2.

Аналитическая геометрія — продолженіе.

Итакъ эволюта циклоиды образуется движеніемъ точки N помѣщенной на окружности круга, равнаго кругу OM, по которымъ катится на параллельной къ Ax LE, находящейся подъ нею и въ разстояніи отъ этой прямой равномъ діаметру производящаго круга. Эта эволюта есть также циклоида, совершенно равная первой.

Можно точно самое доказать непосредственно ~~доказать~~ ~~(посредствомъ)~~ вычисленіемъ. Въ самомъ д., мы имѣли

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}\,, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}.$$

Подставимъ эти выраженія въ уравненія

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

$$x - \xi + (y-\eta)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Первое урав. даетъ

$$\frac{2a}{y} - (y-\eta)\frac{a}{y^2} = 0, \text{ или } 2ay - a(y-\eta) = 0,$$

или наконецъ

$$(1)\qquad y = -\eta.$$

Изъ втораго равенства получаемъ

$$x - \xi + (y-\eta)\sqrt{\frac{2a}{y} - 1} = 0,$$

или, замѣстивши y его величиною и преобразуя,

$$x = \xi + 2\eta\sqrt{-\frac{2a}{\eta} - 1},$$

или, наконецъ, вводя η подъ радикалъ, причемъ знакъ должно измѣнить, такъ какъ η есть отрицательная величина,

$$(2)\qquad x = \xi - 2\sqrt{-2a\eta - \eta^2}.$$

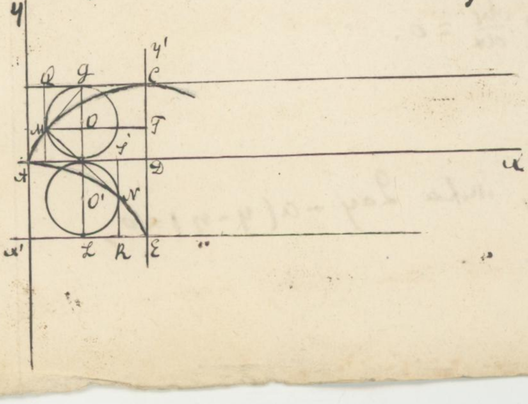
Вводя эти величины въ уравненіе циклоиды,

$$(3)\qquad x = a \arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2},$$

имѣемъ, для уравненія эволюты,

$$(4)\qquad \xi = a \arccos\frac{a+\eta}{a} + \sqrt{-2a\eta - \eta^2}.$$

Предположимъ теперь, что имѣемъ оси



проведенныя Ex' и Ey'; называя x' и y' новыя координаты какой-нибудь точки эволюты; получимъ:

$$AD = \pi a, \quad DE = 2a;$$

а также

$$\xi = AD - DI = \pi a - x',$$

$$\eta = MK - IK = y' - 2a.$$

Подставивши эти величины ξ и η въ уров. (4), уравнение циклоиды по отношению къ новымъ осямъ будетъ

$$\pi a - x' = a \arccos \frac{y'-a}{a} + \sqrt{2ay'-y'^2},$$

или

$$x' = a\left(\pi - \arccos \frac{y'-a}{a}\right) - \sqrt{2ay'-y'^2},$$

или, наконецъ, такъ какъ дополнительныя дуги имѣютъ равные косинусы, а знаки противуположные,

$$x' = a \arccos\left(\frac{a-y'}{a}\right) - \sqrt{2ay'-y'^2}.$$

Сравнивая это уров. съ уров. (3) видимъ, что эволюта циклоиды есть также циклоида, только отнесенная къ осямъ Ex' и Ey'.

<u>Длина дуги циклоиды.</u> (~~Въ сам. дѣлѣ~~) пусть $AM = s$

дуга циклоиды считаемая от вершины C; имеем

$$ds = \pm\, dy\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}.$$

Имеем также

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ay-y^2}};$$

Следовательно,

$$ds = \pm\, dy\,\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2a-y}}.$$

Но дуга CM уменьшается, когда y увеличивается, следовательно в последнем выражении должно взять − и писать:

$$ds = -\,dy\,\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2a-y}} = d\left(2\sqrt{2a}\sqrt{2a-y}\right),$$

Следовательно,

$$s = 2\sqrt{2a}\sqrt{2a-y}+C,$$

или

$$s = 2\sqrt{4a^2-2ay}+C.$$

C есть постоянное количество, которое определяется из условия $y = 2a$, при чем $s=0$; следовательно, $C=0$. Итак имеем:

$$\text{arc}\ CM = 2\sqrt{4a^2-2ay}.$$

Если предположим $y=0$, будем иметь.

$$\text{arc } CA = 4a,$$

и слѣдовательно

$$\text{arc } ACA' = 8a.$$

Итакъ, цѣлая дуга циклоиды равняется учетверенному діаметру производящаго круга.

