Проф. Л. ЛАНДАУ
Доц. Е. ЛИФШИЦ
Проф. Л. РОЗЕНКЕВИЧ

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

ОНТИ НКТП
ГОСУДАРСТВЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
УКРАИНЫ

проф. Л. ЛАНДАУ, доц. Е. ЛИФШИЦ, проф. Л. РОЗЕНКЕВИЧ

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

ч. I

МЕХАНИКА

ОНТИ ГОСУДАРСТВЕННОЕ НКТП
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО УКРАИНЫ
ХАРЬКОВ 1935

Библиографическое описание этого издания помещено в „Літописі Українського Друку", „Картковому Репертуарі" и других указателях Украинской Книжной Палаты

40-5-2

Типо-лито-цинкография ДНТВУ
Харьков, Суздальск. ряды, 18/20.
Уполномоч. Главлита № 34.
Зак. № 0168

Ответственный редактор *К. Р. Іршенко*
Техническое оформление — *В. І. Ландсберг*

Тираж 7.000. $7^1/_2$ печатн. листов. В печатн. листе 51.000 зн. Бум. 62 × 94.
Вес 1 метр. стопы 38 кг.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник задач имеет целью помочь изучающему теоретическую физику научиться пользоваться основными методами и соотношениями этой науки. Он расчитан как на студентов физических вузов, так и на широкие круги физиков, желающих пополнить свои теоретические знания.

Соответственно этому состав задач сборника не выходит за пределы того, что полезно знать всякому грамотному физику. Методы решения задач, приведенные в сборнике, мы старались подобрать наиболее совершенными, общими и простыми.

Такое построение сборника идет вразрез с установившимися традициями изложения теоретической физики. Обычно положения последней излагаются в том виде и последовательности, в каком они появились на свет. В результате этого теряется связь между различными отделами, отсутствует система в изложении, что чрезвычайно затрудняет овладение аппаратом теоретической физики. При этом изучающему сообщаются всевозможные архаические давно вышедшие из употребления методы, которые оказываются впоследствии ненужными, а в то же время целый ряд простых и удобных методов остается достоянием теоретиков - профессионалов.

В задачах по механике за исходную точку взяты уравнения Лагранжа, причем большинство задач рассматривается с точки зрения применения этих уравнений и их свойств к различным частным случаям.

Согласно распространенному мнению эти уравнения почему то считаются особенно трудными и потому неприменимыми для практического решения задач. В действительности же методы решения задач с помощью уравнений Лагранжа несравненно проще других, не говоря уже о том, что не приходится для разных задач пользоваться совершенно различными приемами решения.

В задачах резко разграничено составление функции Лагранжа, с одной стороны, и составление и решение уравнений движения — с другой.

Математические знания, необходимые для решения задач этого сборника, таковы: свободное владение диференциальным и интегральным исчислениями, векторной алгеброй, а также умение интегрировать элементарные диференциальные уравнения.

Украинский Физико - Технический Институт. Харьков, декабрь, 1934 г.

Л. Ландау
Е. Лифшиц
Л. Розенкевич

ЗАДАЧИ

I. Уравнения движения

1. Найти ускорения, если задана функция Лагранжа:

а) $L = \frac{\dot{q}^2}{2} - \frac{q^2}{2}$;

б) $L = \frac{(1+q^2)\dot{q}^2}{2} - \frac{q^2}{2}$;

в) $L = \frac{t\dot{q}^2}{2}$

г) $L = -\sqrt{1-\dot{q}^2} + q$;

д) $L = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{r}$;

е) $L = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{\sin^2\theta\dot{\varphi}^2}{2} - \cos\theta$;

ж) $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (x\dot{y} - y\dot{x})$;

з) $L = \frac{1}{2}\dot{u}\dot{v} + \frac{1}{\sqrt{uv}}$;

2. Упростить функции Лагранжа путем исключения полных производных:

а) $L' = \dot{x}\sin t$;

б) $L' = \frac{1}{2}(\dot{q} + t)^2$;

в) $L' = \frac{1}{2}(\dot{q} + q)^2$;

г) $L' = x\dot{y} - y\dot{x}$;

д) $L' = tx\dot{x}$.

3. Определить число степеней свободы:

а) точки на линии;

б) точки на поверхности;

в) точки в пространстве;

г) системы двух точек;

д) системы двух точек, находящихся на заданном расстоянии одна от другой;

е) системы двух точек, находящихся на заданном расстоянии одна от другой, если одна из них связана с поверхностью, а другая с линией;

ж) трех точек с двумя постоянными расстояниями;

з) трех точек с тремя постоянными расстояниями;

и) определить число поступательных степеней свободы системы точек;

к) определить число вращательных степеней свободы системы точек.

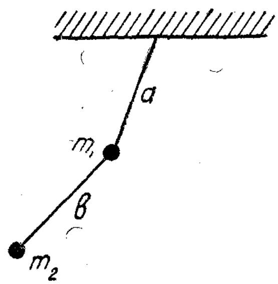

Рис. 1

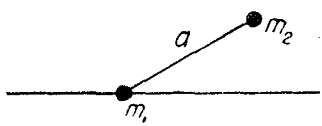

Рис. 2

4. Написать функцию Лагранжа для материальной точки в координатах:

а) декартовых,

б) цилиндрических,

в) сферических,

г) u и v, связанных с декартовыми посредством

$$x=\frac{u-v}{2}, \quad y=\sqrt{uv}.$$

5. Найти функцию Лагранжа для:

а) точки с массой m на шаровой поверхности в поле тяжести (сферического маятника);

б) точки на поверхности конуса с углом 2α при вершине, причем потенциальная энергия обратно-пропорциональна расстоянию от вершины;

в) двойного плоского маятника (рис. 1);

г) точки m_1 движущейся по горизонтальной прямой, и точки m_2, движущейся в вертикальной плоскости (система находится в поле тяжести — см. рис. 2);

д) точек m_1 и m_2, движущихся по прямым, образующим угол в 45° с горизонталью (система находится в поле тяжести) (рис. 3);

е) системы, изображенной на рис. 4. При этом точка m_2, движется по вертикальной прямой, а вся система вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикали и находится в поле тяжести;

ж) маятника (плоского) в поле тяжести, причем по его стержню движется точка со скоростью v (рис. 5);

з) маятника (в поле тяжести), точка подвеса которого движется по кругу радиуса r с постоянной угловой скоростью ω (рис. 6);

и) системы из точек m_1 и m_3, которые движутся на концах нитей, наматывающихся на два блока, насаженных на одну ось и скрепленных друг с другом, и точки m_2, которая кроме того может еще двигаться относительно точки m_3 (рис. 7);

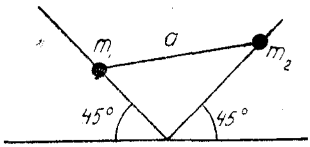

Рис. 3

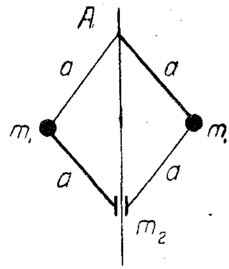

Рис. 4

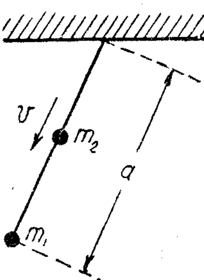

Рис. 5

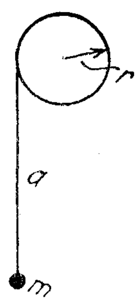

Рис. 6

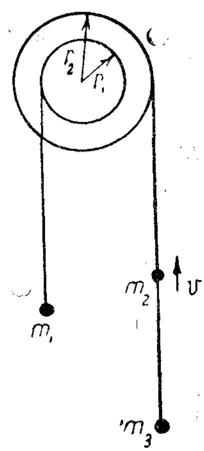

Рис. 7

6. Написать функцию Лагранжа для материальной точки:

а) в равномерно движущейся системе координат;

б) в равномерно ускоренной системе координат;

в) в равномерно вращающейся системе координат.

7. Найти аддитивные законы сохранения для системы взаимодействующих точек при движении:

а) свободном;

б) в поле бесконечной однородной плоскости;

в) в поле бесконечного однородного цилиндра;

г) в поле однородного шара;
д) в поле бесконечной однородной полуплоскости;
е) в поле двух точек;
ж) в однородном переменном поле;
з) в поле провода с переменным зарядом;
и) в поле трехосного эллипсоида;
к) в поле бесконечной однородной цилиндрической винтовой линии;
л) в поле бесконечной однородной призмы;
м) в поле однородного конуса;
н) в поле кругового тора;
о) для сферического маятника;
п) для точки в поле тяжести на конце равномерно укорачивающейся нити.

8. Найти энергию, если:

а) $L = T(q_к, \dot{q}_к) - U(q_к)$, где T — квадратичная функция от $\dot{q}_к$;

б) $L = T(q_к, \dot{q}_к) + A(q_к\dot{q}_к) - U(q_к)$, где T — квадратичная и A — линейная функция от $\dot{q}_к$;

в) $L = -\sqrt{1-v^2} + Av - \varphi$, где A и φ — функции только от координат.

9. Найти место остановки системы, описываемой функцией Лагранжа L, при данных начальных условиях:

а) $L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \sin x$ при $x = 0 : \dot{x} = 1$;

б) $L = -\sqrt{1-\dot{x}^2} + x$ при $x = 1 : \dot{x} = \frac{1}{2}$;

в) $L = \frac{\dot{x}^2 - x^2 + 1}{x}$ при $x = 1 : \dot{x} = 1$.

10. а) Выразить момент импульса в одной системе координат через момент импульса в другой системе координат.

б) Выразить импульс в равномерно двужущейся системе координат через импульс в неподвижной системе координат.

в) Выразить момент импульса в равномерно движущейся системе координат через момент импульса в неподвижной системе координат (в момент времени, когда начала обоих систем совпадают).

11. Найти коэфициент преломления для частиц с массой m и скоростью v при переходе из среды, где потенциальная энергия частицы равна U_1, в среду, где эта энергия равна U_2.

12. Найти соотношение между скоростями и углами отклонения двух частиц после столкновения, если до столкновения одна из них покоилась (выразить их через угол отклонения в системе координат, где центр инерции покоится).

13. а) Привести задачу движения двух точек к задаче движения одной точки.

б) Привести задачу движения n электронов вокруг ядра к движению n тел.

в) Привести задачу движения двухатомной молекулы к системе координат, в которой линия, соединяющая ядра, покоится.

14. а) Если потенциальная энергия системы точек есть однородная функция n-го порядка от декартовых координат, то показать, что существуют подобные траектории и определить зависимость скоростей, периодов и энергии от размеров.

б) Как относятся времена движения по одинаковым траекториям точек с различными массами?

в) Как изменятся времена движения по траектории при изменении потенциальной энергии на постоянный множитель?

15. Если потенциальная энергия U системы точек есть однородная функция n-го порядка от декартовых координат, то доказать, что

$$nU = 2T - \frac{d}{dt} \Sigma_i x_i p_i$$

(T — кинетическая энергия) и найти зависимость между средними значениями кинетической и потенциальной энергией и полной энергией (для финитного движения).

II. Интегрирование уравнений движения

16. а) Найти траекторию заряженной частицы с массой m и зарядом e в равномерном электрическом поле E, если в начальный момент $t=0$, скорость равна v_0 и направлена под углом α к направлению поля.

б) Найти траекторию заряженной частицы с массой m и зарядом e в переменном однородном электрическом поле $E = \cos\omega t$, если при $t=0$ скорость ее равна v_0 и направлена перпендикулярно к полю.

в) Найти траекторию той же частицы, если составляющая поля в направлении оси x есть $\cos\omega t$, а в направлении оси y есть $\sin\omega t$; начальная скорость равна нулю.

17. Проинтегрировать уравнения движения точки, если дана ее функция Лагранжа и начальные условия (в момент $t=0$ скорость и координата $\dot{x}=\dot{x}_0, x=x_0$):

а) $L=\dot{x}^2-\dfrac{1}{x^2}$; $x_0=1, \dot{x}_0=0$;

б) $L=\dot{x}^2+\operatorname{tg}^2 x$; $x_0=0, \dot{x}_0=2$;

в) $L=\dot{x}^2+e^x$; $x_0=0, \dot{x}_0=2$;

г) $L=\dot{x}^2-\dfrac{1}{x}$; $x_0=1, \dot{x}_0=0$;

д) $L=\dfrac{\dot{x}^2}{x}-x$; $x_0=1, \dot{x}_0=1$;

е) $L=\dfrac{\dot{x}^2}{x}+x+\dfrac{1}{x}$; полная энергия $E=-3, \dot{x}_0=0$

ж) $L=\dfrac{\dot{x}^2+x\dot{x}-1}{x^2}$; $x_0=1, \dot{x}_0=0$;

з) $L=-\sqrt{1-\dot{x}^2}+x$; $x_0=2, \dot{x}_0=0$.

18. Указать условия финитности движения и найти периоды колебаний в зависимости от энергии, если:

а) $L = \dot{x}^2 - x^2$;

б) $L = \dfrac{\dot{x}^2}{x} - x - \dfrac{1}{x}$;

в) $L = \dot{x}^2 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$;

г) $L = \dot{x}^2 - (e^x - 1)^2$;

д) $L = \dfrac{\dot{x}^2 + 2x - 1}{x^2}$;

е) $L = \dot{x}^2 - \mathrm{tg}^2 x$;

ж) $L = \dot{x}^2 - \mathrm{th}^2 x$.

19. Проинтегрировать уравнения движения, если:

а) $L = \dfrac{t^2 \dot{x}^2}{2}$; при $t = 1$: $\dot{x} = 1, x = 0$;

б) $L = \dfrac{\dot{x}^2}{2} + t^2 \dot{x}$; при $t = 0$: $\dot{x} = 1$, $x = 0$;

в) $L = \sqrt{t + \dot{x}^2}$; при $t = 3$: $\dot{x} = 1, x = 0$.

20. Проинтегрировать уравнения движения, если:

а) $L = \dfrac{\dot{x}^2}{x} + x\dot{y}^2 + x$;

б) $L = \dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z}}{x}$;

в) $L = \dfrac{\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y}x + \dot{y}^2}{2}$;

г) $L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2} + x$;

д) $L = \dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2x\dot{y}}{2x}$.

21. Найти наибольшее и наименьшее расстояния до начала координат для точки с массой m, движущейся в поле с центральной симметрией в зависимости от энергии и момента относительно центра. Потенциальная энергия при движении в поле:

а) $U = \dfrac{a}{r}$;

б) $U = \frac{a}{r^2}$;

в) $U = \frac{1}{r^4}$;

г) $U = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\right)$, $(m = 1)$,

д) $U = \frac{1}{2}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)$, $(m = 1)$.

22. Проинтегрировать уравнения движения для точки с массой m, движущейся в поле с центральной симметрией:

а) $U = -\frac{a}{r}$;

б) $U = \frac{1}{2r^2}$, $(m = 1)$;

в) $U = -\frac{1}{2r^2}$, $(m = 1)$;

г) $U = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\right)$, $(m = 1)$;

д) $U = \frac{1}{2}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)$, $(m = 1)$.

23. Найти угол отклонения для точки с массой m, которая движется в поле с центральной симметрией:

а) $U = \frac{a}{r}$;

б) $U = \frac{1}{2r^2}$, $(m = 1)$;

в) $U = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\right)$ ($m = 1$, полная энергия положительна).

24. Определить эфективный поперечник рассеяния для движения в поле с центральной симметрией:

а) $U = \infty$ при $r < a$ и $U = 0$ при $r > a$ (бесконечный потенциальный барьер);

б) $U = \frac{a}{r}$;

в) $U = \frac{1}{2r^2}$, $(m = 1)$.

25. Определить эфективный поперечник рассеяния для столкновения двух взаимодействующих по закону „а“, „б“ и „в“ зад. 24 точек с одинаковыми массами, из которых одна первоначально покоилась.

26. Определить эфективный поперечник рассеяния для частиц, движущихся в поле с центральной симметрией для малых углов рассеяния;

а) $U = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{r}$;

б) $U = \frac{1}{r^4}$.

27. Как зависит эфективный поперечник рассеяния от скорости частиц, если потенциальная энергия пропорциональна r^{-n}?

III. Малые колебания

28. а) Дана частота колебаний, координата и скорость точки; определить амплитуду и фазу.

б) Выразить амплитуду и фазу через координату и энергию.

29. Найти частоты малых колебаний системы, если ее функция Лагранжа имеет вид:

а) $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$;

б) $L = \frac{\dot{x}^2}{2} + \sin x$;

в) $L = \frac{\dot{x}^2 - x^2 - 1}{2x}$;

г) $L = \dot{x}^2 - x^2 e^x$;

д) $L = \operatorname{ch} x (\dot{x}^2 - 1)$;

е) $L = \frac{\dot{x}^2}{x} - \frac{x}{\ln x}$.

30. Найти отношение частот двухатомных молекул изотопов с массами ядер соответственно m_1, m_2 и m_3, m_4.

31. а) Найти частоту колебаний точки с массой m, движущейся по прямой и прикрепленной к пружине, которая другим концом закреплена в точке A. Наименьшая возможная длина пружины равна l, причем в этом положении она натянута с силой F (рис. 8).

б) Найти частоту колебаний изображенной на рисунке системы (рис. 9), если в положении равновесия пружина натянута с силой F и имеет длину l.

в) Найти частоту продольных колебаний изображенной на рис. 10 системы (точка между двумя пружинами), причем жесткости пружин соответственно k и l (жесткостью называется коэфициент пропорциональности между силой пружины и ее растяжением).

32. Найти частоту колебаний свободно вращающейся системы двух точек, взаимодействующих по закону $U = -\frac{\ln r}{r^2}$.

33. Определить зависимость координаты от времени вблизи положения неустойчивого равновесия.

34. Определить, какой степени амплитуды пропорционален период малых колебаний, если $U''(x)$ в положении равновесия равно нулю.

35. Определить смещение положения равновесия под влиянием малой постоянной внешней силы, выразив его через массу и частоту.

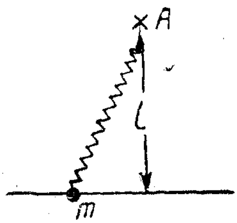

Рис. 8

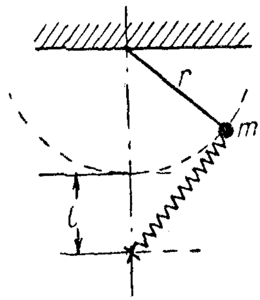

Рис. 9

36. Найти вынужденные колебания точки под влиянием силы F если в начальный момент $t=0$ координата и скорость равны нулю и частота свободных колебаний равна ω.

а) $F=a$;
б) $F=a\cos\alpha t$;
в) $F=a\sin\alpha t$;
г) $F=at$;
д) $F=ae^{-\alpha t}$;
е) $F=ae^{-\alpha t}\cos\beta t$;
ж) $F=ae^{-\alpha t}\sin\beta t$.

37. Найти зависимость амплитуды от времени для колебаний при наличии внешней силы:

а) $F=a\cos\omega t$ (ω — частота свободных колебаний; начальные условия те же, что в зад. 36).

б) $F=a\cos(\omega+\Delta)t$, где $\Delta\ll\omega$ (начальные условия те же).

Рис. 10

38. Определить конечную амплитуду колебаний точки с массой $m=1$ после действия внешней силы $F(t)$, если в начальный момент $t=0: \dot{x}=0$, $x=0$, — для случаев:

а) $F=0$ при $t<0$, $F=\dfrac{t}{T}$ при $0<t<T$, $F=1$ при $t>T$ (рис. 11а);

б) $F=0$ при $t<0$ и $t>T$, $F=a$ при $0<t<T$ (рис. 12б);

в) $F=0$ при $t<0$ и $t>T$, $F=t$ при $0<t<T$ (рис. 13в).

39. Найти количество энергии, переданное системе, совершающей малые колебания, при действии на нее силы $F(t)$ от момента t_1 до t_2, если при $t=t_1$ скорость и координата равны нулю (указание: ввести в качестве новой переменной $\dot{q}+i\omega q$).

40. Определить движение точки, совершающей затухающие колебания, если при $t=0$: $x=x_0$ и $v=v_0$ для случаев, когда декремент затухания:

а) меньше частоты свободных колебаний без трения;

б) больше частоты свободных колебаний без трения:

в) равен частоте свободных колебаний без трения.

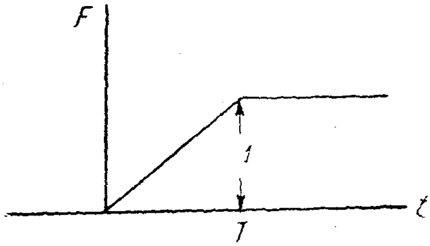

Рис. 11а

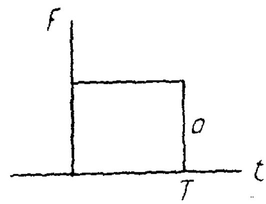

Рис. 12б

41. Найти логарифмический декремент затухания и частоту колебаний для следующих систем:

а) Маятник с массой $m=1$ и длиной $l=2$, причем поглощение энергии, благодаря трению в точке подвеса, равно удвоенному квадрату угловой скорости (ускорение силы тяжести g считать равным единице).

б) Тот же маятник, причем поглощение энергии (трение в среде) равно учетверенному квадрату скорости точки m.

в) Точка с массой $m=1$ находится между двумя пружинами (коэфициенты жесткости которых равны $k_1=5$, $k_2=4$), расположенными на одной прямой. Поглощение энергии (трение в пружинах) для каждой пружины равно удвоенному квадрату скорости.

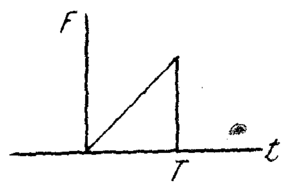

Рис. 13в

42. Выразить логарифмический декремент затухания через подвижность (подвижностью называется отношение скорости установившегося движения частицы, на которую действует одна только сила F, к силе).

43. Найти амплитуду вынужденных затухающих колебаний при действии периодической (гармонической) силы.

44. Определить поглощение энергии в системе, совершающей затухающие колебания (декремент затухания λ мал) при действии периодической силы с частотой, близкой к собственной

частоте незатухающих колебаний системы. Найти площадь кривой зависимости поглощенной энергии от частоты действующей на систему силы.

45. Найти частоты и нормальные колебания, если:

а) $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(x^2 - xy + y^2)$;

б) $L = \frac{1}{2}(2\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(3x^2 + 2y^2)$;

в) $L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{2}{5}\dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + \frac{2}{5}yz + z^2\right)$

(найти частоты);

г) $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(x^2 + xy + y^2 + 2z^2 + 2yz)$

(найти частоты).

46. Найти собственные частоты колебаний систем, описываемых функциями Лагранжа:

а) $L = \frac{1}{2}(x\dot{x}^2 + y\dot{y}^2) - \left(\frac{1}{xy} + x + y\right)$;

б) $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2) - (x^3 - y^3 + 3xy)$;

в) $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}\dot{y}) - \left(\ln xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.

47. Определить число и характер колебательных степеней свободы для системы из n точек, расположенных:

а) в пространстве;

б) на плоскости;

в) на прямой.

48. а) Показать, что нормальные колебания одной точки взаимно перпендикулярны.

б) Показать, что если все три частоты колебаний равны между собой, то движение плоское.

в) Найти траекторию точки, совершающей колебания по двум взаимно-перпендикулярным направлениям, если частоты этих колебаний одинаковы, а амплитуды и начальные фазы различны.

49. а) Найти частоты колебаний точки m, прикрепленной к четырем пружинам, натянутым с силой F, коэфициенты жесткости которых равны k (рис. 12; определение жесткости см. задачу 31в).

б) Написать функцию Лагранжа в канонической форме для колебаний системы трех точек $m_1 = 1$, $m_2 = m_3 = 2$, соединенных пружинами с нормальными длинами $l_1 = l_2 = 1$ и жесткостями $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Колебания, выводящие точки с одной линии обусловливаются пружиной, потенциальная энергия которой пропорциональна квадрату угла относительного поворота обеих пружин (рис. 13).

в) Написать функцию Лагранжа в канонической форме для колебаний системы четырех точек с массами $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$ соединенных стержнями длиною $l_1 = l_2 = l_3 = 2$, которые поворачиваются под действием пружин, потенциальная энергия которых равна квадратам углов относительного поворота стержней (рис. 14).

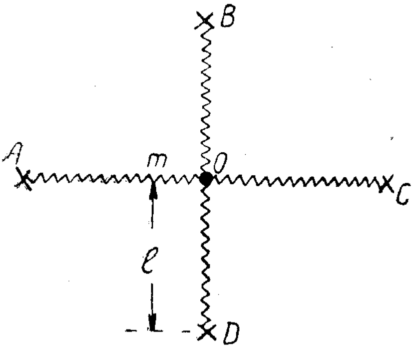

Рис. 12

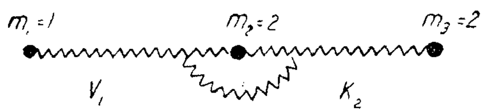

Рис. 13

50. а) Определить зависимость амплитуды от времени для колебания, являющегося суммой двух колебаний с близкими частотами.

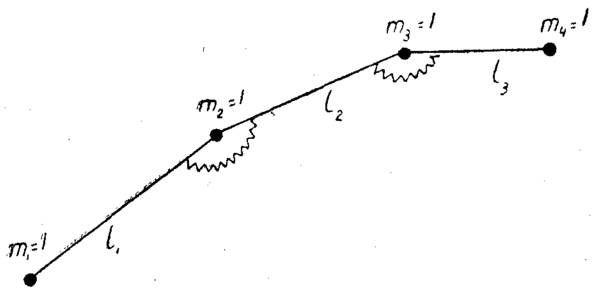

Рис. 14

б) Найти частоту биений для колебаний двух слабо связанных систем с одинаковыми собственными частотами, т. е. если

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + \alpha xy,$$

где $\alpha \ll \omega^2$.

51. Найти логарифмические декременты затухания по данным функции Лагранжа и диссипативной функции:

а) $L=\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2}$, $\quad F=\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{x}\dot{y}}{2}$;

б) $L=\frac{\dot{x}^2+\dot{x}\dot{y}+\dot{y}^2}{2}$, $\quad F=\frac{\dot{x}^2+2\dot{y}^2}{2}$.

52. Найти ангармонические колебания, если:

а) $L=\frac{\dot{x}^2}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$;

б) $L=\frac{\dot{x}^2}{2}-\left(x+\frac{1}{x}\right)$;

в) $L=\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2}-\frac{4x^2+y^2}{2}+x^2y$;

г) $L=\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2}-\frac{x^2+y^2}{2}+\dot{x}^2y$.

IV. Твердое тело

53. Найти функцию Лагранжа для свободного движения точки в равномерно вращающейся системе координат:

а) на плоскости, расположенной под углом α к оси вращения;

б) на цилиндре, ось которого перпендикулярна оси вращения;

в) на конусе, ось которого перпендикулярна оси вращения.

