при составленіи линейныхъ комбинацій пользуясь только вещественными коэффиціентами, мы могли бы получить систему n рѣшеній, удовлетворяющую предыдущему требованію для всякихъ линейныхъ комбинацій съ вещественными коэффиціентами. Но тогда эта система будетъ удовлетворять этому требованію и для линейныхъ комбинацій съ какими угодно коэффиціентами (лемма IV, примѣчаніе). Система эта будетъ, слѣдовательно, нормальною.

Въ силу этого замѣчанія мы можемъ, въ случаѣ надобности, всѣ функціи, входящія въ составъ нормальной системы, предполагать вещественными.

Изъ опредѣленія нормальной системы слѣдуетъ, что если возможно найти систему n рѣшеній, характеристичныя числа которыхъ были бы всѣ различны, то эта система есть нормальная.

Изъ того-же опредѣленія выводится слѣдующее предложеніе:

Теорема I. — *Пусть найдена какая-либо система n независимыхъ рѣшеній*

$$\begin{array}{l} x_{11}\,,\ x_{21}\,,\ .\ .\ .\ ,\ x_{n1}\,, \\ x_{12}\,,\ x_{22}\,,\ .\ .\ .\ ,\ x_{n2}\,, \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ , \\ x_{1n}\,,\ x_{2n}\,,\ .\ .\ .\ ,\ x_{nn}\,, \end{array}$$

и пусть изъ нея выведена новая

$$\left.\begin{array}{l} z_{11}\,,\ z_{21}\,,\ .\ .\ .\ ,\ z_{n1}\,, \\ z_{12}\,,\ z_{22}\,,\ .\ .\ .\ ,\ z_{n2}\,, \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ , \\ z_{1n}\,,\ z_{2n}\,,\ .\ .\ .\ ,\ z_{nn}\,, \end{array}\right\} \tag{22}$$

въ которой вообще

$$z_{sk} = x_{sk} + \alpha_{k1} x_{sk+1} + \alpha_{k2} x_{sk+2} + \ .\ .\ . + \alpha_{kn-k} x_{sn}\,,$$

а $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{kn-k}$ суть такія постоянныя, что характеристичное число всякаго рѣшенія

$$x_1\,,\ x_2\,,\ .\ .\ .\ .\ x_n\,,$$

въ которомъ

$$x_s = x_{sk} + \beta_1 x_{sk+1} + \beta_2 x_{sk+2} + \ .\ .\ . + \beta_{n-k} x_{sn}\,,$$

а $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-k}$ какія-либо постоянныя, не болѣе характеристичнаго числа рѣшенія:

$$z_{1k}, \quad z_{2k}, \quad . \quad . \quad . \quad , z_{nk}.$$

Тогда система рѣшеній (22) есть нормальная.

Для доказательства замѣчаемъ, что если-бы система (22) не была нормальною, то между рѣшеніями ея можно было бы найти группу такихъ, которыя, обладая общимъ характеристичнымъ числомъ λ, могли бы доставлять линейныя комбинаціи съ характеристичнымъ числомъ, превосходящимъ λ. Но по самому опредѣленію величинъ z_{sk}, такихъ рѣшеній въ системѣ (22), очевидно, нельзя найти.

Пусть k есть число всѣхъ *различныхъ* характеристичныхъ чиселъ, которыми могутъ обладать рѣшенія уравненій (15), и пусть

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad . \quad . \quad . \quad , \lambda_k$$

суть всѣ эти числа.

Означимъ черезъ n_s число рѣшеній съ характеристичнымъ числомъ λ_s, входящихъ въ составъ вообще какой-либо системы n независимыхъ рѣшеній. Нѣкоторыя изъ чиселъ n_s могутъ быть и нулями. Но они во всякомъ случаѣ будутъ таковы, что

$$n_1 + n_2 + \; . \; . \; . + n_k = n.$$

Предполагая

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \; . \; . \; . < \lambda_k,$$

означимъ еще черезъ N_s точный высшій предѣлъ числа независимыхъ рѣшеній съ характеристичнымъ числомъ λ_s, допускаемыхъ системою уравненій (15). Очевидно, будемъ имѣть:

$$N_1 > N_2 > \; . \; . \; . > N_k,$$

$$N_1 = n, \quad n_s + n_{s+1} + \; . \; . \; . + n_k \leqq N_s. \qquad {\scriptstyle (s=1,\,2,\,.\,.\,.\,,\,k)}$$

При этомъ докажутся слѣдующія предложенія:

