Въ послѣднемъ случаѣ возмущенныя движенія, соотвѣтствующія всякимъ численно достаточно малымъ возмущеніямъ, будутъ асимптотически приближаться къ невозмущенному движенію.

Примѣчаніе. — Мы разсматривали r и z, какъ перемѣнныя, для которыхъ невозможны отрицательныя значенія. Но съ такимъ же правомъ мы могли бы ихъ разсматривать и какъ перемѣнныя, для которыхъ невозможны положительныя значенія.

Чтобы изслѣдовать вопросъ въ этомъ послѣднемъ предположеніи, предыдущій анализъ пришлось бы подвергнуть только незначительному измѣненію; а именно, для этого стоило бы только въ уравненіи (64) замѣнить g черезъ $(-1)^m g$.

Тогда новое выраженіе производной $\frac{dV}{d\vartheta}$ представило бы знакоопредѣленную функцію при условіи $z \leqq 0$, и знакъ ея былъ бы одинаковъ со знакомъ $(-1)^m g$. Функція V при томъ же условіи была бы знакоопредѣленною и именно — отрицательною, когда $(-1)^m g$ представляетъ положительное число.

Мы пришли бы, поэтому, къ заключенію, что при условіи $(-1)^m g > 0$ невозмущенное движеніе устойчиво, а при условіи $(-1)^m g < 0$ — неустойчиво.

Эти новыя условія совпадаютъ съ предыдущими только въ случаѣ, если m есть число нечетное. А такъ какъ совпаденіе это несомнѣнно должно имѣть мѣсто, то найденный результатъ можетъ служить доказательствомъ нечетности числа m (пар. 34, примѣч. 2).

Замѣтимъ, что если бы m было числомъ четнымъ, что могло бы имѣть мѣсто, если бы уравненія (52) не представляли преобразованій уравненій (45), а были бы предложены непосредственно, то нашъ анализъ привелъ бы къ заключенію, что для возмущеній, подчиненныхъ одному изъ двухъ условій

$$z \geqq 0 \quad \text{или} \quad z \leqq 0,$$

невозмущенное движеніе устойчиво, а для возмущеній, подчиненныхъ другому, — неустойчиво.

38. Разсмотримъ теперь случай, когда въ уравненіяхъ (52) всѣ функціи Z, Z_s при $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$ дѣлаются нулями, и слѣдовательно — когда уравненія эти допускаютъ рѣшеніе

$$z = c, \quad z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$$

при произвольной постоянной c.

Покажемъ, что въ этомъ случаѣ для системы (52) возможно найти полное интегральное уравненіе съ одною постоянною произвольною c, представляющееся подъ видомъ:

$$z = c + f(z_1, z_2, \ldots, z_n, c, \vartheta), \tag{66}$$

гдѣ f означаетъ голоморфную функцію величинъ $z_1, z_2, \ldots, z_n, c$, уничтожающуюся какъ при $c = 0$, такъ и при $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$, въ разложеніи которой коэффиціенты суть конечные ряды синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ, и которая голоморфна въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній послѣдняго.

Мы должны для этого показать, что уравненіе въ частныхъ производныхъ

$$\sum_{s=1}^{n}(q_{s1}z_1 + q_{s2}z_2 + \cdots + q_{sn}z_n)\frac{\partial z}{\partial z_s} + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} = zZ - \sum_{s=1}^{n} Z_s \frac{\partial z}{\partial z_s} \tag{67}$$

допускаетъ рѣшеніе вида (66) при указанномъ сейчасъ характерѣ функціи f.

Положимъ

$$f = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} P_m^{(l)} c^l, \tag{68}$$

разумѣя подъ $P_m^{(l)}$ независящую отъ c форму $m^{\text{ой}}$ степени перемѣнныхъ z_s.

Если затѣмъ во вторую часть уравненія (67) подставимъ вмѣсто z его выраженіе (66) и результатъ расположимъ по степенямъ величинъ z_s, c, то получимъ рядъ, въ которомъ, при нашемъ предположеніи относительно функцій Z, Z_s, не будетъ членовъ, независящихъ отъ величинъ z_s.

Результатъ сказанной подстановки представится поэтому подъ видомъ

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} Q_m^{(l)} c^l,$$

гдѣ $Q_m^{(l)}$ означаетъ форму $m^{\text{ой}}$ степени величинъ z_s, извѣстнымъ образомъ выводимую изъ тѣхъ $P_{m'}^{(l')}$, для которыхъ

$$m' + l' < m + l$$

(въ случаѣ $m + l = 1$ форма эта представляетъ совокупность членовъ перваго измѣренія въ функціи $-Z$).

Такимъ образомъ намъ придется удовлетворить ряду уравненій вида

$$\sum_{s=1}^{n}(q_{s1}z_1 + q_{s2}z_2 + \cdots + q_{sn}z_n)\frac{\partial P_m^{(l)}}{\partial z_s} + \frac{\partial P_m^{(l)}}{\partial \vartheta} = -Q_m^{(l)}, \tag{69}$$

которыя и послужатъ для послѣдовательнаго вычисленія всѣхъ $P_m^{(l)}$ въ какомъ либо порядкѣ, соотвѣтствующемъ неубыванію числа $m + l$.

При этомъ коэффиціенты въ формахъ $P_m^{(l)}$ всегда можно будетъ предполагать періодическими относительно ϑ (конечными рядами синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ), и такое предположеніе сдѣлаетъ задачу вполнѣ опредѣленною.

Дѣйствительно, если допустимъ, что всѣ формы $P_{m'}^{(l')}$, для которыхъ $m' + l' < m + l$, уже найдены и обладаютъ періодическими коэффиціентами, то вторая часть въ уравненіи (69) представитъ форму величинъ z_s съ такими же коэффиціентами. Поэтому таковы же будутъ и извѣстные члены въ системѣ неоднородныхъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, которая получится изъ этого уравненія для опредѣленія коэффиціентовъ формы $P_m^{(l)}$. Но опредѣляющее уравненіе этой системы будетъ имѣть только корни съ положительными вещественными частями, ибо уравненіе это получимъ, приравнивая нулю $m-1^{\text{ый}}$ производный опредѣлитель (пар. 19) отъ опредѣлителя, представляющаго первую часть уравненія (48), послѣ замѣны въ немъ $\varkappa$ на $-\varkappa$. Поэтому названная система всегда будетъ допускать (и только одно) періодическое рѣшеніе.

Такимъ образомъ рядъ (68) выйдетъ вполнѣ опредѣленнымъ *).

Чтобы изслѣдовать сходимость этого ряда, разсмотримъ нѣкоторое его преобразованіе. А именно, разсмотримъ аналогичный рядъ для системы, выведенной изъ (52) посредствомъ такой же линейной подстановки, какою мы воспользовались въ параграфѣ $35^{\text{омъ}}$ для преобразованія уравненій (47).

Нашъ вопросъ приведется такимъ образомъ къ изслѣдованію сходимости ряда (68), найденнаго въ предположеніи, что въ уравненіи (67) всѣ коэффиціенты $q_{s\sigma}$ суть нули, за исключеніемъ слѣдующихъ:

$$q_{11}=\varkappa_1,\quad q_{22}=\varkappa_2,\ \ldots,\ q_{nn}=\varkappa_n,\quad q_{21}=\sigma_1,\quad q_{32}=\sigma_2,\ \ldots,\ q_{nn-1}=\sigma_{n-1},$$

между которыми n первыхъ обладаютъ отрицательными вещественными частями.

Въ этомъ предположеніи для опредѣленія коэффиціентовъ формы $P_m^{(l)}$ уравненіе (69) дастъ такія уравненія, которыя, будучи расположены въ извѣстномъ порядкѣ, опредѣлятъ непосредственно по одному изъ искомыхъ коэффиціентовъ и при томъ въ той же послѣдовательности, какъ и въ случаѣ, разсмотрѣнномъ въ параграфѣ $31^{\text{омъ}}$ (стр. 102).