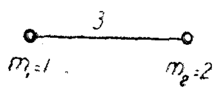

Рис. 15

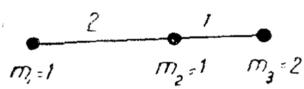

Рис. 16

54. Найти отклонения, вызванные вращением земли (угловая скорость вращения мала), для свободно падающей точки (разобрать случай падения без начальной скорости и случай движения точки, брошенной по направлению меридиана под углом α к горизонту).

55. Найти связь между моментами инерции:

а) системы точек, расположенных по прямой линии;

б) системы точек, расположенных в плоскости.

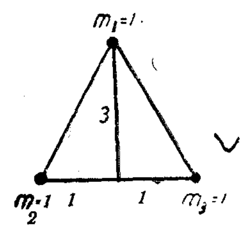

Рис. 17

56. а), б), в), г), д), е). Определить главные моменты инерции для систем точек, изображенных на рис. 15, 16, 17, 18, 19 и 20.

57. а) Определить частоту малых колебаний физического маятника по: массе M, главным моментам инерции I_1, I_2, I_3, углам α, β, γ главных осей инерции с осью вращения и расстоянию l от оси вращения до центра инерции.

б) Найти кинетическую энергию системы, изображенной на рис. 21. OA и AB — однородные стержни с длиной l, массой M и моментом инерции I; стержень OA вращается вокруг точки O, а стержень AB двигается так, что конец B остается все время на одной прямой (движение в плоскости рисунка).

в) Найти кинетическую энергию цилиндра (с радиусом r), катящегося по плоскости (масса и моменты инерции цилиндра известны, а главная ось инерции параллельна оси цилиндра; центр инерции находится на расстоянии a от оси цилиндра — см. рис. 36).

г) Найти кинетическую энергию при тех же условиях, если цилиндр катится по внутренней поверхности цилиндрической поверхности радиуса R; центр инерции цилиндра находится на его оси.

д) Найти кинетическую энергию конуса с углом 2α при вершине, катящегося по плоскости (центр инерции конуса находится на его оси на расстоянии a от вершины).

е) Найти кинетическую энергию конуса, катящегося по плоскости, причем его вершина находится в точке над плоскостью

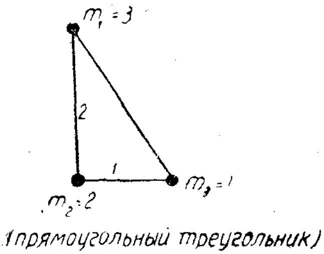

Рис. 18

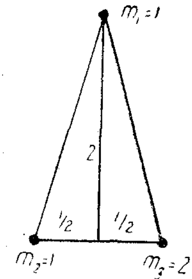

Рис. 19

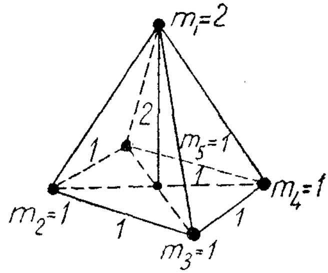

Рис. 20

на высоте r так, что ось конуса параллельна плоскости; центр инерции находится на расстоянии a от вершины конуса на его оси; угол при вершине конуса — 2α (см. рис. 22).

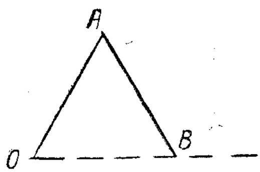

Рис. 21

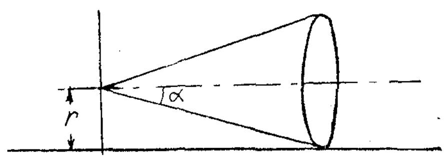

Рис. 22

ж) Найти кинетическую энергию трехосного эллипсоида, вращающегося вокруг одной из своих осей (рис. 23), причем последняя также вращается вокруг направления, ей перпендикулярного (CD); центр эллипсоида находится на расстояни a от второй из указанных осей вращения (CD).

з) Найти кинетическую энергию при тех же условиях, если ось AB (зад. 57ж) наклонена (см. рис. 24).

и) Найти кинетическую энергию симметрического волчка.

58. Найти движение свободного симметрического волчка в координатах Эйлера.

59. а) Найти движение свободного симметрического волчка в системе координат, связанной с волчком.

б) Тоже для асимметрического волчка (привести к квадратурам).

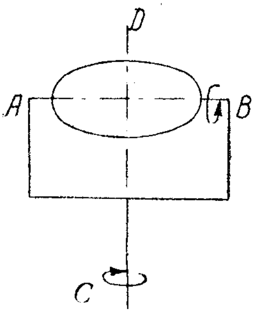

Рис. 23

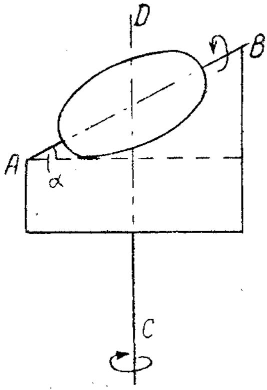

Рис. 24

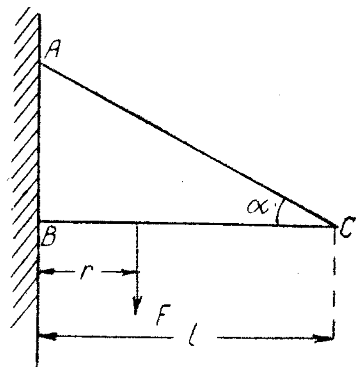

Рис. 25

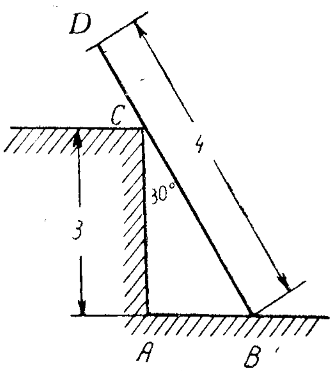

Рис. 26

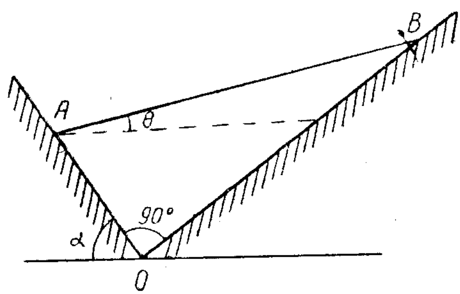

Рис. 27

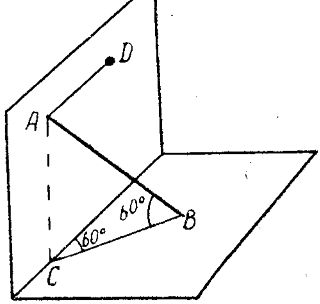

Рис. 28

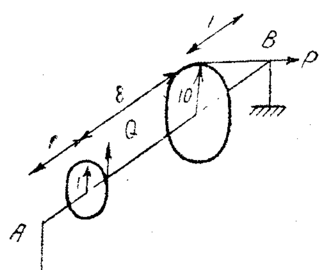

Рис. 29

60. а) В точке B шарнир; конец стержня C соединен с A нитью; в точке стержня на расстоянии r от B приложена сила F. Найти реакцию стены и натяжение нити (рис. 25).

б) BD — однородный стержень с весом равным 6; его конец B прикреплен к стене AC нитью AB. Определить реакцию стены и натяжение нити (рис. 26).

в) Найти угол θ между однородным стержнем AB весом P и горизонталью в положении равновесия, и реакции опор в точках A и B (рис. 27).

г) Стержень AB (с весом 8) удерживается двумя горизонтальными нитями AD и CB; конец стержня A опирается о вертикальную плоскость, конец B — о горизонтальную (рис. 28). Найти натяжения нитей и реакции плоскостей.

д) На горизонтальную ось AB насажены два колеса, к одному из них приложена горизонтальная сила $P = 10$ по направлению касательной, к другому — вертикальная сила Q (тоже по касательной) (рис. 29). Найти силу Q и реакции в точках A и B в равновесии.

V. Канонические уравнения

61. Написать уравнения Гамильтона, если:

а) $H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2 \sin^2\theta} + \sin\theta$;

б) $H = \frac{p_u{}^2 + p_v{}^2}{2(u^2 + v^2)} + u$;

в) $H = \sqrt{1 + p^2} + r$;

г) $H = \frac{p_x p_y}{tx^2 y}$,

д) $H = \frac{(p - r^2)^2}{2}$.

62. Выразить скорость через энергию, если известно, что $p = f(E)$.

63. Найти функцию Гамильтона, если дана функция Лагранжа:

а) $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$;

б) $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2 + \dot{z}^2) - U(r, \varphi, z)$;

в) $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2) - U(r, \varphi, \theta)$;

г) $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$;

д) для точки, движущейся по твердому телу (функция Лагранжа из задачи 53);

е) $L = \frac{x\dot{y}^2}{2} + \ln \dot{x}$;

ж) для задачи 13б.

64. Найти функцию Лагранжа, если дана функция Гамильтона:

а) $H=\frac{p_r{}^2}{2\theta^2}+\frac{p_\theta^2}{2r^2\sin\theta}+r$;

б) $H=\ln p_x+p_x+\frac{p_y^2}{2}$;

в) $H=\frac{p_x^2t}{2}+p_xp_y$.

65. Проинтегрировать уравнение Гамильтона-Якоби для:

а) свободной точки с массой m;

б) линейного гармонического осциллятора, описываемого функцией Лагранжа $L=\frac{\dot{x}^2}{2}-\frac{x^2}{2}$;

в) точки с массой $m=1$ в однородном поле с напряженностью, равной единице;

г) точки, совершающей плоское движение в поле (U — потенциальная энергия)

$$U=\frac{1}{r}; \qquad (m=1)$$

д) точки в поле с осевой симметрией

$$U=\frac{1}{r}; \qquad (m=1)$$

е) точки в поле с центральной симметрией

$$U=\frac{1}{r}. \qquad (m=1)$$

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

I. Уравнения движения

1. Уравнения Лагранжа имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ называется обобщенным импульсом p_i, соответствующим i-ой координате, а $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ — обобщенной силой Q_i, соответствующей i-ой координате.

Решая задачу 1, определяем p_i и Q_i и из уравнений Лагранжа находим $\ddot{q}_i$:

1а. $\ddot{q} = -q.$

1б. $\ddot{q} = -\dfrac{q\dot{q}^2 + q}{1 + q^2}.$

1в. $\ddot{q} = -\dfrac{\dot{q}}{t}.$

1г. $\ddot{q} = (1 - \dot{q}^2)^{3/2}$

1д. $\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \dfrac{1}{r^2}; \qquad \ddot{\theta} = -\dfrac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r}.$

1е. $\ddot{\theta} = \dfrac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \sin 2\theta + \sin\theta; \qquad \ddot{\varphi} = -\dfrac{2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta}{\sin\theta}.$

1ж. $\ddot{x} = 2\dot{y}; \qquad \ddot{y} = -2\dot{x}.$

1з. $\ddot{v} = -\dfrac{1}{uv}\sqrt{\dfrac{v}{u}}; \qquad \ddot{u} = -\dfrac{1}{uv}\sqrt{\dfrac{u}{v}}.$

2а. Функция Лагранжа определена с точностью до полной производной по времени (принцип наименьшего действия инвариантен относительно прибавления к функции Лагранжа полной производной по времени). По этой причине в функции Лагранжа можно вычеркнуть все члены, дающие полную производную по времени.

$$\frac{d}{dt}(x \sin t) = \dot{x} \sin t + x \cos t.$$

Перенеся влево $x \cos t$ и вычеркнув полную производную по времени, получаем:

$$L = -x \cos t.$$

2б. Раскрыв скобки и учитывая, что

$$\dot{q}t = \frac{d}{dt}(qt) - q \text{ и } t^2 = \frac{1}{3} \frac{dt^3}{dt},$$

получаем:

$$L = \frac{\dot{q}^2}{2} - q.$$

2в. Раскрыв скобки и учитывая, что $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} q^2\right) = \dot{q}q$, имеем:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 + q^2).$$

2г. $\frac{d}{dt}(xy) = \dot{x}y + x\dot{y}$. Следовательно,

$$L = 2x\dot{y} \quad \text{или} \quad L = -2y\dot{x}.$$

2д. Учитывая, что $tx\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} tx^2\right) - \frac{1}{2} x^2$ и вычеркнув полную производную по времени, находим:

$$L = -\frac{1}{2} x^2.$$

3а. Числом степеней свободы называется число независимых координат, необходимых для того, чтобы определить положение системы. Положение точки на линии дается одной координатой, например, расстоянием от заданной точки на кривой; поэтому точка на линии имеет одну степень свободы.

3б. Две.

3в. Три.

3г. Каждая из точек имеет по три степени свободы; всего шесть.

3д. Две точки имеют шесть; наличие одного дополнительного условия уменьшает это число на единицу; всего пять.

3е. Две — для точки на поверхности, одна — для точки на линии; одно дополнительное условие уменьшает число степеней свободы на единицу; всего две.

3ж. Семь.

3з. Шесть.

3и. Три, соответственно перемещению вдоль трех осей координат.

3к. Три, соответственно трем углам, характеризующим поворот осей координат; если же система состоит из точек, расположенных по одной прямой, то для определения ее положения достаточно только двух углов и соответственно имеются две вращательные степени свободы.

4а. Функция Лагранжа одной материальной точки может быть написана в виде:

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - U(q) = \frac{m}{2}\frac{ds^2}{dt^2} - U(q),$$

где ds^2 — квадрат элемента длины в системе координат, в которой рассматривается движение точки и потенциальная энергия; $U(q)$ — функция только координат.

В декартовых координатах $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ и потому

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z).$$

4б. $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$; $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - U(\rho, z, \varphi)$.

4в. $ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$; $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) -$
$- U(r, \theta, \varphi)$.

4г. $ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{du^2}{4}\left(1 + \frac{v}{u}\right) + \frac{dv^2}{4}\left(1 + \frac{u}{v}\right)$;

$$L = \frac{m}{8}\left[\dot{u}^2\left(1 + \frac{v}{u}\right) + \dot{v}^2\left(1 + \frac{u}{v}\right)\right] - U(u, v).$$

5а. Для описания движения берем сферические координаты, причем, поскольку радиус шара постоянный, $\dot{r} = 0$ и кинетическая энергия (см. задачу 4в) равна

$$\frac{m}{2}(r^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Потенциальная энергия в поле тяжести равна произведению массы, ускорения силы тяжести и высоты поднятия точки над некоторым уровнем (от какого именно, не имеет значения, так как при отсчете от разных уровней прибавляются лишь новые постоянные в функции Лагранжа, которые можно все равно опустить — см. задачу 2), за который можно принять, например, экваториальную плоскость. Высота поднятия будет тогда $r\cos\theta$. Вычтя потенциальную энергию из кинетической, получаем:

$$L = \frac{m}{2}(r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - mgr\cos\theta.$$

5б. Беря опять сферические координаты с центром в вершине конуса и осью, от которой отсчитывается угол θ, по оси конуса и учитывая, что $\theta = \alpha$ и потому $\dot{\theta} = 0$, а также, что расстояние от вершины есть r, имеем:

$$L = \frac{m}{r}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha) - \frac{a}{r}.$$

5в. Функция Лагранжа равна сумме функций Лагранжа для точек m_1 и m_2, т. е. $L = L_1 + L_2$. Обозначив угол между отрезком a и вертикалью через φ, имеем для кинетической энергии точки:

$$T_1 = \frac{m_1}{r}a^2\dot{\varphi}^2,$$

так как скорость ее есть $a\dot{\varphi}$. Отсчитав высоту поднятия, например, от точки A, получаем потенциальную энергию в виде:

$$U_1 = -m_1 ga\cos\varphi.$$

Поэтому

$$L_1 = \frac{m_1}{2}a^2\dot{\varphi}^2 + m_1 ga\cos\varphi.$$

Введем угол θ между отрезком b и вертикалью. Чтобы найти кинетическую энергию T_2 точки m_2, выразим ее декартовы координаты x_2 и y_2 (начало координат в точке A, ось y направлена вниз по вертикали) через углы θ и φ. Мы получим тогда:

$$x_2 = a\sin\varphi + b\sin\theta,$$
$$y_2 = a\cos\varphi + b\cos\theta,$$

откуда

$$\dot{x}_2 = \dot{\varphi}a\cos\varphi + \dot{\theta}b\cos\theta,$$

$$\dot{y}_2 = -a\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\theta}b\sin\theta.$$

Пользуясь этим, получаем:

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2}(a^2\dot{\varphi}^2 + b^2\dot{\theta}^2 + 2ab\cos(\varphi - \theta)\dot{\varphi}\dot{\theta}).$$

Вычтя потенциальную энергию $U_2 = -m_2 g[a\cos\varphi + b\cos\theta]$ (высота отсчитывается от точки A), получаем:

$$L_2 = \frac{m_2}{2}(a^2\dot\varphi^2 + b^2\dot\theta^2 + 2ab\dot\varphi\dot\theta\cos(\varphi-\theta)) + m_2 g(a\cos\varphi + b\cos\theta).$$

5г. Введем угол φ между отрезком a и горизонталью, и расстояние r по горизонтали от m до некоторой неподвижной точки на ней, в которой поместим начало декартовых координат (с осью x по горизонтали). Тогда декартовы координаты точки m_2 будут:

$$x_2 = r + a\cos\varphi, \qquad y_2 = a\sin\varphi;$$

$$\dot x_2 = \dot r - a\dot\varphi\sin\varphi; \qquad \dot y_2 = a\dot\varphi\cos\varphi.$$

Отсюда кинетическая энергия:

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot x_2^2 + \dot y_2^2) = \frac{m_2}{2}(\dot r^2 + a^2\dot\varphi^2 - 2a\dot r\dot\varphi\sin\varphi).$$

Ее же потенциальная энергия равна $m_2 g a\sin\varphi$. Кинетическая энергия точки m_1 есть $T_1 = \frac{m_1}{2}\dot r^2$; ее потенциальная энергия — постоянна. Таким образом, функция Лагранжа для обеих точек вместе будет:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot r^2 + \frac{m_2}{2}(a^2\dot\varphi^2 - 2a\dot r\dot\varphi\sin\varphi) - m_2 g a\sin\varphi.$$

5д. Введя угол φ между отрезком a и одной из прямых, получаем для расстояний точек m_1 и m_2 до вершины прямого угла соответственно: $a\cos\varphi$ и $a\sin\varphi$, а для скоростей: $-a\dot\varphi\sin\varphi$ и $a\dot\varphi\cos\varphi$. Высота точек над горизонтальной прямой соответственно:

$$a\cos\varphi\cdot\sin 45^\circ = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \frac{a\sin\varphi}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда находим:

$$L = \frac{m_1}{2}a^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi + \frac{m_2}{2}a^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi - \frac{ga}{\sqrt{2}}(m_1\cos\varphi + m_2\sin\varphi).$$

5е. Вводим угол φ между отрезком a и вертикальной осью и угол θ поворота всей системы вокруг оси вращения. Тогда $\dot\theta$ будет данная угловая скорость вращения ω. Кинетическая энергия каждой из точек m_1 будет:

$$T_1 = \frac{m_1}{2}(a^2\dot\varphi^2 + a^2\sin^2\varphi\cdot\omega^2)$$

(элемент перемещения $ds^2 = a^2 d\varphi^2 + a^2\sin^2\varphi\cdot d\theta^2$).

Кинетическая энергия точки m_2:

$$T_2 = 2m_2 a^2 \sin^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2$$

(расстояние ее от точки A равно $2a\cos\varphi$, а скорость — $2a\dot{\varphi}\sin\varphi$).

Потенциальная энергия точки m_1:

$$U_1 = -m_1 g a \cos\varphi,$$

а точки m_2:

$$U_2 = -2m_2 g a \cos\varphi$$

(высоты поднятия, например, от точки A соответственно $-a\cos\varphi$ и $-2a\cos\varphi$. Окончательно:

$$L = 2(T_1 - U_1) + T_2 - U_2 = m_1(a^2\dot{\varphi}^2 + a^2\sin^2\varphi\cdot\omega^2) + \\ + 2m_2 a^2 \sin^2\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 + 2ga(m_1 + m_2)\cos\varphi.$$

5ж. Вводим угол φ между отрезком a и вертикалью и расстояние $r = r_0 + vt$ точки m_2 до точки подвеса маятника. Тогда кинетическая энергия точки m_1:

$$T_1 = \frac{m_1}{2} a^2\dot{\varphi}^2,$$

а точки m_2 $(\dot{r} = v)$:

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(v^2 + \dot{\varphi}^2(r_0 + vt)^2).$$

Потенциальные энергии (постоянные опускаем):

$$U_1 = -m_1 a g \cos\varphi,$$
$$U_2 = -m_2 g(vt + r_0)\cos\varphi,$$

$$L = \frac{m_1}{2} a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\varphi}^2(r_0 + vt)^2 + m_1 g a\cos\varphi + m_2 g(vt + r_0)\cos\varphi.$$

(постоянную $\frac{m_2}{2}v^2$ опускаем).

5з. Введем угол φ между отрезком a и вертикалью и кроме того декартовы координаты с началом в центре круга и осью y по вертикали. Тогда координаты точки m:

$$x = r\cos\omega t + a\sin\varphi,$$
$$y = r\sin\omega t - a\cos\varphi,$$

откуда

$$\dot{x} = -r\omega\sin\omega t + a\dot{\varphi}\cos\varphi,$$
$$\dot{y} = r\omega\cos\omega t + a\dot{\varphi}\sin\varphi$$

и

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(a^2\dot{\varphi}^2 + r^2\omega^2 + 2r\omega a\dot{\varphi}\sin(\varphi - \omega t)).$$

Высота поднятия точки над некоторым уровнем, например, осью x, есть $r \sin \omega t - a \cos \varphi$; опустив постоянные, получаем:

$$L = \frac{m}{r}(a^2\dot{\varphi}^2 + 2r\omega a\dot{\varphi}\sin(\varphi - \omega t)) + mg(a\cos\varphi - r\sin\omega t).$$

5и. Если $\dot{\varphi}$ — угловая скорость вращения блоков, то кинетическая энергия точки m_1 есть:

$$\frac{m_1}{2} r_1^2\dot{\varphi}^2;$$

точки m_3:

$$\frac{m_3}{2} r_2^2\dot{\varphi}^2;$$

точки m_2:

$$\frac{m_2}{2}(r_2\dot{\varphi} + \dot{x})^2,$$

где x — расстояние точки m_2 до m_3. Таким образом:

$$L = \frac{m_1}{2} r_1^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m_3}{2} r_2^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m_2}{2}(r_2\dot{\varphi} + \dot{x})^2.$$

6а. Координаты точки в системе координат x', y', z', равномерно движущейся относительно системы x, y, z со скоростью v параллельно оси x, связаны с координатами той же точки в системе x, y, z уравнениями:

$$x = x' + vt, \qquad y = y', \qquad z = z'$$

(при $t = 0$ начала обеих систем совпадали).

Поэтому

$$\dot{x} = \dot{x}' + v, \qquad \dot{y} = \dot{y}', \qquad \dot{z} = \dot{z}'$$

и

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{x}'^2 + 2\dot{x}'v + v^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) - U.$$

v^2 и $2\dot{x}'v$ можно опустить, как полные производные от v^2t и $2vx$, и мы получим:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) - U,$$

т. е. L имеет тот же вид, как и в координатах x, y, z, в соответствии с принципом относительности Галилея.

6б. Если система x', y', z' двигается равномерно-ускоренно с ускорением a вдоль оси x относительно системы x, y, z, то

$$\dot{x} = \dot{x}' + at, \qquad \dot{y} = \dot{y}', \qquad \dot{z} = \dot{z}'$$

и

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-U=\frac{m}{2}(\dot{x}'^2+\dot{y}'^2+\dot{z}'^2+2\dot{x}'at+a^2t^2)-U.$$

Опустив a^2t^2, как полную производную от $\frac{a^2t^3}{3}$, и учитывая, что

$$2\dot{x}'at=\frac{d}{dt}(2ax't)-2ax',$$

получаем:

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}'^2+\dot{y}'^2+\dot{z}'^2)-max'-U,$$

т. е. наличие ускорения проявляется, как дополнительное однородное поле.

6в. Беря цилиндрические координаты с осью z вдоль оси вращения, имеем для перехода от системы r, φ, z к равномерно вращающейся с угловой скоростью ω:

$$r=r',\quad z=z',\quad \varphi=\varphi'+\omega t;\quad \dot{r}=\dot{r}',\quad \dot{z}=\dot{z}',\quad \dot{\varphi}=\dot{\varphi}'+\omega.$$

Отсюда

$$L=\frac{m}{r}(\dot{r}^2+\dot{z}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-U=\frac{m}{2}(\dot{r}'^2+\dot{z}'^2+r'^2(\dot{\varphi}'+\omega)^2)-U.$$

7а. Законы сохранения вытекают из однородности времени и однородности и изотропности пространства классической механики. Изменение функции Лагранжа в результате переноса и вращения системы координат равно:

$$\delta L=-\dot{E}\delta t+\dot{\vec{P}}\delta\vec{r}+\dot{\vec{M}}\delta\vec{\varphi},$$

где — E энергия, $\vec{P}$ — импульс и $\vec{M}$ — момент количества движения системы. При отсутствии поля, это изменение должно быть равно нулю при изменении начала отсчета времени, начала координат, или при повороте координатных осей.

Следовательно, в данном случае сохраняется энергия системы ее импульс $\vec{P}$ и момент импульса $\vec{M}$.

7б. При движении в поле бесконечной плоскости, которую мы принимаем за плоскость xy, функция Лагранжа не меняется, т. е $\delta L=0$, только при преобразованиях $t'=t+\delta t$, при перемещении системы параллельно плоскости xy и при повороте вокруг оси z, перпендикулярной плоскости.

Отсюда имеем: $E=\mathrm{const}$, $P_x=\mathrm{const}$, $P_y=\mathrm{const}$, $M_z=\mathrm{const}$ (см. решение задачи 7а).

7в. Ось цилиндра — ось z; $E=\mathrm{const}$, $P_z=\mathrm{const}$, $M_z=\mathrm{const}$.

7г. $E = \text{const}$, $\vec{M} = \text{const}$.

7д. Полуплоскость — часть плоскости xy ограниченная осью y; $E = \text{const}$, $P_y = \text{const}$.

7е. Точки на оси x; $E = \text{const}$, $M_x = \text{const}$.

7ж. Поле по оси z; $P_x = \text{const}$, $P_y = \text{const}$, $M_z = \text{const}$.

7з. Ось провода совпадает с осью z; $P_z = \text{const}$, $M_z = \text{const}$.

7и. $E = \text{const}$.

7к. В поле бесконечной однородной цилиндрической винтовой линии $\delta L = 0$ только при повороте вокруг оси винта на угол $\delta\varphi$ и одновременном перемещении вдоль оси z (ось z — по оси винта) на $\frac{h}{2\pi}\delta\varphi$, где h — шаг винта (так как при $\delta\varphi = 2\pi$ должно быть $\delta z = h$). Поэтому

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial \varphi}\delta\varphi = \dot{P}_z \frac{h}{2\pi}\delta\varphi + \dot{M}_z\delta\varphi = 0,$$

т. е.

$$M_z + \frac{h}{2\pi} P_z = \text{const}.$$

7л. $E = \text{const}$, $P_z = \text{const}$ (ребра призмы параллельны оси z).