Теорема II. — *Для всякой нормальной системы рѣшеній*

$$n_1 = n - N_2, \quad n_2 = N_2 - N_3, \quad . \quad . \quad . \quad , n_{k-1} = N_{k-1} - N_k, \quad n_k = N_k.$$

Въ самомъ дѣлѣ, всякое рѣшеніе есть линейная комбинація нѣкоторыхъ рѣшеній нормальной системы. А по свойству этой системы, рѣшеніе, обладающее характеристичнымъ числомъ λ_s, можетъ быть линейною комбинаціей только тѣхъ рѣшеній нормальной системы, характеристичныя числа которыхъ не менѣе λ_s. Поэтому число допускаемыхъ системою уравненій (15) независимыхъ рѣшеній съ характеристичнымъ числомъ λ_s не можетъ быть болѣе величины

$$n_s + n_{s+1} + \; . \; . \; . + n_k,$$

соотвѣтствующей нормальной системѣ; а потому для послѣдней

$$n_s + n_{s+1} + \ldots + n_k = N_s,$$

откуда и слѣдуетъ справедливость теоремы.

Теорема III. — *Сумма*

$$S = n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \ldots + n_k\lambda_k$$

характеристичныхъ чиселъ всѣхъ рѣшеній, входящихъ въ составъ системы n независимыхъ рѣшеній, для нормальной системы достигаетъ своего высшаго предѣла.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$n_s + n_{s+1} + \ldots + n_k = N'_s,$$

найдемъ:

$$S = n\lambda_1 + N'_2(\lambda_2 - \lambda_1) + N'_3(\lambda_3 - \lambda_2) + \ldots + N'_k(\lambda_k - \lambda_{k-1}).$$

Но мы только-что видѣли, что для нормальной системы каждое изъ чиселъ N'_s достигаетъ своего высшаго предѣла N_s. А потому, замѣчая, что въ этомъ выраженіи S коэффиціенты при величинахъ N'_2, N'_3, ..., N'_k всѣ положительны, и убѣждаемся въ справедливости теоремы.

Теорема IV. — *Всякая система n независимыхъ рѣшеній, для которой сумма характеристичныхъ чиселъ всѣхъ составляющихъ ее рѣшеній достигаетъ своего высшаго предѣла, есть нормальная.*

Теорема слѣдуетъ изъ самаго опредѣленія нормальной системы, ибо если-бы возможно было изъ какихъ-либо рѣшеній разсматриваемой системы составить линейную комбинацію, характеристичное число которой было бы болѣе характеристичнаго числа группы комбинируемыхъ рѣшеній, то можно было бы найти систему n независимыхъ рѣшеній, для которой сумма всѣхъ характеристичныхъ чиселъ была бы болѣе, чѣмъ для разсматриваемой.

Теорема V. — *Сумма характеристичныхъ чиселъ независимыхъ рѣшеній системы уравненій (15) ни въ какомъ случаѣ не превосходитъ характеристичнаго числа функціи*

$$e^{\int \sum_{s=1}^{n} p_{ss}dt}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если $\triangle$ есть опредѣлитель, составленный изъ какихъ-либо n независимыхъ рѣшеній, то

$$e^{\int \Sigma p_{ss}dt} = C\triangle,$$

гдѣ C нѣкоторая постоянная. А на основаніи леммъ IV и V характеристичное число $\triangle$ не менѣе

$$n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \ldots + n_k\lambda_k.$$

Слѣдствіе. — *Всякая система n независимыхъ рѣшеній, для которой сумма характеристичныхъ чиселъ всѣхъ рѣшеній равна характеристичному числу функціи*

$$e^{\int \Sigma p_{ss} dt},$$

есть нормальная.

Слѣдуетъ однако имѣть въ виду, что не всегда можно найти систему n независимыхъ рѣшеній, для которой имѣло бы мѣсто только-что сказанное равенство.

Такъ напримѣръ, если имѣемъ систему уравненій

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \cos\log t + x_2 \sin\log t\,, \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_1 \sin\log t + x_2 \cos\log t\,,$$

то при надлежащемъ опредѣленіи постоянной произвольной будемъ имѣть:

$$e^{\int \Sigma p_{ss} dt} = e^{t(\sin\log t + \cos\log t)},$$

что представляетъ функцію съ характеристичнымъ числомъ $-\sqrt{2}$. При томъ, для этихъ уравненій находимъ систему рѣшеній

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ e^{t\sin\log t}, & e^{t\sin\log t}, \\ e^{t\cos\log t}, & -e^{t\cos\log t}, \end{array}$$

которая, какъ нетрудно убѣдиться, есть нормальная, а между тѣмъ для нея сумма характеристичныхъ чиселъ (равная -2) менѣе предыдущаго числа.