Пусть A есть коэффиціентъ въ членѣ, содержащемъ

$$z_1^{m_1}\, z_2^{m_2}\ldots z_n^{m_n},$$

и пусть всѣ предшествующіе ему при указанной сейчасъ послѣдовательности найдены. Тогда для опредѣленія его получимъ уравненіе

$$\frac{dA}{d\vartheta}+(m_1\varkappa_1+m_2\varkappa_2+\cdots+m_n\varkappa_n)A=-B,$$

въ которомъ B будетъ нѣкоторою извѣстною періодическою функціей ϑ.

Изъ этого уравненія найдемъ:

$$A=e^{-(m_1\varkappa_1+m_2\varkappa_2+\cdots+m_n\varkappa_n)\vartheta}\int_{\vartheta}^{\infty}e^{(m_1\varkappa_1+m_2\varkappa_2+\cdots+m_n\varkappa_n)\vartheta}\,B\,d\vartheta.$$

Мы замѣчаемъ теперь, что функція B въ своемъ первоначальномъ видѣ необходимо представляетъ цѣлую раціональную функцію съ положительными коэффиціентами отъ найденныхъ раньше коэффиціентовъ какъ въ формѣ $P_m^{(l)}$, такъ и въ предшествующихъ ей, отъ величинъ σ_s и отъ коэффиціентовъ въ разложеніяхъ функцій $-Z$, Z_s.

---

*) Само собою разумѣется, что при вещественности коэффиціентовъ въ системѣ (52) такими же будутъ и коэффиціенты въ этомъ ряду, если его разсматривать, какъ расположенный по степенямъ величинъ z_s, c (перемѣнную ϑ мы предполагаемъ вещественною).

Поэтому изъ найденнаго выраженія коэффиціента A слѣдуетъ, что мы получимъ нѣкоторые высшіе предѣлы для модулей такихъ коэффиціентовъ, годные для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ, если найдемъ коэффиціенты въ соотвѣтственныхъ членахъ ряда, подобнаго (68), но независящаго отъ ϑ, который составится въ предположеніи, что въ уравненіи (67) всѣ $\varkappa_s$ замѣнены ихъ вещественными частями, всѣ σ_s ихъ модулями, а всѣ коэффиціенты въ разложеніяхъ функцій $-Z$, Z_s нѣкоторыми постоянными высшими предѣлами ихъ модулей, годными для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ. По свойству же функцій Z, Z_s, эти послѣдніе высшіе предѣлы всегда можно выбрать такъ, чтобы при достаточно малыхъ $|z|$, $|z_s|$ ряды, опредѣляющіе названныя функціи, оставались абсолютно сходящимися и послѣ указанной замѣны.

Такимъ образомъ вопросъ о сходимости нашего ряда приведется къ такому же вопросу въ случаѣ, разсмотрѣнномъ въ параграфѣ 31$^{\underline{\text{омъ}}}$.

Мы можемъ поэтому утверждать, что рядомъ (68) опредѣляется голоморфная функція величинъ z_s, c въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ, и слѣдовательно существованіе интегральнаго уравненія (66) можемъ считать доказаннымъ.

Обращаемся къ нашей задачѣ.

Предполагая постоянную c вещественною, замѣняемъ первое изъ уравненій (52) интегральнымъ уравненіемъ (66). Затѣмъ въ остальныя вносимъ вмѣсто z его выраженіе (66). Уравненія эти примутъ тогда видъ:

$$\left.\begin{gathered}\frac{dz_s}{d\vartheta} = (q_{s1}+c_{s1})z_1 + (q_{s2}+c_{s2})z_2 + \dots + (q_{sn}+c_{sn})z_n + Z'_s.\\ {\scriptstyle (s=1,\,2,\,\dots,\,n)}\end{gathered}\right\}\quad \textbf{(70)}$$

Здѣсь $c_{s\sigma}$ суть голоморфныя функціи постоянной c, уничтожающіяся при $c=0$, для которыхъ коэффиціенты разложеній по степенямъ c представляютъ вещественныя періодическія функціи ϑ, а Z'_s суть голоморфныя функціи величинъ z_s, c, разложенія которыхъ, обладающія такими же коэффиціентами, начинаются членами не ниже второго измѣренія относительно перемѣнныхъ z_s. Всѣ названныя функціи голоморфны при томъ въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ.

Подобно тому, какъ въ параграфѣ 31$^{\underline{\text{омъ}}}$, наша задача приведется теперь къ изслѣдованію устойчивости движенія

$$z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0$$

по отношенію къ перемѣннымъ z_s, удовлетворяющимъ уравненіямъ (70).

Эти уравненія содержатъ параметръ c, подчиненный одному только условію, чтобы числовая величина его не превосходила нѣкотораго предѣла, и если будетъ доказано, что названное движеніе устойчиво независимо отъ величины этого параметра въ смыслѣ, опредѣленномъ въ параграфѣ 31$^{\underline{\text{омъ}}}$ (стр. 104), то этимъ докажется также и устойчивость нашего движенія по отношенію къ перемѣннымъ z, z_s.

Но при указанномъ характерѣ функцій, представляющихъ вторыя части уравненій (70), доказать это весьма нетрудно, для чего можно воспользоваться тѣмъ же пріемомъ, который былъ намѣченъ въ концѣ параграфа 31$^{\text{аго}}$.

Такимъ образомъ убѣдимся, что въ разсматриваемомъ случаѣ невозмущенное движеніе всегда будетъ устойчивымъ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ докажемъ, что всякое возмущенное движеніе, для котораго возмущенія численно достаточно малы, будетъ асимптотически приближаться къ одному изъ періодическихъ движеній

$$z = c , \qquad z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0 ,$$

и что каждое изъ послѣднихъ, если для него $|c|$ достаточно мало, будетъ также устойчивымъ.

Примѣчаніе. — Разрѣшая уравненіе (66) относительно постоянной c (въ предположеніи, что всѣ величины $|z_s|$, $|c|$ достаточно малы), выведемъ изъ него слѣдующее:

$$c = z + \varphi(z_1 , z_2 , \ldots , z_n , z , \vartheta) , \tag{71}$$

гдѣ φ будетъ голоморфною функціей величинъ z, z_s, уничтожающеюся какъ при $z = 0$, такъ и при $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$, въ разложеніи которой коэффиціенты будутъ конечными рядами синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ.

Вторая часть уравненія (71) представитъ одинъ изъ интеграловъ системы (52).

Вводя въ этотъ интегралъ вмѣсто перемѣнныхъ z, z_s перемѣнныя r, x_s, получимъ нѣкоторый интегралъ для системы (47).

Разсмотримъ квадратъ послѣдняго. Онъ будетъ слѣдующаго вида:

$$r^2 + \Phi(x_1 , x_2 , \ldots , x_n , r , \vartheta) , \tag{72}$$

гдѣ Φ означаетъ голоморфную функцію величинъ r, x_s, разложеніе которой начинается членами не ниже третьяго измѣренія и обладаетъ коэффиціентами, представляющими конечные ряды синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ.

Вводя въ функцію (72) вмѣсто перемѣнныхъ r и ϑ перемѣнныя x и y, получимъ изъ нея нѣкоторый интегралъ для системы (45).

Этотъ интегралъ представится подъ видомъ слѣдующаго ряда:

$$x^2 + y^2 + \sum \left\{ U_m^{(m_1, m_2, \ldots , m_n)} + \sqrt{x^2 + y^2}\; V_m^{(m_1, m_2, \ldots , m_n)} \right\} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} . \tag{73}$$

Здѣсь $U_m^{(\ldots)}$, $V_m^{(\ldots)}$ означаютъ нѣкоторыя раціональныя однородныя функціи перемѣнныхъ x и y соотвѣтственно $m^{\text{аго}}$ и $m - 1^{\text{аго}}$ измѣреній. Функціи эти при томъ или сами по себѣ суть цѣлыя относительно x и y, или даютъ таковыя послѣ умноженія на нѣкоторыя цѣлыя степени величины $x^2 + y^2$.

