§ II.

ТЕОРЕМА МОНЖА И ЕЯ СЛѢДСТВІЯ.

1. Коль скоро коэффиціенты линейнаго дифференціальнаго уравненія не удовлетворяютъ условіямъ, построеннымъ въ предъидущемъ §, то это значитъ, что одной изъ перемѣнныхъ нельзя трактовать функціею остальныхъ измѣняемыхъ, и что, слѣдовательно, данное уравненіе не можетъ интегрироваться посредствомъ одного отношенія съ одною постоянною произвольною. Такое прямое заключеніе не сразу представилось геометрамъ. Линейныя дифференціальныя уравненія, относившіяся къ этому случаю, многіе геометры, начиная съ Фонтеня, считали невозможными, или просто нелѣпыми. Монжъ первый надлежащимъ образомъ объяснилъ, въ чемъ именно заключается тутъ нелѣпость. Онъ замѣтилъ весьма основательно, что, въ сказанныхъ обстоятельствахъ, не уравненіе нелѣпо по своей природѣ, но что намъ самимъ невозможно требовать, чтобы оно допускало одинъ только интегралъ.

2. Дабы оправдать эту мысль путемъ анализа, интегрированіе линейныхъ дифференціальныхъ уравненій,

которыя принимались за нелѣпыя, Монжъ основалъ на слѣдующемъ предложеніи. Каждое линейное дифференціальное уравненіе

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots + X_m\,\partial x_m = 0 \ldots\ldots (1),$$

не подчиненное условіямъ интегральности, между $(m+1)$ измѣняемыми, можетъ быть проинтегрировано черезъ m отношеній, пополненныхъ произвольною функціею отъ $m-1$ величинъ.

Доказательство этой теоремы, находящееся у Лакруа для уравненій съ тремя и четырьмя перемѣнными, безъ всякаго измѣненія прикладывается и къ общему случаю.

По этому, предположивъ въ уравненіи (1) величины $x_2, x_3, x_4 \ldots x_m$ постоянными, и слѣдовательно $\partial x_2, \partial x_3, \partial x_4, \ldots \partial x_m$ нулями, будемъ имѣть

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 = 0 \ldots\ldots (2).$$

Изобразивъ интегралъ послѣдняго равенства черезъ

$$U = C \ldots\ldots (3),$$

количество C будетъ произвольною функціею отъ $x_2, x_3, \ldots x_m$. Значитъ, продифференцировавъ послѣднюю формулу по измѣняемости x и x_1, будемъ имѣть

$$\frac{\partial U}{\partial x}\partial x + \frac{\partial U}{\partial x_1}\partial x_1 = M\,(X\,\partial x + X_1\,\partial x_1);$$

а измѣняя въ (3) всѣ величины разомъ, произвольною функціею можно будетъ расположить такъ, что получимъ:

$$M\{X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots + X_m\,\partial x_m\} =$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}\partial x + \frac{\partial U}{\partial x_1}\partial x_1 + \left(\frac{\partial U}{\partial x_2} - \frac{\partial C}{\partial x_2}\right)\partial x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial U}{\partial x_m} - \frac{\partial C}{\partial x_m}\right)\partial x_m;$$

откуда:

$$MX_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} - \frac{\partial C}{\partial x_2}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$MX_m = \frac{\partial U}{\partial x_m} - \frac{\partial C}{\partial x_m}.$$

Посему произвольную функцію, которую нужно взять для C, если назовемъ чрезъ $\Theta\,(x_2, x_3, \ldots\ldots x_m)$, то предъидущія равенства примутъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} &U = \Theta\,(x_2, x_3, \ldots x_m), \\ &\Theta'\,(x_2) = \frac{\partial U}{\partial x_2} - MX_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\Theta'\,(x_m) = \frac{\partial U}{\partial x_m} - MX_m. \end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

Теперь, хотя правыя части послѣднихъ $m-1$ отношеній не суть функціи однихъ только $x_2, x_3, \ldots x_m$, при всемъ томъ ясно, что совмѣстное существованіе уравненій (4) удовлетворяетъ данному уравненію. А потому система m равенствъ (4) и представляетъ намъ совокупность интегральныхъ отношеній уравненія (1).

3. Какъ исключеніе изъ этой теоремы, по замѣчанію Монжа, составляютъ тѣ случаи, въ которыхъ данное уравненіе приводится къ другому, содержащему меньше $(m+1)$ измѣняемыхъ количествъ. Тогда число интегральныхъ отношеній меньше m.

4. Впрочемъ, Монжъ не оставилъ намъ никакихъ средствъ открывать эти случаи, а прибавилъ только, что общій ходъ выкладки въ предъидущемъ способѣ

интегрированія, для каждаго даннаго случая укажетъ— возможно ли уменьшеніе числа перемѣнныхъ въ уравненіи и какъ его произвесть, если оно окажется возможнымъ. Значитъ, на обстоятельство это смотрѣлъ Монжъ, какъ на дѣло случая. Однако Паоли нашелъ, что число m интегральныхъ отношеній всегда можетъ быть сведено на $m-1$, если только уменьшить общность произвольной функціи.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ m уравненій (4) можно исключить двѣ величины, не входящія подъ знакъ Θ, т. е. x и x_1, тогда получимъ систему $m-2$ уравненій между $x_2, x_3, \ldots x_m$,

$$\Theta\,(x_2, \ldots x_m),\ \Theta'\,(x_2), \ldots, \Theta'\,(x_m).$$

Система эта будетъ представлять совокупность уравненій въ частныхъ производныхъ, гдѣ неизвѣстною функціею будетъ Θ. Проинтегрировавъ одно изъ этихъ уравненій, или какое-нибудь отношеніе, выведенное изъ нихъ, найдемъ для произвольной функціи одну величину, которая позволитъ пренебречь однимъ уравненіемъ системы (4), и слѣдовательно сведетъ ее только на $m-1$ равенствъ; что и требовалось доказать.