7м. $E = \text{const}$, $M_z = \text{const}$ (ось конуса — по оси z).

7н. $E = \text{const}$, $M_z = \text{const}$ (ось z — ось тора).

7о. $E = \text{const}$, $M_z = \text{const}$ (ось z — вертикаль).

7п. $M_z = \text{const}$ (ось z — вертикаль).

8а. Энергия системы равна выражению:

$$E = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L,$$

где n — число степеней свободы системы. В данном случае

$$E = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - T + U.$$

По теореме Эйлера об однородных функциях

$$\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = 2T,$$

а потому

$$E = T + U.$$

8б. Аналогично:

$$E=\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k+\sum_k \frac{\partial A}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k-T-A+U.$$

По теореме Эйлера

$$\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}=2T, \qquad \sum_k \frac{\partial A}{\partial \dot{q}_k}=A,$$

и потому

$$E=T+U,$$

т. е. линейный член выпадает.

8в. $$E=\frac{\partial L}{\partial v}v-L, \qquad \frac{\partial L}{\partial v}=\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}+A.$$

Подставив получаем:

$$E=\frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}}+\sqrt{1-v^2}+\varphi=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}+\varphi.$$

9а. Энергия равна:

$$E=\frac{\dot{x}^2}{2}+\sin x,$$

или, подставив начальные условия:

$$\frac{\dot{x}^2}{2}+\sin x=\frac{1}{2}.$$

Система остановится, когда $\dot{x}=0$, т. е.

$$\sin x=\frac{1}{2} \text{ или } x=\frac{\pi}{6}.$$

9б. Энергия (из начальных условий):

$$E=\frac{1}{\sqrt{1-\dot{x}^2}}-x=\frac{2}{\sqrt{3}}-1.$$

Система остановится при $\dot{x}=0$, т. е.

$$1-x=\frac{2}{\sqrt{3}}-1, \qquad x=2-\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

9в. $E=\dfrac{\dot{x}^2+x^2-1}{x}=1;$

ме́сто остановки определится из уравнения:

$$\frac{x^2-1}{x}=1 \quad \text{или} \quad x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

10а. Момент импульса системы точек есть $\vec{M}=\sum_i[\vec{r}_i\,p_i]$ (сумма по точкам, входящим в систему).

При переходе к другой системе координат

$$\vec{r}_i=\vec{r}_i{}'+\vec{R},$$

где $\vec{R}$ — радиус-вектор нового начала координат в старой системе. Поэтому

$$\vec{M}=\sum_i[\vec{r}_i\vec{p}_i]+\sum_i[\vec{R}\vec{p}_i]=\vec{M}'+[\vec{R}\vec{P}],$$

где $\vec{P}=\Sigma_i\vec{p}_i$ — полный импульс системы.

10б. При переходе к системе координат, движущейся со скоростью $\vec{V}$ относительно первоначальной, скорости точек системы преобразуются согласно равенств:

$$\vec{v}_i=\vec{v}_i{}'+\vec{V},$$

а потому полный импульс:

$$\vec{P}=\sum_i m_i\vec{v}_i=\sum_i m_i\vec{v}_i{}'+\sum_i m_i\vec{V}=\vec{P}'+\mu\vec{V},$$

где $\mu=\sum_i m_i$ — полная масса системы.

10в. Скорости точек, как и в 10б, преобразуются по формуле:

$$\vec{v}_i=\vec{v}_i{}'+\vec{V},$$

где $\vec{v}$ — скорость одной системы координат относительно другой. Радиусы вектор $\vec{r}$ в рассматриваемый моме́нт времени одинаковы в обеих системах координат, а потому:

$$\vec{M}=\sum_i[\vec{r}_i\vec{p}_i]=\sum_i m_i[\vec{r}_i\vec{v}_i]=\sum_i m_i[\vec{r}_i\vec{v}_i{}']+\sum_i m_i[\vec{r}_i\vec{V}]=$$

$$=\vec{M}'+\mu\,[\vec{r}\vec{V}],$$

где μ — полная масса системы, а $\vec{r}=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\mu}$ — радиус-вектор центра инерции системы.

11. При переходе сохраняется энергия и импульс в направлении, параллельном плоскости раздела среды. Беря оси координат в плоскости движения с осью x по линии раздела, имеем из сохранения импульса по оси x:

$$v_x = v'_x$$

(v' — скорость после перехода в другую среду) или, если θ есть угол между v и нормалью к поверхности раздела и θ' — между v' и нормалью:

$$v \sin\theta = v' \sin\theta'.$$

Сохранение энергии дает:

$$\frac{mv^2}{2} + U_1 = \frac{mv'^2}{2} + U_2,$$

или

$$v'^2 = v^2 + \frac{2}{m}(U_1 - U_2).$$

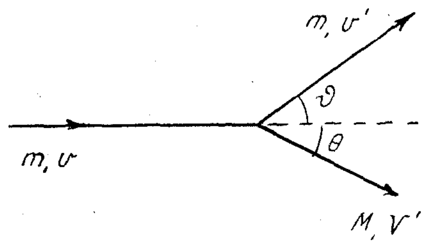

Рис. 30

Возведя первое уравнение в квадрат и разделив на второе, получаем из обоих уравнений соотношение между синусами обоих углов:

$$\sin^2\theta' = \frac{\sin^2\theta}{1 + \frac{2}{mv^2}(U_1 - U_2)},$$

т. е. обычный закон переломления с показателем преломления,

$$n = \frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv^2}(U_1 - U_2)}.$$

12. Пусть до столкновения точка с массой M покоилась, а точка с массой m имела скорость $\vec{v}$ (рис. 30). В таком случае центр инерции имел до столкновения скорость:

$$\frac{m}{M+m}\vec{v}.$$

Скорости точек m и M до столкновения в системе координат, в которой центр инерции покоится, будут получены, если из скоростей этих точек (т. е. $\vec{v}$ и 0) вычесть скорость центра инерции. Это дает для точек m и M:

$$\frac{M}{M+m}\vec{v} \quad \text{и} \quad -\frac{m}{M+m}\vec{v}.$$

После столкновения скорости обеих точек (в силу сохранения импульса) в этой системе координат только поворачиваются на некоторый угол χ, оставаясь взаимно противоположными. Если направление $\vec{v}$ принять за ось x, то составляющие скоростей обеих частиц в системе координат, где центр инерции покоится, будут после столкновения, т. е. поворота, соответственно:

$$\frac{M}{M+m}v\cos\chi, \quad \frac{M}{M+m}v\sin\chi$$

и

$$-\frac{m}{M+m}v\cos\chi, \qquad -\frac{m}{M+m}v\sin\chi.$$

Переходя опять к прежней системе координат, где первоначально покоилась точка M, находим для скорости $\vec{v}'$ и $\vec{V}'$ точек m и M после столкновения:

$$v'_x = \frac{v}{M+m}(M\cos\chi + m),$$

$$v'_y = \frac{v}{M+m}M\sin\chi,$$

$$V'_x = \frac{mv}{M+m}(1-\cos\chi),$$

$$V'_y = -\frac{mv}{M+m}\sin\chi.$$

Абсолютные величины этих скоростей:

$$v' = \frac{v}{M+m}\sqrt{M^2+m^2+2mM\cos\chi}$$

$$V' = \frac{2mv}{M+m}\sin\frac{\chi}{2}.$$

Углы отклонения ϑ и θ точек m и M:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{M\sin\chi}{M\cos\chi+m};$$

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{V'_y}{V'_x} = \operatorname{ctg}\frac{\chi}{2}, \qquad \theta = \frac{\pi-\chi}{2}.$$

В случае $M = m$:

$$v' = v\cos\frac{\chi}{2}, \quad V' = v\sin\frac{\chi}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}, \quad \operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}\frac{\chi}{2}, \quad \vartheta = \frac{\chi}{2}.$$

Обе точки в этом случае движутся под углом $\theta + \vartheta = \frac{\pi}{2}$ друг к другу.

13а. Пусть массы обоих точек — m_1 и m_2; их радиусы-векторы — $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Тогда функция Лагранжа будет:

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^2 - U(\vec{r}_2 - \vec{r}_1),$$

где U — потенциальная энергия, зависящая только от их взаимного расстояния.

Введем вектор взаимного расстояния обеих точек $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}$ и поместим начало координат в центре инерции, что дает:

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$$

(центр инерции движется равномерно и его движение не представляет в данном случае интереса). Из этих двух равенств находим:

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \qquad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}.$$

Подставив это в L находим:

$$L = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}).$$

Таким образом, движение системы двух точек можно рассматривать, как свободное движение центра инерции и движение точки с массой $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ („приведенная масса“) и с радиусом-вектором $\vec{r}$.

13б. Пусть масса ядра — M, его радиус вектор — $\vec{R}$; массы электронов — m, их радиусы-векторы — $\vec{R}_i$. Вводим расстояния от ядра до электронов

$$\vec{R}_i - \vec{R} = \vec{r}_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и поместим начало координат в центр инерции:

$$M\vec{R} + m\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i = 0.$$

Из этих равенств находим:

$$\vec{R} = -\frac{m\Sigma\vec{r}_i}{M+nm}, \qquad \vec{R}_k = \vec{R} + \vec{r}_k = \vec{r}_k - \frac{m\Sigma r_i}{M+nm}.$$

Подставив эти выражения в $L = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m}{2}\sum_i \dot{\vec{R}}_i^2 - 1U$, получаем:

$$L = \frac{m}{2}\sum_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \frac{m^2}{2(M+nm)}(\Sigma\dot{\vec{r}}_i)^2 - U.$$

13в. В неподвижной системе координат x, y, z кинетическая энергия молекулы (рис. 31):

$$T = \frac{M_1}{2}\dot{\vec{R}}_1 + \frac{M_2}{2}\dot{\vec{R}}_2^2 + \frac{m}{2}\sum_n \dot{\vec{r}}_n^2,$$

где M_1 и M_2 — массы ядер, $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ — их радиусы-векторы: m — масса электронов, $\vec{r}_n$ — их радиусы-векторы.

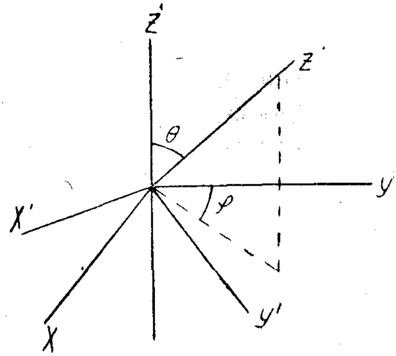

Рис. 31

Возьмем теперь систему координат, x', y', z', в которой ось z' совпадает с линией, соединяющей ядра, а ось x' перпендикулярна осям z и z'. Оси z, z' и y' находятся тогда в одной плоскости. Угол между осями z и z' обозначим через θ, а угол между проекцией оси z' на плоскость xy и осью y — через φ.

Если R_1 и R_2 — координаты z' ядер, то их кинетические энергии будут:

$$T_1 = \frac{M_1}{2}(\dot{R}_1^2 + R_1^2\dot{\theta}^2 + R_1^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

и

$$T_2 = \frac{M_2}{2}(\dot{R}_2^2 + R^2\dot{\theta}^2 + R_2^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta).$$

(R_1, φ, θ и R_2, φ, θ — сферические координаты ядер).

Координаты x_n, y_n, z_n электронов в системе x, y, z выражаются через координаты в системе x'_n, y'_n, z'_n посредством формул преобразования:

$$x_n = x'_n\cos\varphi + y'_n\cos\theta\sin\varphi + z'_n\sin\theta\sin\varphi,$$
$$y_n = -x'_n\sin\varphi + y'_n\cos\theta\cos\varphi + z'_n\sin\theta\cos\varphi,$$
$$z_n = -y'_n\sin\theta + z'_n\cos\theta.$$

Найдя отсюда скорости $\dot{x}_n$, $\dot{y}_n$ и $\dot{z}_n$, выраженные через x'_n, y'_n, z_n, θ, φ, и подставив в кинетическую энергию электронов $T_0 = \frac{m}{2}\sum_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2)$, находим:

$$T_0 = \frac{m}{2}\sum_n (\dot{x}_n'^2 + \dot{y}_n'^2 + \dot{z}_n'^2) + m\sum_n [\dot{\varphi}\sin\theta\,(x'_n\dot{z}'_n - z'_n\dot{x}'_n) +$$
$$+ \dot{\varphi}\cos\theta\,(x'_n\dot{y}'_n - y'_n\dot{x}'_n) + \dot{\theta}\,(y'_n\dot{z}'_n - \dot{y}'_n z'_n)] + \frac{m}{2}\sum_n [\dot{\varphi}^2 (z_n'^2 \sin^2\theta +$$
$$+ y_n'^2\cos^2\theta + x_n'^2 + 2z'_n y'_n \sin\theta\cos\theta) + \dot{\theta}^2 (y_n'^2 + z_n'^2) +$$
$$+ 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\,(y'_n x'_n \sin\theta - x'_n z'_n \cos\theta)].$$

Полная кинетическая энергия: $T = T_1 + T_2 + T_0$.

14а. Подобные движения данной системы описываются функциями Лагранжа, отличающимися лишь постоянными множителями. Если изменить все размеры в a раз, т. е. положить для всех координат $x = ax'$, то для того, чтобы функция Лагранжа изменилась на постоянный множитель, надо преобразовать время:

$$t = bt',$$

где b — определяется из условия, что кинетическая энергия должна измениться во столько же раз, во сколько и потенциальная. Первая меняется в $\frac{a^2}{b^2}$ раз, так как представляет из себя квадратичную функцию от скоростей, т. е. от $\frac{dx}{dt}$; вторая — в a^n раз, в силу своей однородности. Условие $\frac{a^2}{b^2} = a^n$ дает:

$$b = a^{1 - \frac{n}{2}}.$$

В таком же отношении изменятся все периоды; скорости изменятся в $\frac{a}{b} = a^{n/2}$ раз, а энергия в a^n раз. В частности, для Ньютоновского притяжения $n = -1$, т. е. при изменении размеров в a раз, периоды меняются в $a^{3/2}$ раз (третий закон Кеплера). В случае малых колебаний $n = 2$ и $b = 1$, т. е. периоды не зависят от размеров.

14б. Если изменить массы в a раз, то для того, чтобы функция Лагранжа (кинетическая энергия) осталась неизменной при неизменных размерах, надо изменить времена в $\sqrt{a}$ раз, т. е. времена движения относятся, как корни из отношения масс, а энергия остается той же самой.

14в. Если потенциальные энергии отличаются в a раз, то для того, чтобы при неизменных размерах функции Лагранжа отличались только на постоянный множитель, надо, чтобы времена относились как $\frac{1}{\sqrt{a}}$.

15. В силу однородности U имеем по теореме Эйлера

$$nU = \sum_i x_i \frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

Из уравнений Лагранжа следует:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$$

(так как T не зависит от x_i) и потому

$$nU = -\sum_i x_i \dot{p}_i = -\frac{d}{dt}\sum_i x_i p_i + \sum_i p_i \dot{x}_i.$$

С другой стороны, из $L = T - U$ и $E = T + U = \sum_i p_i \dot{x}_i - L$ следует:

$$\Sigma p_i \dot{x}_i = 2T.$$

Таким образом

$$nU = 2T - \frac{d}{dt}\Sigma x_i p_i.$$

При усреднении $\frac{d}{dt}\Sigma p_i x_i$ пропадает, так как при финитном движении p_i и x_i не могут изменяться все время монотонно в одном направлении. Поэтому $n\bar{U} = 2\bar{T}$ (теорема вириала).

Отсюда и из $\bar{T} + \bar{V} = E$ следует:

$$\bar{U} = \frac{2E}{n+2}, \quad \bar{T} = \frac{nE}{n+2}.$$

(черта над буквой означает среднее значение).

II. Интегрирование уравнений движения

16а. Для решения пользуемся непосредственно уравнениями Ньютона:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y},$$

где $-\frac{\partial U}{\partial x}$ и $-\frac{\partial U}{\partial y}$ — силы, действующие в направлении оси x и y. нашем случае (поле в направлении оси y):

$$m\ddot{x} = 0, \qquad m\ddot{y} = eE.$$

Первое интегрирование дает:

$$m\dot{x} = \text{const}, \qquad m\dot{y} = eEt + \text{const}.$$

Учитывая начальные условия, т. е. что $v_{0x} = v_0 \sin\alpha$, $v_{0y} = v_0 \cos\alpha$ имеем

$$\dot{x} = v_0 \sin\alpha, \qquad \dot{y} = \frac{eEt}{m} + v_0 \cos\alpha.$$

Проинтегрировав еще раз, получаем:

$$x = v_0 \sin\alpha \cdot t, \quad y = \frac{eE}{2m} t^2 + v_0 \cos\alpha \cdot t.$$

Аддитивных постоянных мы здесь не пишем, так как они зависят только от выбора начала координат.

Для траектории находим:

$$y = \frac{eE}{2mv_0^2 \sin^2\alpha} x^2 + \operatorname{ctg}\alpha \cdot x.$$

16б. Пусть ось y направлена по полю. Имеем уравнения:

$$m\ddot{x} = 0, \qquad m\ddot{y} = e\cos\omega t.$$

Первое интегрирование дает, в силу начальных условий для скорости:

$$\dot{x} = v_0, \qquad \dot{y} = \frac{e}{\omega m} \sin\omega t.$$

Проинтегрировав еще раз и опустив, согласно предыдущему, постоянные, зависящие от выбора начала координат, получаем:

$$x = v_0 t, \qquad y = -\frac{e}{m\omega^2}\cos\omega t = -\frac{e}{m\omega^2}\cos\left(\omega\frac{x}{v_0}\right).$$

16в. Из уравнений $m\ddot{x} = e\cos\omega t$ и $m\ddot{y} = e\sin\omega t$ получаем сначала:

$$\dot{x} = \frac{e}{m\omega}\sin\omega t,$$

$$\dot{y} = -\frac{e}{m\omega}\cos\omega t + \frac{e}{m\omega}.$$

Второе интегрирование дает:

$$x = -\frac{e}{m\omega^2}\cos\omega t,$$

$$y = -\frac{e}{m\omega^2}\sin\omega t + \frac{e}{m\omega}t.$$

17а. Из закона сохранения энергии $E(x, \dot{x}) = E$ находим $\dot{x} = f(x, E)$. Отсюда $t = \int \frac{dx}{f(x, E)} + \text{const}$. Аддитивная постоянная и значение энергии E находятся из начальных условий.

В данном случае $E = \dot{x}^2 + \frac{1}{x^2}$ и из начальных условий (подставив x_0 и $\dot{x}_0$ в E) имеем $E = 1$. Поэтому:

$$\dot{x} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}},$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} + \text{const} = \sqrt{x^2 - 1} + \text{const}.$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям, надо положить $\text{const} = 0$. Таким образом,

$$t = \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{и} \quad x = \sqrt{t^2 + 1}.$$

17б. $E = \dot{x}^2 - \operatorname{tg}^2 x = 4$ (из начальных условий); отсюда

$$\dot{x} = \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 x}} + c,$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

($c = 0$ согласно начальным условиям), или

$$x = \arcsin \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t.$$

17в. $E = \dot{x}^2 - e^x = 3$; $t = \int \frac{dx}{\sqrt{3+e^x}} + c = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{argsh} e^{-x}\sqrt{3} + c$, $c = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arg\,sh} \sqrt{3}$.

17г. $E = \dot{x}^2 + \frac{1}{x} = 1$, $\quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} + c = \sqrt{x(x-1)} +$

$$+ \ln [\sqrt{x} + \sqrt{x-1}] + c, c = 0.$$

17д. $E = \frac{\dot{x}^2}{x} + x = 2$, $\quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} + c = \arcsin (x-1) + c$, $c = 0$. Отсюда $x = 1 + \sin t$.

17е. $E = \frac{\dot{x}^2}{x} - x - \frac{1}{x} = -3$, $\quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 1}} + c =$

$$= \operatorname{arg\,ch} \frac{2x-3}{\sqrt{5}} + c, \; c = -\operatorname{arg\,ch} \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

17ж. $E = \frac{\dot{x}^2 + 1}{x^2} = 1$, $\quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} + c = \operatorname{arg\,ch} x + c$, $\quad c = 0$.

Отсюда $x = \operatorname{ch} t$.

17з. $E = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}} - x = -1$, $\quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{(x-1)^2}}} + c =$ $= \sqrt{x^2 - 2x} + c$, $\quad c = 0$ или $x = 1 + \sqrt{1 + t^2}$.

18. При движении всегда должно быть $E > U$, т. е. кинетическая энергия $T > 0$. Точки, в которых $E = U$, определяют границы движения. Если таких точек нет или есть одна, то движение инфинитно, т. е. движущаяся материальная точка может быть и на бесконечности. Если таких точек пересечения E с U несколько (например, две: x_1 и x_2), то движение финитно и период, за который точка пройдет от x_1 до x_2 и обратно, будет:

$$T=2\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\dot{x}(x,E)}$$

18а. Движение финитно при всех $E>0$, так как есть две точки, в которых $\dot{x}$ обращается в нуль, а именно, определяющиеся из $x^2=E$, т. е. $x=\pm\sqrt{E}$. Период:

$$T=2\int\limits_{-\sqrt{E}}^{+\sqrt{E}}\frac{dx}{\sqrt{E-x^2}}=2\pi.$$

18б. Границы движения определяются из условия $x+\frac{1}{x}=E$, т. е.

$$x_1=\frac{E+\sqrt{E^2-4}}{2},\qquad x_2=\frac{E-\sqrt{E^2-4}}{2}.$$

Отсюда видно, что движение финитно при всех $E>2$. Период:

$$T=2\int\limits_{x_2}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{Ex-x^2-1}}=2\arcsin\frac{2x-E}{\sqrt{E^2-4}}\Bigg|_{x_2}^{x_1}=2\pi.$$

18в. Границы движения определяются из $\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=E$:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1+E}}{E},$$

$$x_2=\frac{-1-\sqrt{1+E}}{E}.$$

Движение финитно при $-1<E<0$ и инфинитно при $E\geqslant 0$. Обозначая в первом случае полную энергию через $(-E)$, имеем

$$x_1=\frac{1-\sqrt{1-E}}{E},\qquad x_2=\frac{1+\sqrt{1-E}}{E}.$$

Период:

$$T=2\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{2x-Ex^2-1}}=\frac{2}{(\sqrt{E})^3}\arcsin\frac{xE-1}{\sqrt{1-E}}\Bigg|_{x^1}^{x_2}-$$

$$-\frac{\sqrt{2x-Ex^2-1}}{E}\Bigg|_{x_1}^{x_2}=\frac{2\pi}{E^{3/2}}.$$

18г. Для границ движения имеем условие: $E=(e^x-1)^2$, откуда:

$$x_1=\ln(1+\sqrt{E}),\qquad x_2=\ln(1-\sqrt{E});$$

движение финитно при $E<1$.

Период:

$$T=2\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-(e^x-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-E}}\arccos\frac{e^{-x}(1-E)-1}{\sqrt{E}}\Bigg|_{x_1}^{x_2}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-E}}.$$

18д. Условия финитности и границы движения такие же, как в 18в. Для периода имеем:

$$T=2\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{-Ex^2+2x-1}}=\frac{2}{\sqrt{E}}\arcsin\frac{xE-1}{\sqrt{1-E}}\Bigg|_{x_1}^{x_2}=\frac{2\pi}{\sqrt{E}}$$

(E — энергия с обратным знаком).

18е. Движение финитно при всех $E>0$. Границы движения определяются из условия $\operatorname{tg}^2 x=E$, откуда:

$$\sin x_1=\sqrt{\frac{E}{1+E}},\qquad \sin x_2=-\sqrt{\frac{E}{1-E}}.$$

Период:

$$T=2\int\limits_{x_2}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{E-\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{2}{\sqrt{1+E}}\arcsin\sqrt{\frac{1+E}{E}}\sin x\,\Bigg|_{x_2}^{x_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{1+E}}.$$

18ж. Из условия финитности $\operatorname{th}^2 x=E$ следует, что движение финитно при $0<E<1$, причем границы движения:

$$\operatorname{th} x_1=+\sqrt{E},\qquad \operatorname{th} x_2=-\sqrt{E}.$$

Период:

$$T=2\int\limits_{x_2}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{E-\operatorname{th}^2 x}}=\frac{2}{\sqrt{1-E}}\arcsin\sqrt{\frac{1-E}{E}}\operatorname{sh} x\,\Bigg|_{x_2}^{x_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-E}}.$$

19а. Поскольку в функцию Лагранжа не входит x, то

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{d}{dt}p_x=0,$$

т. е. первый интеграл уравнения движения есть

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=p_x=\text{const}.$$

Принимая во внимание начальные условия, имеем:

$$p_x = t^2\dot{x} = 1,$$

откуда

$$dx = \frac{dt}{t^2}; \qquad x = -\frac{1}{t} + \text{const}.$$

Так как при $t = 1$ должно быть $x = 0$, то

$$\text{const} = 1 \text{ и } x = 1 - \frac{1}{t}.$$

19б. Первый интеграл (из начальных условий):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = t^2 + \dot{x} = 1.$$

Отсюда

$$x = t - \frac{t^3}{3}.$$

19в. Первый интеграл:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{t + \dot{x}^2}} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда:

$$\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{t}, \qquad x = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3\sqrt{3}}t^{3/2} + \text{const}.$$

Из начальных условий:

$$\text{const} = 0.$$

20а. Так как L не содержит y, т. е. y есть циклическая координата, заключаем, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = p_y = 2x\dot{y} = \text{const}$$

и подставив $\dot{y} = \frac{p_y}{2x}$ в энергию $E = \frac{\dot{x}^2}{x} + x\dot{y}^2 - x$, получаем: $\dot{x}^2 = Ex + x^2 - \frac{p_y^2}{4}$, откуда:

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{Ex + x^2 - \frac{p_y^2}{y}}} = \operatorname{argch}\frac{2x + E}{\sqrt{p_y^2 + E^2}} + t_0$$

или

$$x = \frac{\sqrt{p_y^2 + E^2}}{2}\operatorname{ch}(t - t_0) - \frac{E}{2}.$$

Для нахождения y пишем:

$$y = \int \frac{p_y}{2x} dt = \frac{p_y}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{Ex + x^2 - \frac{p_y^2}{y}}} = \arccos \frac{\frac{p_y^2}{2x} - E}{\sqrt{p_y^2 + E^2}}$$

(с точностью до постоянной)

20б. y и z — циклические координаты; поэтому

$$p_y = \frac{\dot{z}}{x} = \text{const}, \quad p_z = \frac{\dot{y}}{x} = \text{const}.$$

Подставив в $E = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z}}{x}$, получаем:

$$\dot{x}^2 = Ex - p_y p_z x^2,$$

откуда:

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{Ex - p_y p_z x^2}} = \frac{1}{\sqrt{p_y p_z}} \arcsin \frac{2p_y p_z x - E}{E} + t_0$$

или

$$x = \frac{E}{2p_y p_z} [\sin \sqrt{p_y p_z} (t - t_0) + 1].$$

Для нахождения y имеем $\dot{y} = p_z x$, откуда

$$y = \int p_z x dt = \int \frac{p_z x dx}{\sqrt{Ex - p_y p_z x^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{p_y}{p_z}} \left\{ \sqrt{\frac{E}{p_y p_z} x - x^2} + \frac{E}{2p_y p_z} \arcsin \frac{2p_y p_z x - E}{E} \right\}.$$

Аналогично:

$$z = \sqrt{\frac{p_z}{p_y}} \left\{ \sqrt{\frac{E}{p_y p_z} x - x^2} + \frac{E}{2p_y p_z} \arcsin \frac{2p_y p_z x - E}{E} \right\}.$$

20в. Подставляя $\dot{y} = p_y - \dot{x}x$ в $E = \frac{\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y}x + \dot{y}^2}{2}$, получаем:

$$\dot{x}^2 - \dot{x}^2 x^2 + p_y^2 = 2E,$$

откуда:

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{2E - p_y^2}}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$t = \int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{2E - p_y^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2E - p_y^2}} \left\{ \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right\}.$$

Подставляя $\dot{x}$ в $\dot{y}=p_y-x\dot{x}$, получаем:

$$y=\int\left(p_y-\frac{x\sqrt{2E-p_y^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dt=\frac{p_y}{\sqrt{2E-p_y^2}}\int\sqrt{1-x^2}\,dx-\int x dx=$$

$$=\frac{p_y}{2(2E-p_y^2)}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)-\frac{x^2}{2}.$$

20г. Для энергии получаем:

$$E=\frac{1}{\sqrt{1-\dot{x}^2-\dot{y}^2}}-x.$$

В виду цикличности координаты y:

$$p_y=\frac{\dot{y}}{\sqrt{1-\dot{x}^2-\dot{y}^2}}=\text{const}.$$

Подставив $\dot{y}$ в E, получаем:

$$\dot{x}=\frac{\sqrt{(E+x)^2-(1+p_y^2)}}{E+x},$$

т. е.

$$t=\int\frac{(E+x)\,dx}{\sqrt{(E+x)^2-(1+p_y^2)}}=\sqrt{(E+x)^2-(1+p_y^2)}+t_0,$$

или

$$x=-E\pm\sqrt{(t-t_0)^2+(1+p_y^2)}.$$

Для нахождения y подставляем $\dot{x}$ в выражение для p_y и получаем:

$$\dot{y}=\frac{p_y}{E+x},$$

откуда:

$$y=p_y\int\frac{dt}{(E+x)}=p_y\int\frac{dx}{\sqrt{(E+x)^2-(1+p_y^2)}}=$$

$$=p_y\,\text{arc ch}\,\frac{E+x}{\sqrt{1+p_y^2}}.$$

20д. Имеем $p_y=\frac{\dot{y}}{x}+1$, или $\dot{y}=x(p_y-1)$.