Суммированіе распространяется здѣсь на всѣ цѣлыя неотрицательныя m, m_1, $m_2, \ldots, m_n$, подчиненныя условіямъ:

$$m > 1, \quad m + m_1 + m_2 + \cdots + m_n > 2.$$

Характеръ сходимости ряда (73) опредѣляется самымъ происхожденіемъ его изъ функціи (72), которая относительно r, x_s будетъ голоморфною въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ.

Того же характера по отношенію къ сходимости будетъ и рядъ, выводимый изъ (73) замѣною $\sqrt{x^2+y^2}$ черезъ $-\sqrt{x^2+y^2}$, ибо рядъ этотъ представитъ преобразованіе къ перемѣннымъ x и y функціи, выведенной изъ (72) замѣною r черезъ $-r$ и ϑ черезъ $\vartheta+\pi$. При томъ этотъ новый рядъ, очевидно, также будетъ интеграломъ для системы (45).

Отсюда заключаемъ, что рядъ

$$x^2+y^2+\sum U_m^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} = x^2+y^2+F(x_1, x_2, \ldots, x_n, x, y),$$

который будетъ навѣрно сходящимся при условіяхъ сходимости обоихъ предыдущихъ, представитъ интегралъ системы (45), преобразованіе котораго къ перемѣннымъ r и ϑ, подобно предыдущимъ, будетъ голоморфною функціей величинъ r, x_s въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ.

Покажемъ, что этотъ интегралъ будетъ голоморфною функціей перемѣнныхъ $x, y, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Для этого прежде всего замѣтимъ, что всѣ коэффиціенты U необходимо будутъ цѣлыми функціями x и y.

Въ послѣднемъ убѣдимся, разсматривая уравненіе

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\cdots+p_{sn}x_n+\alpha_s x+\beta_s y)\frac{\partial F}{\partial x_s}+\lambda\left(x\frac{\partial F}{\partial y}-y\frac{\partial F}{\partial x}\right)=$$

$$=-\sum_{s=1}^{n}X_s\frac{\partial F}{\partial x_s}-X\frac{\partial F}{\partial x}-Y\frac{\partial F}{\partial y}-2(xX+yY),$$

которому удовлетворяетъ функція F, и которое, послѣ подстановки ея выраженія подъ видомъ ряда, распадется на системы уравненій, по одной для каждой пары чиселъ

$$m, \qquad m_1+m_2+\cdots+m_n. \tag{74}$$

Каждая изъ этихъ системъ дастъ возможность найти всѣ функціи U, относящіяся къ соотвѣтствующимъ ей числамъ (74), послѣ того, какъ найдены всѣ U, для которыхъ или сумма этихъ чиселъ менѣе, или, при той же суммѣ, число m менѣе *). А ближайшее разсмотрѣніе этихъ системъ легко обнаружитъ, что функціи U не могутъ быть раціональными, не будучи цѣлыми.

Убѣдившись, что всѣ U суть цѣлыя функціи перемѣнныхъ x и y, вводимъ вмѣсто послѣднихъ перемѣнныя ξ и η посредствомъ уравненій:

$$\xi = x + y\sqrt{-1}, \qquad \eta = x - y\sqrt{-1}.$$

Пусть

$$U_m^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} = \sum_{k=0}^{m} C_{k,\, m-k}^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} \xi^k \eta^{m-k}, \tag{75}$$

гдѣ всѣ C означаютъ нѣкоторыя постоянныя.

Согласно замѣченному выше, функція F послѣ подстановки

$$\xi = re^{i\vartheta}, \qquad \eta = re^{-i\vartheta} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

дѣлается голоморфною относительно величинъ r, x_s въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ.

Вслѣдствіе этого, если въ силу означенной подстановки

$$U_m^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} = r^m \Theta_m^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)},$$

то всегда найдутся такія положительныя постоянныя A, A_1, A_2, $\ldots$, A_n, M, при которыхъ для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ будутъ выполняться неравенства вида

$$\left|\Theta_m^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}\right| < \frac{M}{A^m A_1^{m_1} A_2^{m_2} \ldots A_n^{m_n}}.$$

Но въ силу (75)

$$C_{k,\, m-k}^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Theta_m^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} e^{i(m-2k)\vartheta} d\vartheta.$$

Поэтому написанное сейчасъ неравенство приведетъ къ такому:

$$\left| C_{k,\, m-k}^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} \right| < \frac{M}{A^m A_1^{m_1} A_2^{m_2} \ldots A_n^{m_n}}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что функція F, будучи преобразована къ перемѣннымъ ξ и η, дѣлается голоморфною относительно ξ, η, x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Она голоморфна, поэтому, и относительно перемѣнныхъ x, y, x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

---

*) Въ случаѣ $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0$ при m четномъ встрѣтится нѣкоторая неопредѣленность, обусловливаемая тѣмъ, что къ искомой функціи U можно будетъ прибавлять тогда выраженіе $C(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}$ съ произвольною постоянною C.

Такимъ образомъ въ случаѣ, когда система (45) допускаетъ извѣстное періодическое рѣшеніе, для нея всегда найдется независящій отъ t голоморфный интегралъ

$$x^2 + y^2 + F(x_1, x_2, \dots, x_n, x, y), \tag{76}$$

въ которомъ совокупность членовъ наинизшаго измѣренія будетъ $x^2 + y^2$.

Нетрудно при томъ убѣдиться, что если найденъ какой либо интегралъ вида (76), то всякій другой независящій отъ t голоморфный интегралъ будетъ его функціей.

Можно также доказать, что если система (45) допускаетъ подобный интегралъ, то будетъ допускать и періодическое рѣшеніе, опредѣляемое рядами вида (61).

Въ этомъ убѣдимся, разсматривая систему, выводимую изъ (47) исключеніемъ перемѣнной r при помощи интегральнаго уравненія, доставляемаго такимъ интеграломъ.

Мы предполагали, что при $x = y = 0$ функціи X и Y дѣлаются нулями. Но для справедливости сказаннаго сейчасъ такое предположеніе, конечно, не необходимо.

Далѣе, говоря о системѣ (45), вообще не будемъ болѣе удерживать этого предположенія.

39. Изъ предыдущаго видно, что въ занимающемъ насъ случаѣ двухъ чисто мнимыхъ корней рѣшеніе вопроса объ устойчивости зависитъ главнымъ образомъ отъ вопроса о возможности нѣкотораго періодическаго рѣшенія для системы (45) или, если угодно, отъ вопроса, весьма тѣсно съ нимъ связаннаго, — о возможности для этой системы независящаго отъ t голоморфнаго интеграла. Но къ сожалѣнію всѣ способы, которые вообще мы можемъ предложить для рѣшенія этого послѣдняго вопроса, таковы, что приводятъ къ цѣли только въ случаѣ, если на него долженъ получиться отрицательный отвѣтъ. Однако, если нельзя указать общей методы, которая во всѣхъ случаяхъ приводила бы къ цѣли, то необходимо по крайней мѣрѣ поставить на видъ нѣкоторые частные случаи, въ которыхъ рѣшеніе названнаго вопроса упрощается.

Допустимъ сначала, что функціи X и Y не содержатъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \dots, x_n$. Вопросъ рѣшается тогда вполнѣ изслѣдованіемъ системы второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y. \tag{77}$$

Одинъ изъ простѣйшихъ случаевъ существованія для такой системы независящаго отъ t голоморфнаго интеграла есть тотъ, когда функціи X и Y удовлетворяютъ соотношенію

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0,$$

т. е. когда система (77) есть каноническая.

Въ этомъ случаѣ удовлетворяющія ей функціи x и y будутъ періодическими при всякихъ численно достаточно малыхъ начальныхъ значеніяхъ.

M. Poincaré указалъ нѣкоторый случай другого рода, когда функціи x и y, опредѣляемыя уравненіями (77), выходятъ періодическими. Это именно случай, когда при замѣнѣ t на $-t$ и y на $-y$ разсматриваемыя уравненія не мѣняются *).