5. Предложеніе Паоли получило гораздо большее развитіе въ изслѣдованіяхъ Пфаффа. Вникнувъ хорошо въ смыслъ теоремы Монжа и ея доказательство, не трудно убѣдиться, что она заключаетъ уже сама въ себѣ всѣ данныя для дальнѣйшихъ розысканій.

6. Въ такомъ намѣреніи мы видоизмѣнимъ предложеніе Монжа слѣдующимъ образомъ: какое угодно линейное дифференціальное уравненіе

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots + X_m\,\partial x_m = 0\,.\,.\,(5)$$

можетъ быть проинтегрировано системою m отношеній съ такимъ-же числомъ постоянныхъ произвольныхъ.

7. Для краткости, назовемъ чрезъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{m-1}$, произвольно выбранныя, впрочемъ опредѣленныя и различныя между собою функціи, отъ $x, x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$, а чрезъ $c_1, c_2, \ldots c_{m-1}$ постоянныя произвольныя величины, и докажемъ, что къ $m-1$ уравненій

$$\varphi_1 = c_1,\ \varphi_2 = c_2, \ldots\ldots \varphi_{m-1} = c_{m-1} \ldots (6)$$

всегда можно присоединить еще одно

$$\varphi_m = c_m, \ldots\ldots (6')$$

и функцію φ_m опредѣлить посредствомъ одного уравненія въ частныхъ производныхъ перваго порядка, такъ что эти m отношеній (6) и (6′) составятъ полную систему интеграловъ для даннаго дифференціальнаго уравненія.

Дѣйствительно, продифференцировавъ послѣднія m равенствъ, и присоединивъ результаты къ уравненію (5), получимъ систему $m+1$ линейныхъ алгебрическихъ уравненій между количествами $\partial x, \partial x_1, \partial x_2, \ldots \partial x_m$, т. е.

$$(7)\left\{\begin{array}{l}
X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots + X_m\,\partial x_m = 0,\\[4pt]
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\partial x + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\partial x_1 + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\partial x_2 + \ldots + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_m}\partial x_m = 0,\\[4pt]
\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}\partial x + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\partial x_1 + \ldots\ldots\ldots + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_m}\partial x_m = 0,\\[4pt]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\[4pt]
\dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x}\partial x + \dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x_1}\partial x_1 + \dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x_2}\partial x_2 + \ldots + \dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x_m}\partial x_m = 0,\\[4pt]
\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x}\partial x + \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}\partial x_1 + \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_2}\partial x_2 + \ldots + \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_m}\partial x_m = 0.
\end{array}\right.$$

Отдѣливъ отсюда первыя m уравненій, мы въ состояніи будемъ опредѣлить изъ нихъ m дифференціальныхъ отношеній,

$$\frac{\partial x_1}{\partial x},\ \frac{\partial x_2}{\partial x},\ \ldots\ \frac{\partial x_m}{\partial x}.$$

Если назовемъ чрезъ Δ опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ при этихъ отношеніяхъ, находящихся въ первыхъ m уравненіяхъ системы (7), то будемъ имѣть

$$(8)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial x} &= -\frac{\Delta'(X_1)\,X+\Delta'\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\Delta'\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\ldots}{\Delta}\\
&\qquad\frac{+\Delta'\left(\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x_1},}{\Delta}\\
\frac{\partial x_2}{\partial x} &= -\frac{\Delta'(X_2)\,X+\Delta'\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\Delta'\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\ldots}{\Delta}\\
&\qquad\frac{+\Delta'\left(\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x},}{\Delta}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial x_m}{\partial x} &= -\frac{\Delta'(X_m)\,X+\Delta'\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_m}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\Delta'\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_m}\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\ldots}{\Delta}\\
&\qquad\frac{+\Delta'\left(\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x_m}\right)\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x}.}{\Delta}
\end{aligned}\right.$$

Внеся эти значенія въ послѣднее равенство системы (7) и изобразивъ, для сокращенія, числители предъидущихъ выраженій чрезъ Δ_1, Δ_2, . . . Δ_m, найдемъ:

$$\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}.\,\Delta+\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}\Delta_1+\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2}\Delta_2+\ldots+\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_m}\Delta_m=0\ldots(9)$$

уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка между $m+1$ перемѣнныхъ независимыхъ $x, x_1, x_2, \ldots x_m$ и одною зависящею отъ нихъ функціею φ_m.

Слѣдовательно отъ рѣшенія этого уравненія и зависитъ опредѣленіе функціи φ_m.

8. Формула (9) не имѣетъ послѣдняго члена, по этому, какъ извѣстно, она допускаетъ m частныхъ рѣшеній, которыя когда приравняемъ постояннымъ произвольнымъ, то получимъ полную систему интеграловъ для слѣдующей системы m дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, между $(m+1)$ перемѣнныхъ:

$$\frac{\partial x}{\Delta}=\frac{\partial x_1}{\Delta_1}=\frac{\partial x_2}{\Delta_2}=\ldots\ldots=\frac{\partial x_m}{\Delta_m}\ldots(10).$$

Значитъ и обратно: если бъ удалось открыть интегральныя отношенія системы (10), то по приведеніи ихъ къ виду:

$$f_1=c_1,\ f_2=c_2,\ \ldots\ldots\ f_m=c_m \quad (11)$$

функціи $f_1, f_2, \ldots f_m$ были бы частными рѣшеніями уравненія (9).