Подставив в $E=\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2x}$, получаем:

$$\dot{x}=\sqrt{2xE-x^2(p_y-1)^2}$$

откуда

$$t=\int\frac{dx}{\sqrt{2Ex-x^2(p_y-1)^2}}=\frac{1}{p_y-1}\arcsin\frac{x(p_y-1)^2-E}{E}+t_0,$$

или

$$x=\frac{E}{(p_y-1)^2}\left[\arcsin(p_y-1)(t-t_0)+1\right].$$

Далее

$$y=\int x(p_y-1)\,dt=\int\frac{x(p_y-1)\,dx}{\sqrt{2Ex-x^2(p_y-1)^2}}=$$

$$=-\frac{\sqrt{2Ex-x^2(p_y-1)^2}}{(p_y-1)}+\frac{E}{(p_y-1)^2}\arcsin\frac{(p_y-1)^2-E}{E}.$$

21а. При движении в поле с центральной симметрией сохраняется момент импульса относительно центра симметрии, т. е. величина $\vec{M}=[\vec{r}\,\vec{p}]$. Помножив обе стороны на $\vec{r}$, получаем:

$$\vec{M}\vec{r}=\vec{r}[\vec{r}\,\vec{p}]=\vec{p}[\vec{r}\,\vec{r}]=0.$$

Отсюда следует; что $\vec{r}$ всегда перпендикулярен $\vec{M}$, т. е. движение происходит в плоскости, перпендикулярной моменту. Поэтому движение в поле с центральной симметрией приводится к плоскому движению и описывается функцией Лагранжа в полярных координатах:

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-U(r).$$

При этом момент $p_\varphi=M=mr^2\dot{\varphi}=\mathrm{const}$, и мы имеем:

$$E=\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{M^2}{2mr^2}+U(r).$$

Наибольшее и наименьшее расстояние до центра r_0 определяется тогда из уравнения:

$$E=\frac{M^2}{2mr_0^2}+U(r),$$

т. е. там, где $\dot{r}=0$.

В случае инфинитного движения постоянные E и M связаны со скоростью на бесконечности v_∞ расстоянием ρ, на котором частица m пролетела бы от центра, если бы не было поля, посредством:

$$E=\frac{mv_\infty^2}{2}\quad\text{и}\quad M=m\rho v_\infty.$$

Для $U = \frac{a}{r}$ имеем:

$$E = \frac{M^2}{2mr_0^2} + \frac{a}{r_0},$$

откуда:

$$r_0 = \frac{ma \pm \sqrt{m^2a^2 + 2mEM^2}}{E}.$$

Так как r может быть только положительным, то, если $a > 0$ (E — может быть тогда только положительной, как сумма положительных членов), есть только ближайшее расстояние (знак + в r_0), т. е. движение инфинитно. Если $a < 0$, то движение инфинитно при $E > 0$ (есть только наименьшее расстояние) и финитно при $E < 0$ (есть как наибольшее, так и наименьшее расстояния).

21б. Для определения r_0 имеем:

$$E = \frac{M^2}{2mr_0^2} + \frac{a}{r_0^2}, r_0 = \sqrt{\frac{2ma + M^2}{2mE}}.$$

Если $a > 0$, то движение всегда инфинитно, так как есть только наименьшее расстояние (E — всегда положительна, как сумма положительных членов), Если $a < 0$, то возможны случаи:

1) когда $E > 0$ и $M^2 > -2ma$, то есть только наименьшее расстояние и движение инфинитно; когда же $M^2 < -2ma$, то нет ни наибольшего ни наименьшего расстояния — точка падает из бесконечности в начало координат;

2) когда $E < 0$ (это возможно только, если $-2ma > M^2$), то есть только наибольшее расстояние (движение финитно); к началу координат точка может подходить как угодно близко (падает в начало координат).

21в.

$$E = \frac{M^2}{2mr_0^2} + \frac{1}{r_0^4}$$

$$r_0 = + \sqrt{\frac{M^2 + \sqrt{M^4 + 16m^2E}}{4mE}}.$$

Движение всегда инфинитно (r_0 — ближайшее расстояние).

21г. Для определения r_0 имеем: $2Er_0^2 = M^2 + 1 - r_0$, откуда

$$r_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8E(M^2 + 1)}}{4E}.$$

При $E > 0$ есть только наименьшее расстояние (знак плюс в r_0) т. е. движение инфинитно. При $-\frac{1}{8(M^2+1)} < E < 0$ движение финитно (есть как наименьшее, так и наибольшее расстояния).

21д. Имеем $E=\frac{M^2}{2r_0^2}+\frac{1}{2r_0^2}+\frac{r_0^2}{2}$, откуда:

$$r_0=+\sqrt{E\pm\sqrt{E^2-(M^2+1)}}.$$

Движение всегда финитно.

22а. Так как движение можно рассматривать, как плоское, то пользуемся выражением для энергии:

$$E=\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{M^2}{2mr^2}+U(r),$$

откуда:

$$\dot{r}=\sqrt{\frac{2E}{m}-\frac{M^2}{m^2r^2}-\frac{2U(r)}{m}}$$

и

$$t=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m}-\frac{M^2}{m^2r^2}-\frac{2U(r)}{m}}}+\text{const.}$$

Далее, так как $M=mr^2\dot{\varphi}$, то

$$\varphi=\int\frac{M}{mr^2}dt=\int\frac{Mdr}{mr^2\sqrt{\frac{2E}{m}-\frac{M^2}{m^2r^2}-\frac{2U(r)}{m}}}+\text{const.}$$

Подставив $U=-\frac{a}{r}$, получаем:

$$\varphi=\arccos\frac{\frac{M^2}{r}-am}{\sqrt{2EmM^2+a^2m^2}}+\varphi_0.$$

Введя эксцентриситет $e=\sqrt{1+\frac{2EM^2}{ma^2}}$ и $p=\frac{M^2}{am}$, получаем:

$$\frac{p}{r}=1+e\cos(\varphi-\varphi_0),$$

т. е. уравнение конических сечений.

При $E>0$ это — гипербола $(e>1)$; при $E=0$ — парабола $(e=1)$ и при $E<0$ эллипс $(e<1)$. Если $a<0$, то энергия всегда больше нуля $(E>0)$ и возможна только гипербола. В случае эллипса большая полуось его:

$$A=\frac{p}{1-e^2}=-\frac{a}{2E},$$

т. е. зависит только от энергии.

Для времени имеем:

$$t=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m}-\frac{M^2}{m^2r^2}+\frac{2a}{mr}}}=$$

$$=\frac{m}{2E}\sqrt{\frac{2E}{m}r^2-\frac{M^2}{m^2}+\frac{2ar}{m}}-\frac{a}{m}\left(\frac{m}{2E}\right)^{3/2}\operatorname{argch}\frac{\frac{2E}{a}r+1}{\sqrt{\frac{2M^2E}{ma^2}+1}}+t_0$$

$$(\text{если}\quad E>0)$$

или

$$t=\frac{m}{2E}\sqrt{\frac{2E}{m}r^2-\frac{M^2}{m^2}+\frac{2ar}{m}}-\frac{a}{m}\left(\frac{m}{-2E}\right)^{3/2}\arcsin\frac{\frac{2E}{a}r+1}{\sqrt{1+\frac{2EM^2}{ma^2}}}$$

$$(\text{если } E<0).$$

Из выражения для t в случае $E<0$ находим период обращения точки вокруг начала координат (arcsin меняется при этом на 2π):

$$T=\pi a\sqrt{\frac{m}{-2E^3}}.$$

22б.

$$t=\int\frac{dr}{\sqrt{2E-\frac{M^2}{r^2}-\frac{1}{r^2}}}=\frac{1}{2E}\sqrt{2Er^2-(M^2+1)}+t_0,$$

$$\varphi=\int\frac{Mdr}{r^2\sqrt{2E-\frac{M^2}{r^2}-\frac{1}{r^2}}}=\frac{M}{\sqrt{1+M^2}}\arccos\frac{\frac{1}{r}\sqrt{1+M^2}}{2E}+\varphi_0$$

или

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2E}{1+M^2}}\cos\sqrt{\frac{1+M^2}{M}}(\varphi-\varphi_0).$$

22в. Если $E>0$ и $M>1$, то:

$$t=\frac{1}{2E}\sqrt{2Er^2-M^2+1}+t_0$$

$$\varphi=\frac{M}{\sqrt{M^2-1}}\arccos\frac{\frac{1}{r}\sqrt{1+M^2}}{\sqrt{2E}}+\varphi_0.$$

Если $E>0$ и $M<1$, то

$$\varphi=-\frac{M}{\sqrt{1-M^2}}\operatorname{argsh}\frac{1}{r}\sqrt{\frac{1-M^2}{2E}}+\varphi_0$$

Если $E<0$ и $M<1$, то

$$\varphi=-\frac{M}{\sqrt{1-M^2}}\operatorname{argch}\frac{1}{r}\sqrt{\frac{M^2-1}{2E}}+\varphi_0.$$

В обоих последних случаях выражения для t такое же, как и в первом случае.

Из $2Er^2=4E^2(t-t_0)^2-(1-M^2)$ находим, что в случае, когда $E<0$ и $M<1$, точка падает из ближайшего расстояния (см. задачу 21б) в начало координат за время

$$\frac{\sqrt{1-M^2}}{-2E}.$$

22г.

$$t=\int\frac{dr}{\sqrt{2E-\frac{M^2}{r^2}-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r}}}=$$

$$=\frac{1}{2E}\sqrt{2Er^2-(M+1)+r}-$$

$$-\frac{1}{2(2E)^{3/2}}\operatorname{argch}\frac{4rE+1}{\sqrt{8E(1+M^2)+1}}+t_0.$$

$$\varphi-\varphi_0=\int\frac{Mdr}{r^2\sqrt{2E-\frac{M^2}{r^2}-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r}}}=$$

$$=\frac{M}{\sqrt{M^2+1}}\arccos\frac{2(M^2+1)\frac{1}{r}-1}{\sqrt{8E(M^2+1)+1}}$$

или

$$\frac{1}{r}\sqrt{M^2+1}=1+\sqrt{8E(M^2+1)+1}\cos\sqrt{\frac{M^2+1}{M}}(\varphi-\varphi_0).$$

Если $E<0$, то в выражении для t вместо argch стоит arcsin.

22д.

$$t=\int\frac{dr}{\sqrt{2E-\frac{M^2}{r^2}-r^2-\frac{1}{r^2}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2-E}{\sqrt{E^2-M^2-1}}+t_0,$$

$$\varphi-\varphi_0=\int\frac{Mdr}{r^2\sqrt{2E-r^2-\frac{M^2+1}{r^2}}}=$$

$$=\frac{M}{2\sqrt{M^2+1}}\arccos\frac{(M^2+1)\frac{1}{r^2}-E}{\sqrt{E^2-M^2-1}},$$

или

$$\frac{1}{r^2}(1+M^2)=E+\sqrt{E^2-M^2-1}\cos\frac{2\sqrt{1+M^2}}{M}(\varphi-\varphi_0).$$

23а. Изменение полярного угла движущейся точки при движении от бесконечности (инфинитное движение) до ближайшего расстояния r_0 от центра есть:

$$\varphi_0=\int_{r_0}^{\infty}\frac{\frac{M}{mr^2}dr}{\sqrt{\frac{2E}{m}-\frac{M^2}{m^2r^2}-\frac{2U(r)}{m}}},$$

Полное изменение полярного угла при движении из бесконечности в бесконечность есть $2\varphi_0$, а угол θ отклонения точки от своего первоначального направления определяется из $\theta=\pi-2\varphi_0$. При этом E и M можно (см. задачу 21) заменить на $\frac{mv_\infty^2}{2}$ и $m\rho v_\infty$.

Пользуясь результатами задач 21а и 22б, находим для $U=\frac{a}{r}$:

$$\cos\varphi_0=\cos\frac{\pi-\theta}{2}=\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{am}{2EmM^2+a^2m^2}}=$$

$$=\frac{a}{\sqrt{m^2v_\infty^4\rho^2+a^2}},$$

или

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=\frac{mv_\infty^2\rho}{a}.$$

23б. Пользуясь результатом задачи 22в и замечая, что $r_0 = \sqrt{\frac{M^2+1}{2E}}$,

получаем:

$$\theta = \pi - 2\varphi_0 = \pi - \frac{\pi M}{\sqrt{(M^2+1)}} = \pi \frac{(\sqrt{1+M^2} - M)}{\sqrt{1+M^2}} =$$

$$= \pi \frac{(\sqrt{1+m^2\rho^2 v_\infty^2}) - m\rho v_\infty}{\sqrt{1+m^2\rho v_\infty^2}}.$$

23в. Пользуясь результатом задач 22д и 21г, получаем:

$$\theta = \pi - \frac{2M}{\sqrt{1+M^2}} \arccos \frac{-1}{\sqrt{8E(M^2+1)+1}} =$$

$$= \pi - \frac{2m\rho v_\infty}{\sqrt{1+m^2\rho^2 v^2_\infty}} \arccos \left(\frac{-1}{\sqrt{4mv_\infty^2(1+m^2\rho^2 v_\infty^2)+1}} \right).$$

24а. Эфективным поперечником рассеяния $d\sigma$ называется отношение числа частиц, рассеянных в данном интервале углов к плотности потока частиц (поэтому он имеет размерность поверхности). Угол рассеяния θ есть функция от расстояния ρ, на котором частица прошла бы от начала координат, если бы она была свободна. Поэтому все частицы с ρ между ρ и $\rho + d\rho$ рассеиваются в том же интервале $d\theta$. Принимая плотность потока, равной единице, мы получим поэтому эфективное сечение просто, как площадь кольца с радиусами ρ и $\rho + d\rho$, т. е.

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = 2\pi\rho \frac{d\rho}{d\theta} d\theta$$

(ρ должно быть выражено, как функция от θ). Введя элемент телесного угла $do = 2\pi \sin\theta d\theta$, получим эфективное сечение для рассеяния в телесный угол do:

$$d\sigma = \frac{\rho \frac{d\rho}{d\theta}}{\sin\theta} do.$$

Для потенциального барьера с радиусом a: $\rho = a \sin\varphi_0$, где φ_0 — половина угла между первоначальным и конечным направлениями движения (см. рис. 32). Подставив $\varphi_0 = \frac{\pi - \theta}{2}$ (см. задачу 23а), получаем:

$$\rho = a \cos\frac{\theta}{2}.$$

Отсюда

$$d\sigma = -2\pi\rho \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\pi a^2}{2} \sin\theta \, d\theta$$

(знак минус берется, так как $\frac{d\rho}{d\theta}$ отрицательно в силу того, что θ уменьшается при увеличении ρ; нас же интересует только абсолютная величина). Введя do, получаем:

$$d\sigma = \frac{a^2}{4} do.$$

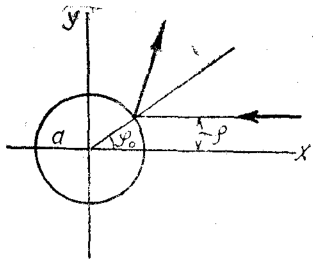

Рис. 32

24б. Для угла отклонения θ в задаче 23а найдено:

$$\mathrm{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{m v_\infty^2 \rho}{a},$$

или

$$\rho = \frac{a}{m v_\infty^2} \mathrm{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

Отсюда

$$d\sigma = -2\pi\rho \frac{d\rho}{d\theta} d\theta = \frac{\pi a^2 d\theta \cdot \cos\frac{\theta}{2}}{m^2 v_\infty^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}.$$

Вводя do, получаем:

$$d\sigma = \frac{a^2}{4 m^2 v_\infty^4} \cdot \frac{do}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

(формула Резерфорда).

24в. Из задачи 23б имеем:

$$\frac{\theta}{\pi} = 1 - \frac{m\rho v_\infty}{\sqrt{1 + m^2\rho^2 v_\infty^2}},$$

или

$$\rho^2 = \frac{1}{m^2 v_\infty^2} \cdot \frac{(\theta - \pi)^2}{\pi^2 - (\theta - \pi)^2}.$$

Отсюда

$$a\sigma = 2\pi\rho d\rho = \frac{2\pi^3 (\theta - \pi)}{(\pi^2 - (\theta - \pi)^2)^2 m^2 v_\infty^2} d\theta,$$

или, вводя do

$$d\sigma = \frac{\pi^2 (\theta - \pi) \, do}{m^2 v_\infty^2 \theta^2 (2\pi - \theta)^2 \sin\theta}.$$

25а. Закон рассеяния, выведенный в задаче 24а, остается в силе, если рассматривать рассеяние в системе координат, в которой центр инерции покоится, с той разницей, что роль массы играет приведенная масса обеих частиц. Если угол отклонения в этой системе координат обозначить через χ, то мы будем иметь:

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2} \sin \chi d\chi.$$

Согласно результатам задачи 12 угол отклонения ϑ движущейся частицы в системе координат, где первоначально одна из частиц покоилась, связан с углом χ, в случае равных масс, посредством $\vartheta = \frac{\chi}{2}$. Поэтому эфективный поперечник рассеяния для этих частиц будет:

$$d\sigma_1 = \pi a^2 \sin 2\vartheta d\vartheta,$$

или, введя телесный угол $do_1 = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$,

$$d\sigma_1 = a^2 \cos \vartheta do_1$$

Угол отклонения для частиц, которые первоначально покоились будет:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}$$

и, следовательно, для них

$$d\sigma_2 = \pi a^2 \sin 2\theta d\theta = a^2 \cos\theta do_2,$$

где

$$do_2 = 2\pi \sin \theta d\theta.$$

25б. Результат задачи 24б остается в силе для системы координат, в которой центр инерции покоится, но вместо массы должна стоять приведенная масса обоих точек, т. е. $\frac{m}{2}$. Таким образом,

$$d\sigma = \frac{4a^2\pi \cos\frac{\chi}{2}\, d\chi}{m^2 v_\infty^4 \sin^3\frac{\chi}{2}}.$$

Для частиц, которые первоначально двигались, угол отклонения (см. задачу 25а):

$$\vartheta = \frac{\chi}{2} \quad \text{и} \quad d\sigma_1 = \frac{8a^2\pi \cos\vartheta\, d\vartheta}{m^2 v_\infty^4 \sin^3\vartheta}.$$

Вводя элемент телесного угла $do_1 = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$, получаем:

$$d\sigma_1 = \frac{4a^2}{m^2 v_\infty^4} \cdot \frac{\cos\vartheta}{\sin^4\vartheta} do_1.$$

Для частиц, первоначально покоящихся, $d\sigma_2$ имеет такой же вид, причем, вместо ϑ, стоит θ и вместо $do_1 - do_2 = 2\pi \sin\theta d\theta$.

25в. Аналогично, в системе координат, где центр инерции покоится, пользуясь результатами 24в и подставив $\frac{m}{2}$, вместо m, и χ вместо θ, находим:

$$d\sigma = \frac{8\pi^3 (\chi - \pi)^2 d\chi}{m^2 v_\infty^2 (2\pi - \chi)^2 \chi^2}.$$

Подставив $\vartheta = \frac{\chi}{2}$, получаем для движущихся частиц:

$$d\sigma_1 = \frac{\pi^3}{m^2 v_\infty^2} \cdot \frac{(2\vartheta - \pi)^2}{(\pi - \vartheta)^2 \vartheta^2} d\vartheta =$$

$$= \frac{\pi^2}{2m^2 v_\infty^2} \cdot \frac{(2\vartheta - \pi)^2 do_1}{(\pi - \vartheta)^2 \vartheta^2 \sin\vartheta}.$$

Для частиц, первоначально покоившихся, получаем:

$$\theta = \frac{\pi - \chi}{2}$$

и

$$d\sigma_2 = \frac{64\pi^3}{m^2 v_\infty^2} \cdot \frac{\theta^2 d\theta}{(\pi^2 - 4\theta^2)^2} = \frac{32\pi^2 \theta^2 do_2}{m^2 v_\infty^2 (\pi^2 - 4\theta^2)^2 \sin\theta}.$$

26а. Поскольку частицы при своем движении в поле мало отклоняются, можно приближенно считать, что угол θ отклонения равен отношению приращения импульса в направлении, перпендикулярном первоначальному направлению движения, к первоначальному импульсу (mv). Приращение импульса есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_y dt,$$

где F_y — перпендикулярная составляющая силы, действующей на частицу (ось x берем по первоначальному направлению движения). Эта сила есть:

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}.$$

Так как $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, то $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \cong \frac{\rho}{r}$ (в связи с тем, что отклонение мало, $y \cong \rho$). Таким образом,

$$\theta = -\int_{\infty}^{+\infty} \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\rho}{rmv} dt$$

(вместо r можно опять таки, вследствие незначительности отклонения, писать $\sqrt{v^2t^2+\rho^2)}$.

Для $U=\frac{1}{2r^2}-\frac{1}{r}$ это дает:

$$\theta=\frac{\rho}{mv}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{r^4}-\frac{1}{r^3}\right)dt=$$

$$=\frac{\rho}{mv}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(\rho^2+v^2t^2)^2}-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(\rho^2+v^2t^2)^{3/2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{mv^2}\left(\frac{\pi}{2\rho^2}-\frac{2}{\rho}\right),$$

откуда

$$\rho=\frac{2+\sqrt{4+2\theta mv^2\pi}}{2\theta mv^2}.$$

и

$$d\sigma=-2\pi\rho d\rho=-\frac{\rho\frac{d\rho}{d\theta}}{\sin\theta}do\cong$$

$$\cong\frac{do}{4m^2v^4}\cdot\frac{(2+\sqrt{4+2\theta mv^2\pi})(2-\theta mv^2\pi+\sqrt{4+2\theta mv^2\pi})}{\theta^4\sqrt{4+2\theta mv^2\pi}}$$

(так как $\sin\theta\cong\theta$).

26б. Угол отклонения

$$\theta=\frac{4\rho}{mv}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{r^6}=\frac{4\rho}{mv}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(v^2t^2+\rho^2)^3}=\frac{3\pi}{2mv^2\rho^4},$$

откуда

$$\rho=\left(\frac{3\pi}{2mv^2\theta}\right)^{1/4}.$$

Эфективный поперечник будет:

$$d\sigma=-\frac{\rho\frac{d\rho}{d\theta}do}{\sin\theta}\cong\frac{1}{4}\left(\frac{3\pi}{2mv^2}\right)^{\frac{1}{2}}\theta^{-\frac{5}{2}}do$$

27. Согласно задаче 14а, если потенциальная энергия есть однородная функция — n-го порядка от координат, то при изменении размеров в a раз скорости меняются в $a^{\frac{n}{2}}$ раз. Обратно, при изменении скорости в b раз, размеры, в частности и ρ, меняются в $b^{-\frac{2}{n}}$ раз. Поэтому ρ должно быть пропорционально $v^{-\frac{2}{n}}$ т. е. $\rho = v^{-\frac{2}{n}} f(\theta)$ (угол отклонения θ для подобных траекторий одинаков). Поэтому эфективный поперечник $d\sigma = 2\pi\rho d\rho$ пропорционален $v^{-\frac{4}{n}}$.

III. Малые колебания

28а. Координата точки, совершающей гармонические колебания с частотой ω, зависит от времени по формуле:

$$q = A\cos(\omega t + \alpha),$$

где A — амплитуда, α — начальная фаза. Отсюда

$$\dot{q} = -A\omega\sin(\omega t + \alpha).$$

Возведя оба уравнения в квадрат и сложив их, получаем:

$$A = \sqrt{q^2 + \frac{\dot{q}^2}{\omega^2}}.$$

Разделив их друг на друга, получаем для фазы $\varphi = \omega t + \alpha$:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\dot{q}}{q\omega}.$$

28б. Энергия точки, совершающей малые колебания, равна

$$E = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}.$$

Подставив сюда q и $\dot{q}$, получаем:

$$A = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Из выражения для q получаем:

$$\varphi = \arccos q\omega\sqrt{\frac{m}{2E}}.$$

29а. Если функция Лагранжа системы (с одной степенью свободы) имеет вид

$$L = \frac{f(q)\dot{q}^2}{2} - U(q),$$

причем потенциальная энергия $U(q)$ имеет минимум при $q=q_0$, т. е. $U'(q_0)=0$, $U''(q_0)>0$, то, считая отклонение системы от положения равновесия (минимума U) $q-q_0=x$ малым, можно написать:

$$U(q)=U(q_0)+\frac{1}{2}U''(q_0)x^2$$

и

$$L=\frac{f(q_0)\dot{x}^2}{2}-\frac{U''(q_0)\dot{x}^2}{2}$$

[постоянную $U(q_0)$ можно опустить].