Въ періодичности функцій x и y, какъ показываетъ M. Poincaré, легко при этомъ убѣдиться a priori. Но и существованіе голоморфнаго интеграла при сказанныхъ условіяхъ легко обнаруживается непосредственно.

Дѣйствительно, для того, чтобы имѣлъ мѣсто указанный сейчасъ случай, функціи X и Y должны быть вида:

$$X = yf(x, y^2), \qquad Y = \varphi(x, y^2),$$

гдѣ f и φ означаютъ голоморфныя функціи своихъ аргументовъ, уничтожающіяся при одновременномъ равенствѣ послѣднихъ нулю.

Но тогда въ уравненіи

$$\frac{dy^2}{dx} = -2\,\frac{\lambda x + \varphi(x, y^2)}{\lambda - f(x, y^2)},$$

которое выведемъ исключеніемъ dt изъ системы (77), вторая часть будетъ голоморфною функціей величинъ x и y^2. А потому, разсматривая y^2, какъ опредѣляемую имъ функцію x, и называя значеніе послѣдней, соотвѣтствующее $x=0$, черезъ c, въ силу извѣстной теоремы найдемъ:

$$y^2 = c + \psi(x, c), \tag{78}$$

гдѣ ψ будетъ голоморфною функціей x и c, уничтожающеюся при $x=0$.

Уравненіе (78) и обнаруживаетъ существованіе интеграла требуемаго характера. Интегралъ этотъ будетъ голоморфною функціей величинъ x и y^2.

Вообще для того, чтобы система (77) допускала независящій отъ t интегралъ, представляющій голоморфную функцію x и y^2 (или, если угодно, x и x^2+y^2), необходимо и достаточно, чтобы функціи X и Y могли быть представлены подъ видомъ:

$$X = yf(x, y^2) + [-\lambda + f(x, y^2)]\,y^2 H(x, y^2),$$
$$Y = \varphi(x, y^2) + [\ \lambda x + \varphi(x, y^2)]\,y\, H(x, y^2),$$

гдѣ f, φ и H означаютъ нѣкоторыя голоморфныя функціи x и y^2.

Можно поставить вопросъ въ нѣсколько болѣе общей формѣ. Можно, именно, искать условія, при которыхъ система (77) допускала бы независящій отъ t интегралъ, представляющій голоморфную функцію величинъ

---

*) *Sur les courbes définies par les équations différentielles.* Journal de mathématiques, 4 série, tome 1, p. 193.

$$ax + by \quad \text{и} \quad x^2 + y^2,$$

гдѣ a и b какія-либо вещественныя постоянныя. Но на этомъ случаѣ, который приводится къ предыдущему преобразованіемъ, соотвѣтствующимъ вращенію системы прямоугольныхъ координатныхъ осей въ плоскости вокругъ начала координатъ, останавливаться не будемъ.

Существуютъ случаи, когда при X и Y, содержащихъ перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots, x_n$, вопросъ приводится тѣмъ не менѣе къ изслѣдованію нѣкоторой системы второго порядка.

Таковъ напримѣръ случай, когда

$$-\lambda y + X = (-\lambda y + X')(1 + Z), \qquad \lambda x + Y = (\lambda x + Y')(1 + Z),$$

гдѣ X' и Y' суть голоморфныя функціи только двухъ перемѣнныхъ x и y, а Z какая угодно голоморфная функція $x, y, x_1, x_2, \ldots, x_n$, уничтожающаяся при одновременномъ равенствѣ послѣднихъ нулю.

При этомъ все зависитъ отъ изслѣдованія уравненій вида:

$$\frac{dx}{dt'} = -\lambda y + X', \qquad \frac{dy}{dt'} = \lambda x + Y'.$$

Таковъ также случай, когда при какихъ угодно X и Y всѣ функціи X_s въ системѣ (45) вслѣдствіе предположенія

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

дѣлаются нулями, и когда всѣ постоянныя α_s, β_s равны нулю.

Тогда, если $X^{(0)}$ и $Y^{(0)}$ суть функціи x и y, въ которыя обращаются X и Y при равенствѣ нулю всѣхъ x_s, то вопросъ будетъ зависѣть отъ изслѣдованія уравненій:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X^{(0)}, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y^{(0)}.$$

Послѣдній изъ указанныхъ сейчасъ случаевъ заключается въ болѣе общемъ, къ которому можно придти, разсматривая систему уравненій въ частныхъ производныхъ

$$\left.\begin{gathered}(-\lambda y + X)\frac{\partial x_s}{\partial x} + (\lambda x + Y)\frac{\partial x_s}{\partial y} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + \alpha_s x + \beta_s y + X_s, \\ {\scriptstyle (s=1,\,2,\,\ldots,\,n)}\end{gathered}\right\} \quad \textbf{(79)}$$

опредѣляющую величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$, какъ функціи перемѣнныхъ x и y.

Всякій разъ, когда возможно будетъ удовлетворить этой системѣ голоморфными функціями

$$x_1 = f_1(x, y), \quad x_2 = f_2(x, y), \quad \ldots, \quad x_n = f_n(x, y) \qquad \textbf{(80)}$$

перемѣнныхъ x и y, уничтожающимися при $x = y = 0$, вопросъ будетъ приводиться къ изслѣдованію уравненій:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + (X), \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + (Y),$$

въ которыхъ (X) и (Y) означаютъ результаты подстановки (80) въ функціи X и Y.

Разсматривая ближе уравненія (79), легко убѣждаемся, что если функціи x_s искать подъ видомъ рядовъ, расположенныхъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ x и y и не содержащихъ постоянныхъ членовъ, то уравненія, которыя при этомъ получатся между коэффиціентами, всегда будутъ совмѣстны и опредѣленны, позволяя вычислять эти коэффиціенты для членовъ каждаго измѣренія по найденнымъ раньше для членовъ низшихъ измѣреній.

Такимъ образомъ всегда найдутся ряды указаннаго сейчасъ вида, которые будутъ формально удовлетворять системѣ (79), и такіе ряды будутъ единственными.

Однако было бы ошибочно полагать, что ими всегда будетъ опредѣляться нѣкоторое рѣшеніе системы (79), ибо весьма возможны случаи, когда ряды эти не будутъ сходящимися, какъ бы малы ни были модули перемѣнныхъ x и y.

Такъ напримѣръ, если предложено уравненіе

$$\left[-\lambda y - \frac{1}{2}x(x^2+y^2)\right]\frac{dx_1}{dx} + \left[\lambda x - \frac{1}{2}y(x^2+y^2)\right]\frac{dx_1}{dy} = -x_1 + x^2 + y^2,$$

то формально удовлетворяющій ему рядъ

$$x^2 + y^2 + (x^2+y^2)^2 + 1.2\,(x^2+y^2)^3 + 1.2.3\,(x^2+y^2)^4 + \dots$$

будетъ расходящимся при всякихъ отличныхъ отъ нуля x и y *).

Вслѣдствіе этого указанное приведеніе не всегда будетъ возможно, и для рѣшенія вопроса о возможности его вообще необходимо будетъ изслѣдованіе сходимости названныхъ сейчасъ рядовъ.

Но могутъ встрѣтиться случаи, когда ряды эти будутъ конечными, или когда сходимость ихъ извѣстна a priori.

Какъ на одинъ изъ случаевъ перваго рода, укажемъ на тотъ, когда

$$X = xU, \qquad Y = yU, \qquad X_s = x_s U, \qquad {\scriptstyle (s=1,\,2,\,\dots,\,n)}$$

гдѣ U какая угодно голоморфная функція величинъ x, y, x_s, уничтожающаяся при одновременномъ равенствѣ ихъ нулю. Въ этомъ случаѣ системѣ (79), очевидно, можно удовлетворить нѣкоторыми линейными функціями перемѣнныхъ x и y.

---

*) Мы разсматриваемъ этотъ рядъ, какъ *двойной*, расположенный по степенямъ x и y.

Замѣтимъ при томъ, что, если U есть цѣлая однородная функція нечетной степени, то система (45) всегда будетъ обладать независящимъ отъ t голоморфнымъ интеграломъ.