Розысканіе функцій $f_1, f_2, \ldots f_m$ въ настоящемъ случаѣ можно облегчить такими соображеніями: лѣвая часть уравненія (9) есть ни что иное какъ опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ при $\partial x, \partial x_1, \ldots\, \partial x_m$ системы (7). Слѣдовательно, въ силу свойствъ опредѣлителей системы линейныхъ алгебрическихъ уравненій, онъ долженъ исчезать, коль-скоро два горизонтальныхъ ряда или два вертикальныхъ столбца, предстоящихъ въ системѣ, будутъ одинаковы. Равенство соотвѣтственныхъ предстоящихъ въ двухъ горизонтальныхъ рядахъ, или въ двухъ вертикальныхъ столбцахъ нашей системы можетъ совершиться, напримѣръ, тогда, когда въ ряду членовъ

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_m$$

два будутъ равны между собою. Но $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{m-1}$ предположены существенно различными, поэтому позволительно только φ_m приравнять которому-нибудь изъ предшествующихъ членовъ. И такъ, полагая послѣдовательно

$$\varphi_m = \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{m-1},$$

лѣвая часть уравненія (9) тожественно будетъ обращаться въ нуль. Слѣдовательно $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{m-1}$ суть частныя рѣшенія уравненія въ частныхъ производныхъ (9), а отношенія

$$\varphi_1 = c_1, \varphi_2 = c_2, \ldots \varphi_{m-1} = c_{m-1}$$

принадлежатъ къ системѣ интеграловъ формулъ (10). Имѣя такимъ образомъ $m-1$ интегральныхъ отношеній системы (10), если откроемъ еще множителя этой системы, то, на основаніи theoriæ novi multiplicatoris, нахожденіе послѣдняго интеграла сведется на простую квадратуру. Опредѣляя послѣднее интегральное уравненіе системы (10), мы будемъ имѣть m^{oe} частное рѣшеніе уравненія (9), а слѣдовательно и функцію φ_m.

9. Предъидущаго совершенно достаточно и для построенія теоремы и для самой интеграціи уравненія (5) по той-же теоремѣ. Теперь мы выведемъ изъ нашего анализа нѣкоторыя слѣдствія, которыя дадутъ теоремѣ Монжа полный объемъ и будутъ полезны для дальнѣйшихъ розысканій.

10. Если открыта система интегральныхъ отношеній

$$\varphi_1 = c_1, \ \varphi_2 = c_2, \ldots \varphi_m = c_m \ldots (12),$$

соотвѣтствующихъ линейному дифференціальному уравненію

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots + X_m\,\partial x_m = 0 \ldots (13),$$

то утверждаемъ, что, разсматривая $c_1, c_2, \ldots c_m$ величинами измѣняемыми, всегда можно найти систему множителей $C_1, C_2, C_3, \ldots C_m$ такихъ, что будемъ имѣть тожество:

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + \ldots + X_m\,\partial x_m = C_1\,\partial c_1 + C_2\,\partial c_2 + C_3\,\partial c_3 + \ldots + C_m\,\partial c_m \ldots (14).$$

И точно, составляя выраженія $\partial c_1, \partial c_2, \ldots \partial c_m$ какъ слѣдуетъ, для тожественности равенства должно будетъ допустить

$$(15)\left\{\begin{array}{l}
C_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + C_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \ldots + C_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x} = X, \\
C_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + C_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \ldots + C_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} = X_1, \\
C_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + C_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \ldots + C_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} = X_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
C_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} + C_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_m} + \ldots + C_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} = X_m.
\end{array}\right.$$

Это система $m+1$ уравненій между числомъ m неизвѣстныхъ функцій C. Значитъ, опредѣливъ изъ первыхъ m уравненій выраженія для $C_1, C_2, \ldots C_m$ и внеся ихъ въ послѣднее равенство системы (15), мы должны получить результатъ тожественный. Такъ и есть на самомъ дѣлѣ потому, что сказанный результатъ подстановленія будетъ ничто иное, какъ то уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка, отъ котораго зависило розысканіе функціи φ_m. Для объясненія сдѣлаемъ

$$C_1 = -\frac{C^{(1)}}{C^{(0)}},\ C_2 = -\frac{C^{(2)}}{C^{(0)}}, \dots C_m = -\frac{C^{(m)}}{C^{(0)}} \dots (16).$$

Въ такомъ случаѣ система (15) перейдетъ въ

$$\left.\begin{array}{l} XC^{(0)} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} C^{(1)} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} C^{(2)} + \dots + \frac{\partial\varphi_m}{\partial x} C^{(m)} = 0, \\ X_1 C^{(0)} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} C^{(1)} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} C^{(2)} + \dots + \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} C^{(m)} = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_m C^{(0)} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_m} C^{(1)} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_m} C^{(2)} + \dots + \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_m} C^{(m)} = 0, \end{array}\right\} (17)$$

которая отличается отъ (7) тѣмъ, что въ ней ∂x, ∂x_1, $\partial x_2, \dots \partial x_m$ замѣщены чрезъ $C^{(0)}_{,}\ C^{(1)}_{,}\ C^{(2)}_{,} \dots C^{(m)}_{,}$ а коэффиціенты, составляющіе горизонтальные ряды въ системѣ (7), расположены въ этой (17) по вертикальнымъ столбцамъ. Слѣдовательно, по исключеніи изъ (17) числа m отношеній

$$\frac{C^{(0)}}{C^{(m)}},\ \frac{C^{(1)}}{C^{(m)}}, \dots \frac{C^{(m-1)}}{C^{(m)}},$$

мы необходимо должны придти къ тому-же выводу, который получили чрезъ исключеніе дифференціальныхъ отношеній

$$\frac{\partial x_1}{\partial x},\ \frac{\partial x_2}{\partial x}, \dots \frac{\partial x_m}{\partial x}$$

изъ системы (7).