Уравнение движения примет тогда вид:

$$f(q_0)\ddot{x}+U''(q_0)x=0,$$

что соответствует гармоническому колебанию с частотой

$$\omega=\sqrt{\frac{U''(q_0)}{f(q_0)}}.$$

В данном случае потенциальная энергия уже приведена к надлежащему виду, так что

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

29б. Здесь $U(x)=-\sin x$; $U'(x_0)=0$ дает $x_0=\frac{\pi}{2}$ и $U''(x_0)=1$. Отсюда

$$\omega=1$$

(см. задачу 29а)

29в. $U(x)=\frac{x^2+1}{2x}$ имеет минимум при $x=x_0=1$, причем $U''(x_0)=1$; кроме того коэфициент при $\frac{\dot{x}^2}{2}$ в точке x_0 тоже равен 1. Отсюда

$$\omega=1.$$

29г. $U(x)=x^2e^x$ имеет минимум при $x=0$; $U''(0)=2$; коэфициент при $\frac{\dot{x}^2}{2}$ тоже 2. Отсюда

$$\omega=1.$$

29д. $U(x)=\operatorname{ch} x$ имеет минимум при $x=0$, $U''(0)=1$; коэфициент при $\frac{\dot{x}^2}{2}$ (при $x=0$) равен 2. Отсюда

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

29е. $U(x)=\frac{x}{\ln x}$ имеет минимум при $x=e$; при этом $U''(e)=\frac{1}{e}$. Коэфициент при $\frac{x^2}{2}$ (при $x=e$) равен $\frac{2}{e}$. Отсюда

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

30. Потенциальные энергии, а следовательно, и коэфициенты при квадрате координаты в потенциальной энергии, одинаковы у обоих молекул. Поэтому частоты их относятся как обратные корни из коэфициентов при половинах квадратов скоростей в кинетической энергии, т. е. из приведенных масс. Таким образом,

$$\omega_1:\omega_2=\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}}:\sqrt{\frac{m_3+m_4}{m_3m_4}}.$$

31а. Потенциальная энергия пружины (с точностью до малых высшего порядка) равна силе F, помноженной на удлинение пружины по сравнению с ее длиной l в положении равновесия. Если обозначить отклонение точки m от положения равновесия через x, то это удлинение будет:

$$\sqrt{l^2+x^2}-l\cong\frac{x^2}{2l}$$

(так как $x\ll l$). Поэтому потенциальная энергия равна:

$$U=\frac{Fx^2}{2l}.$$

Так как кинетическая энергия есть $\frac{m\dot{x}^2}{2}$, то

$$\omega=\sqrt{\frac{F}{lm}}.$$

31б. Удлинение пружины по сравнению с ее длиной l в положении равновесия, при отклонении отрезка r на малый угол φ составляет:

$$\sqrt{r^2+(l+r)^2-2r(l+r)\cos\varphi}-l\cong\sqrt{l^2+r(l+r)\varphi^2}-l\cong\frac{r(l+r)\varphi^2}{2l}$$

$\left(\text{так как } \cos\varphi\cong1-\frac{\varphi^2}{2}\right)$. Потенциальная энергия будет:

$$U=\frac{F(r+l)r\varphi^2}{2l},$$

а кинетическая:

$$T=\frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Отсюда частота:

$$\omega=\sqrt{\frac{(F+rl)}{lrm}}.$$

31в. Потенциальные энергии каждой из пружин соответственно: $\frac{kx^2}{2}$ и $\frac{lx^2}{2}$, где x — отклонение точки m от положения равновесия. Кинетическая энергия точки m равна $\frac{m\dot{x}^2}{2}$. Отсюда частота:

$$\omega=\sqrt{\frac{k+l}{m}}.$$

32. Приведенная масса системы равна $\frac{m}{2}$, где m — масса одной точки. Поэтому энергия:

$$E=\frac{m}{4}(r^2\dot{\varphi}^2+\dot{r}^2)-\frac{\ln r}{r^2},$$

или, вводя постоянный импульс $p_\varphi=\frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}$:

$$E=\frac{m\dot{r}^2}{4}+\left(\frac{p_\varphi^2}{mr^2}-\frac{\ln r}{r^2}\right).$$

Выражение, стоящее в скобках, играет, очевидно, роль потенциальной энергии. Приравняв нулю первую производную, находим, что она имеет минимум при

$$r=e^{\frac{1}{2}+\frac{p_\varphi^2}{m}}.$$

Вторая производная при этом равна $2e^{-\frac{4p_\varphi^2}{m}-2}$. Разделив на коэфициент при $\frac{\dot{r}^2}{2}$ и извлекая корень, получаем частоту:

$$\omega=\frac{2}{\sqrt{m}}e^{\frac{-2p_\varphi^2}{m}-1}.$$

33. В точке неустойчивого равновесия q_0 потенциальная энергия $U(q_0)$ имеет максимум, т. е. $U'(q_0)=0$, $U''(q_0)<0$. Разложив U в ряд по степеням $q-q_0=x$ (вблизи q_0), мы получим:

$$U=U_0-\frac{k}{2}x^2,$$

так как x здесь — малая величина и ее высшими степенями можно пренебречь.

Уравнение движения будет тогда:

$$m\ddot{x} - kx = 0,$$

откуда

$$x = c_1 e^{\sqrt{\frac{k}{m}}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}\,t}.$$

34. Если $U''(x_0) = 0$, то для наличия минимума U в этой точке необходимо, чтобы

$$U^{\mathrm{III}}(x_0) = 0 \text{ и } U^{\mathrm{IV}}(x_0) > 0.$$

Разложение $U(x)$ в ряд по $(x - x_0)$ дает тогда:

$$U = U_0 + A\,(x - x_0)^4$$

[отклонение $(x - x_0)$ от точки равновесия мало], т. е. U есть однородная функция от $(x - x_0)$ четвертого порядка (постоянную U_0 можно опустить). Согласно задаче 14а, период в этом случае обратно-пропорционален размерам, т. е. амплитуде.

35. Потенциальная энергия до начала действия внешней силы F была:

$$\frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

(точка равновесия $x_0 = 0$).

При наличии силы потенциальная энергия будет:

$$\frac{m\omega^2 x^2}{2} - Fx$$

и положение равновесия определится из

$$m\omega^2 x_0' - F = 0,$$

т. е.

$$x_0' = \frac{F}{m\omega^2}.$$

36а. Вынужденные колебания представляются частным интегралом уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m},$$

дополнительная функция которого $x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$ есть свободное колебание.

При $F = a$ частный интеграл есть

$$x = \frac{a}{m\omega^2}$$

и полное колебание представляется формулой:

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{a}{m\omega^2}.$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям (при $t = 0$: $x = 0$, $\dot{x} = 0$), надо положить

$$c_2 = 0, \ c_1 = -\frac{a}{m\omega^2},$$

т. е.

$$x = \frac{a}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t).$$

36б. Ищем частный интеграл в виде $b \cos \alpha t$. Подстановка в уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{a}{m} \cos \alpha t$$

дает:

$$b = \frac{a}{m(\omega^2 - \alpha^2)},$$

т. е.

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{a}{m(\omega^2 - \alpha^2)} \cos \alpha t$$

Из начальных условий следует, что

$$c_1 = -\frac{a}{m(\omega^2 - \alpha^2)}, \ c_2 = 0,$$

т. е.

$$x = \frac{a}{m(\omega^2 - \alpha^2)}(\cos \alpha t - \cos \omega t).$$

36в. Аналогично находим:

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{a}{m(\omega^2 - \alpha^2)} \sin \alpha t.$$

Начальные условия дают:

$$c_1 = 0, \ c_2 = -\frac{\alpha a}{\omega m(\omega^2 - \alpha^2)},$$

т. е.

$$x = \frac{a}{m(\omega^2 - \alpha^2)} \left(\sin \alpha t - \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right).$$

36г. Ищем частный интеграл в виде bt. Подстановка в уравнение дает:

$$b = \frac{a}{m\omega^2},$$

т. е.

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{a}{m\omega^2} t.$$

Из начальных условий получаем:

$$c_1 = 0, \ c_2 = -\frac{a}{m\omega^3},$$

т. е.

$$x = \frac{a}{m\omega^2}\left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega}\right).$$

36д. Ищем частный интеграл в виде $be^{-\alpha t}$. Подстановка в уравнение дает:

$$b = \frac{a}{m(\omega^2 + \alpha^2)},$$

т. е.

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{ae^{-\alpha t}}{m(\omega^2 + \alpha^2)}.$$

Начальные условия дают:

$$c_1 = -\frac{a}{m(\omega^2 + \alpha^2)}, \quad c_2 = \frac{a\alpha}{m\omega(\omega^2 + \alpha^2)},$$

т. е.

$$x = \frac{a}{m(\omega^2 + \alpha^2)}\left(e^{-\alpha t} - \cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t\right).$$

36е. ж. Пишем силу F в комплексной форме:

$$F = ae^{(-\alpha + i\beta)t}.$$

Тогда действительная часть решения дает решение случая е, а мнимая — случая ж. Ищем частный интеграл в виде

$$be^{(-\alpha + i\beta)t}.$$

Подстановка в уравнение дает:

$$b = \frac{a}{(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) - 2i\alpha\beta}.$$

Действительная часть решения, т. е. решение для случая „е" есть:

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t +$$
$$+ \frac{ae^{-\alpha t}}{(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}[(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)\cos \beta t - 2\alpha\beta \sin \beta t].$$

Начальные условия дают:

$$x = \frac{ae^{-\alpha t}}{(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}\Big[(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)(\cos \beta t - \cos \omega t) +$$

$$+2\alpha\beta\left(\frac{\beta}{\omega}\sin\omega t-\sin\beta t\right)\Bigg].$$

Мнимая часть, т. е. решение для случая „ж“ есть:

$$x=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t+$$

$$+\frac{ae^{-\alpha t}}{(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}\left[2\alpha\beta\cos\beta t+(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\sin\beta t\right].$$

Начальные условия дают:

$$x=\frac{ae^{-\alpha t}}{(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}\Bigg[2\alpha\beta(\cos\beta t-\cos\omega t)+$$

$$+(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\left(\sin\beta t-\frac{\beta}{\omega}\sin\omega t\right)\Bigg].$$

37а. Ищем решение уравнения

$$\ddot{x}+\omega^2x=\frac{a\cos\omega t}{m}$$

в виде:

$$bt\sin\omega t.$$

Подстановка в уравнение дает:

$$b=\frac{a}{2m\omega},$$

т. е. полное колебание:

$$x=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t+\frac{at}{2m\omega}\sin\alpha t.$$

Начальные условия дают:

$$c_1=c_2=0,$$

т. е.

$$x=\frac{at}{2m\omega}\sin\alpha t.$$

Амплитуда растет линейно со временем.

37б. Пользуясь результатом задачи 36б, находим:

$$x=\frac{a(\cos(\omega+\Delta)t-\cos\omega t)}{m[\omega^2-(\omega+\Delta)^2]},$$

или, поскольку $\Delta\ll\omega$, т. е.

$$\omega^2-(\omega+\Delta)^2\cong-2\omega\Delta,$$

имеем:

$$x=\frac{a}{2m\omega\Delta}(\cos\omega t-\cos(\omega+\Delta)t).$$

Разложив на произведение синусов, получаем:

$$x = \frac{a}{m\omega\Delta} \sin\frac{\Delta t}{2} \sin\left(\omega + \frac{\Delta}{2}\right)t,$$

т. е. амплитуда меняется периодически со временем с частотой $\frac{\Delta}{2}$ $\left(\text{или периодом } \frac{4\pi}{\Delta}\right)$. Ее максимальное значение есть:

$$\frac{a}{m\omega\Delta}.$$

38а. При $0 < t < T$, т. е. во время действия силы $F = \frac{t}{T}$ колебания, удовлетворяющие начальным условиям, имеют вид (см. задачу 36г).

$$x = \frac{1}{T\omega^2}\left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega}\right).$$

При $t > T$ действует сила $F = 1$ и потому колебание (см. задачу 36а):

$$x = c_1 \cos\omega(t - T) + c_2 \sin\omega(t - T) + \frac{1}{\omega^2}$$

(аргументы косинуса и синуса берутся в таком виде из соображений удобства). Оба колебания (координата и скорость) должны совпадать при $t = T$. Это дает:

$$c_1 = -\frac{\sin\omega T}{\omega^3};$$

$$c_2 = \frac{1}{T\omega^3}(1 - \cos\omega T).$$

Конечная амплитуда, следовательно:

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{2}{T\omega^3} \sin\frac{\omega T}{2}.$$

Чем постепеннее возрастает сила (чем больше T), тем меньше амплитуда возникающего колебания.

38б. При $t < T$, т. е. во время действия силы $F = a$, колебания:

$$x = \frac{a}{\omega^2}(1 - \cos\omega t).$$

При $t > T$ колебания свободны, т. е.

$$x = c_1 \cos\omega(t - T) + c_2 \sin\omega(t - T).$$

Оба колебания должны совпадать при $t=T$. Это дает:

$$c_1=\frac{a}{\omega^2}(1-\cos\omega T);$$

$$c_2=\frac{a}{\omega^2}\sin\omega T.$$

Конечная амплитуда:

$$A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}=\frac{2a}{\omega^2}\sin\frac{\omega t}{2}.$$

38в. При $t<T$, т.е. при силе $F=t$, колебания:

$$x=\frac{1}{\omega^2}\left(t-\frac{\sin\omega t}{\omega}\right).$$

При $t>T$ колебания свободны, т. е.

$$x=c_1\cos\omega(t-T)+c_2\sin\omega(t-T).$$

Условие совпадения колебаний при $t=T$, дает:

$$c_1=\frac{1}{\omega^2}\left(T-\frac{\sin\omega T}{\omega}\right);$$

$$c_2=\frac{1}{\omega^3}(1-\cos\omega T).$$

Конечная амплитуда:

$$A=\sqrt{c_1^2+c^2}=\frac{1}{\omega^3}\sqrt{\omega^2T^2-2T\omega\sin\omega T+2(1-\cos\omega T)}.$$

39. Уравнение движения:

$$\ddot q+\omega^2q=\frac{F(t)}{m}.$$

Его можно написать в виде:

$$\frac{d}{dt}(\dot q+i\omega q)-i\omega(\dot q+i\omega q)=\frac{F}{m}.$$

Введя обозначение $\xi=\dot q+i\omega q$, имеем:

$$\dot\xi=\xi i\omega+\frac{F}{m}.$$

Ищем решение в виде:

$$\xi=c(t)e^{i\omega t}.$$

Подстановка дает:

$$\frac{dc}{dt}=\frac{F(t)}{m}e^{-i\omega t},$$

откуда

$$c(t)=\int\frac{F(t)}{m}e^{-i\omega t}dt+\text{const},$$

или, учитывая, что при $t=t_1$: $\xi=\xi_1=0$:

$$c(t)=\int\limits_{t_1}^{t}\frac{F(t)}{m}e^{-i\omega t}dt,$$

или

$$\xi=e^{i\omega t}\int\limits_{t_1}^{t}\frac{F(t)}{m}e^{-i\omega t}dt.$$

Переданная системе энергия:

$$E=\frac{m}{2}|\xi(t_2)|^2=\frac{1}{2m}\left|\int\limits_{t_1}^{t_2}F(t)e^{-i\omega t}dt\right|^{t}$$

так как

$$|\xi|^2=\dot{q}^2+\omega^2q^2$$

и

$$\frac{|\xi|^2}{2m}=\frac{m\dot{q}^2}{2}+\frac{m\omega^2q^2}{2}=E.$$

40а. Уравнение затухающих колебаний:

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega^2x=0,$$

где λ — логарифмический декремент затухания а ω — частота колебаний при отсутствии трения. Ищем решение в виде $e^{\alpha x}$и получим для α характеристическое уравнение:

$$\alpha^2+2\lambda\alpha+\omega^2=0,$$

откуда

$$\alpha=-\lambda\pm i\sqrt{\omega^2-\lambda^2}$$

(поскольку $\omega>\lambda$).

Следовательно, решение имеет вид:

$$x=e^{-\lambda t}(c_1\cos\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t+c_2\sin\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t).$$

Отсюда

$$\dot{x}=-\lambda x+e^{-\lambda t}\sqrt{\omega^2-\lambda^2}(-c_1\sin\sqrt{\omega^2-\lambda^2}t+c_2\cos\sqrt{\omega_2-\lambda^2t}).$$

Полагая в этих двух равенствах $t=0$ и приравнивая первое x_0, а второе v_0, находим:

$$c_1=x_0;\ c_2=\frac{v_0+\lambda x_0}{\sqrt{\omega^2-\lambda^2}}.$$

40б. Если $\lambda>\omega$, то корни характеристического уравнения:

$$\alpha=-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-\omega^2}$$

и движение происходит по закону

$x=c_1 e^{(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega^2})t}+c_2 e^{(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega^2})t}$ (апериодическое движение).

Отсюда:

$$\dot{x}=c_1(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_2})\,e^{(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega^2})t}+c_2(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega^2})\,e^{(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega^2})t}.$$

Полагая $t=0$ и приравнивая соответственно x_0 и v_0, находим:

$$x_0=c_1+c_2,\ v_0+\lambda x_0=\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,(c_1-c_2).$$

Отсюда:

$$c_1=\frac{v_0+x_0(\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega^2})}{2\sqrt{\lambda^2-\omega^2}};$$

$$c_2=\frac{-v_0+x_0(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega^2})}{2\sqrt{\lambda^2-\omega^2}}.$$

40в. Если $\lambda=\omega$, то характеристическое уравнение имеет один двойной корень:

$$\alpha=-\lambda$$

и потому

$$x=(c_1+c_2 t)\,e^{-\lambda t},$$

откуда

$$\dot{x}=-\lambda x+c_2 e^{-\lambda t}.$$

Полагая $t=0$ и приравнивая x_0 и v_0, получаем:

$$c_1=x_0;\ c_2=v_0+\lambda x_0.$$

41а. При наличии рассеяния энергии, характеризующегося диссипативной функцией $F(\dot{q}_i)$, уравнения движения имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=-\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_i}.$$

При этом поглощение энергии $\dot{E}=-2F$.
В данном случае

$$L=\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}-\frac{mg\varphi^2}{2}=2\dot{\varphi}^2-\frac{\varphi^2}{2}$$

и $F=\dot{\varphi}^2$ (так как $\dot{E}=-2\dot{\varphi}^2$). Отсюда уравнение движения:

$$4\ddot{\varphi}+2\dot{\varphi}+\varphi=0.$$

На основании этого уравнения находим декремент затухания $\lambda=\frac{1}{4}$ и частоту колебаний $\sqrt{\frac{3}{4}}$ (см. задачу 40).

41б. Функция Лагранжа:

$$L=2\dot{\varphi}^2-\frac{\varphi^2}{2}.$$

Диссипативная функция:

$$F=2l^2\dot{\varphi}^2=8\dot{\varphi}^2.$$

Отсюда получаем уравнение движения:

$$4\ddot{\varphi}+16\dot{\varphi}+\varphi=0.$$

Движение чисто затухающее (апериодическое)—с декрементом $\frac{-4\pm\sqrt{15}}{2}$.

41в. Функция Лагранжа:

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{(k_1+k_2)\,x^2}{2},$$

где x — отклонение от положения равновесия, или

$$L=\frac{\dot{x}^2}{2}-\frac{9x^2}{2}.$$

Диссипативная функция (учитывая обе пружины):

$$F=2\dot{x}^2.$$

Отсюда уравнение движения:

$$\ddot{x}+4\dot{x}+9x=0.$$

Логарифмический декремент затухания равен 2, а частота колебаний равна $\sqrt{5}$.

42. Уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}=\frac{F}{m}$$

(члена с x нет, так как нет внешнего поля, кроме силы F). Для установившегося движения:

$$\ddot{x}=0,$$

а потому из уравнения следует:

$$\dot{x} = \frac{F}{2m\lambda}.$$

С другой стороны, по определению подвижности для того же движения:

$$\dot{x} = uF,$$

где u — подвижность. Отсюда декремент затухания:

$$\lambda = \frac{1}{2mu}.$$

43. Силу берем в комплексной форме:

$$ae^{i\alpha t}.$$

Это значит, что надо взять действительную или мнимую часть решения, смотря по тому, имеет ли сила вид $a \cos \alpha t$ или $a \sin \alpha t$. Вынужденные колебания представляются частным интегралом уравнения:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = ae^{i\alpha t}.$$

Ищем его в виде $be^{i\alpha t}$; подставив это в уравнение, находим:

$$x = \frac{a}{\omega^2 - \alpha^2 + 2\lambda i\alpha} e^{i\alpha t}.$$

Для силы $F = a \cos \alpha t$ это дает:

$$x = \frac{a}{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4\lambda^2\alpha^2} [(\omega^2 - \alpha^2) \cos \alpha t + 2\lambda\alpha \sin \alpha t];$$

для $F = a \sin \alpha t$:

$$x = \frac{a}{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4\lambda^2\alpha^2} [(\omega^2 - \alpha^2) \sin \alpha t - 2\lambda\alpha \cos \alpha t].$$

Амплитуда в обоих случаях:

$$A^2 = \left| \frac{a}{\omega^2 - \alpha^2 + 2\lambda i\alpha} \right|^2 = \frac{a^2}{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4\lambda^2\alpha^2}.$$

44. В задаче 43 найдено вынужденное колебание при действии силы $ae^{i\alpha t}$ в виде:

$$x = \frac{a}{\omega^2 - \alpha^2 + 2\lambda i\alpha} e^{i\alpha t}.$$

Полагая $\alpha = \omega - \varepsilon$, где ε — малая величина и пренебрегая величинами $\lambda\varepsilon$ и ε^2, как малыми второго порядка по сравнению с λ и ε, находим

$$x = \frac{a}{2\omega(i\lambda + \varepsilon)} e^{i(\omega+\varepsilon)t}.$$

Поглощение энергии (см. задачу 41a) равно декременту затухания, помноженному на учетверенную кинетическую энергию т. е. равно

$$2\lambda m\dot{x}^2 \cong \frac{a^2\lambda m}{2(\lambda^2+\varepsilon^2)}.$$

$$\left(\text{поскольку } \dot{x} = \frac{a(\omega-\varepsilon)e^{i(\omega-\varepsilon)t}}{2\omega(i\lambda+\varepsilon)} \cong \frac{ae^{i(\omega-\varepsilon)t}}{2(i\lambda+\varepsilon)}\right).$$

Такой вид зависимости поглощения от частоты называется дисперсионным.

Интегрируя поглощение энергии по $d\varepsilon$, находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2\lambda m d\varepsilon}{2(\lambda^2+\varepsilon^2)} = \frac{a^2}{2}\pi m,$$

т.е. площадь кривой не зависит от λ.

45a. Составляем уравнения движения:

$$\ddot{x} + \frac{\ddot{y}}{2} + x - \frac{y}{2} = 0;$$

$$\ddot{y} + \frac{\ddot{x}}{2} + y - \frac{x}{2} = 0.$$

Ищем x и y в виде:

$$x = c_1 e^{i\omega t};\ y = c_2 e^{i\omega t}.$$

Подставляя в оба уравнения, находим:

$$c_1(1-\omega^2) - \frac{c_2}{2}(1+\omega^2) = 0;$$

$$-\frac{c_1}{2}(1+\omega^2) + c_2(1-\omega^2) = 0.$$

Для того, чтобы эти два однородных уравнения имели корни, отличные от нуля, необходимо, чтобы равнялся нулю детерминант из коэфициентов при c_1 и c_2 в этих уравнениях т. е.

$$\begin{vmatrix} 1-\omega^2 & -\frac{1}{2}(1+\omega^2) \\ -\frac{1}{2}(1+\omega^2) & 1-\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$(1-\omega^2)^2-\frac{1}{4}(1+\omega^2)^2=\frac{1}{4}(1-3\omega^2)(3-\omega^2)=0$$

и частоты:

$$\omega_1^2=3;\ \omega_2^2=\frac{1}{3}.$$

Таким образом, нормальные колебания:

$$Q_1=R\left\{a_1e^{\sqrt{3}it}\right\};$$

$$Q_2=R\left\{a_2e^{\frac{it}{\sqrt{3}}}\right\}.$$

Для того, чтобы выразить x и y через нормальные колебания Q_1 и Q_2 ($x=c_{11}Q_1+c_{12}Q_2;\ y=c_{21}Q_1+c_{22}Q_2$), полагаем в уравнениях для c_1 и c_2 сначала $\omega^2=3$, а затем $\omega^2=\frac{1}{3}$.

Это дает:

$$c_{11}=-c_{21}\ \text{ и }\ c_{12}=c_{22}.$$

c_{11} и c_{22} должны быть выбраны так, чтобы при подстановке в функцию Лагранжа последняя приняла вид:

$$L=\frac{1}{2}(\dot{Q}_1^2+\dot{Q}_2^2)-\frac{1}{2}(\omega_1^2Q_1^2+\omega_2^2Q_2^2$$

Подставляем сначала в исходную функцию Лагранжа (в кинетическую энергию; потенциальная при этом автоматически принимает надлежащий вид) $\dot{x}=c_{11}\dot{Q}_1$, $\dot{y}=c_{21}\dot{Q}_1=-c_{11}\dot{Q}_1$. Кинетическая энергия при этом принимает вид: $\frac{c_{11}^2\dot{Q}_1^2}{2}$ и надо, следовательно, положить

$$c_{11}=-c_{22}=1$$

для того, чтобы при $\dot{Q}_1^2$ стоял коэфициент $^1/_2$.