Укажемъ еще одинъ изъ случаевъ второго рода.

Допустимъ, что всѣ постоянныя α_s, β_s равны нулю, и что функціи X, Y, X_s удовлетворяютъ слѣдующимъ соотношеніямъ:

$$(-\lambda y+X)\frac{\partial X_s}{\partial x}+(\lambda x+Y)\frac{\partial X_s}{\partial y}=0, \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \qquad \textbf{(81)}$$

гдѣ частныя производныя берутся въ предположеніи независимости перемѣнныхъ x, y, x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

Тогда, разсматривая уравненія

$$p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\cdots+p_{sn}x_n+X_s=0, \qquad (s=1, 2, \ldots, n) \qquad \textbf{(82)}$$

и опредѣляя изъ нихъ величины x_s, какъ голоморфныя функціи перемѣнныхъ x и y, уничтожающіяся при $x=y=0$ (каковая задача по свойству коэффиціентовъ $p_{s\sigma}$ всегда будетъ возможна и вполнѣ опредѣленна), найдемъ, что эти голоморфныя функціи будутъ удовлетворять уравненіямъ (79).

Дѣйствительно, изъ уравненій (82) въ силу (81) выведемъ слѣдующія:

$$\sum_{\sigma=1}^{n}\left(p_{s\sigma}+\frac{\partial X_s}{\partial x_\sigma}\right)\left[(-\lambda y+X)\frac{\partial x_\sigma}{\partial x}+(\lambda x+Y)\frac{\partial x_\sigma}{\partial y}\right]=0. \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

А изъ послѣднихъ вслѣдствіе того, что опредѣлитель

$$\sum\pm\left(p_{11}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right)\left(p_{22}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)\cdots\left(p_{nn}+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)$$

при достаточно малыхъ $|x|$, $|y|$, $|x_s|$ не можетъ быть равенъ нулю, найдемъ:

$$(-\lambda y+X)\frac{\partial x_\sigma}{\partial x}+(\lambda x+Y)\frac{\partial x_\sigma}{\partial y}=0. \qquad (\sigma=1, 2, \ldots, n)$$

Въ этомъ случаѣ, если только названныя голоморфныя функціи не всѣ тожественно равны нулю, система (45) всегда будетъ допускать независящій отъ t голоморфный интегралъ. А въ періодическомъ рѣшеніи, которымъ она будетъ при этомъ обладать, всѣ функціи x_s выйдутъ постоянными.

Можно замѣтить, что если требовать, чтобы условія (81) выполнялись не непремѣнно тожественно, а только въ силу уравненій (82), то указанный сейчасъ случай будетъ самымъ общимъ, въ которомъ система (45) допускаетъ періодическое рѣшеніе извѣстнаго характера съ постоянными величинами для функцій x_s.

Въ послѣднемъ случаѣ сходимость рядовъ, опредѣляемыхъ уравненіями (79), совпадала съ существованіемъ извѣстнаго періодическаго рѣшенія системы (45).

Нетрудно убѣдиться, что вообще, коль скоро такое рѣшеніе возможно для этой системы, названные ряды при достаточно малыхъ $|x|$ и $|y|$ всегда будутъ абсолютно сходящимися.

Въ самомъ дѣлѣ, при сказанномъ условіи система (47) будетъ обладать періодическимъ рѣшеніемъ, опредѣляемымъ уравненіями (49). Изъ послѣднихъ же, исключеніемъ постоянной c, можно будетъ вывести выраженія величинъ x_s подъ видомъ рядовъ, расположенныхъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ r, не содержащихъ нулевой степени послѣдняго и обладающихъ періодическими коэффиціентами, представляющими конечные ряды синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ. Рядами этими опредѣлятся функціи перемѣнныхъ r и ϑ, голоморфныя относительно r въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній ϑ, и функціи эти будутъ удовлетворять системѣ уравненій, представляющей преобразованіе системы (79) къ перемѣннымъ r и ϑ. Но легко убѣдиться, что этой системѣ нельзя удовлетворить рядами указаннаго сейчасъ характера, если эти ряды не приводятся къ расположеннымъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ $r\cos\vartheta$ и $r\sin\vartheta$ съ постоянными коэффиціентами. Поэтому разсматриваемые ряды необходимо должны приводиться къ такому виду. А при этомъ условіи такъ же, какъ для подобнаго случая въ предыдущемъ параграфѣ (примѣч.), докажемъ, что ими будутъ опредѣляться голоморфныя функціи величинъ $r\cos\vartheta$ и $r\sin\vartheta$. Но тогда, послѣ преобразованія къ перемѣннымъ x и y, эти ряды представятъ голоморфныя функціи послѣднихъ, ибо, если мы имѣемъ дѣло съ тѣмъ случаемъ, когда функціи X и Y при $x=y=0$ дѣлаются нулями, перемѣнныя x и y соотвѣтственно равны $r\cos\vartheta$ и $r\sin\vartheta$; если же имѣемъ дѣло съ общимъ случаемъ, переходъ отъ однихъ перемѣнныхъ къ другимъ совершается при посредствѣ уравненій

$$x = r\cos\vartheta + u, \qquad y = r\sin\vartheta + v,$$

въ которыхъ u и v суть разсмотрѣнныя въ параграфѣ 33<u>емъ</u> (стр. 109) голоморфныя функціи величинъ x_s, не содержащія членовъ ниже второго порядка; а въ силу послѣдняго обстоятельства изъ этихъ уравненій слѣдуетъ, что, если всѣ x_s суть голоморфныя функціи величинъ $r\cos\vartheta$ и $r\sin\vartheta$, уничтожающіяся при равенствѣ послѣднихъ нулю, то величины $r\cos\vartheta$ и $r\sin\vartheta$, когда ихъ модули достаточно малы, суть голоморфныя функціи x и y, уничтожающіяся при $x=y=0$.

Такимъ образомъ при сдѣланномъ допущеніи находимъ голоморфныя функціи x_s перемѣнныхъ x и y, уничтожающіяся при равенствѣ послѣднихъ нулю и удовлетворяющія уравненіямъ (79).

40. Въ случаѣ, когда для системы (45) нельзя найти періодическаго рѣшенія извѣстнаго типа, вопросъ объ устойчивости рѣшается, какъ мы видѣли, знакомъ нѣкоторой постоянной g.

Для вычисленія послѣдней въ предыдущемъ было указано два способа, оба приводящіеся къ выполненію тѣхъ операцій, которыя пришлось бы производить при разысканіи названнаго сейчасъ рѣшенія (пар. 34 и пар. 36, примѣч.). Теперь покажемъ, что къ опредѣленію той-же постоянной можно придти и путемъ вычисленій, представляющихся при разысканіи для системы (45) независящаго отъ t голоморфнаго интеграла.

Разсмотримъ слѣдующее выраженіе:

$$U = x^2 + y^2 + f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x, y),$$

гдѣ f означаетъ нѣкоторую цѣлую раціональную функцію перемѣнныхъ x_s, x, y, не заключающую членовъ ниже третьяго порядка.

Если въ силу уравненій (45) составимъ производную $\frac{dU}{dt}$ и разложимъ ее въ рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ x, y, x_s, то въ ряду этомъ не будетъ членовъ ниже третьяго порядка, а при надлежащемъ выборѣ функціи f въ немъ могутъ исчезнуть и члены до порядка болѣе высокаго.

Можетъ случиться, что, какъ бы ни было велико цѣлое число k, функцію f возможно подобрать такимъ образомъ, чтобы въ разложеніи $\frac{dU}{dt}$ не встрѣчалось членовъ ниже $k^{\text{аго}}$ порядка. Въ этомъ случаѣ найдется рядъ, расположенный по цѣлымъ положительнымъ степенямъ x, y, x_s, формально удовлетворяющій условію интеграла системы (45), и какъ увидимъ далѣе, система эта дѣйствительно будетъ обладать независящимъ отъ t голоморфнымъ интеграломъ.