Найдя C_1, C_2, $C_3, \dots C_m$ изъ (15), посредствомъ отношеній (12), мы можемъ x_1, x_2, $x_3, \dots x_m$ выразить чрезъ $x, c_1, c_2, c_3, \ldots c_m$. Отъ этого всѣ C будутъ опредѣленными функціями отъ $x, c_1\ c_2, \ldots c_m$; что̀ и требовалось доказать.

11. Послѣдняя доказанная нами теорема влечетъ за собою весьма важную истину; а именно: каждое линейное дифференціальное уравненіе между $m+1$ перемѣнныхъ, не удовлетворяющее условіямъ интегральности, можетъ быть преобразовано въ другое линейное уравненіе съ числомъ m перемѣнныхъ количествъ.

12. Чтобы не оставить никакого сомнѣнія въ возможности такого преобразованія и разъяснить его еще болѣе, мы предлагаемъ слѣдующія соображенія.

Допустивъ по прежнему, что уравненію

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + \ldots + X_m\,\partial x_m = 0 \ldots (18)$$

соотвѣтствуетъ система интеграловъ

$$\varphi_1 = c_1,\ \varphi_2 = c_2,\ \varphi_3 = c_3,\ \ldots\ \varphi_m = c_m\ \ldots (19),$$

съ одной стороны найдемъ

$$x_1 = f_1\,(x, c_1, c_2, \ldots c_m),\ x_2 = f_2\,(x, c_1, c_2, \ldots c_m), \ldots$$
$$x_m = f_m\,(x, c_1, c_2, \ldots c_m);$$

и слѣдовательно для дифференціала x_j получимъ выраженіе:

$$\partial x_j = \frac{\partial x_j}{\partial x}\partial x + \frac{\partial x_j}{\partial c_1}\partial c_1 + \frac{\partial x_j}{\partial c_2}\partial c_2 + \ldots + \frac{\partial x_j}{\partial c_m}\partial c_m.$$

Сообщивъ здѣсь числу j всѣ цѣлыя значенія отъ 1 до m, и внеся выведенныя отсюда выраженія для $\partial x_1, \partial x_2, \ldots \partial x_m$ въ данное дифференціальное уравненіе будемъ имѣть

$$
(20).\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left(X + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x} + \dots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial x}\right) \partial x \\
&+ \left(X_1 \frac{\partial x_1}{\partial c_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial c_1} + \dots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial c_1}\right) \partial c_1 \\
&+ \left(X_1 \frac{\partial x_1}{\partial c_2} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial c_2} + \dots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial c_2}\right) \partial c_2 + \dots \\
&+ \left(X_1 \frac{\partial x_1}{\partial c_m} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial c_m} + \dots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial c_m}\right) \partial c_m = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Съ другой стороны, какъ уже извѣстно, лѣвая часть уравненія (18) тожественно должна равняться лѣвой части уравненія

$$C_1\, \partial c_1 + C_2\, \partial c_2 + \dots + C_m\, \partial c_m = 0 \dots (21);$$

поэтому въ (20) коэффиціентъ при ∂x долженъ быть тожественно нулемъ, а коэффиціентъ при ∂c_j долженъ равняться C_j, т. е.

$$0 = X + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x} + \dots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial x} \dots (22),$$

$$C_j = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial c_j} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial c_j} + \dots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial c_j} \dots (23).$$

Справедливость этихъ двухъ равенствъ повѣрить весьма легко. Дѣйствительно, подставивъ въ (22) вмѣсто $\frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{\partial x_2}{\partial x}, \dots \frac{\partial x_m}{\partial x}$ значенія, доставляемыя формулами (8), мы получимъ то уравненіе въ частныхъ производныхъ, изъ котораго опредѣляли φ_m; слѣдовательно (22) есть самымъ дѣломъ тожество. Что касается (23), то, обратившись къ формуламъ (15) изъ послѣднихъ m уравненій системы (15), будемъ имѣть:

$$C_j = \frac{\Delta'_1 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}\right) X_1 + \Delta'_1 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2}\right) X_2 + \dots + \Delta'_1 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_m}\right) X_m}{\Delta_1} \dots (24),$$

гдѣ Δ_1 есть опредѣлителъ отдѣленныхъ нами m уравненій въ (15), и, разумѣется, отличный отъ Δ_1, входящаго въ (9). Продифференцировавъ теперь формулы (19) по измѣняемости c_j, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_j}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_j}+\ldots+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial c_j}=0,\\
&\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_j}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_j}+\ldots+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial c_j}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_j}+\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_j}+\ldots+\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial c_j}=1,\\
&\frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_j}+\frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_j}+\ldots+\frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial c_j}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_j}+\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_j}+\ldots+\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial c_j}=0;
\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

откуда:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x_1}{\partial c_j}=\frac{\Delta'_1\left(\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial x_1}\right)}{\Delta_1}\\
&\frac{\partial x_2}{\partial c_j}=\frac{\Delta'_1\left(\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial x_2}\right)}{\Delta_1}\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial x_m}{\partial c_j}=\frac{\Delta'_1\left(\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial x_m}\right)}{\Delta_1}.
\end{aligned}\right\}\quad(26)$$

Слѣдовательно, по внесеніи (24) и (26) въ формулу (23), получимъ опять тожество. А потому и прочее.