9. Мы знаемъ (лемма V, слѣдствіе), что сумма характеристичныхъ чиселъ функцій

$$e^{\int \Sigma p_{ss} dt} \quad \text{и} \quad e^{-\int \Sigma p_{ss} dt}$$

не болѣе нуля.

Поэтому, если μ есть характеристичное число второй изъ этихъ функцій, то сумма S характеристичныхъ чиселъ рѣшеній нормальной системы не можетъ превосходить числа $-\mu$. При томъ равенство $S = -\mu$ возможно только при условіи, что сумма характеристичныхъ чиселъ разсматриваемыхъ двухъ функцій равна нулю.

Это равенство

$$S + \mu = 0$$

для уравненій съ постоянными или періодическими коэффиціентами дѣйствительно имѣетъ мѣсто. Но можетъ имѣть мѣсто и во многихъ другихъ случаяхъ.

Вообще при существованіи сейчасъ сказаннаго равенства систему линейныхъ дифференціальныхъ уравненій (15) мы будемъ называть *правильною*, а въ противномъ случаѣ—*неправильною*.

Такъ напримѣръ система уравненій

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \cos at + x_2 \sin bt, \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_1 \sin bt + x_2 \cos at$$

есть правильная, каковы бы ни были вещественныя постоянныя a и b.

Въ концѣ предыдущаго параграфа былъ приведенъ примѣръ неправильной системы уравненій.

Чтобы дать примѣръ болѣе общаго характера, разсмотримъ слѣдующую систему:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = p_{11} x_1, \\ &\frac{dx_2}{dt} = p_{21} x_1 + p_{22} x_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &\frac{dx_n}{dt} = p_{n1} x_1 + p_{n2} x_2 + \dots + p_{nn} x_n, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

въ которой уравненіе, содержащее производную $\frac{dx_s}{dt}$, не содержитъ функцій $x_{s'}$, для которыхъ $s' > s$.

Относительно системъ уравненій такого вида (въ предположеніи, что коэффиціенты $p_{s\sigma}$ удовлетворяютъ прежнимъ условіямъ) докажется слѣдующее предложеніе:

Теорема. — *Для того, чтобы система уравненій (23) была правильною, необходимо и достаточно, чтобы сумма характеристичныхъ чиселъ функцій*

$$e^{\int p_{ss} dt} \quad \text{и} \quad e^{-\int p_{ss} dt}$$

была равною нулю для всякаго s.

Докажемъ сначала необходимость этого условія.

Для уравненій (23) находимъ слѣдующую систему n независимыхъ рѣшеній:

$$1) \quad x_1 = e^{\int p_{11} dt}, \quad x_s = e^{\int p_{ss} dt} \int \sum_{i=1}^{s-1} p_{si} x_i \, e^{-\int p_{ss} dt} dt, \qquad (s=2, 3, \dots, n)$$

$$2) \quad x_1 = 0, \quad x_2 = e^{\int p_{22} dt}, \quad x_s = e^{\int p_{ss} dt} \int \sum_{i=2}^{s-1} p_{si} x_i \, e^{-\int p_{ss} dt} dt, \qquad (s=3, 4, \dots, n)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$n) \quad x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0, \quad x_n = e^{\int p_{nn} dt}.$$

Чтобы остановиться на чемъ-либо опредѣленномъ, будемъ предполагать, что здѣсь всѣ интегралы

$$\int p_{ii}\,dt,$$

встрѣчающіеся въ показателяхъ, обращаются въ нуль при $t=t_0$. Что-же касается остальныхъ интеграловъ, то предположимъ ихъ такими, чтобы въ какомъ-либо $k^{\text{омъ}}$ рѣшеніи функціи

$$x_{k+1},\ x_{k+2},\ \ldots,\ x_n$$

обращались при $t=t_0$ въ нѣкоторыя данныя постоянныя

$$\alpha_{k1},\quad \alpha_{k2},\ \ldots,\ \alpha_{k\,n-k}.$$

Тогда, если

$$x_{1k},\quad x_{2k},\ \ldots,\ x_{nk}$$

есть $k^{\text{ое}}$ рѣшеніе разсматриваемой системы *въ предположеніи, что всѣ* α *равны нулю*, то для того-же $k^{\text{аго}}$ рѣшенія, не дѣлая этого предположенія, найдемъ:

$$x_s = x_{sk} + \alpha_{k1}\ x_{s\,k+1} + \alpha_{k2}\ x_{s\,k+2} + \ldots + \alpha_{k\,n-k}\ x_{sn}. \qquad (s=1,2,\ldots,n)$$

Отсюда на основаніи теоремы I предыдущаго параграфа заключаемъ, что при надлежащемъ выборѣ постоянныхъ α разсматриваемая система рѣшеній будетъ нормальною.