Но можетъ случиться также (и это будетъ общій случай), что, какъ бы ни была выбираема функція f, въ разложеніи $\frac{dU}{dt}$ нельзя уничтожить всѣхъ членовъ ниже нѣкотораго опредѣленнаго порядка.

Допустимъ, что мы имѣемъ дѣло съ этимъ послѣднимъ случаемъ, и что функція f подобрана такъ, чтобы въ разложеніи разсматриваемой производной не встрѣчалось членовъ до порядка возможно наивысшаго.

Тогда совокупность членовъ наинизшаго порядка въ разложеніи $\frac{dU}{dt}$ необходимо представитъ форму четной степени, ибо если бы эта форма, которую означимъ черезъ V, была нечетной степени $2N+1$, то согласно теоремѣ I параграфа $20^{\text{аго}}$ можно было бы найти форму v той же степени, удовлетворяющую уравненію

$$\lambda\left(x\frac{\partial v}{\partial y} - y\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n + \alpha_s x + \beta_s y)\frac{\partial v}{\partial x_s} = -V;$$

а прибавляя послѣднюю къ функціи f, мы составили бы новую функцію U, для которой въ разложеніи $\frac{dU}{dt}$ уничтожались бы всѣ члены до порядка $2N+1$ включительно.

Допустимъ поэтому, что степень формы V равна четному числу $2N$.

Степень функціи f можно при этомъ предположить не выше $2N-1$. Но если для составленія этой функціи разсматривать и члены $2N^{\text{аго}}$ порядка, то форму V всегда можно будетъ привести къ виду

$$G(x^2+y^2)^N, \tag{83}$$

гдѣ G будетъ нѣкоторою опредѣленною постоянною.

Дѣйствительно, если v означаетъ совокупность членовъ $2N^{\text{аго}}$ порядка въ функціи f, а V_0 совокупность членовъ того же порядка въ разложеніи выраженія

$$\frac{dU}{dt}-\frac{dv}{dt},$$

то для выполненія указаннаго приведенія форма v и постоянная G должны быть опредѣлены согласно уравненію

$$\lambda\left(x\frac{\partial v}{\partial y}-y\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\cdots+p_{sn}x_n+\alpha_s x+\beta_s y)\frac{\partial v}{\partial x_s}=G(x^2+y^2)^N-V_0. \tag{84}$$

А послѣднее для вычисленія коэффиціентовъ формы v доставитъ систему линейныхъ уравненій въ числѣ, равномъ числу этихъ коэффиціентовъ, опредѣлитель которой будетъ $2N-1^{\text{ымъ}}$ производнымъ отъ основного опредѣлителя системы (45) въ предположеніи $\varkappa=0$ (см. пар. 19). Опредѣлитель этотъ будетъ, слѣдовательно, нулемъ, но между первыми минорами его найдется по крайней мѣрѣ одинъ, отличный отъ нуля. Поэтому изъ названныхъ уравненій коэффиціенты формы v всегда будутъ исключаться, и исключеніе ихъ приведетъ къ *одному* только соотношенію между коэффиціентами второй части равенства (84). Это соотношеніе, необходимое и достаточное для возможности опредѣленія формы v, и доставитъ, какъ сейчасъ покажемъ, искомую величину постоянной G.

Чтобы получить названное соотношеніе, можно исходить непосредственно изъ уравненія (84). Для этого замѣняемъ въ немъ величины x_s линейными функціями перемѣнныхъ x и y, удовлетворяющими системѣ уравненій

$$\lambda\left(x\frac{\partial x_s}{\partial y}-y\frac{\partial x_s}{\partial x}\right)=p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\cdots+p_{sn}x_n+\alpha_s x+\beta_s y, \quad (s=1,2,\ldots,n)$$

(такія функціи всегда найдутся и будутъ единственными), затѣмъ дѣлаемъ $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$, и умножая обѣ части равенства на $r^{-2N}d\vartheta$, интегрируемъ по перемѣнной ϑ въ предѣлахъ отъ 0 до π. Въ первой части при этомъ получится, очевидно, нуль. Поэтому найденное такимъ путемъ равенство (которое и будетъ искомымъ соотношеніемъ) дастъ слѣдующую величину для постоянной G:

$$G=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} r^{-2N}V_0\,d\vartheta.$$

Такимъ образомъ убѣждаемся, что при нашемъ допущеніи функцію f всегда можно подобрать такъ, чтобы совокупность членовъ наинизшаго порядка въ разложеніи $\frac{dU}{dt}$ приводилась къ виду (83).

Покажемъ, что постоянная G будетъ при томъ находиться въ весьма простой зависимости отъ постоянной g.

Для этого, если мы имѣли дѣло съ общимъ случаемъ системы (45), переходимъ къ тому, когда функціи X и Y уничтожаются при $x=y=0$. Для послѣдняго, очевидно, найдется цѣлая функція f, удовлетворяющая предыдущему условію при тѣхъ же N и G.

Разсматривая такую функцію f, въ выраженіи U дѣлаемъ $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$ и при помощи уравненій (47) составляемъ производную $\frac{dU}{d\vartheta}$.

Будемъ имѣть

$$\frac{dU}{d\vartheta}=\lambda G r^{2N}+R, \tag{85}$$

гдѣ R означаетъ голоморфную функцію перемѣнныхъ x_s, r, разложеніе которой по цѣлымъ положительнымъ степенямъ послѣднихъ не содержитъ членовъ ниже $2N+1^{\text{аго}}$ порядка и обладаетъ періодическими относительно ϑ коэффиціентами.

Обращаемся теперь къ рядамъ (49).

Если бы мы пожелали продолжить эти ряды до безконечности, сохраняя тотъ типъ функцій u, который разсматривался въ параграфѣ $34^{\text{омъ}}$ (см. стр. 113), то въ случаѣ отсутствія періодическаго рѣшенія, постоянными произвольными, входящими въ функціи u, вообще нельзя было бы распорядиться такъ, чтобы ряды эти представляли какое либо рѣшеніе системы (47). Но если надлежащимъ образомъ измѣнить характеръ функцій u, а именно, сохраняя для нихъ прежній типъ только до порядка m, начиная съ котораго онѣ не могутъ быть періодическими, ввести условіе, чтобы для $\mu>m$ не только всѣ $u^{(\mu)}$, но и всѣ $u_s^{(\mu)}$ при $\vartheta=0$ дѣлались нулями, то разсматриваемыми рядами при $|c|$ достаточно маломъ во всякомъ случаѣ представится нѣкоторое рѣшеніе системы (47) по крайней мѣрѣ для значеній ϑ, не превосходящихъ извѣстнаго предѣла. При томъ $|c|$ можно будетъ предположить настолько малымъ, чтобы названный предѣлъ былъ насколько угодно великъ.

Мы предположимъ, что этими рядами можно пользоваться по крайней мѣрѣ для всѣхъ значеній ϑ, лежащихъ между 0 и 2π включительно.

Условившись въ этомъ, вносимъ ряды (49) въ уравненіе (85). Затѣмъ, умножая обѣ части равенства на $d\vartheta$, интегрируемъ въ предѣлахъ отъ 0 до 2π и результаты располагаемъ по восходящимъ степенямъ c.

Выписывая въ каждой части равенства только члены съ наинизшими степенями c, очевидно, найдемъ:

$$4\pi g c^{m+1}+\ldots=2\pi\lambda G c^{2N}+\ldots.$$

Отсюда заключаемъ, что

$$m = 2N - 1\,, \qquad G = \frac{2g}{\lambda}\,.$$

Такимъ образомъ находимъ искомую зависимость между постоянными g и G. Вмѣстѣ съ тѣмъ получаемъ и новое доказательство предложенія, что число m всегда будетъ нечетнымъ (пар. 34, примѣч. 2).