Выраженіе радіуса кривизны въ новой перемѣнной независимой.

Взявши x за перемѣнное независимое, мы имѣли выраженіе

$$\rho = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Предположимъ теперь, что x и y будутъ функціями новаго перемѣннаго независимаго t и разыщемъ, въ этомъ предположеніи, выраженіе для ρ. Извѣстно, что $\frac{dy}{dx}$ сохраняетъ ту же форму, а $\frac{d^2y}{dx^2}$ должно быть замѣнено черезъ $\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$. Будемъ имѣть, слѣдовательно,

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}},$$

или

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

выраженіе, въ которомъ дифференціалы x и y взяты, разсматриваютъ какъ перемѣнныя независимыя.

Примѣръ. — Извѣстно, что циклоида опредѣляется совмѣстнымъ существованіемъ двухъ уравненій

$$x = a(u - \sin u), \quad y = a(1 - \cos u).$$

Примемъ здѣсь u за перемѣнное независимое, имѣемъ:

$$dx = a(1 - \cos u)\,du, \quad d^2x = a \sin u\, du^2,$$

$$dy = a \sin u\, du, \quad d^2y = a \cos u\, du^2.$$

Слѣдовательно,

$$dx^2 + dy^2 = (1 - 2\cos u + \cos^2 u + \sin^2 u)a^2 du^2,$$

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = (\cos u - \cos^2 u - \sin^2 u)a^2 du^2,$$

или

$$dx^2 + dy^2 = 2(1 - \cos u)a^2 du^2.$$

Следоват.,

$$\rho = 2^{\frac{3}{2}} \frac{(1-\cos u)a^3 du^3}{(1-\cos u)a^2 du^3} = 2a\sqrt{2}\,(1-\cos u)^{\frac{1}{2}}.$$

А такъ какъ

$$1-\cos u = \frac{y}{a},$$

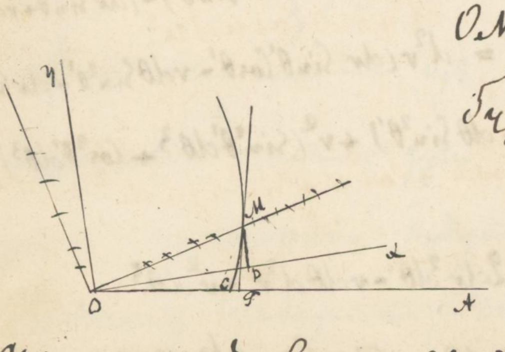
$$\rho = 2a\sqrt{2}\sqrt{\frac{y}{a}} = 2\sqrt{2ay}.$$

Выраженiе радiуса кривизны въ полярныхъ координатахъ.

Пусть требуется формулу (1), выраженiе радiуса кривизны въ т. M, выразить функцiею полярныхъ координатъ. Для этого проведемъ черезъ полюсъ двѣ прямоугольныя оси Ox и Oy; и пусть $xOA = \alpha$, $OP = x$, $MP = y$,

$$OM = r, \quad MOA = \theta,$$

будемъ имѣть



$$x = r\cos(\theta-\alpha),$$
$$y = r\sin(\theta-\alpha),$$

или, полагая для краткости, $\theta-\alpha = \theta'$,

$$x = r\cos\theta', \quad y = r\sin\theta'.$$

Отсюда, заметивши, что $d\theta' = d\theta$, имеемъ:

$$dx = dr\cos\theta' - r\,d\theta\sin\theta',$$
$$dy = dr\sin\theta' + r\,d\theta\cos\theta',$$
$$d^2x = d^2r\cos\theta' - 2dr\,d\theta\sin\theta' - r\,d\theta^2\cos\theta',$$
$$d^2y = d^2r\sin\theta' + 2dr\,d\theta\cos\theta' - r\,d\theta^2\sin\theta'.$$