Аналогично, подставив $\dot{x}=c_{12}\dot{Q}_2$, $\dot{y}=c_{22}\dot{Q}_2=c_{12}\dot{Q}_2$, находим:

$$c_{12}=c_{22}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

и, таким образом,

$$x=\left(\frac{Q_2}{\sqrt{3}}+Q_1\right);\quad y=\left(\frac{Q_2}{\sqrt{3}}-Q_1\right).$$

456. Составляем уравнения движения:

$$2\ddot{x}+\ddot{y}+3x=0;\ \ddot{y}+\ddot{x}+2y=0.$$

Ищем x и y в виде:

$$x = c_1 e^{i\omega t};\ y = c_2 e^{i\omega t}.$$

Подставляя в уравнения, получаем:

$$c_1(3-2\omega^2) - c_2\omega^2 = 0;\ -c_1\omega^2 + c_2(2-\omega^2) = 0.$$

Как и в задаче 45а, находим отсюда:

$$\begin{vmatrix} 3-2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & 2-\omega^2 \end{vmatrix} = \omega^4 - 7\omega^2 + 6 = 0,$$

откуда

$$\omega_1^2 = 6;\ \omega_2^2 = 1.$$

Нормальные координаты:

$$Q_1 = R(a_1 e^{i\sqrt{6}t});\ Q_2 = R(a_2 e^{it}).$$

Чтобы выразить x и y через нормальные координаты ($x = c_{11}Q_1 + c_{12}Q_2$; $y = c_{21}Q_1 + c_{22}Q_2$), полагаем в уравнениях для c_1 и c_2 сначала $\omega^2 = \omega_1^2 = 6$ и находим:

$$3c_{11} = -2c_{12}.$$

Подставляя $\omega^2 = \omega_2^2 = 1$, находим:

$$c_{21} = c_{22}.$$

Подбирая c_{11} и c_{21} так, чтобы при подстановке в функцию Лагранжа последняя приняла вид:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2) - \frac{1}{2}(6Q_1 + Q_2^2),$$

находим:

$$x = \sqrt{\frac{1}{5}}(-2Q_1 + Q_2);\quad y = \sqrt{\frac{1}{5}}(3Q_1 + Q_2).$$

45в. Составляем уравнения движения:

$$\ddot{x} + \frac{\ddot{y}}{5} + x = 0;\ \frac{\ddot{x}}{5} + \ddot{y} + y + \frac{\ddot{z}}{5} = 0;\ \ddot{z} + \frac{\ddot{y}}{5} + z = 0.$$

Подставляя $x = c_1 e^{i\omega t}$; $y = c_2 e^{i\omega t}$; $z = c_3 e^{i\omega t}$, получаем:

$$c_1(1-\omega^2) - c_2\frac{\omega^2}{5} = 0;$$

$$-c_1\frac{\omega^2}{5} + c_2(1-\omega^2) + \frac{c_3}{5} = 0;$$

$$\frac{c_2}{5} + c_3(1-\omega^2) = 0.$$

Чтобы эти уравнения имели отличное от нуля решение, необходимо:

$$\begin{vmatrix} 1-\omega^2 & -\frac{\omega^2}{5} & 0 \\ -\frac{\omega^2}{5} & 1-\omega^2 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & 1-\omega^2 \end{vmatrix} = (1-\omega^2)\left(\frac{24\omega^4}{25} - 2\omega^2 + \frac{24}{25}\right) = 0,$$

откуда

$$\omega_1^2 = 1;\ \omega_2^2 = \frac{4}{3};\ \omega_3^2 = \frac{3}{4}.$$

45г. Уравнения движения:

$$\ddot{x} + \frac{\ddot{y}}{2} + x + \frac{y}{2} = 0;$$

$$\frac{\ddot{x}}{2} + \ddot{y} + \frac{x}{2} + y + z = 0;$$

$$\ddot{z} + 2z + y = 0.$$

Подставляя $x = c_1 e^{i\omega t}$; $y = c_2 e^{i\omega t}$; $z = c_3 e^{i\omega t}$, получаем:

$$c_1(1-\omega^2) + \frac{c_2}{2}(1-\omega^2) = 0;$$

$$\frac{c_1}{2}(1-\omega^2) + c_2(1-\omega^2) + c_3 = 0;$$

$$c_2 + c_3(2-\omega^2) = 0.$$

Отсюда

$$\begin{vmatrix} 1-\omega^2 & \frac{1-\omega^2}{2} & 0 \\ \frac{1-\omega^2}{2} & 1-\omega^2 & 1 \\ 0 & 1 & 2-\omega^2 \end{vmatrix} = (1-\omega^2)\left(\frac{3}{4}\omega^4 - \frac{9}{4}\omega^2 + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

т. е.

$$\omega_1^2 = 1;\ \omega_2^2 = \frac{9+\sqrt{57}}{6};\ \omega_3^2 = \frac{9-\sqrt{57}}{6}.$$

46а. Находим x и y, соответствующие минимуму потенциальной энергии, из условий:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 1 - \frac{1}{yx^2} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=1-\frac{1}{y^2x}=0,$$

откуда

$$x=y=1.$$

Значения вторых производных в этой точке:

$$U''_{xx}=U''_{yy}=2,\ U''_{xy}=1.$$

Таким образом, находим функцию Лагранжа (подставляя $x=y=1$ в кинетической энергии и переходя к отклонениям от положения равновесия вместо координат, т. е. вводя $x_1=x-1$ и $y_1=y-1$):

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2)-(x_1^2+y_1^2+x_1y_1).$$

Отсюда находим уравнения движения:

$$\dot{x}_1+2x_1+y_1=0,\ \dot{y}_1+2y_1+x_1=0.$$

Полагая $x_1=c_1e^{i\omega t}$, $y_1=c_2e^{i\omega t}$, находим:

$$c_1(2-\omega^2)+c_2=0;\ c_1+c_2(2-\omega^2)=0.$$

Приравнивая нулю детерминант из коэфициентов этих уравнений, находим:

$$\begin{vmatrix} 2-\omega^2 & 1 \\ 1 & 2-\omega^2 \end{vmatrix}=(2-\omega^2)^2-1=(1-\omega^2)(3-\omega^2)=0,$$

откуда находим частоты: $\omega_1^2=1$, $\omega_2^2=3$.

46б. Потенциальная энергия имеет минимум при $x=1$; $y=-1$. Значения вторых производных при этом:

$$U''_{xx}=U''_{yy}=6,\ U''_{xy}=3,$$

т. е.

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_1\dot{y}_1+\dot{y}_1^2)-3(x_1^2+x_1y_1+y_1^2),$$

где $x_1=x-1$ и $y_1=y+1$.

Уравнения движения:

$$\ddot{x}_1+\frac{1}{2}\ddot{y}_1+6x_1+3y_1=0;$$

$$\ddot{y}_1+\frac{1}{2}\ddot{x}_1+6y_1+3x_1=0.$$

Полагая $x_1=c_1e^{i\omega t}$ и $y_1=c_2e^{i\omega t}$, находим:

$$c_1(6-\omega^2)+c_2\left(3-\frac{1}{2}\omega^2\right)=0,$$

$$c_1\left(3-\frac{1}{2}\,\omega^2\right)+c_2(6-\omega^2)=0,$$

откуда

$$\begin{vmatrix} 6-\omega^2 & 3-\frac{1}{2}\,\omega^2 \\ 3-\frac{1}{2}\,\omega^2 & 6-\omega^2 \end{vmatrix}=3\omega^4-36\omega^2+108=0,$$

т. е.

$$\omega_1^2=\omega_2^2=6.$$

46в. Потенциальная энергия имеет минимум при

$$x=y=1,$$

причем

$$U''_{xx}=U''_{yy}=1,\ U''_{xy}=0.$$

Таким образом,

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_1\,\dot{y}_1+\dot{y}_1^2)-\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2),$$

где $x_1=x-1$, $y_1=y-1$.

Уравнения движения:

$$\ddot{x}_1+\frac{\ddot{y}_1}{2}+x_1=0,$$

$$\frac{\ddot{x}_1}{2}+\ddot{y}_1+y_1=0.$$

Полагая $x_1=c_1e^{i\omega t}$ и $y_1=c_2e^{i\omega t}$, находим:

$$c_1\,(1-\omega^2)-\frac{c_2}{2}\,\omega^2=0,$$

$$-\frac{c_1}{2}\,\omega^2+c_2\,(1-\omega^2)=0,$$

откуда

$$\begin{vmatrix} 1-\omega^2 & -\frac{\omega^2}{2} \\ -\frac{\omega^2}{2} & 1-\omega^2 \end{vmatrix}=\frac{3}{4}\,\omega^4-2\omega^2+1=0.$$

Отсюда частоты:

$$\omega_1^2=2,\ \omega_2^2=\frac{2}{3}.$$

47а. Всего степеней свободы $3n$. Однако для колебательного состояния системы не имеют значения положение центра инерции и ориентация системы как целого в пространстве, т. е.

имеем три поступательные и три вращательные степени свободы. Поэтому число колебательных степеней свободы есть:

$$3n-6.$$

47б. Всего колебательных степеней свободы $3n-6$. Из них $2n-3$ соответствуют колебаниям, не выводящим точки из плоскости (так как всего для плоского движения есть $2n$ степеней свободы, из которых две поступательные и одна вращательная). Остальные $n-3$ выводят точки из плоскости.

47в. Всего колебательных степеней свободы $3n-5$ (так как вращательных степеней свободы есть только две). Из них $n-1$ соответствуют колебаниям, не выводящим точек с линии (так как всего для движения по линии есть n степеней свободы, из которых одна поступательная). Остальные $2n-4$ выводят точки с прямой. Согласно 47б число колебаний в одной плоскости есть $2n-3$; из них выводящих с линии:

$$(2n-3)-(n-1)=n-2.$$

Поэтому из $2n-4$ колебаний, выводящих с прямой, $n-2$ соответствуют колебаниям в некоторой плоскости и $n-2$—колебаниям с такой же частотой во взаимно-перпендикулярной плоскости.

48а. Можно всегда выбрать такие декартовы координаты, в которых члены второго порядка в разложении U были бы только квадратами координат соответственно тому, что всякая квадратичная форма может быть приведена путем преобразования координат к сумме квадратов. Квадрат же скорости будет, как и во всяких декартовых координатах, равен сумме квадратов компонент по осям, т. е.

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\frac{1}{2}(k_1x^2+k_2y^2+k_3z^3)$$

и нормальные колебания направлены по этим же осям, т. е. взаимно перпендикулярны.

48б. Если все три частоты одинаковы, то в потенциальную энергию входит только

$$(x^2+y^2+z^2)=r^2,$$

т. е. поле центрально-симметрично и движение плоское (см. задачу **21а**).

48в. Оба колебания представляются выражениями (начало отсчета времени можно всегда выбрать так, чтобы одна из начальных фаз была равна нулю):

$$x=A\cos\omega t$$

$$y = B\cos(\omega t + \alpha) = B\cos\omega t\cos\alpha + B\sin\omega t\sin\alpha.$$

Подставляя первое выражение во второе, получаем:

$$yA = Bx\cos\alpha - B\sin\alpha\sqrt{A^2 - x^2},$$

или

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\alpha = \sin^2\alpha.$$

Если $\alpha = 0$, то траектория есть прямая:

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B};$$

если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

т. е. представляет собой эллипс с полуосями A и B.

49а. Система имеет два нормальных колебания с одинаковыми частотами, например, по направлениям AC и BD. При смещении (x) точки m по одному из этих направлений, например, AC, потенциальная энергия пружин AO и CO равна $\frac{kx^2}{2}$; потенциальная энергия пружин OB и DO (см. задачу 31а) равна $\frac{Fx^2}{2l}$; общая потенциальная энергия составляет $\left(k + \frac{F}{l}\right)x^2$.

Так как кинетическая энергия точки есть $\frac{m\dot{x}^2}{2}$, то частота колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{2\left(k + \frac{F}{l}\right)}{m}}.$$

49б. Согласно задачи 47в данная система имеет два колебания, не выводящие точки с одной прямой, и по одному колебанию, с одинаковой частотой в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях, при которых точки выводятся с прямой. Эти колебания независимы и можно отдельно писать функцию Лагранжа для первых и отдельно для вторых. Сначала определяем колебания вдоль прямой.

Пусть x_1, x_2, x_3 — смещения трех точек m_1, m_2, m_3 от положения равновесия. Поскольку движение центра инерции несущественно для колебаний системы, то его смещение можно положить равным нулю, что дает:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0.$$

Введем кроме того растяжения пружин $y_1 = x_2 - x_1$ и $y_2 = x_3 - x_2$. Тогда из написаннных трех уравнений можно найти:

$$x_1 = -\frac{4y_1 + 2y_2}{5}, \quad x_2 = \frac{y_1 - 2y_2}{5}, \quad x_3 = \frac{y_1 + 3y_2}{5}.$$

Подставляя это в функцию Лагранжа

$$L = \left(\frac{1}{2}\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) - \frac{(x_2 - x_1)^2}{2} - (x_3 - x_2)^2,$$

находим:

$$L = \frac{1}{5}(2\dot{y}_1^2 + 2\dot{y}_1\dot{y}_2 + 3\dot{y}_2^2) - \left(\frac{y_1^2}{2} + y_2^2\right),$$

откуда можно определить частоты колебаний системы и нормальные координаты.

Для нахождения колебаний, выводящих точки с прямой, вводим отклонения y_1, y_2, y_3 точек m_1, m_2, m_3 от прямой; смещения вдоль самой прямой (оси X) теперь не существенны и считаются равными нулю. Так как движение центра инерции попрежнему несущественно, то его смещение полагается равным нулю, т. е.

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 0.$$

Далее, поскольку несущественно и вращение системы, как целого, то момент вращения также надо положить равным нулю, т. е.

$$m_1 x_1 \dot{y}_1 + m_2 x_2 \dot{y}_2 + m_3 x_3 \dot{y}_3 = 0$$

(x_1, x_2, x_3 можно считать постоянными в виду малости колебаний). Проинтегрировав (помня, что x_1, x_2, x_3 можно считать постоянными), получаем:

$$m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 + m_3 x_3 y_3 = 0$$

(постоянную, зависящую от выбора осей координат, можно положить равной нулю). Если выбрать $x_2 = 0$, то $x_1 = -1$, $x_3 = 1$ и

$$2y_3 - y_1 = 0.$$

Углы между обеими пружинами и прямой можно в виду их малости считать равными их тангенсам, т. е. соответственно:

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = y_3 - y_2 \quad \text{и} \quad \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = y_1 - y_2.$$

Вводя, наконец, угол относительного поворота обеих пружин

$$(y_3-y_2)+(y_1-y_2)=y_3+y_1-2y_2=\theta$$

(потенциальная энергия равна квадрату этого угла), получаем три уравнения, из которых определяем y_1, y_2, y_3:

$$y_1=\frac{2}{7}\theta, \quad y_2=-\frac{2}{7}\theta, \quad y_3=\frac{\dot\theta}{7}.$$

Подставляя в функцию Лагранжа, находим:

$$L=\frac{m_1}{2}\dot y_1^2+\frac{m_2}{2}\dot y_2^2+\frac{m_3}{2}\dot y_3^2-\theta^2=\frac{\dot\theta^2}{14}-\theta^2.$$

Отсюда частота колебания $\omega=\sqrt{14}$.

49в. Согласно задачи 47в данная система имеет четыре собственных колебания, выводящих точки с одной прямой. Из них два колебания в одной плоскости и два другие — с теми же частотами в другой плоскости. Рассмотрим колебания в одной плоскости. Как и в задаче 49б, движение центра инерции несущественно и можно положить:

$$m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3+m_4y_4=y_1+y_2+y_3+y_4=0,$$

где y_1, y_2, y_3, y_4 — отклонения точек от прямой. Исключение вращения системы как целого дает попрежнему:

$$m_1x_1y_1+m_2x_2y_2+m_3x_3y_3+m_4x_4y_4=0,$$

или, если положить $x_1=0$ (тогда $x_2=2$, $x_3=4$, $x_4=6$),

$$y_2+2y_3+3y_4=0.$$

Углы между стержнями l_1, l_2 l_3 и прямой (считая их равными своим тангенсам):

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_1-y_2}{2}, \quad \frac{y_2-y_3}{x_3-x_2}=\frac{y_2-y_3}{2},$$

$$\frac{y_3-y_4}{x_4-x_3}=\frac{y_3-y_4}{2}.$$

Углы относительно поворота стержней l_1 с l_2 и l_2 с l_3

$$\frac{y_1+y_3-2y_2}{2}=\theta \quad \text{и} \quad \frac{y_2+y_4-2y_3}{2}=\varphi.$$

Из полученных четырех уравнений находим:

$$y_1=\frac{3\theta+2\varphi}{5}, \quad y_2=-\frac{4\theta+\varphi}{5}, \quad y_3=-\frac{4\varphi+\theta}{5}, \quad y_4=\frac{3\varphi+2\theta}{5}.$$

Подставляя в функцию Лагранжа, находим:

$$L = \frac{1}{2}(m_1\dot{y}_1^2 + m_2\dot{y}_2^2 + m_3\dot{y}_3^2 + m_4\dot{y}_4^2) -$$

$$-\varphi^2 - \theta^2 = \frac{1}{5}(3\dot{\theta}^2 + 4\dot{\theta}\dot{\varphi} + 3\dot{\varphi}^2) - \varphi^2 - \theta^2.$$

50а. Если одно из составляющих колебаний есть

$$q_1 = a\cos(\omega t + \alpha) = R(ae^{i(\omega t + \alpha)}),$$

то второе с частотой $\omega' = \omega + \Delta$, где $\omega \gg \Delta$, есть:

$$q_2 = R(be^{i(\omega t + \Delta t + \beta)}).$$

Суммарное колебание:

$$q = q_1 + q_2 = R\left\{(ae^{i\alpha} + be^{i(\Delta t + \beta)})\,e^{i\omega t}\right\}.$$

Его амплитуда A есть модуль выражения, стоящего в фигурных скобках, т. е.

$$A = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\Delta t + \beta - \alpha)}.$$

Отсюда видно, что амплитуда периодически (с частотой Δ) меняется между значениями $a + b$ и $a - b$ (биения).

50б. Составляем уравнения движения:

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \alpha y = 0,$$
$$\ddot{y} + \omega^2 y - \alpha y = 0.$$

Полагая, как и в задаче 45,

$$x = c_1 e^{i\omega' t},$$

$$y = c_2 e^{i\omega' t},$$

находим:

$$c_1(\omega^2 - \omega'^2) - \alpha c_2 = 0,$$
$$c_2(\omega^2 - \omega'^2) - \alpha c_1 = 0,$$

откуда для определения собственных частот ω' связанных друг с другом систем:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \omega'^2 & -\alpha \\ -\alpha & \omega^2 - \omega'^2 \end{vmatrix} = \omega^4 - 2\omega'^2\omega^2 + \omega^4 - \alpha^2 = 0.$$

Откуда

$$\omega_1'^2 = \omega^2 - \alpha; \quad \omega_2'^2 = \omega^2 + \alpha.$$

Ввиду того, что $\alpha \ll \omega$, можно написать:

$$\omega_1' = \sqrt{\omega^2 - \alpha} \cong \omega - \frac{\alpha}{2},$$

$$\omega_2^1 = \omega + \frac{\alpha}{2}$$

Согласно задачи 50а это дает биения с частотой

$$\omega_2' - \omega_1' = \alpha.$$

Нормальные координаты:

$$Q_1 = R\{ae^{i\omega_1' t}\}, \quad Q_2 = R\{be^{i\omega_2' t}\}$$

Для того, чтобы выразить x и y через Q_1 и Q_2, т. е. найти коэфициенты в $x = c_{11}Q_1 + c_{12}Q_2$ и $y = c_{21}Q_1 + c_{22}Q_2$, полагаем сначала в уравнениях для c_1 и c_2 $\omega = \omega_1'$, и находим:

$$c_{11} = c_{21},$$

а подставляя $\omega = \omega_2'$, имеем:

$$c_{21} = - c_{22}.$$

Подставляя в кинетическую энергию сначала $\dot{x}_1 = c_{11}\dot{Q}_1$, $\dot{y} = c_{11}\dot{Q}_1$ и подобрав c_{11} так, чтобы коэфициент при $\dot{Q}_1^2$ был равен $\frac{1}{2}$, находим:

$$c_{11} = c_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

Подставляя затем $\dot{x} = c_{21}\dot{Q}_2$, $\dot{y} = -c_{21}\dot{Q}_2$ и подобрав соответствующим образом c_{21}, находим:

$$c_{21} = - c_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом,

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - Q_2),$$

или, наоборот,

$$Q_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \qquad Q_2 = \frac{x-y}{\sqrt{2}}.$$

Если в начальный момент ($t = 0$) амплитуды x и y были a и b, а начальные фазы — δ_1 и δ_2, то:

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} R\left[(ae^{i\delta_1} + be^{i\delta_2})\ e^{i\omega_1' t}\right],$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} R\left[(ae^{i\delta_1} - be^{i\delta_2})\ e^{i\omega_2' t}\right].$$

Амплитуды A_1 и A_2 нормальных колебаний равны, следовательно, модулям этих выражений, т. е.

$$A_1 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\delta_1 - \delta_2)}{2}},$$

$$A_2 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\delta_1 - \delta_2)}{2}}.$$

Зависимость амплитуд x и y от времени может теперь быть получена совершенно аналогично тому, как в задаче 50а.

51а. Уравнения движения при наличии рассеяния энергии характеризующегося диссипативной функцией F, имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k}.$$

В данном случае это дает:

$$\ddot{x} + \dot{x} + \frac{\dot{y}}{2} = 0, \quad \ddot{y} + \dot{y} + \frac{\dot{x}}{2} = 0.$$

Полагая $\dot{x} = c_1 e^{\alpha t}$ и $\dot{y} = c_2 e^{\alpha t}$, находим:

$$c_1(1 + \alpha) + \frac{c_2}{2} = 0,$$

$$\frac{c_1}{2} + c_2(1 + \alpha) = 0,$$

откуда для определения α:

$$\begin{vmatrix} 1 + \alpha & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 + \alpha \end{vmatrix} = (1 + \alpha)^2 - \frac{1}{4} = \left(\frac{3}{4} + \alpha\right)\left(\frac{5}{4} + \alpha\right) = 0.$$

Отсюда декременты затухания:

$$\lambda_1 = -\frac{3}{4}, \quad \lambda_2 = -\frac{5}{4}$$

(это — декременты затухания скорости; поскольку движение апериодическое, т. е. выражается только экспонентиальной функцией без гармонического множителя, то эти декременты совпадают с декрементами затухания координаты).

51б. Уравнения движения:

$$\ddot{x} + \frac{\ddot{y}}{2} + x = 0,$$

$$\ddot{y} + \frac{\ddot{x}}{2} + 2\dot{y} = 0.$$

Полагая $\dot{x} = c_1 e^{\alpha t}$ и $\dot{y} = c_2 e^{\alpha t}$, получаем:

$$c_1 (1 + \alpha) + \frac{c_2 \alpha}{2} = 0,$$

$$\frac{c_1}{\alpha} + c_2 (\alpha + 2) = 0,$$

откуда

$$\begin{vmatrix} 1 + \alpha & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \alpha + 2 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0.$$

Декременты затухания, т. е. корни этого уравнения:

$$\lambda_1 = \frac{-6 + 2\sqrt{3}}{3},$$

$$\lambda_2 = \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{3}.$$

52а. Уравнение движения:

$$\ddot{x} + x = x^2.$$

Решение этого уравнения без правой части (первое приближение) есть:

$$x_1 = A \cos (t + \alpha),$$

т. е. обычное гармоническое колебание.

Полагая $x = x_1 + x_2$, находим для x_2 уравнение:

$$\ddot{x}_2 + x_2 = x_1^2,$$

если пренебречь справа членами, содержащими x_2 (второе приближение). Подставив значение x_1, находим:

$$\ddot{x}_2 + x_2 = A^2 \cos^2 (t + \alpha) = \frac{A^2}{2} [1 + \cos (2t + 2)].$$

Отсюда видно, что x_2, т. е. ангармоническая часть колебаний, представляется наложением вынужденных колебаний, соответствующих силам

$$\frac{A^2}{2} \text{ и } \frac{A^2}{2} \cos (2t + 2).$$

Такие колебания определялись в задаче 36, откуда имеем:

$$x_2 = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{6} \cos (2t + 2).$$

52б. Потенциальная энергия $U = x + \frac{1}{x}$ имеет минимум в точке $x = 1$.

Разлагая в ряд по степеням $x - 1 = y$, находим с точностью до членов третьего порядка:

$$U = 2 + y^2 - y^3,$$

т. е. функция Лагранжа равна:

$$L = \frac{\dot{y}^2}{2} - y^2 + y^3.$$

Отсюда находим уравнение движения:

$$\ddot{y} + 2y = 3y^2.$$

Как и в предыдущей задаче, полагаем

$$y_1 = y_1 + y_2, \quad y_1 = A\cos(\sqrt{2}\,t + \alpha)$$

и для y_2 получаем:

$$\ddot{y}_2 + 2y_2 = 3A^2\cos^2(\sqrt{2}t + \alpha) = \frac{3A^2}{2}[1 + \cos(2\sqrt{2}t + 2\alpha)],$$

откуда:

$$y_2 = \frac{3A^2}{4} - \frac{A^2}{4}\cos(2\sqrt{2}t + 2\alpha).$$

52в. Уравнения движения:

$$\ddot{x} + 4x = 2xy, \qquad \ddot{y} + y = x^2.$$

Полагаем

$$y = y_1 + y_2, \quad x = x_1 + x_2,$$

где x_1 и y_1 — решения уравнений без правой части, т. е.

$$x_1 = A\cos(2t + \alpha),$$
$$y_1 = B\cos(t + \beta).$$

Для определения x_2 и y_2 получаем, пренебрегая справа членами, содержащими x_2 и y_2:

$$\ddot{x}_2 + 4x_2 = 2x_1y_1 = 2AB\cos(2t + \alpha)\cos(t + \beta) =$$
$$= AB[\cos(3t + \alpha + \beta) + \cos(t + \alpha - \beta)],$$

$$\ddot{y}_2 + y_2 = x^2{}_1 = A^2\cos^2(2t + \alpha) = \frac{A^2}{2}[1 + \cos(4t + 2\alpha)].$$

Из первого уравнения имеем:

$$x_2 = -\frac{AB}{5}\cos(3t + \alpha + \beta) + \frac{AB}{3}\cos(t + \alpha - \beta);$$

из второго:

$$y_2 = -\frac{A^2}{30}\cos(4t + 2\alpha) + \frac{A^2}{2}.$$

52г. Уравнения движения:

$$\ddot{x} + x = -2\ddot{x}y - 2\dot{x}\dot{y}, \quad \ddot{y} + y = \dot{x}^2.$$

Полагаем

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2,$$

где

$$x_1 = A\cos(t + \alpha), \quad y_1 = B\cos(t + \beta).$$

Пренебрегая в правых частях уравнений членами, содержащими x_2 и y_2, получаем:

$$\ddot{x}_2 + x_2 = 2AB\cos(t + \alpha)\cos(t + \beta) -$$
$$- 2AB\sin(t + \alpha)\sin(t + \beta) = 2AB\cos(2t + \alpha + \beta),$$

$$\ddot{y}_2 + y_2 = A^2\sin^2(t + \alpha) = \frac{A^2}{2}[1 - \cos(2t + 2\alpha)].$$

Из первого уравнения имеем:

$$x_2 = -\frac{2AB}{3}\cos(2t + \alpha + \beta);$$

из второго:

$$y_2 = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{6}\cos(2t + 2\alpha).$$

IV. Твердое тело

53а. Чтобы найти функцию Лагранжа для точки с массой m, движущейся по твердому телу, выразим скорость $\vec{V}$ этой точки в некоторой неподвижной системе координат через скорость $\vec{v}_0$ поступательного движения твердого тела и скорость $\vec{v}'$ движущейся точки относительно системы координат, движущейся поступательно вместе с твердым телом. Очевидно, что

$$\vec{V} = \vec{v}_0 + \vec{v}'.$$

Подставив это в функцию Лагранжа

$$L = \frac{m\vec{V}^2}{2} - U$$

получаем:

$$L = \frac{m}{2}\vec{v}^2{}_0 + m\vec{v}_0\vec{v}' + \frac{m}{2}\vec{v}'^2 - U$$

(U — потенциальная энергия). $\vec{v}_0$ — заданная функция от времени и потому $\frac{m}{2}\vec{v}^2{}_0$ — полная производная по времени и может быть опущена. Далее, так как $\vec{v}' = \dot{\vec{r}}$, где $\vec{r}$ радиус-вектор точки в системе координат, связанной с твердым телом, то

$$m\vec{v}_0\vec{v}' = \frac{d}{dt}(m\vec{v}_0\vec{r}) - m\vec{r}\dot{\vec{v}}_0.$$

Подставив это в L и опустив полные производные, находим:

$$L = \frac{m}{2}\vec{v}'^2 - m\vec{r}\vec{w} - U,$$

где $\vec{w} = \dot{\vec{v}}_0$ — ускорение поступательного движения твердого тела. Скорость $\vec{v}'$ складывается из скорости вращения вместе с твердым телом и скорости $\vec{v}$ относительно твердого тела, т. е. по известной формуле:

$$\vec{v}' = \vec{v} + [\vec{\Omega}\vec{r}],$$

где $\vec{\Omega}$ — угловая скорость вращения твердого тела. Подставив это в L, находим:

$$L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + m\vec{v}[\vec{\Omega}\vec{r}] + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2 - m\vec{r}\vec{w} - U.$$

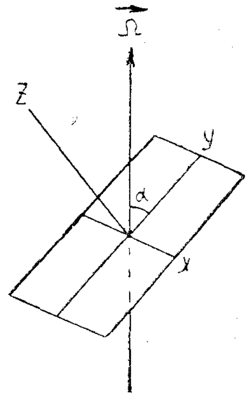

Рис. 33

Для свободного движения точки на равномерно вращающемся твердом теле $\vec{w} = 0$, $U = 0$, $\vec{\Omega} = \mathrm{const}$ и функция Лагранжа принимает вид:

$$L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + m\vec{v}[\vec{\Omega}\vec{r}] + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2.$$

Ось x выбираем на вращающейся плоскости перпендикулярно к оси вращения; угол между последней и осью y есть α (рис. 33). Тогда проекции $\vec{\Omega}$ на оси x, y, z равны соответственно:

$$0, \ \Omega\cos\alpha, \ \Omega\sin\alpha.$$

$\vec{v}$ имеет компоненты x, y, 0. Составляем векторное произведение $[\vec{\Omega}\vec{r}]$ с компонентами:

$$-y\Omega\sin\alpha, \quad x\Omega\sin\alpha, \quad -x\Omega\cos\alpha.$$

Следовательно, функция Лагранжа будет равна:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\Omega\sin\alpha\,(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{m\Omega^2}{2}(x^2 + y^2\sin\alpha).$$

Если Ω мала и можно пренебречь членами с Ω^2, то отсюда видно, что вращение вокруг данной оси эквивалентно вращению с угловой скоростью $\Omega\sin\alpha$ вокруг оси z. Поэтому в этом случае можно определять движение на неподвижной поверхности; истинное же движение будет отличаться еще дополнительным вращением вокруг перпендикуляра к ней. Отсюда получается в частности явление маятника Фуко.