Предполагая эти постоянныя такимъ образомъ выбранными, означимъ характеристичныя числа разсматриваемыхъ рѣшеній соотвѣтственно черезъ

$$\mu_1,\quad \mu_2,\ \ldots,\ \mu_n.$$

Кромѣ того, означимъ

характеристичное число функціи $e^{\int p_{ss}\,dt}$ черезъ λ_s,

" " " $e^{-\int p_{ss}\,dt}$ " λ'_s, $\qquad (s=1,2,\ldots,n)$

" " " $e^{\int \sum p_{ss}\,dt}$ " S,

" " " $e^{-\int \sum p_{ss}\,dt}$ " S'.

Очевидно, будемъ имѣть:

$$\mu_s \leqq \lambda_s. \qquad (s=1,2,\ldots,n)$$

Поэтому, если допустимъ, что система уравненій (23) есть правильная, что приведетъ къ равенству

$$\sum \mu_s = S,$$

и замѣтимъ, что въ силу леммы V сумма $\sum\lambda_s$ не можетъ быть болѣе S, то найдемъ:

$$\sum\lambda_s = S.$$

Но вслѣдствіе того-же допущенія имѣемъ

$$S + S' = 0.$$

Поэтому на основаніи леммы VII заключаемъ, что характеристичное число функціи

$$e^{\int\sum p_{ss}\,dt}\; e^{-\int p_{kk}\,dt}$$

равно $S + \lambda'_k$, и что слѣдовательно (лемма V):

$$S + \lambda'_k \geqq \sum\lambda_s - \lambda_k,$$

откуда вслѣдствіе только-что найденнаго равенства выводимъ:

$$\lambda_k + \lambda'_k \geqq 0.$$

Но сумма $\lambda_k + \lambda'_k$ не можетъ быть положительною; а потому

$$\lambda_k + \lambda'_k = 0,$$

чѣмъ и доказывается необходимость высказаннаго въ теоремѣ условія.

Для доказательства достаточности этого условія поставимъ требованія, которымъ должны удовлетворять постоянныя α, нѣсколько иначе. А именно, допустимъ, что постоянныя эти выбраны такимъ образомъ, чтобы каждый интегралъ вида

$$\int\sum_{i=1}^{s-1} p_{si}\,x_i\; e^{-\int p_{ss}\,dt}\,dt,$$

въ которомъ характеристичное число подъинтегральной функціи положительно, съ безпредѣльнымъ возрастаніемъ t стремился къ нулю. Тогда въ разсматриваемой системѣ рѣшеній каждый интегралъ такого вида будетъ обладать характеристичнымъ числомъ, не меньшимъ характеристичнаго числа подъинтегральной функціи (лемма VIII).

Поэтому, если допустимъ, что

$$\lambda_s + \lambda'_s = 0, \qquad (s=1,\,2,\,\ldots,\,n)$$

и разсмотримъ какое-либо $k^{\text{ое}}$ рѣшеніе (въ которомъ $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ равны нулю), то замѣчая, что въ этомъ рѣшеніи характеристичнымъ числомъ функціи x_k служитъ λ_k, легко убѣдимся, что характеристичныя числа всѣхъ остальныхъ входящихъ въ него функцій не менѣе λ_k.

Отсюда слѣдуетъ, что λ_k есть характеристичное число $k^{\text{аго}}$ рѣшенія.

Но мы имѣемъ вообще

$$\sum\lambda_s \leqq S \leqq -S' \leqq -\sum\lambda'_s,$$

а вслѣдствіе допущеннаго

$$\sum\lambda_s + \sum\lambda'_s = 0\,.$$

Поэтому получаемъ равенство

$$\sum\lambda_s + S' = 0\,,$$

изъ котораго выводимъ, 1) что система уравненій (23) есть правильная, и 2) что найденная для нея система рѣшеній есть нормальная.