Следовательно,

$$dx^2 + dy^2 = dr^2\cos^2\theta' + r^2\sin^2\theta' d\theta^2 + dr^2\sin^2\theta' + r^2\cos^2\theta' d\theta^2 =$$
$$dr^2(\sin^2\theta' + \cos^2\theta') + r^2 d\theta^2(\sin^2\theta' + \cos^2\theta'),$$

а после всехъ приведений:

$$(2) \qquad dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Далее

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x =$$
$$(dr\cos\theta' - r\,d\theta\sin\theta')(d^2r\sin\theta' + 2dr\,d\theta\cos\theta' - r\,d\theta^2\sin\theta') - (dr\sin\theta' + r\,d\theta\cos\theta')$$
$$(d^2r\cos\theta' - 2dr\sin\theta' - r\,d\theta^2\cos\theta') = d^2r(dr\sin\theta'\cos\theta' - r\,d\theta\sin^2\theta' - dr\sin\theta'\cos\theta'$$
$$- r\,d\theta\cos^2\theta') + 2dr^2(d\theta\cos^2\theta' + d\theta\sin^2\theta') + r^2(\sin^2\theta' d\theta^3 + \cos^2\theta' d\theta^3),$$

или, сокративши,

$$(3) \qquad dx\,d^2y - dy\,d^2x = 2dr^2 d\theta - r\,d\theta\,d^2r + r^2 d\theta^3.$$

Подставивши величины (2) и (3) въ формулу (1), получимъ

$$\rho = \frac{(dr^2 + r^2 d\theta^2)^{\frac{3}{2}}}{2\,dr^2 d\theta - r\,d^2 r\,d\theta + r^2 d\theta^3},$$

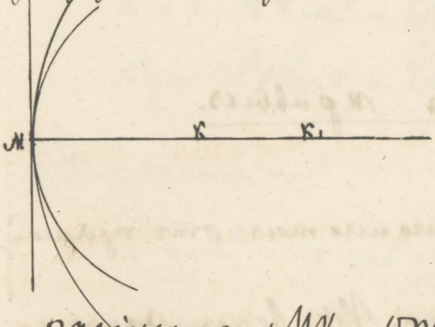
или

$$(4) \qquad \rho = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2 r}{d\theta^2}}.$$

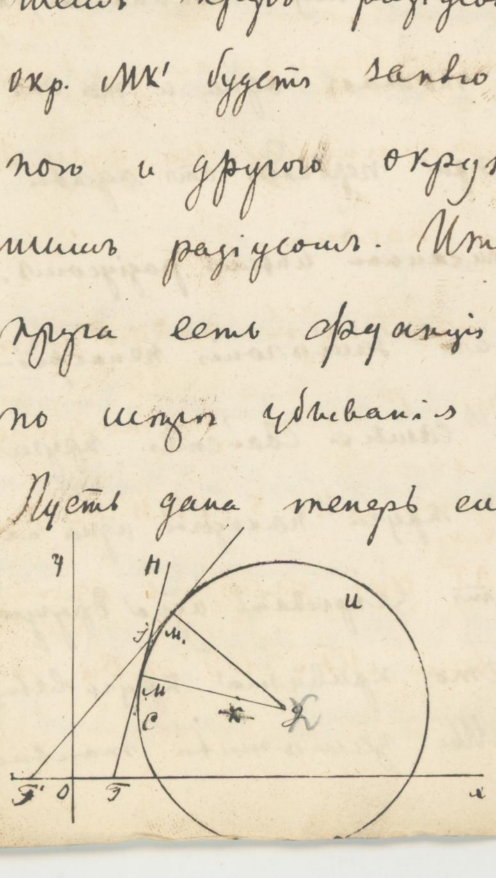
О кривизнѣ плоскихъ кривыхъ.