53б. Ось x выбираем по оси вращения; ось z — по оси цилиндра (рис. 34). Тогда компоненты по осям x, y, z радиуса-вектора $\vec{r}$ точки, движущейся по цилиндру:

$$r\cos\varphi, \quad r\sin\varphi, \quad z,$$

а скорости $\vec{v}$:

$$-r\dot{\varphi}\sin\varphi,\ r\dot{\varphi}\cos\varphi,\ \dot{z}.$$

Угловая скорость $\vec{\Omega}$ имеет только x-компоненту. Составляем произведение $[\vec{\Omega}\vec{r}]$ с компонентами

$$0, -\Omega z,\quad \Omega r\sin\varphi.$$

Функция Лагранжа будет:

$$L+\frac{m}{2}(r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)+m\Omega r(\dot{z}\sin\varphi-z\dot{\varphi}\cos\varphi)+$$

$$+\frac{m}{2}\Omega^2(z^2+r^2\sin^2\varphi).$$

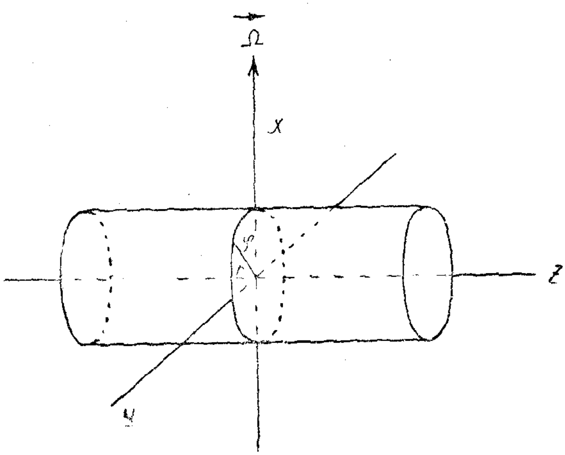

Рис. 34

53в. Ось x выбираем по оси вращения, ось z — по оси конуса. Угол при вершине конуса обозначим через 2α (рис. 35). Тогда компоненты по осям x, y, z радиуса-вектора $\vec{r}$ точки, движущейся по конусу, соответственно:

$$r\sin\alpha\sin\varphi,$$
$$r\sin\alpha\cos\varphi,$$
$$r\cos\alpha,$$

(r — расстояние точки до начала координат, φ — угол между осью y и проекцией $\vec{r}$ на плоскость xy). Компоненты скорости $\vec{v}$;

$$\dot{r}\sin\alpha\sin\varphi+r\dot{\varphi}\sin\alpha\cos\varphi,\quad \dot{r}\sin\alpha\cos\varphi-r\dot{\varphi}\sin\alpha\sin\varphi,\quad \dot{r}\cos\alpha.$$

Компоненты произведения $[\vec{\Omega}\,\vec{r}]$:

$$0, -\Omega z\cos\alpha, \quad \Omega z\sin\alpha\cos\varphi.$$

Функция Лагранжа:

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha)+mrz\dot{\varphi}\Omega\sin\varphi\sin\alpha\cos\alpha+$$

$$+\frac{m}{2}\,\Omega^2r^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\varphi).$$

54. Функция Лагранжа в случае равномерно вращающейся системы координат есть (см. задачу 53):

$$L=\frac{m}{2}\,\vec{v}^2+m\vec{v}\,[\vec{\Omega}\,\vec{r}\,]+\frac{m}{2}\,[\vec{\Omega}\,\vec{r}\,]^2.$$

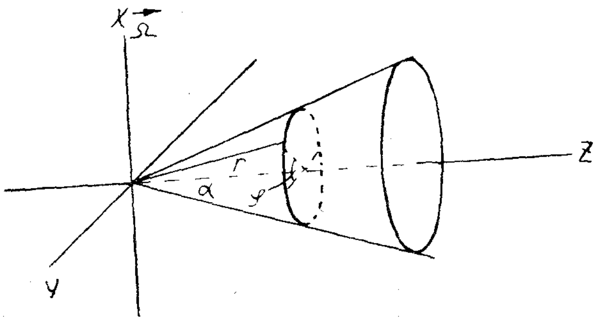

Рис. 35

Для составления уравнений Лагранжа находим:

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}=m\,\vec{v}+m\,[\vec{\Omega}\,\vec{r}\,]$$

(диференцирование по вектору пишется, конечно, символически и обозначает диференцирование по каждой из трех компонент соответственно в трех уравнениях Лагранжа) и

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Omega}{\partial\vec{v}}=m\dot{\vec{v}}+m\,[\vec{\Omega}\,\vec{v}]+m[\dot{\vec{\Omega}}\,\vec{r}\,].$$

Далее,

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{r}}=m\,[\vec{v}\,\vec{\Omega}]+m\,[[\vec{\Omega}\,\vec{r}\,]\,\vec{\Omega}]-\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}$$

так как

$$\delta_r L=m\,\vec{v}\,[\vec{\Omega}\delta\vec{r}\,]+m\,[\vec{\Omega}\,\vec{r}\,]\,[\vec{\Omega}\delta\,\vec{r}\,]-\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}\,\delta\vec{r}=$$

$$=\left(m\,[\vec{v}\,\vec{\Omega}]+[[\vec{\Omega}\,\vec{r}\,]\,\vec{\Omega}]-\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}\right)\delta\vec{r}.$$

Отсюда находим уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right)=\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

в виде:

$$m\dot{\vec{v}}=2m[\vec{v}\,\vec{\Omega}]+[[\vec{\Omega}\,\vec{r}]\,\vec{\Omega}]-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}+m[\vec{r}\,\dot{\vec{\Omega}}].$$

В поле тяжести

$$U=\vec{g}\,\vec{r}\,m,$$

где $\vec{g}$ — вектор ускорения силы тяжести, компонента которого по оси z равна g (ось z направлена по вертикали). Пренебрегая членами, содержащими квадрат угловой скорости, находим уравнения движения в виде,

$$\dot{\vec{v}}=2[\vec{v}\,\vec{\Omega}]-\vec{g}.$$

Решаем это уравнение методом последовательных приближений, т. е. полагаем $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$, где $\vec{v}_1$ есть решение уравнения $\dot{\vec{v}}_1=-\vec{g}$, т. е.

$$\vec{v}_1=-\vec{g}t-\vec{v}_0,$$

где $\vec{v}_0$ — начальная скорость падения. Подставляя $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$ в исходное уравнение и оставляя справа только $\vec{v}_1$, находим:

$$\dot{\vec{v}}_2=2[\vec{v}_1\vec{\Omega}]=-2t[\vec{g}\,\vec{\Omega}]-2[\vec{v}_0\vec{\Omega}],$$

откуда

$$\vec{v}_2=-t^2[\vec{g}\,\vec{\Omega}]-2t[\vec{v}_0\vec{\Omega}],$$

т. е. скорость равна:

$$\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2=-\vec{v}_0-\vec{g}t-t^2[\vec{g}\,\vec{\Omega}]-2t[\vec{v}_0\vec{\Omega}].$$

Проинтегрировав еще раз, находим:

$$\vec{r}=\vec{h}-\vec{v}_0t-\frac{\vec{g}t^2}{2}-\frac{t^3}{3}[\vec{g}\,\vec{\Omega}]-t^2[\vec{v}_0\,\vec{\Omega}],$$

где $\vec{h}$ — начальное положение точки.

Для падения без начальной скорости ($v_0=0$) это дает:

$$z=h-\frac{gt^2}{2},\quad x=\frac{t^3}{3}g\Omega_y,\quad y=-\frac{t^3}{3}g\Omega_x.$$

Если выбрать ось x по меридиану, то $\Omega_x = \Omega \cos \lambda$, $\Omega_y = 0$, $\Omega_z = \Omega \sin \lambda$ (λ — широта) и

$$x = 0, \; y = -\frac{t^3}{3} g\Omega \cos \lambda.$$

Частица упадет на землю за время $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. При этом отклонение будет:

$$y = -\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} g\Omega \cos \lambda.$$

При бросании под углом α к горизонту с начальной скоростью, направленной по меридиану ($\vec{h} = 0$, $v_{ox} = -v_0 \cos \alpha$, $v_{oy} = 0$, $v_{oz} = -v_0 \sin \alpha$):

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t,$$

$$y = -\frac{t^3}{3} g\Omega \cos \lambda + t^2 \Omega v_0 \sin (\alpha - \lambda)$$

$$z = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Точка опять упадет на землю при

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g};$$

при этом ее отклонение составит:

$$y = -\frac{8}{3} \cdot \frac{v^3_0 \sin^3 \alpha \cos \lambda}{g^2} + \frac{4\Omega v_0{}^3}{g^2} \sin^2\alpha \sin (\alpha - \lambda).$$

55а. Тензором инерции системы точек называются величины $I_{ik} = \Sigma m(r_e r_e \delta_{ik} - r_i r_k)$, т. е. компоненты тензора инерции можно написать в виде:

$$I = \begin{vmatrix} \Sigma m (y^2 + z^2) & -\Sigma mxy & -\Sigma mxy \\ -\Sigma myx & \Sigma m (x^2 + z^2) & -\Sigma myz \\ -\Sigma zx & -\Sigma zy & \Sigma m(x^2 + y^2) \end{vmatrix}$$

(суммирование производится по отдельным точкам, входящим в систему; $r_{1,2,3,} = x, y, z$; $\delta_{ik} = 0$, если $i \neq k$ и 1, если $i = k$). Выбирая ось z вдоль линии, видим, что I_{ik} обращаются в нуль, кроме $I_{11} = I_x$ и $I_{22} = I_y$, причем $I_x = I_y$ (каждый из них равен Σnz^2). Эти же моменты, т. е. $I_x = I_y$ и $I_z = 0$, есть главные моменты инерции.

55б. Выбирая ось z перпендикулярно плоскости фигуры, а оси x и y в этой плоскости, и направляя их при этом по главным осям инерции, находим, что

$$I_x = \Sigma m y^2, \quad I_y = \Sigma m x^2 \text{ и } I_z = \Sigma m (x^2 + y^2) = I_x + I_y.$$

56а. Выбирая ось z по линии, соединяющей обе точки, а начало координат в центре инерции, имеем:

$$z_1 + 2z_2 = 0, \quad z_2 - z_1 = 3$$

(первое равенство следует из того, что начало координат совпадает с центром инерции). Отсюда

$$z_2 = 1, \quad z_1 = -2.$$

Единственные не равные нулю моменты инерции

$$I_{11} = I_{22} = I_x = I_y = m_1 z^2{}_1 + m_2 z^2{}_2 = 6.$$

Они же главные моменты, а выбранные оси—главные оси инерции.

56б. Оси координат выбираем, как в предыдущей задаче. Имеем:

$$z_1 + z_2 + 2z_3 = 0, \quad z_2 - z_1 = 2, \quad z_3 - z_2 = 1,$$

откуда

$$z_1 = -2, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 1.$$

Отсюда

$$I_x = I_y = 6.$$

56в. Выбираем ось y по высоте треугольника, ось z — перпендикулярно его плоскости; начало координат—в центре инерции, который очевидно, лежит на высоте треугольника. Тогда имеем:

$$x_2 + x_3 = 0, \quad 2y_1 + y_2 + y_3 = 0, \quad x_3 - x_2 = 2, \quad y_1 - y_2 = y_1 - y_3 = 3.$$

Отсюда:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1; \quad y_1 = \frac{3}{2},$$

$$y_2 = y_3 = -\frac{3}{2}; \quad z_1 = z_2 = z_3 = 0.$$

Моменты инерции:

$$I_x = 9, \quad I_y = 2, \quad I_z = 11$$

(они же — главные моменты, а выбранные оси — главные оси инерции).

56г. Оси x и y выбираем параллельно катетам треугольника; начало — в центре инерции. Имеем:

$$3y_1 + 2y_2 + y_3 = 0, \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0;$$
$$x_3 - x_2 = 1, \quad y_1 - y_2 = y_1 - y_3 = 2.$$

Отсюда

$$x_1 = x_2 = -\frac{1}{6}, \quad x_3 = \frac{5}{6};$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = y_3 = -1;$$

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0.$$

Компоненты тензора инерции:

$$I_{xx} = 6, \quad I_{yy} = \frac{5}{6}, \quad I_{zz} = \frac{41}{6}, \quad I_{xy} = I_{yx} = 1$$

(остальные равны нулю). Главные моменты I_1, I_2 и I_3 будут корнями уравнения:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & \frac{5}{6}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{41}{6}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$\left(\frac{41}{6}-\lambda\right)\left(\lambda^2 - \frac{41}{6}\lambda + 4\right) = 0,$$

откуда

$$I_1 = \frac{41}{6}, \; I_2 = \frac{41+\sqrt{1105}}{12}, \; I_3 = \frac{41-\sqrt{1105}}{12}.$$

56д. Выбираем плоскость xy параллельно основанию пирамиды; оси x и y — параллельно сторонам основания; ось z — по высоте пирамиды; начало координат берем в центре инерции, который в силу симметрии лежит на высоте пирамиды. Тогда, очевидно,

$$x_2 = x_5 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = x_4 = \frac{1}{2},$$

$$y_5 = y_4 = -\frac{1}{2}, \quad y_2 = y_3 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = y_1 = 0.$$

Так как центр инерции находится в начале координат, то

$$2z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 0$$

и так как

$$z_2 = z_3 = z_4 = z_5,$$

то

$$z_1 = \frac{4}{3}, \qquad z_2 = z_3 = z_4 = z_5 = -\frac{2}{3}.$$

Моменты инерции:

$$I_x = I_y = \frac{19}{3}, \quad I_z = 2.$$

56е. Выбираем ось y параллельно высоте, ось x — параллельно основанию треугольника; начало координат — в центре инерции. Тогда

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \quad y_1 + y_2 + 2y_3 = 0 \quad y_1 - y_2 = 2,$$
$$y_2 = y_3, \quad x_3 - x_2 = 1; \quad x_3 - x_1 = x_1 - x_2.$$

Отсюда

$$x_1 = -\frac{1}{8}, \quad x_2 = -\frac{5}{8}, \quad x_3 = \frac{3}{8}, \quad y_1 = \frac{3}{2}, \quad y_2 = y_3 = -\frac{1}{2}.$$

Компоненты тензора инерции:

$$I_{xx} = 3, \quad I_{yy} = \frac{11}{16}, \quad I_{zz} = \frac{59}{16}, \quad I_{xy} = I_{yx} = \frac{1}{4}.$$

Главные моменты инерции есть корни уравнения:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{11}{16}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{59}{16}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{59}{16}-\lambda\right)\left(\lambda^2 - \frac{59}{16}\lambda + 2\right) = 0,$$

откуда

$$I_1 = \frac{59}{16}, \quad I_2 = \frac{59 + \sqrt{1433}}{32}, \quad I_3 = \frac{59 - \sqrt{1433}}{32}.$$

57а. Кинетическая энергия твердого тела имеет вид:

$$T = \frac{M\vec{V}^2}{2} + \frac{I_{ik}\Omega_i\Omega_k}{2},$$

где $\vec{V}$ — скорость центра инерции, а Ω_k $(k = 1, 2, 3)$ — проекции угловой скорости на оси координат. Если последние совпадают с главными осями инерции, то

$$T = \frac{M\vec{V}^2}{2} + \frac{I_1\Omega^2_1 + I_2\Omega^2_2 + I_3\Omega^2_3}{2}.$$

В данном случае скорость центра инерции $V = l\dot{\varphi}$ (φ — угол между вертикалью и перпендикуляром, опущенным из центра инерции на ось вращения). Проекции угловой скорости вращения на главные оси инерции: $\dot\varphi\cos\alpha$, $\dot\varphi\cos\beta$, $\dot\varphi\cos\gamma$. Так как потенциальная энергия маятника равна:

$$U = Mgl(1-\cos\varphi) \cong \frac{Mgl\varphi^2}{2}$$

(ввиду того, что угол φ мал), то функция Лагранжа равна:

$$L = \frac{Ml^2}{2}\dot\varphi^2 + \frac{I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma}{2}\dot\varphi^2 - \frac{Mgl\varphi^2}{2}.$$

Отсюда частота колебаний (см. задачу 29):

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgl}{M l^2 + I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma}}$$

57б. Скорость центра инерции стержня OA (находящегося на его середине) есть $\frac{l}{2}\dot\varphi$, где φ — угол AOB. Поэтому кинетическая энергия этого стержня есть:

$$T_1 = \frac{Ml^2}{8}\dot\varphi^2 + \frac{I\dot\varphi^2}{2}.$$

Если ввести декартовы координаты с осью x по OB и осью y, перпендикулярной к ней и с началом в точке O, то координаты центра инерции второго стержня будут:

$$x = \frac{3l}{2}\cos\varphi, \quad y = \frac{l}{2}\sin\varphi,$$

а компоненты скорости:

$$\dot x = -\frac{3l}{2}\dot\varphi\sin\varphi, \quad \dot y = \frac{l}{2}\dot\varphi\cos\varphi.$$

Так как угловая скорость вращения этого стержня вокруг центра инерции есть также $\dot\varphi$, то кинетическая энергия будет:

$$T_2 = \frac{M}{2}\left(\dot x^2 + \dot y^2\right) + \frac{I\dot\varphi^2}{2} = \frac{Ml^2}{8}(1 + 8\sin^2\varphi)\dot\varphi^2 + \frac{I\dot\varphi^2}{2}.$$

Полная кинетическая энергия:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{Ml^2}{4}(1 + 4\sin^2\varphi)\dot\varphi^2 + I\dot\varphi^2.$$

57в. Пусть угловая скорость вращения цилиндра при качении — $\dot\varphi$ (угловая скорость вращения твердого тела вокруг всех параллельных друг другу осей одинакова). Мгновенная ось вращения есть линия соприкосновения с плоскостью. Тогда скорость движения центра инерции (находящегося на расстоянии $\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\varphi}$ от оси вращения) есть

$$\dot{\varphi}\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\varphi}.$$

Так как, кроме того, главная ось инерции параллельна оси цилиндра и угловая скорость вращения параллельна ей же, то

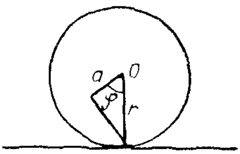

Рис. 36

$$T=\frac{M}{2}\left(a^2+r^2-2ar\cos\varphi\right)\dot{\varphi}^2+\frac{I\dot{\varphi}^2}{2},$$

где I — момент инерции по оси цилиндра.

57г. Скорость центра инерции катящегося цилиндра есть $\dot{\theta}(R-r)$ (рис. 37). Угловая скорость его вращения при качении (вокруг мгновенной оси вращения, т. е. линии соприкосновения цилиндров) есть $\frac{\dot{\theta}(R-r)}{r}$ и кинетическая энергия равна:

$$T=\frac{M}{2}\frac{(R-r)^2\dot{\theta}^2}{2}+\frac{I}{2}\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot{\theta},$$

где I — момент инерции по оси цилиндра.

57д. Угол между осью y и линией OA соприкосновения конуса с плоскостью (она же мгновенная ось вращения), обозначим через θ (рис. 38). Скорость центра инерции будет тогда $V=a\cos\alpha\cdot\dot{\theta}$, а угловая скорость вращения вокруг мгновенной оси OA:

$$\Omega=\frac{V}{a\sin\alpha}=\dot{\theta}\operatorname{ctg}\alpha.$$

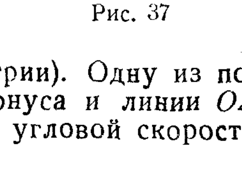

Рис. 37

Одна из главных осей инерции конуса есть его ось, а две другие лежат в плоскости ей перпендикулярной (в силу симметрии). Одну из последних выбираем перпендикулярно оси конуса и линии OA (мгновенной оси вращения). Тогда проекции угловой скорости вращения на главные оси инерции будут:

$$\dot{\theta}\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha;\ \dot{\theta}\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha;\ 0.$$

Обозначив через I_1 и I_2 моменты инерции конуса по оси конуса и оси ей перпендикулярной, имеем кинетическую энергию:

$$T=\frac{M}{2}a^2\cos\alpha\cdot\dot{\theta}^2+\frac{I_1}{2}\cdot\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}\dot{\theta}^2+\frac{I_2}{2}\cos^2\alpha\cdot\dot{\theta}^2.$$

57е. Вводим угол θ между осью y и проекцией оси конуса на плоскость xy (рис. 39). Тогда скорость центра инерции будет $V = a\dot\theta$. Угловая скорость вращения вокруг мгновенной оси вращения, которой является образующая конуса, проведенная через точку соприкосновения с плоскостью, равна скорости центра инерции, деленной на его расстояние до оси вращения,

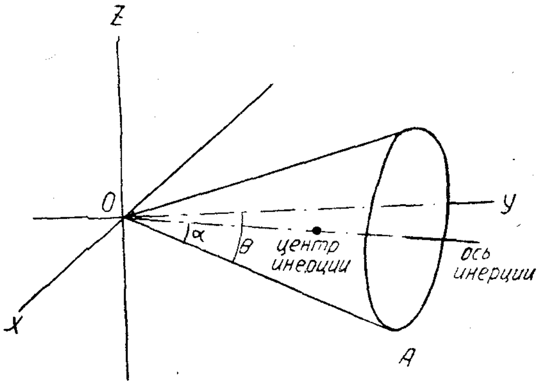

Рис. 38

т. е. $\Omega = \frac{V}{a \sin\alpha} = \frac{\dot\theta}{\sin\alpha}$. Проекции угловой скорости на оси инерции (ось конуса и ось, перпендикулярная оси конуса и оси вращения) соответственно $\dot\theta \operatorname{ctg}\alpha$ и $\dot\theta$. Отсюда кинетическая энергия:

$$T = \frac{Ma^2\dot\theta^2}{2} + \frac{I_1\dot\theta^2 \operatorname{ctg}^2\alpha}{2} + \frac{I_2\dot\theta^2}{2},$$

где I_1 и I_2 — моменты инерции конуса.