13. Доказавши существованіе формулы

$$X\,\partial x+X_1\,\partial x_1+X_2\,\partial x_2+\ldots+X_m\,\partial x_m=C_1\,\partial c_1+C_2\,\partial c_2+\ldots+C_m\,\partial c_m=0\ (27),$$

не трудно будетъ вывести слѣдующее предложеніе:

Система m интегральныхъ отношеній

$$\varphi_1 = c_1,\ \varphi_2 = c_2, \ldots \varphi_m = c_m \ldots (28),$$

соотвѣтствующихъ дифференціальному уравненію

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots + X_m\,\partial x_m = 0 \quad (29),$$

всегда можетъ быть замѣнена системою m уравненій съ одною и даже съ какимъ угодно числомъ произвольныхъ функцій, лишь-бы это число было меньше m. Мы докажемъ теперь это предложеніе для случая одной произвольной функціи. Сдѣлавши въ формулѣ (27) напр.

$$c_m = \omega\,(c_1, c_2, \ldots c_{m-1}) \ldots (30)$$

равенство

$$C_1\,\partial c_1 + C_2\,\partial c_2 + \ldots + C_m\,\partial c_m = 0$$

перейдетъ въ слѣдующее

$$(31)\ldots (C_1 + C_m \frac{\partial\omega}{\partial c_1})\,\partial c_1 + (C_2 + C_m \frac{\partial\omega}{\partial c_2})\,\partial c_2 + \ldots + (C_{m-1} + C_m \frac{\partial\omega}{\partial c_{m-1}})\,\partial c_{m-1} = 0,$$

которое удовлетворится, когда допустимъ

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_m \dfrac{\partial\omega}{\partial c_1} = 0, \\ C_2 + C_m \dfrac{\partial\omega}{\partial c_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{m-1} + C_m \dfrac{\partial\omega}{\partial c_{m-1}} = 0. \end{array}\right\} (30')$$

Эти послѣднія уравненія вмѣстѣ съ (30) и представятъ искомые интегралы для даннаго дифференціальнаго уравненія (29). Такимъ образомъ мы опять связали нашъ анализъ съ собственною теоремою Монжа.

14. Представивъ въ такомъ видѣ вопросъ объ интегрированіи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, не подчиненныхъ условіямъ интегральности, намъ осталось сдѣлать одинъ только шагъ для того, чтобы въ теоремѣ Монжа заключить всѣ изысканія позднѣйшихъ геометровъ.

Внимательно разсматривая формулу

$$(31)\quad X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + \ldots + X_m\,\partial x_m = C_1\,\partial c_1 + C_2\,\partial c_2 + \ldots + C_m\,\partial c_m = 0,$$

въ которой величины $c_1, c_2, \ldots c_m$ предполагались до сихъ поръ измѣняемыми, и которыя суть ни что иное какъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$ формулъ

$$(32)\quad \varphi_1 = c_1,\ \varphi_2 = c_2, \ldots \varphi_m = c_m,$$

стóитъ только, слѣдуя Пфаффу, одну изъ величинъ c предположить постоянною, для того чтобы въ преобразованномъ уравненіи число перемѣнныхъ уменьшить еще единицею. Сдѣлавши это и положивъ уравненіе

$$(33)\quad \partial c_m = 0, \text{ будемъ имѣть}$$

$$(34)\quad C_1\,\partial c_1 + C_2\,\partial c_2 + \ldots + C_{m-1}\,\partial c_{m-1} = 0;$$

или, введя для симметріи знакоположеніе:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = c',\ c_2 = c'_1,\ c_3 = c'_2, \ldots c_{m-1} = c'_{m-2}, \\ C_1 = C',\ C_2 = C'_1, \ldots\ldots\ldots C_{m-1} = C'_{m-2}, \end{array}\right\}\ (36)$$

будетъ

$$C'\,\partial c' + C'_1\,\partial c'_1 + C'_2\,\partial c'_2 + \ldots + C'_{m-2}\,\partial c'_{m-2} = 0.\quad (37)$$

Съ этимъ уравненіемъ, въ которомъ число перемѣнныхъ уже двумя единицами менѣе сравнительно съ даннымъ, мы можемъ поступать по прежнему, т. е. взять какія-нибудь $m-3$ равенства

$$\psi_1 = e_1,\ \psi_2 = e_2,\ \ldots\ \psi_{m-3} = e_{m-3} \quad (38),$$

гдѣ снова $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{m-3}$ суть функціи произвольно выбранныя, но впрочемъ опредѣленныя, и къ нимъ присоединить еще одно уравненіе

$$\psi_{m-2} = e_{m-2} \ldots (38'),$$

вычисливъ функцію ψ_{m-2} изъ уравненія въ частныхъ производныхъ перваго порядка. Тогда формула преобразованія будетъ:

$$(39)\ldots C'\partial c' + C'_1\partial c'_1 + \ldots + C'_{m-2}\partial c'_{m-2} = E_1\partial e_1 + E_2\partial e_2 + \ldots + E_{m-2}\partial e_{m-2} = 0.$$