Чѣмъ больше линія отклоняется отъ прямой, тѣмъ больше ея кривизна. Изъ всѣхъ кривыхъ линій кругъ представляетъ ту особенность, что кривизна его во всѣхъ точкахъ одна и та же и измѣняется только при переходѣ отъ одной окружности къ другой, описанной инымъ радіусомъ. Справедливость сказаннаго заключенія непосредственно вытекаетъ изъ самыхъ свойствъ круга: различныя части дуги круга положенныя одна на другую непремѣнно будутъ закрывать одна другую. Поэтому говорятъ, что кривизна круга величина постоянная. Мы замѣтили только

что, что различные круги, описанные разли-
чными радиусами, будутъ имѣть и различную
кривизну, и она будетъ тѣмъ больше, чѣмъ
радиусъ круга меньше, и наоборотъ. Въ сам. дѣл.,



если возставимъ прямую и
на ней изъ кас. наб. точки
M возставимъ ⊥, далѣе
возьмемъ т. K и изъ нея
радиусомъ MK опишемъ кругъ, потомъ опи-
шемъ кругъ радиусомъ MK'; увидимъ, что
окр. MK' будетъ заключаться между касатель-
ною и другою окружностью описанною мень-
шимъ радиусомъ. Итакъ, ясно, что кривизна
круга есть функція радиуса, она возрастаетъ
по мѣрѣ убыванія его постепенно и наоборотъ.
Пусть дана теперь система прямоугольныхъ



осей координатъ и въ ней
кругъ MK. Пусть также
MT и M'T' двѣ касательныя

въ окружности, радіусъ которой $MK = R$, и пусть $HJM' = \omega$. Имѣемъ:

$$\text{arc } MM' = R\omega,$$

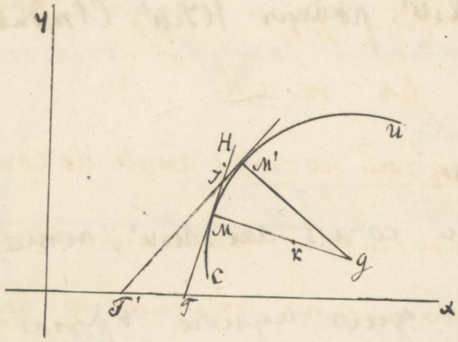
потому что уголъ MKM' равенъ HJM'. Откуда, имѣемъ

$$\frac{1}{R} = \frac{\omega}{\text{arc} MM'}.$$

Отношеніе 1 къ R, или ω къ arc MM', остающееся постояннымъ для одного круга и измѣняющееся съ измѣненіемъ радіуса, и называется <u>кривизною круга</u>. Итакъ, кривизна круга равняется углу, образуемому двумя касательными, раздѣленному на дугу, взятую между точками касанія.

Вмѣсто круга возьмемъ теперь какую бы то ни было кривую $CMM'U$, C пусть постоянная точка этой кривой; пусть $CM = s$, $MM' = \Delta s$, $\angle MTx = \tau$, $\angle M'T'x = \tau'$ и $\Delta\tau$ есть разность угловъ образуемыхъ касательными MT и $M'T'$ съ Ox, т. е. уголъ HJM'.

Если бы кривая была окружность круга, $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ было бы кривизна ея въ т. M и это отношеніе было бы независимымъ отъ Δs. Когда же кривая есть



какая угодно, отношеніе $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$, измѣняющееся съ Δs, называется <u>среднею кривизною</u> дуги MM'; а <u>радіусомъ средней кривизны</u> называютъ радіусъ круга, въ которомъ касательныя, проведенныя изъ крайнихъ точекъ дуги равной Δs, образуютъ между собой уголъ равный $\Delta\tau$. Этотъ радіусъ круга есть $\frac{\Delta s}{\Delta\tau}$.

Предположимъ теперь, что точка M' непрерывно приближается къ т. M: отношеніе $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ обратится въ $\frac{d\tau}{ds}$, которое будетъ называться кривизною кривой въ т. M. Вообразимъ себѣ кругъ, имѣющій ту же кривизну, и пусть ρ его радіусъ: имѣемъ:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{ds} \quad \text{или} \quad \rho = \frac{ds}{d\tau}.$$

Если возьмемъ на внутренней части нор-
мальной [часть] MK = ρ, кругъ, описанный изъ т. K,
какъ центра, радiусомъ MK будетъ кругъ кри-
визны, радiусъ и центръ круга будутъ радiусъ
и центръ кривизны въ т. M.

Называютъ угломъ ~~случайности~~ соприкосновенiя (angle de con-
tingence)(x) уголъ $d\tau$ образуемый касательными
проведенными изъ крайнихъ точекъ дуги
безконечно малой. Итакъ можно сказать,
что кривизна ~~равняется~~ углу ~~случайности~~ соприкосновенiя?
раздѣленному на дифференцiалъ дуги.