Изъ приведеннаго сейчасъ анализа слѣдуетъ также, что, если бы мы имѣли дѣло съ тѣмъ случаемъ, когда функцію f возможно выбирать такъ, чтобы въ разложеніи $\frac{dU}{dt}$ исчезали всѣ члены до порядка насколько угодно высокаго, то система (45) допускала бы независящій отъ t голоморфный интегралъ, ибо изъ нашего анализа вытекаетъ, что въ этомъ случаѣ система (47) необходимо обладала бы періодическимъ рѣшеніемъ (пар. 38, примѣч.). *)

Въ силу доказаннаго мы можемъ формулировать теперь слѣдующее предложеніе:

Теорема. — *Пусть опредѣляющее уравненіе имѣетъ два чисто мнимыхъ корня при n остальныхъ съ отрицательными вещественными частями. Дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія приведутся тогда къ виду (45).*

Означая черезъ f цѣлую раціональную функцію перемѣнныхъ x, y, x_1, x_2, ..., x_n, не содержащую членовъ ниже третьяго порядка, разсмотримъ выраженіе

$$2xX + 2yY + (-\lambda y + X)\frac{\partial f}{\partial x} + (\lambda x + Y)\frac{\partial f}{\partial y} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + \alpha_s x + \beta_s y + X_s)\frac{\partial f}{\partial x_s}\,,$$

которое представимъ подъ видомъ ряда, расположеннаго по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ x, y, x_s. Мы встрѣтимся при этомъ съ однимъ изъ двухъ случаевъ: или съ тѣмъ, когда выборомъ функціи f можно распоряжаться такъ, чтобы въ этомъ выраженіи исчезали всѣ члены до порядка насколько угодно высокаго, или съ тѣмъ, когда такимъ способомъ можно уничтожить въ немъ только члены до нѣкотораго четнаго порядка $2N$ невключительно.

Въ первомъ случаѣ система (45) будетъ обладать независящимъ отъ t голоморфнымъ интеграломъ. При этомъ будетъ существовать непрерывный рядъ періодическихъ движеній, заключающій въ себѣ разсматриваемое невозмущенное движеніе, и всѣ движе-

---

*) Изъ изложеннаго выводится также теорема, на которую уже было указано въ параграфѣ 38омъ (стр. 135), и къ которой мы еще возвратимся далѣе (см. пар. 44),—теорема, состоящая въ томъ, что, если система (45) обладаетъ независящимъ отъ t голоморфнымъ интеграломъ, то будетъ обладать также и періодическимъ рѣшеніемъ извѣстнаго характера. Дѣйствительно, весьма нетрудно доказать, что, если существуетъ какой либо независящій отъ t голоморфный интегралъ, то всегда найдется и такой, въ которомъ совокупность членовъ наинизшаго порядка будетъ приводиться къ виду $x^2 + y^2$.

нія этого ряда, достаточно близкія къ невозмущенному, включая и послѣднее, будутъ устойчивыми. При томъ всякое возмущенное движеніе, достаточно близкое къ невозмущенному, будетъ асимптотически приближаться къ одному изъ движеній названнаго ряда.

Во второмъ случаѣ интеграла указаннаго характера существовать не будетъ. Но функцію f можно будетъ подобрать такъ, чтобы совокупность членовъ наинизшаго порядка въ разсматриваемомъ выраженіи приводилась къ виду

$$G(x^2+y^2)^N.$$

Тогда, если постоянная G окажется положительною, невозмущенное движеніе будетъ неустойчивымъ. Если же она окажется отрицательною, движеніе это будетъ устойчивымъ, и всякое возмущенное движеніе, достаточно близкое къ невозмущенному, будетъ приближаться къ нему асимптотически. *)

Въ заключеніе покажемъ, что къ опредѣленію постоянной g можно придти, пользуясь рядами, о которыхъ говорилось въ концѣ предыдущаго параграфа, при чемъ нѣтъ даже надобности, чтобы ряды эти были сходящимися.

Для этого замѣчаемъ, что постоянная g (если только можетъ идти о ней рѣчь) опредѣляется только нѣсколькими первыми членами въ разложеніяхъ вторыхъ частей уравненій (45), такъ что, если k означаетъ достаточно большое цѣлое число, постоянная эта можетъ быть найдена изъ изслѣдованія какихъ угодно уравненій типа

$$\frac{dx}{dt}=-\lambda y+X, \qquad \frac{dy}{dt}=\lambda x+Y, \tag{86}$$

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\dots+p_{sn}x_n+\alpha_s x+\beta_s y+X'_s, \qquad (s=1,2,\dots,n)$$

въ которыхъ X'_s суть голоморфныя функціи, отличающіяся отъ функцій X_s только членами выше $k^{\text{аго}}$ порядка. Но эти послѣдніе члены въ нихъ всегда можно подобрать такъ, чтобы системѣ уравненій въ частныхъ производныхъ

$$(-\lambda y+X)\frac{\partial x_s}{\partial x}+(\lambda x+Y)\frac{\partial x_s}{\partial y}=p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\dots+p_{sn}x_n+\alpha_s x+\beta_s y+X'_s$$
$$(s=1,2,\dots,n)$$

удовлетворяли цѣлыя раціональныя функціи

$$x_1=\varphi_1(x,y), \quad x_2=\varphi_2(x,y), \;\dots,\; x_n=\varphi_n(x,y), \tag{87}$$

уничтожающіяся при $x=y=0$ и не содержащія членовъ выше $k^{\text{ой}}$ степени. Тогда, по замѣченному въ предыдущемъ параграфѣ, вопросъ приведется къ изслѣдованію уравненій

$$\frac{dx}{dt}=-\lambda y+(X), \qquad \frac{dy}{dt}=\lambda x+(Y),$$

---

*) Замѣтимъ, что совершенно аналогичную теорему можно было бы предложить и для разобраннаго раньше случая, когда опредѣляющее уравненіе имѣетъ одинъ равный нулю корень.

выводимыхъ изъ (86) замѣною величинъ x_s функціями (87), а эти функціи представятъ совокупности членовъ не выше $k^{\text{аго}}$ порядка въ рядахъ, опредѣляемыхъ уравненіями (79).

Такимъ образомъ для опредѣленія постоянной g можно трактовать уравненія, въ которыя обращаются два первыхъ уравненія системы (45) послѣ замѣны въ нихъ величинъ x_s названными сейчасъ рядами, составленными до членовъ достаточно высокаго порядка.

На основаніи изложеннаго, мы можемъ руководствоваться при рѣшеніи нашего вопроса слѣдующимъ правиломъ:

Преобразовавши дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія къ виду (45), составляемъ систему уравненій въ частныхъ производныхъ (79), опредѣляющую величины x_s, какъ функціи независимыхъ перемѣнныхъ x и y. Затѣмъ вводимъ новыя независимыя перемѣнныя r и ϑ, полагая

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta, \text{ *)} \tag{88}$$

и стараемся удовлетворить этой системѣ рядами, расположенными по восходящимъ цѣлымъ положительнымъ степенямъ r, не содержащими нулевой степени послѣдняго и обладающими періодическими относительно ϑ коэффиціентами съ общимъ періодомъ 2π (такіе ряды всегда найдутся и будутъ единственными).

Обращаясь затѣмъ къ уравненію

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r(X\cos\vartheta + Y\sin\vartheta)}{\lambda r + Y\cos\vartheta - X\sin\vartheta},$$

слѣдующему въ силу подстановки (88) изъ двухъ первыхъ уравненій системы (45), представляемъ вторую часть его подъ видомъ

$$\frac{1}{\lambda}(X\cos\vartheta + Y\sin\vartheta)\left\{1 + \frac{X\sin\vartheta - Y\cos\vartheta}{\lambda r} + \left(\frac{X\sin\vartheta - Y\cos\vartheta}{\lambda r}\right)^2 + \ldots\right\},$$

гдѣ функціи X и Y замѣняемъ ихъ разложеніями по восходящимъ степенямъ r, x_s. Затѣмъ величины x_s замѣняемъ названными выше рядами и поступая такъ, какъ если бы послѣдніе были абсолютно сходящимися, результатъ представляемъ подъ видомъ ряда

$$R_2 r^2 + R_3 r^3 + R_4 r^4 + \cdots,$$

расположеннаго по восходящимъ цѣлымъ положительнымъ степенямъ r (всѣ коэффиціенты R будутъ періодическими функціями ϑ съ общимъ періодомъ 2π).