А допустивъ $\partial e_{m-2} = 0$, получимъ

$$E_1\partial e_1 + E_2\partial e_2 + \ldots + E_{m-3}\partial e_{m-3} = 0 \ldots (40)$$

Продолжая разсуждать такимъ-же точно образомъ, мы дойдемъ или до уравненія съ двумя измѣняемыми, или до уравненія между тремя перемѣнными количествами. Первое обстоятельство будетъ имѣть мѣсто въ случаѣ $m+1$ четнаго, а второе въ случаѣ $m+1$ нечетнаго. Уравненіе съ двумя измѣняемыми проинтегрируется обыкновенными способами, а уравненіе между тремя перемѣнными — по теоремѣ Монжа. Во всякомъ случаѣ рядъ формулъ

$$(41)\quad \varphi_m = e_m,\ \psi_{m-2} = e_{m-2},\ \ldots$$

и одинъ интегралъ послѣдняго уравненія, въ случаѣ $m+1$ четнаго, или два интеграла послѣдняго уравненія, въ случаѣ $m+1$ нечетнаго, изобразитъ намъ систему отношеній необходимую и достаточную для интеграціи разсматриваемаго линейнаго дифференціальнаго уравненія.

15. Поэтому мы въ состояніи уже постановить вообще такое предложеніе, оправдываемое трудами Пфаффа и Якоби:

Для интегрированія какого угодно линейнаго дифференціальнаго уравненія между $m + 1$ перемѣнныхъ необходимо и достаточно $\frac{m+1}{2}$ уравненій съ такимъ-же числомъ постоянныхъ произвольныхъ въ случаѣ $m + 1$ четнаго и $\frac{m+2}{2}$ уравненій въ случаѣ $m+1$ нечетнаго.

16. Отложивъ до слѣдующаго § доказательство того, что система уравненій (41) дѣйствительно достаточна для интегрированія уравненія (31), мы укажемъ въ настоящую минуту на тѣ стороны нашего метода, которыя могутъ вселить къ нему недовѣрчивость, и постараемся сколь возможно уничтожить недоразумѣнія.

17. Первая, по-видимому, неловкость способа, изложеннаго нами и выведеннаго изъ теоремы Монжа, заключается въ произвольномъ выборѣ нѣкоторыхъ отношеній, необходимыхъ для перехода отъ одного дифференціальнаго уравненія къ другому съ числомъ перемѣнныхъ единицею меньшимъ. Слѣдствіемъ такого произвола выходитъ то, что при другомъ назначеніи равенствъ

$$\varphi_1 = c_1,\ \varphi_2 = c_2,\ \ldots\ \varphi_{m-1} = c_{m-1};$$
$$\psi_1 = e_1,\ \psi_2 = e_2,\ \ldots\ \psi_{m-3} = e_{m-3};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

окончательная система интегральныхъ уравненій (41), говоря вообще, должна также измѣняться.

Нѣтъ сомнѣнія, что въ большей части случаевъ такъ это и будетъ; но при небольшомъ вниманіи не трудно замѣтить, что противурѣчіе здѣсь являющееся заключается не въ существѣ дѣла, а въ одной формѣ. И точно, если рѣшеніе какого-нибудь вопроса дается системою уравненій, то нѣтъ никакихъ препятствій приводить эту систему къ другимъ видамъ, которыхъ можетъ быть безчисленное множество. Однако въ какой бы формѣ мы ни разсматривали систему, всегда выраженія для неизвѣстныхъ функцій, по-крайней-мѣрѣ уже упрощенныя, должны оставаться одни и тѣ-же. То-же самое имѣетъ мѣсто и въ настоящемъ случаѣ: для извѣстныхъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \psi_1, \psi_2, \ldots$ получается одна система уравненій $\varphi_m = c_m$, $\psi_{m-2} = e_{m-2}, \ldots$; избирая иначе $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \psi_1, \psi_2, \ldots$ мы сообщаемъ другую форму системѣ рѣшеній; но если бы отсюда въ состояніи были вывести выраженія для неизвѣстныхъ функціи x_j, которыхъ $\frac{m+1}{2}$ въ случаѣ $m+1$ четнаго и $\frac{m+2}{2}$ въ случаѣ $m+1$ нечетнаго, то, разумѣется, обѣ системы привели бы насъ къ однимъ результатамъ. Слѣдующее предложеніе также можетъ служить къ подкрѣпленію нашихъ доводовъ:

18. Замѣщеніе $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{m-1}; \psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{m-3}; \ldots$ совершенно произвольными функціями, зависящими отъ этихъ количествъ, не имѣетъ никакого вліянія на опредѣленіе выраженій φ_m, ψ_{m-2}, и т. д., которыя должны входить въ интегральныя отношенія даннаго дифференціальнаго уравненія.

Справедливость этой теоремы подтверждается сцѣпленіемъ такихъ умозаключеній.

19. Лѣвая часть уравненія (9), какъ было замѣчено въ n° 8, есть опредѣлитель системы (7); слѣдовательно, въ силу знакоположенія, принятаго современными геометрами, этотъ опредѣлитель можетъ быть представленъ подъ формою:

$$D = \begin{vmatrix} X, & X_1, & X_2, & \ldots & X_m \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \qquad (42)$$

Уравнявши нулю правую часть этого равенства, мы и получимъ уравненіе (9), отъ котораго зависѣло опредѣленіе функціи φ_m.