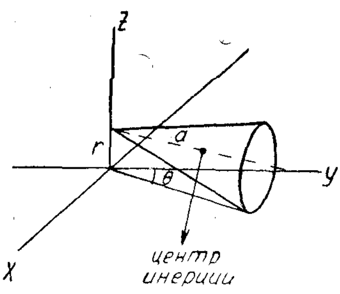

Рис. 39

57ж. Главные оси инерции в силу симметрии совпадают с осями эллипсоида, а центр инерции — с его центром. Угол поворота вокруг оси CD обозначим через θ, а угол поворота вокруг оси AB (угол между CD и одной из осей инерции, перпендикулярных AB) — через φ. Тогда проекции угловых скоростей $\dot\theta$ и $\dot\varphi$ на оси инерции (оси эллипсоида) будут: $\dot\varphi$ — на ось AB и $\dot\theta \cos\varphi$ и $\dot\theta \sin\varphi$ — на оси, перпендикулярные AB. Обозначив моменты инерции по этим осям через I_1, I_2, I_3, получаем (скорость центра инерции $V = a\dot\varphi$):

$$T = \frac{M}{2} a^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}(I_2 \cos^2\varphi + I_3 \sin^2\varphi)\,\dot\theta^2.$$

57з. С теми же обозначениями, как и в 57ж, находим проекции угловых скоростей на ось AB: $\dot{\varphi}+\dot{\theta}\sin\alpha$ — и на две другие главные оси инерции: $\cos\alpha\cos\varphi\cdot\dot{\theta}$ и $\cos\alpha\sin\varphi\cdot\dot{\theta}$. Так как скорость центра инерции равна $a\cos\alpha\,\dot{\theta}$, то

$$I=\frac{Ma^2c a^2\alpha}{2}\dot{\theta}^2+\frac{I_1}{2}(\dot{\varphi}+\dot{\theta}\sin\alpha^2)+$$

$$+\frac{I_2\cos^2\alpha\cos^2\varphi}{2}\dot{\theta}^2+\frac{I_3\cos^2\alpha\sin^2\varphi}{2}\dot{\theta}^2.$$

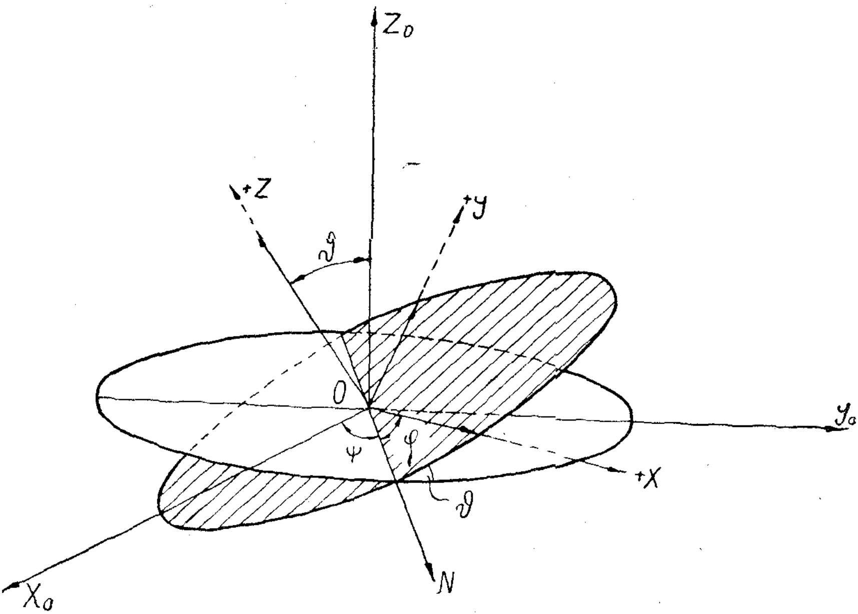

Рис. 40

57и. x_0, y_0, z_0 — неподвижная система координат (центр инерции волчка предполагается совпадающим с началом координат). x, y, z — система координат, связанная с вращающимся волчком, причем ось z совпадает с осью симметрии волчка (рис. 40). Угол между осями z и z_0 обозначим через θ; угол между осью x_0 и линией пересечения плоскости x_0y_0 и xy (линией узлов ON) — через ψ и угол между линией узлов и осью x — через φ (углы Эйлера). Угловая скорость $\dot{\theta}$ направлена по ON, $\dot{\varphi}$ — по оси z, а $\dot{\psi}$ по оси z_0. Суммы проекций угловых скоростей на оси z, ON и ось OL, перпендикулярную им обеим (они же — главные оси инерции):

$$\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi},\ \dot{\theta},\quad \dot{\psi}\sin\theta.$$

Обозначив моменты инерции волчка через A и B, имеем:

$$T=\frac{A}{2}(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})^2+\frac{B}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta).$$

58. Проекции угловых скоростей на сси z, ON, OL (см. задачу 57и) равны:

$$\Omega_Z=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi},\quad \Omega_N=\dot{\theta},\quad \Omega_L=\sin\theta\cdot\dot{\psi};$$

соответствующие им моменты:

$$M_Z=A(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta),\ M_N=B\dot{\theta},\ M_L=B\dot{\psi}\sin\theta.$$

Моменты по осям z_o, ON и перпендикулярно к ним будут тогда:

$$M_{zo}=A(\dot{\psi}+\dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta+B\dot{\psi}\sin^2\theta.$$

$$M_N=B\dot{\theta},$$

$$M\perp=A(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\sin\theta-B\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta.$$

Выбрав ось z_o по направлению полного момента, имеем:

$$A(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta+B\dot{\psi}\sin^2\theta=M;\ \dot{\theta}=0;\ A(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)-B\dot{\psi}\cos\theta=0$$

(так как $M_N=M_L=0$). Из второго равенства имеем: $\theta=\text{const}$, а из третьего:

$$\dot{\varphi}=\frac{B-A}{A}\dot{\psi}\cos\theta,$$

или

$$\varphi=\frac{B-A}{A}\psi\cos\theta.$$

Из первого уравнения получаем тогда $\dot{\psi}=\frac{M}{B}$, т. е. $\psi=\frac{M}{B}t$ (постоянные везде опускаем как не существенные). Уравнения:

$$\psi=\frac{M}{B}t,\quad \varphi=\frac{B-A}{A}\psi\cos\theta,\quad \theta=\text{const}$$

определяют движение волчка. Первое из них показывает, что ось волчка вращается вокруг направления момента волчка с постоянной угловой скоростью $\frac{M}{B}$ (регулярная прецессия).

59а. Если выбрать систему координат, которая неподвижно связана с вращающимся телом и начало которой совпадает с точкой, остающейся неподвижной при вращении (в нашем случае — для свободного движения волчка — с его центром инерции), то уравнения свободного движения (уравнения Эйлера)

$$I_1\dot{\Omega}_1+(I_3-I_2)\,\Omega_2\Omega_3=0,\ I_2\dot{\Omega}_2+(I_1-I_3)\,\Omega_1\Omega_3=0,$$

$$I_3\dot{\Omega}_3+(I_2-I_1)\,\Omega_1\Omega_2=0,$$

где I_1, I_2 и I_3 — моменты инерции, а Ω_1, Ω_2, Ω_3 — проекции угловой скорости вращения на главные оси инерции, которые являются осями координат.

В нашем случае $I_1=I_2=A, I_3=B$ и потому

$$\dot{\Omega}_1=\frac{A-B}{A}\,\Omega_2\Omega_3,$$

$$\dot{\Omega}_2=\frac{B-A}{A}\,\Omega_1\Omega_3$$

$$\dot{\Omega}_3=0.$$

Отсюда

$$\Omega_3=\text{const}.$$

Если ввести обозначение

$$\frac{A-B}{A}\,\Omega_3=a,$$

то первые два уравнения примут вид:

$$\dot{\Omega}_1=a\Omega_2,\quad \dot{\Omega}_2=-a\Omega_1.$$

Введя в качестве переменной величину $\Omega_1+i\Omega_2$, можно написать оба эти уравнения в виде:

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1+i\Omega_2)=-ia\,(\Omega_1+i\Omega_2),$$

откуда

$$\Omega_1+i\,\Omega_2=Ce^{-iat+i\alpha}.$$

Выбирая начало отсчета времени в тот момент, когда $\Omega_2=0$, т. е. полагая $\alpha=0$, получаем отсюда, отделяя действительную часть от мнимой:

$$\Omega_1=C\cos at,$$

$$\Omega_2=-C\sin at.$$

Эти равенства показывают, что проекция угловой скорости на плоскость, перпендикулярную оси симметрии, (одной из главных осей инерции), оставаясь постоянной по величине ($\sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2}=C$), вращается в этой плоскости с угловой скоростью a. Поскольку Ω_3 остается также постоянной, то и весь вектор угловой скорости вращается вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью a.

59б. Два первых интеграла уравнений Эйлера представляют собой уравнения сохранения энергии и момента, т. е.

$$I_1\Omega_1^2+I_2\Omega_2^2+I_3\Omega_3^2=2E,\quad I_1^2\Omega_1^2+I_2^2\Omega_2^2+I_3^2\Omega_3^2=K^2,$$

где E — энергия, а K — момент импульса (центр тяжести неподвижен; потенциальной энергии нет, так как движение свободно). Из этих двух уравнений находим:

$$\Omega_1=\sqrt{\frac{2EI_2-K^2-I_3(I_2-I_3)}{I_1(I_2-I_1)}\Omega_3^2},$$

$$\Omega_2=\sqrt{\frac{2EI_1-K^2-I_3(I_1-I_3)}{I_2(I_1-I_2)}\Omega_3^2}.$$

Подставляя это в третье из написанных в задаче 59а уравнений Эйлера, т. е. в

$$\dot{\Omega}_3=\frac{I_1-I_2}{I_3}\Omega_1\Omega_2,$$

находим:

$$\frac{d\Omega_3}{dt}=\frac{1}{I_3}\sqrt{\frac{[(K^2-2EI_2)-I_3(I_3-I_2)\Omega_3^2]\,[(2EI_1-K^2)-I_3(I_1-I_3)\Omega_3^2]}{I_1I_2}},$$

откуда

$$t+t_0=I_3\sqrt{I_1I_2}\int\frac{d\Omega_3}{\sqrt{[(K^2-2EI_2)-I_3(I_3-I_2)\Omega_3^2]\,[(2EI_1-K^2)-I_3(I_1-I_3)\Omega_3^2]}}$$

Это — эллиптический интеграл и Ω_3 может быть отсюда выражено через время посредством эллиптических функций. Совершенно аналогично могут быть найдены Ω_1 и Ω_2.

60а. Для систем, находящихся в равновесии, сумма всех приложенных сил и сил реакции, а также и сумма моментов этих сил, должны быть равны нулю. Это дает шесть уравнений:

$$\Sigma F_x=\Sigma F_y=\Sigma F_z=0;$$

$$\Sigma(F_zy-F_yz)=\Sigma(F_yx-F_xy)=\Sigma(F_zx-F_xz)=0,$$

где F_x, F_y, F_z — проекции сил на оси координат, а x, y, z — координаты точек приложения этих сил.

Берем ось x по BC, а ось y — по BA. Реакция R в точке B направлена кнаружи от стены; натяжение T нити AC направлено по AC от C к A. Составляем уравнения:

$$\Sigma F_x=R_x-T\cos\alpha=0,$$
$$\Sigma F_y=R_y+T\sin\alpha-F=0,$$
$$\Sigma(F_yx-F_xy)=Tl\sin\alpha-Fr=0.$$

Отсюда находим:

$$T=\frac{Fr}{l\sin\alpha},\quad R_x=\frac{Fr}{l}\operatorname{ctg}\alpha,\quad R_y=F\left(1-\frac{r}{l}\right),$$

60б. Берем ось x по AB, ось y — по AC. Вес стержня представляется силой, приложенной в его середине и направленной вниз по оси y. Натяжение нити T направлено по AB от B к A; реакция R_b в точке B вертикально вверх и реакция R_c в точке C — по перпендикуляру к стержню DB в точке C. Составляем уравнения:

$$\Sigma F_x=-T+\frac{R_c\sqrt{3}}{2}=0,\quad \Sigma F_y=R_b-6+\frac{R_c}{2}=0,$$

$$\Sigma(F_yx-F_xy)=R_b\sqrt{3}-\frac{R_c3\sqrt{3}}{2}-6(\sqrt{3}-1)=0.$$

Отсюда находим:

$$R_b=6-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad R_c=\sqrt{3},\quad T=\frac{3}{2}.$$

60в. Выбираем ось x по OB, ось y по OA. Реакции в A и B направлены перпендикулярно опорам. Вес стержня представляется силой P, приложенной к его середине. Тогда

$$\Sigma F_x=R_a-P\cos\alpha=0,$$

$$\Sigma F_y=R_b-P\sin\alpha=0,$$

$$\Sigma(F_yx-F_xy)=lR_b\sin(\theta+\alpha)-lR_a\cos(\theta+\alpha)-$$

$$-\frac{Pl}{2}\cos\theta+Pl\cos(\alpha+\theta)\cos\alpha=0$$

(через l обозначена длина стержня). Из этих уравнений находим:

$$R_a=P\cos\alpha,\quad R_b=P\sin\alpha,\quad \operatorname{tg}\theta=\operatorname{ctg}2\alpha.$$

60г. Натяжения нитей T_a и T_b направлены от A к D и от B к C. Реакции плоскостей R_b и R_a направлены перпендикулярно плоскостям. Поместив начало координат в C и взяв ось x по CE, ось y перпендикулярно к ней и ось z по CA, — находим (обозначая длину стержня через l):

$$\Sigma F_x=T_a-\frac{1}{2}T_b=0,$$

$$\Sigma F_y=R_a-\frac{\sqrt{3}}{2}T_b=0,$$

$$\Sigma F_z = R_b - 8 = 0,$$

$$\Sigma (F_z y - zF_y) = l\sqrt{3}\, R_a - lR_b \frac{\sqrt{3}}{2} + 2l\sqrt{3} = 0,$$

$$\Sigma (F_x z - F_z x) = l\sqrt{3}\, T_a + 2l - \frac{l}{2} R_b = 0,$$

Отсюда находим:

$$R_a = 2, \quad R_b = 8, \quad T_a = \frac{2}{3}\sqrt{3}, \quad T_b = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

60д. Выбираем систему координат с началом в точке A, осью y по AB, осью x — горизонтально и осью z — вертикально вверх. Если обозначить реакции точек A и B через R_a и R_b, то уравнения равновесия будут:

$$\Sigma F_x = 10 + R_{ax} + R_{bx} = 0,$$
$$\Sigma F_z = Q + R_{az} + R_{bz} = 0,$$
$$\Sigma (F_z y - zF_y) = Q + 10\, R_{bz} = 0,$$
$$\Sigma (F_x z - F_z x) = 100 - Q = 0,$$
$$\Sigma (F_y x - yF_x) = -90 - 10\, R_{bx} = 0,$$

Отсюда находим:

$$Q = 100, \quad R_{ax} = -1, \quad R_{az} = -90, \quad R_{bx} = -9, \quad R_{bz} = -10.$$

V. Канонические уравнения

61а. Уравнения Гамильтона имеют вид:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}.$$

В данном случае

$$\dot{r} = p_r, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{r^3 \sin^2 \theta}$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{p_\theta^2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} - \cos \theta.$$

61б. $\dot{u} = \dfrac{p_u}{u^2 + v^2}, \quad \dot{v} = \dfrac{p_v}{u^2 + v^2},$

$$\dot{p}_u = \frac{u(p_u^2 + p_v^2)}{(u^2 + v^2)^2} - 1, \quad \dot{p}_v = \frac{v(p_u^2 + p_v^2)}{(u^2 + v^2)^2}.$$

61в. $\dot{r} = \dfrac{p}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad \dot{p} = -1.$

61г. $\dot{x} = \dfrac{p_y}{tx^2y}, \quad \dot{y} = \dfrac{p_x}{tx^2y}, \quad \dot{p}_x = \dfrac{2p_xp_y}{tx^3y}, \quad \dot{p}_y = \dfrac{p_xp_y}{tx^2y^2}$

61д. $\dot{r} = (p - r^2), \quad \dot{p} = 2r(p - r^2).$

62. Уравнение Гамильтона:

$$v = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial E}{\partial p}.$$

Так как

$$\frac{\partial E}{\partial p} = \frac{1}{f'(E)}, \quad \text{то} \quad v = \frac{1}{f'(E)}.$$

63а. Функция Гамильтона:

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L,$$

причем все скорости должны быть выражены через импульсы и координаты. В данном случае

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}.$$

Подставив это в энергию

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z)$$

находим:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z).$$

63б. Подставив

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$\text{в } E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + U,$$

получим:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) + U.$$

63в. Подставляя

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \; \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2\theta},$$

в энергию, находим:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + U.$$

63г. Имеем:

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad v = \frac{cp}{\sqrt{c^2m^2 + p^2}},$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{cm}{\sqrt{c^2m^2 + p^2}}.$$

Пользуясь этим, находим:

$$H = pv - L = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}.$$

63д. Имеем для импульса

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m\,[\vec{\Omega}\vec{r}\,],$$

откуда

$$\vec{v}=\frac{\vec{p}+m[\vec{r}\,\vec{\Omega}]}{m},$$

Поскольку L есть сумма квадратичной функции от скорости, линейной функции и функции только от координат, то, согласно задаче 8б энергия получается вычеркиванием линейной функции из L и заменой знака перед функцией от координат, т. е.

$$E=\frac{m}{2}\vec{v}^2-\frac{m}{2}[\vec{\Omega}\,\vec{r}]^2+m(\vec{r}\vec{w})+U.$$

Подставив сюда $\vec{v}$, находим:

$$H=\frac{1}{2m}(\vec{p}+m[\vec{r}\,\vec{\Omega}])^2-\frac{m}{2}[\vec{\Omega}\,\vec{r}]^2+m\vec{r}\,\vec{w}+U.$$

63е. $p_y=x\dot{y}, \quad p_x=\frac{1}{\dot{x}}; \ H=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}-L=1+\frac{p^2{}_y}{x}-\frac{p^2{}_y}{2x}-$

$$-\ln\frac{1}{p_x}=1+\frac{p^2{}_y}{2x}+\ln p_x.$$

63ж. Энергия

$$E=\frac{m}{2}\sum_i\vec{v}_i^2-\frac{m^2}{2(M+nm)}\left(\sum_i\vec{v}_i\right)^2+U$$

(мы пишем $\vec{v}_i$, вместо $\dot{\vec{r}}_i$),

импульс:

$$\vec{p}_i=\frac{\partial L}{\partial\vec{v}_i}=m\vec{v}_i-\frac{m^2}{M+nm}\sum_k\vec{v}_k$$

Отсюда имеем:

$$\sum p_i=m\sum_i\vec{v}_i-\frac{nm^2}{M+nm}\sum_i\vec{v}_i=\frac{Mm}{M+nm}\sum_i\vec{v},$$

$$\vec{v}_i=\frac{\vec{p}_i}{m}+\frac{m}{M+nm}\sum\vec{v}_i=\frac{\vec{p}_i}{m}+\frac{\Sigma\vec{p}_i}{M}.$$

Подставив в E, находим:

$$H=\frac{1}{2m}\sum\vec{p}^2{}_i+\frac{1}{2M}\left(\sum\vec{p}_i\right)^2.$$

64а. $L=\sum p_k\dot{q}_k-H=\sum p_k\frac{\partial H}{\partial p_k}-H,$

причем в результате надо заменить импульсы на скорости. Таким путем мы получаем:

$$L = \frac{\dot{r}^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{\dot{\theta}^2 r^2 \sin\theta}{2} - r.$$

64б. $L = 1 + \frac{\dot{y}^2}{2} + \ln(\dot{x} - 1).$

64в. $L = \dot{y}\dot{x} - \frac{\dot{y}^2 t}{2}.$

65а. Диференциальное уравнение Гамильтона-Якоби для определения действия S получается заменой в функции Гамильтона $H(p_k, q_k, t)$ импульсов p_k производными $\frac{\partial S}{\partial q_k}$ и приравниванием полученного выражения производной по времени с отрицательным знаком $-\frac{\partial S}{\partial t}$. Производные от решения этого уравнения по координатам q_k дают импульсы p_k, а по времени — энергию с обратным знаком $(-E.)$ Приравнивание производных по входящим при решении уравнения параметрам (в числе, равном числу степеней свободы) новым постоянным дает уравнения траектории.

Для свободной точки:

$$H = \frac{p^2{}_x + p^2{}_y + p^2{}_z}{2m}$$

и уравнение Гамильтона-Якоби принимает вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]$$

Если H не содержит явно времени, т. е. энергия сохраняется, то из $\frac{\partial S}{dt} = -E$ следует, что t входит в S в виде $-Et$.

Аналогично из $\frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k$ следует, что циклические координаты входят в s в виде $p_k q_k$.

В нашем случае $E = \text{const}$, а x, y, z — циклические координаты. Поэтому

$$S = p_x x + p_y y + p_z z - Et.$$

Подстановка этого выражения в уравнение Гамильтона дает:

$$E = \frac{p^2{}_x + p^2{}_y + p^2{}_z}{2m}.$$

Продиференцировав S по постоянным p_x, p_y, p_z и приравняв новым постоянным x_0, y_0, z_0, получаем:

$$x = x_0 + \frac{p_x}{m} t, \; y = y_0 + \frac{p_y}{m} t, \; z = z_0 + \frac{p_z}{m} t.$$

65б. Функция Гамильтона:

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2};$$

уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} x^2 = 0.$$

Полагая $S = -Et + f(x)$ получаем:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 = E - x^2,$$

откуда

$$f(x) = \int \sqrt{E - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{2E - x^2} + E \arcsin \frac{x}{\sqrt{2E}}$$

Подставив в S получаем:

$$S = \frac{x}{2}\sqrt{2E - x^2} + E \arcsin \frac{x}{\sqrt{2E}} - Et.$$

Продиференцировав по постоянной E и приравняв t_0, получаем:

$$t + t_0 = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2E}},$$

или:

$$x = \sqrt{2E} \sin (t + t_0)$$

65в. Функция Гамильтона:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - x$$

(ось x по направлению поля). Координаты y и z циклические; поэтому

$$S = -Et + p_y y + p_z z + f(x).$$

Для определения $f(x)$ подставляем S в уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] - x = 0$$

и получаем:

$$f(x)=\int\sqrt{2E-p_y^2-p_z^2+2x}\,dx=\frac{1}{3}(2E-p_y^2+p_z^2+2x)^{3/2}.$$

Отсюда:

$$S=-Et+p_yy+p_zz+\frac{1}{3}(2E-p_y^2-p_z^2+2x)^{3/2}$$

Продиференцировав по E и приравняв постоянной p_{ox}, получаем:

$$x=\frac{p_{ox}^2+p_y^2+p_z^2}{2}-E+p_{ox}t+\frac{t^2}{2}.$$

$\frac{p_{0x}^2+p_y^2+p_z^2}{2m}-E$ есть начальная координата x_0. Продиференцировав по p_y, получаем:

$$y=y_0+p_y\sqrt{2E-p_y^2-p_z^2+2x}$$

и аналогично для z.

65г. Функция Гамильтона:

$$H=\frac{1}{2}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}\right)+\frac{1}{r};$$

уравнение Гамильтона - Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2\right]+\frac{1}{r}=0.$$

φ — циклическая координата и потому мы ищем S в виде:

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+f(r).$$

Подставляя в уравнение, получаем $f(r)$ в виде:

$$f(r)=\int\sqrt{2E-\frac{2}{r}-\frac{p_\varphi^2}{r^2}}\,dr$$

Проинтегрировав, получаем:

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+\sqrt{2Er^2-2r-p_\varphi^2}-p_\varphi\arccos\frac{\frac{p_\varphi^2}{r}-1}{\sqrt{2Ep_\varphi^2+1}}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2E}}\operatorname{argch}\frac{2Er-1}{\sqrt{2Ep_\varphi^2+1}}.$$

Продиференцировав по p_φ и по E и приравняв постоянным, получим уравнения траектории в том виде, как они были получены в задаче 22а.

65д. Функция Гамильтона в цилиндрических координатах:

$$H=\frac{1}{2}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}+p_z^2\right)+\frac{1}{r}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{1}{r}=0$$

z и φ — циклические координаты. Поэтому полагаем

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+p_z z+f(r).$$

$f(r)$ определяется подстановкой выражения для S в уравнение, откуда получается:

$$f(r)=\int\sqrt{(2E-p_z^2)-\frac{2}{r}-\frac{p_\varphi^2}{r^2}}\,dr,$$

т. е.

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+p_z z+\sqrt{(2E-p_z^2)r^2-2r-p_\varphi^2}-$$

$$-p_\varphi\arccos\frac{\frac{p_\varphi^2}{r}-1}{\sqrt{(2E-p_z^2)p_\varphi^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{(2E-p_z^2)}}\operatorname{argch}\frac{(2E-p_z^2)\,r-1}{\sqrt{(2E-p_z^2)p_\varphi^2+1}}$$

Диференцирование по p_φ и E даст опять те же уравнения для t и φ, что и в задаче 65г, а диференцирование по p_z даст:

$$(z+z_0)=p_z(t+t_0).$$

65е. В сферических координатах:

$$H=\frac{1}{2}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+\frac{1}{r},$$

откуда

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right]+\frac{1}{r}.$$

Ищем S в виде:

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+f(r)+F(\theta).$$

Подставив это в уравнение, получаем:

$$2Er^2-2r-r^2\left(\frac{df}{dr}\right)^2=\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}+\left(\frac{dF}{d\theta}\right)^2.$$

Правая часть зависит только от θ, а левая — от r. Поэтому каждая из них должна быть равна одной и той же постоянной α. Это дает:

$$f=\int\sqrt{2E-\frac{2}{r}-\frac{\alpha}{r^2}}\,dr$$

и

$$F = \int \sqrt{\alpha - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta.$$

Проинтегрировав, получаем:

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \sqrt{2Er^2 - 2r - \alpha} - \sqrt{\alpha}\ \arccos \frac{\frac{\alpha}{r} - 1}{\sqrt{2E\alpha + 1}} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2E}} \operatorname{argch} \frac{2Er - 1}{\sqrt{2E\alpha + 1}} + \sqrt{\alpha}\ \operatorname{arcocs} \frac{\sqrt{\alpha}\cos\theta}{\sqrt{\alpha - p_\varphi}} +$$

$$+ \frac{p_\varphi}{2}\ \arcsin \frac{2\csc^2\theta \cdot p_\varphi^2 - (\alpha + p_\varphi^2)}{\alpha - p_\varphi^2}$$

Диференцируя по E, p_φ, α и приравнивая постоянным, можно получить уравнения траектории.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
15		Рис. 12б	Рис. 11б
15		Рис. 13в	Рис. 11в
19	На рис.17	$m_1 = 1$	$m_1 = 2$
29	15 сн.	$-2\dot{a}\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi$	$-2a\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi$
38	1 сн.	$M\vec{R} + M\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i = 0$	$M\vec{R} + m\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i = 0$
47 48	3 сн. 2 св.	$\sqrt{Ex + x^2 - \frac{p_y^2}{y}}$	$\sqrt{Ex + x^2 - \frac{p_y^2}{4}}$
60	8 св.	$\rho = \frac{2 + \sqrt{4 + 2\theta\, mv^2\pi}}{2\theta mv^2}$	$\rho \simeq \frac{-2 + \sqrt{4 + 2\theta\, mv^2\pi}}{2\theta\, mv^2}$
65	2 св.	$(F + rl)$	$F(r + l)$
72	1 сн.	$\sqrt{\omega^2 - \lambda^2 t}$	$\sqrt{\omega^2 - \lambda^2 t}$
103	2 сн.	$V = a)\theta$:	$V = a\dot{\theta})$:
104	5 св.	$J = \frac{Ma^2ca^2\alpha}{2}\dot{\theta}^2 +$	$J = \frac{Ma^2\cos^2\alpha}{2}\dot{\theta}^2 +$
105	7 св.	$M_L = B\psi\sin\theta$	$M_L = B\dot{\varphi}\sin\theta$
60	11 св.	$\cong \frac{do\cdot(2+\sqrt{4+2\theta mv^2\pi})(2-\theta mv^2\pi+\sqrt{4+2\theta mv^2\pi})}{4m^2v^4\quad\theta^4\sqrt{4+2\theta mv^2\pi}}$	$\cong \frac{do}{4m^2v^4}\cdot\frac{(-2+\sqrt{4+2\theta mv^2\pi})(4+\theta mv^2\pi-2\sqrt{4+2\theta mv^2\pi})}{\theta^4\sqrt{4+2\theta mv^2\pi}}$
103	1 сн.	$T = \frac{M}{2}a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(I_2\cos^2\varphi + I_3\sin^2\varphi)\dot{\theta}^2$	$T = \frac{M}{2}a^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(I_2\cos^2\varphi + I_3\sin^2\varphi)\dot{\theta}^2$