Тождество круга кривизны и соприка-сающагося круга.

Кругъ кривизны есть тоже, что и сопри-
касающiйся кругъ, опредѣленный теорiею
соприкосновенiя; въ самомъ дѣлѣ, мы имѣли

$$ds = dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}},$$

---

x Подъ angle de contingence разумѣютъ обыкновенно
уголъ, составленный изъ кривой и прям. линiи.

а также имеемъ

$$d\tau = d\left(\operatorname{arctang}\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d\frac{dy}{dx}}{1+\frac{dy^2}{dx^2}};$$

следовательно,

$$\frac{ds}{d\tau} = \rho = \frac{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}},$$

или

$$\rho = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

результатъ, указывающій, что радіусъ кривизны равняется радіусу круга соприкосновенія и, след., что кругъ кривизны совпадаетъ съ соприкасающимся кругомъ.

Выраженіе радіуса кривизны въ полярныхъ координатахъ.

Чтобы получить выраженіе радіуса кривизны въ полярныхъ координатахъ, обратимся къ формулѣ

$$\rho = \frac{ds}{d\tau}.$$

Пусть μ уголъ, образуемый касательною въ т. M съ радіусомъ векторомъ: будемъ имѣть

$$\tan\mu = \frac{r\,d\theta}{dr};$$

но

$$\mu = \tau - \theta.$$

Следовательно,

$$(1) \quad \cot(\tau-\theta) = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta};$$

откуда получаем:

$$\frac{d\theta - d\tau}{\sin^2(\tau-\theta)} = d\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right), \quad \frac{d\tau}{d\theta} = 1 - \sin^2(\tau-\theta)\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right).$$

Но урав. (1) дает

$$\sin^2(\tau-\theta) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

Следовательно

$$(2) \quad \frac{d\tau}{d\theta} = \frac{1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta}\right)}{1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

Но мы имеем

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = r\sqrt{\frac{dr^2}{r^2} + d\theta^2},$$

или

$$(3) \quad \frac{ds}{d\theta} = r\left[1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, разделив (3) на (2) будем иметь

$$\rho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{\left(r^2 + \left(\frac{dr^2}{d\theta^2}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}},$$

Формула намъ уже извѣстна (Стр. 125)

Формула Моавра.

Прежде чѣмъ приступимъ къ изложенію теоремы Моавра, замѣтимъ, что всякое мнимое выраженіе $a+b\sqrt{-1}$ можетъ быть представлено въ формѣ $r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)$; а для этого необходимо и достаточно, чтобы имѣли

$$r=\sqrt{a^2+b^2}\,,\quad \cos t=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{и} \quad \sin t=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,;$$

откуда

$$\operatorname{tg} t=\frac{b}{a}.$$

Количество r, принимаемое всегда положительнымъ, называется <u>модулемъ</u> мнимаго выраженія; t, которое берутъ обыкновенно ~~[illegible]~~ меньше тельнымъ и меньшимъ окружности, <u>аргументомъ</u>.

Допустимъ теперь, что требуется составить произведеніе $\cos x+\sqrt{-1}\sin x$ на $\cos y+\sqrt{-1}\sin y$; будемъ имѣть, для вещественной части произведенія,

$$\cos x\cos y-\sin x\sin y \quad \text{или} \quad \cos(x+y),$$

а для коэффиціента $\sqrt{-1}$

$\sin x \cos y + \sin y \cos x$ или $\sin(x+y)$.

Следовательно,

$$(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)(\cos y + \sqrt{-1} \sin y)$$
$$= \cos(x+y) + \sqrt{-1} \sin(x+y).$$

Отсюда легко доказать, что если множителя какое нибудь число производителей, то

$$(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)(\cos y + \sqrt{-1} \sin y)(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)\ldots$$
$$= \cos(x+y+z+\ldots) + \sqrt{-1} \sin(x+y+z+\ldots).$$

Полагая в нем $x = y = z = \ldots$, получим, обозначая через m число цѣлое и положительное,

$$(1)\ (\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^m = \cos mx + \sqrt{-1} \sin mx.$$

Эта формула носит название формулы Моавра, и она справедлива и тогда, когда m число дробное, положительное или отрицательное.