Это послѣднее уравненіе, сокращенно, мы изобразимъ чрезъ

$$D = 0 \qquad (43).$$

20. Допустимъ теперь, что для преобразованія уравненія

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots + X_m\,\partial x_m = 0 \qquad (44)$$

въ другое съ числомъ перемѣнныхъ единицею меньше, вмѣсто отношеній

$$\varphi_1 = c_1,\ \varphi_2 = c_2,\ \varphi_3 = c_3,\ \ldots\ \varphi_{m-1} = c_{m-1},$$

берутся слѣдующія

$$\Phi_1\ (\varphi_1) = c_1^0,\ \Phi_2\ (\varphi_2) = c_2^0,\ \ldots\ \Phi_{m-1}\ (\varphi_{m-1}) = \overset{0}{c}_{m-1}, \qquad (45)$$

гдѣ $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_{m-1}$ представляютъ совокупности совершенно произвольныхъ дѣйствій; и докажемъ, что розысканіе функціи Φ_m въ уравненіи

$$\Phi_m = c_m^{(0)} \quad (45'),$$

пополняющемъ извѣстнымъ образомъ систему формулъ (45), зависитъ опять отъ уравненія (43).

Дѣйствительно, продифференцировавъ сполна напр. уравненіе

$$\Phi_j\ (\varphi_j) = c_j^{(0)},$$

мы будемъ имѣть:

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \partial x + \frac{\partial \Phi_j}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \partial x_1 + \frac{\partial \Phi_j}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} + \ldots$$
$$+ \frac{\partial \Phi_j}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_m} \partial x_m = 0.$$

Сдѣлавъ въ немъ $j = 1, 2, \ldots m - 1$, получимъ $m - 1$ такихъ равенствъ. Присоединивъ къ нимъ еще равенство

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial u} \partial x + \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} \partial x_1 + \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_2} \partial x_2 + \ldots + \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_m} \partial x_m = 0,$$

и данное дифференціальное уравненіе, найдемъ систему, которая въ настоящемъ случаѣ будетъ замѣнять прежнюю (7). Опредѣлитель этой системы изобразится чрезъ

$$\left| \begin{matrix} X, & X_1, & X_2, & \ldots\ldots\ldots\ldots & X_m, \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, & \ldots\ldots\ldots & & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x}, & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1}, & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_2}, & \ldots\ldots\ldots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_m} \end{matrix} \right| \quad (46)$$

или, по свойствамъ опредѣлителей, чрезъ

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2}\cdots\frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial\varphi_{m-1}}\begin{vmatrix} X, & X_1, & X_2 & \dots & X_m \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\Phi_m}{\partial x}, & \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_1}, & \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \quad (47)$$

Значитъ, формула:

$$\begin{vmatrix} X, & X_1, & X_2, & \dots & X_m \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_m} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\Phi_m}{\partial x}, & \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_1}, & \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = 0 \quad (48)$$

и доставитъ уравненіе въ частныхъ производныхъ, изъ котораго нужно будетъ искать функцію Φ_m. Лѣвая часть уравненія этого отличается отъ лѣвой части уравненія (43), очевидно, только тѣмъ, что здѣсь вмѣсто φ_m находится Φ_m; слѣдовательно этимъ самымъ мы доказали, что въ сдѣланныхъ нами предположеніяхъ, болѣе общихъ сравнительно съ прежнимъ, первое изъ искомыхъ интегральныхъ отношеній остается безъ всякаго измѣненія.

21. Если мы еще объяснимъ, что первое преобразованное уравненіе въ с не потерпитъ никакой перемѣны, то предложеніе докажется сполна. Для этого допустимъ тожество

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \dots + X_m\,\partial x_m = K_1\,\partial c_1^{(0)} + K_2\,\partial c_2^{(0)} + \dots + K_m\,\partial c_m^{(0)} \quad (49)$$

и найдемъ систему множителей $K_1, K_2, \ldots K_m$.

Наблюдая, что

$$\partial c_m = \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\partial x + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}\partial x_1 + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2}\partial x_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m}\partial x_m,$$

а $$\partial c_j^{(0)} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial \varphi_j}\left\{\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\partial x + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}\partial x_1 + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2}\partial x_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_m}\partial x_m\right\},$$

гдѣ j измѣняется отъ 1 до $m-1$, будемъ имѣть:

$$(50)\quad K_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + K_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_k} + \ldots\ldots$$
$$+ K_{m-1}\frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial \varphi_{m-1}}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x_k} + K_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k} = X_k.$$

Подставивъ сюда вмѣсто к по очереди $0, 1, 2, \ldots m$, найдемъ систему $m+1$ уравненій съ числомъ m неизвѣстныхъ $K_1, K_2, \ldots K_m$. Отдѣливши въ этой системѣ послѣднія m уравненій, опредѣлитель ихъ выразится такъ:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, & \ldots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial \varphi_{m-1}}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial \varphi_{m-1}}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x_2}, & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m}, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_m}, & \ldots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial \varphi_{m-1}}\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x_m}, & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \quad (51)$$

Здѣсь члены, расположенные въ первыхъ $m-1$ вертикальныхъ столбцахъ имѣютъ общихъ множителей; слѣд. опять предъидущая формула приведется къ виду:

$$(52)\quad D_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, & \ldots & \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x_2}, & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_m}, & \ldots & \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x_m}, & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_2}\ldots\frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial \varphi_{m-1}}$$

но множитель при $\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2}\cdots\frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial\varphi_{m-1}}$ очевидно есть опредѣлитель послѣднихъ m уравненій въ системѣ (15), который въ формулѣ (24) означенъ чрезъ Δ_1; слѣд.