Примѣчаніе. — На основаніи леммы VI выраженное въ теоремѣ условіе равносильно слѣдующему: *каждая изъ функцій*

$$\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} p_{ss}\,dt \qquad (s=1,\,2,\,\ldots,\,n)$$

(а если-бы коэффиціенты p_{ss} были комплексными величинами, то — вещественная часть каждой изъ этихъ функцій) *съ безпредѣльнымъ возрастаніемъ t должна приближаться къ нѣкоторому предѣлу.*

10. Пусть λ_1, λ_2, ..., λ_k суть всевозможныя различныя характеристичныя числа рѣшеній уравненій (15), и пусть n_s есть число рѣшеній, обладающихъ характеристичнымъ числомъ λ_s, *въ нормальной системѣ.* Мы условимся при этомъ говорить, что *система этихъ уравненій* обладаетъ

n_1 характеристичными числами, равными λ_1,

n_2 „ „ „ λ_2,

. . . . ,

n_k „ „ „ λ_k.

Такимъ образомъ всякой системѣ n линейныхъ дифференціальныхъ уравненій разсматриваемаго вида будетъ соотвѣтствовать группа n характеристичныхъ чиселъ, между которыми могутъ быть и равныя.

Пусть система уравненій (15) преобразовывается при помощи линейной подстановки

$$z_s = q_{s1}x_1 + q_{s2}x_2 + \cdots + q_{sn}x_n\,, \qquad (s=1,\,2,\,\ldots,\,n)$$

обладающей слѣдующими свойствами: всѣ коэффиціенты $q_{s\sigma}$ суть непрерывныя и ограниченныя функціи t, ихъ первыя производныя суть функціи такого-же характера, и величина, обратная составленному изъ этихъ коэффиціентовъ опредѣлителю, есть ограниченная функція t.

При такомъ преобразованіи коэффиціенты въ преобразованныхъ уравненіяхъ будутъ обладать тѣми-же основными свойствами, что и въ первоначальныхъ.

Нетрудно доказать, что *группа характеристичныхъ чиселъ преобразованной системы уравненій всегда будетъ тожественною съ группою характеристичныхъ чиселъ первоначальной.*

Въ самомъ дѣлѣ, по свойству разсматриваемой подстановки, не только ея коэффиціенты, но и коэффиціенты обратной подстановки суть ограниченныя функціи t. Поэтому, если при посредствѣ соотношеній между функціями x и функціями z изъ какого-либо рѣшенія одной системы уравненій выведемъ рѣшеніе другой, то оба эти рѣшенія будутъ обладать однимъ и тѣмъ-же характеристичнымъ числомъ. А отсюда (въ силу понятія о нормальной системѣ рѣшеній) слѣдуетъ, что всякое число, встрѣчающееся извѣстное число разъ въ группѣ характеристичныхъ чиселъ одной системы уравненій, необходимо встрѣтится такое-же число разъ и въ группѣ характеристичныхъ чиселъ другой.

Такимъ образомъ характеристичныя числа системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій по отношенію къ разсматриваемымъ преобразованіямъ обладаютъ свойствами инваріантовъ. Тѣми-же свойствами по отношенію къ этимъ преобразованіямъ обладаютъ и характеристичныя числа функцій

$$e^{\int \Sigma p_{ss} dt} \quad \text{и} \quad e^{-\int \Sigma p_{ss} dt}.$$

Поэтому преобразованная система уравненій всегда будетъ того-же рода (т. е. правильная или неправильная), какъ и первоначальная.

Система уравненій (15) можетъ быть такова, что подстановкою разсматриваемаго характера, надлежащимъ образомъ выбранною, ее можно преобразовать въ систему уравненій съ постоянными коэффиціентами.

Въ этомъ случаѣ систему уравненій (15) мы назовемъ *приводимою.*

Изъ замѣченнаго сейчасъ слѣдуетъ, что приводимыми могутъ быть только правильныя системы уравненій.

Мы покажемъ далѣе (глава III), что всякая система уравненій (15), въ которой всѣ коэффиціенты суть періодическія функціи t съ однимъ и тѣмъ-же вещественнымъ періодомъ, есть приводимая.

Разсмотримъ какую-либо систему (15).

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ суть всѣ ея характеристичныя числа (между ними могутъ быть и равныя), и пусть

$$\begin{gathered} x_{11}, \quad x_{21}, \ldots, x_{n1}, \\ x_{12}, \quad x_{22}, \ldots, x_{n2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{1n}, \quad x_{2n}, \ldots, x_{nn} \end{gathered}$$

есть найденная для нея нормальная система рѣшеній, въ которой $j^{ое}$ рѣшеніе обладаетъ характеристичнымъ числомъ λ_j.