Наконецъ, означая черезъ c произвольную постоянную, составляемъ независящія отъ нея функціи ϑ

$$u_2, \quad u_3, \quad u_4, \; \cdots, \tag{89}$$

*) Само собою разумѣется, что эти перемѣнныя вообще будутъ отличными отъ тѣхъ, которыя были означаемы тѣми же буквами въ предыдущихъ параграфахъ.

опредѣляемыя условіемъ, чтобы при какомъ угодно цѣломъ положительномъ k *въ выраженіи*

$$\frac{dr}{d\vartheta} - R_2 r^2 - R_3 r^3 - \ldots - R_k r^k$$

послѣ подстановки

$$r = c + u_2 c^2 + u_3 c^3 + \cdots + u_k c^k$$

исчезали всѣ члены, содержащіе c *въ степеняхъ ниже* $k + 1^{\text{ой}}$. *Функціи эти послѣдовательно составляемъ до тѣхъ поръ, пока не встрѣтимъ неперіодическую, и если первая неперіодическая между ними есть* u_m (число m должно быть для этого нечетнымъ), *то функція эта будетъ вида*

$$u_m = g\vartheta + v,$$

гдѣ g *означаетъ постоянную, а* v *періодическую функцію* ϑ. *Тогда, если* λ *число положительное, то при* $g > 0$ *невозмущенное движеніе будетъ неустойчивымъ, а при* $g < 0$ *устойчивымъ.*

Примѣчаніе. — Можетъ случиться, что въ ряду (89), какъ бы далеко онъ ни былъ продолжаемъ, всѣ функціи будутъ періодическими. Предыдущее правило тогда не приведетъ къ цѣли. Но если будетъ доказано, что имѣетъ мѣсто такой случай, то изъ этого будетъ слѣдовать, что невозмущенное движеніе устойчиво, и что оно принадлежитъ къ непрерывному ряду періодическихъ движеній, въ которомъ всѣ движенія, достаточно къ нему близкія, также устойчивы.

41. Разберемъ нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ 1. — Дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія приводятся къ одному слѣдующаго вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = a\left(\frac{dx}{dt}\right)^{2n+1} + F\left[x, \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right],$$

гдѣ a какая либо постоянная, n цѣлое положительное число и F голоморфная функція своихъ аргументовъ, не содержащая членовъ ниже второго порядка относительно величинъ x и $\frac{dx}{dt}$. Изслѣдовать устойчивость невозмущеннаго движенія $(x = 0)$ по отношенію къ этимъ послѣднимъ величинамъ.

Пусть, дѣлая

$$x = r\sin\vartheta, \qquad \frac{dx}{dt} = r\cos\vartheta,$$

выводимъ изъ нашего уравненія слѣдующее:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = R_2 r^2 + R_3 r^3 + \cdots, \tag{90}$$

гдѣ всѣ R означаютъ функціи одного ϑ.

Тогда изъ функцій

$$R_2, \quad R_3, \ \ldots\ , \quad R_{2n}, \quad R_{2n+1} - a\cos^{2n+2}\vartheta,$$

очевидно, ни одна не будетъ зависѣть отъ постоянной a (въ предположеніи, что функція F не зависитъ отъ a). А потому, если для уравненія (90) будемъ искать рѣшеніе подъ видомъ ряда

$$r = c + u_2 c^2 + u_3 c^3 + \ldots,$$

расположеннаго по восходящимъ степенямъ произвольной постоянной c, то всѣ функціи

$$u_2, \quad u_3, \ \ldots\ , \quad u_{2n}, \quad u_{2n+1} - a\int\limits_0^{\vartheta} \cos^{2n+2}\vartheta\, d\vartheta \qquad \textbf{(91)}$$

можемъ считать также отъ a независящими.

Но если бы a было нулемъ, предложенное уравненіе допускало бы, какъ нетрудно видѣть, независящій отъ t голоморфный интегралъ (см. стр. 136).

Поэтому функціи (91) всѣ будутъ періодическими, и слѣдовательно, если a не нуль, постоянная g найдется по формулѣ

$$g = \frac{2a}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2}\vartheta\, d\vartheta.$$

Отсюда заключаемъ, что при $a > 0$ невозмущенное движеніе неустойчиво, а при $a \leqq 0$ устойчиво.

Примѣръ 2. — Пусть предложенныя дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія суть слѣдующія:

$$\frac{dx}{dt} + y = nxz, \qquad \frac{dy}{dt} - x = -nyz, \qquad \frac{dz}{dt} + z = x^2 + y^2 - 2xyz,$$

гдѣ n постоянная.

Дѣлая $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ и принимая за независимую перемѣнную ϑ, изъ этихъ уравненій выводимъ

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{nrz\cos 2\vartheta}{1 - nz\sin 2\vartheta} = nrz\cos 2\vartheta + n^2rz^2\cos 2\vartheta\sin 2\vartheta + \ldots,$$

$$\frac{dz}{d\vartheta} = \frac{-z + r^2 - r^2z\sin 2\vartheta}{1 - nz\sin 2\vartheta} = -z + r^2 - nz^2\sin 2\vartheta +$$

$$+ (n-1)r^2z\sin 2\vartheta - n^2z^3\sin^2 2\vartheta + \ldots,$$

гдѣ въ разложеніяхъ выписаны всѣ члены не выше третьяго порядка.

Поступаемъ затѣмъ, какъ въ параграфѣ 34$^{\text{омъ}}$.

Такъ какъ полученныя уравненія при замѣнѣ r черезъ $-r$ не мѣняются, то въ соотвѣтствующіе имъ ряды типа (49) можно не вводить для r четныхъ, а для z нечетныхъ степеней постоянной c.

Полагаемъ поэтому

$$r = c + u_3 c^3 + u_5 c^5 + \cdots,$$

$$z = v_2 c^2 + v_4 c^4 + \cdots,$$

гдѣ всѣ u и v суть независящія отъ c функціи ϑ.

Для вычисленія послѣднихъ получаемъ слѣдующія уравненія:

$$\frac{dv_2}{d\vartheta} + v_2 = 1, \qquad \frac{du_3}{d\vartheta} = nv_2 \cos 2\vartheta,$$

$$\frac{dv_4}{d\vartheta} + v_4 = 2u_3 + (n-1) v_2 \sin 2\vartheta - nv_2^2 \sin 2\vartheta,$$

$$\frac{du_5}{d\vartheta} = n(v_4 + v_2 u_3) \cos 2\vartheta + n^2 v_2^2 \cos 2\vartheta \sin 2\vartheta,$$

. . . .

Изъ этихъ уравненій тремъ первымъ удовлетворимъ, дѣлая

$$v_2 = 1, \qquad u_3 = \frac{n}{2} \sin 2\vartheta, \qquad v_4 = \frac{n-1}{5} (\sin 2\vartheta - 2\cos 2\vartheta),$$

послѣ чего изъ четвертаго найдемъ функцію u_5, которая, кромѣ періодическихъ членовъ, будетъ заключать въ себѣ слѣдующій:

$$-\frac{n(n-1)}{5}\,\vartheta.$$

Поэтому, если $n(n-1)$ не нуль, будемъ имѣть

$$g = -\frac{n(n-1)}{5}.$$

Если же $n(n-1) = 0$, предложенныя дифференціальныя уравненія будутъ обладать періодическимъ рѣшеніемъ. Дѣйствительно, для $n = 0$ это очевидно, а для $n = 1$ обнаруживается тѣмъ, что тогда вторыя части этихъ уравненій, которыя означимъ соотвѣтственно черезъ X, Y, Z, будутъ удовлетворять соотношенію

$$(-y + X)\frac{\partial Z}{\partial x} + (x + Y)\frac{\partial Z}{\partial y} = 0.$$

Мы встрѣтимся, слѣдовательно, съ случаемъ, указаннымъ въ параграфѣ 39$^{\text{омъ}}$ (стр. 139).