$$D_1 = \frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_1}\cdot\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2}\cdots\frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial\varphi_{m-1}}\cdot\Delta_1 \quad (53)$$

22. Написавши теперь общее выраженіе для множителя K_j

$$(54)\quad K_j = \frac{D'_1\left\{\frac{\partial\Phi_j}{\partial\varphi_j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_1}\right\}X_1 + D'_1\left\{\frac{\partial\Phi_j}{\partial\varphi_j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_2}\right\}X_2 + \ldots}{D_1}$$
$$\frac{+ D'_1\left\{\frac{\partial\Phi_j}{\partial\varphi_j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_m}\right\}X_m}{D_1}$$

не трудно будетъ его преобразовать. Числитель въ правой части этой формулы есть опредѣлитель вида

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial\Phi_{j-1}}{\partial\varphi_{j-1}}\frac{\partial\varphi_{j-1}}{\partial x_1}, \frac{\partial\Phi_{j+1}}{\partial\varphi_{j+1}}\frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial\varphi_{m-1}}\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x_1}, X_1 \\
\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}, \frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial\Phi_{j-1}}{\partial\varphi_{j-1}}\frac{\partial\varphi_{j-1}}{\partial x_2}, \frac{\partial\Phi_{j+1}}{\partial\varphi_{j+1}}\frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial\varphi_{m-1}}\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x_2}, X_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_m}, \frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_m}, \ldots \frac{\partial\Phi_{j-1}}{\partial\varphi_{j-1}}\frac{\partial\varphi_{j-1}}{\partial x_m}, \frac{\partial\Phi_{j+1}}{\partial\varphi_{j+1}}\frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial x_m}, \ldots \frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial\varphi_{m-1}}\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x_m}, X_m
\end{vmatrix}$$

или что все равно:

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2}\cdots\cdot\frac{\partial\Phi_{j-1}}{\partial\varphi_{j-1}}\cdot\frac{\partial\Phi_{j+1}}{\partial\varphi_{j+1}}\cdots\cdot\frac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial\varphi_{m-1}}\,X$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial\varphi_{j-1}}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x_1}, X_1 \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial\varphi_{j-1}}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x_2}, X_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_m}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_m}, \ldots \frac{\partial\varphi_{j-1}}{\partial x_m}, \frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial x_m}, \ldots \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x_m}, X_m \end{vmatrix};$$

поэтому въ силу (53):

$$K_j = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial\varphi_{j-1}}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x_1}, X_1 \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial\varphi_{j-1}}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x_2}, X_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_m}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_m}, \ldots \frac{\partial\varphi_{j-1}}{\partial x_m}, \ldots\ldots\ldots\ldots X_m \end{vmatrix}}{\frac{\partial\Phi_j}{\partial\varphi_j}\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_m}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_m}, \ldots \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}}. \quad (55)$$

или по силѣ формулы (24)

$$K_j = \frac{1}{\frac{\partial\Phi_j}{\partial\varphi_j}} . C_j \quad (56).$$

Измѣняя j отъ 1 до $m-1$, найдемъ $K_1, K_2, \ldots K_{m-1}$; а такъ какъ для $j=m$, $\frac{\partial\Phi_m}{\partial\varphi_m}=1$, то $K_m = C_m$, и (49) перейдетъ въ

$$(57) \quad X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots + X_m\,\partial x_m = \frac{1}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_1}} . C_1\,\partial c_1^{(0)}$$

$$+ \frac{1}{\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_2}} C_2 \, \partial c_2^{(0)} + \ldots + \frac{1}{\frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial \varphi_{m-1}}} . C_{m-1} \, \partial c_{m-1}^{(0)} + C_m \, \partial c_m^{(0)},$$

гдѣ множители $\frac{1}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_1}}, \frac{1}{\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_2}}, \ldots \frac{1}{\frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial \varphi_{m-1}}}$ нужно будетъ выразить чрезъ величины $c^{(0)}$.

23. Сдѣлать это можно слѣдующимъ образомъ: такъ какъ у насъ было

$$\varphi_j = c, \; \Phi_j \, (\varphi_j) = c_j^{(0)},$$

при чемъ $c_j^{(0)}$ разсматривалось нѣкоторою функціею отъ c_j, то, во 1-хъ,

$$\Phi_j \, (\varphi_j) = \Phi_j \, (c_j) = c_j^{(0)} \; ; \quad (58)$$

во 2-хъ,

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial c_j} = \frac{\partial c_j^{(0)}}{\partial c_j};$$

и слѣдовательно:

$$\frac{1}{\frac{\partial \Phi_j}{\partial \varphi_j}} = \frac{1}{\frac{\partial \Phi_j}{\partial c_j}} = \frac{\partial c_j}{\partial c_j^{(0)}} \quad (59)$$

отсюда:

$$X \, \partial x + X_1 \, \partial x_1 + \ldots + X_m \, \partial x_m = C_1 \, \partial c_1 + C_2 \, \partial c_2 + \ldots + C_m \, \partial c_m \quad (60),$$

т. е. прежнее (14) или (31) равенство; что и слѣдовало доказать.

24. Къ преобразованному равенству

$$C_1 \, \partial c_1 + C_2 \, \partial c_2 + \ldots + C_{m-1} \, \partial c_{m-1} = 0 \text{ или}$$
$$C' \, \partial c' + C'_1 \, \partial c'_1 + C'_2 \, \partial c'_2 + \ldots + C'_{m-2} \, \partial c'_{m-2} = 0$$

очевидно прикладываются всѣ прежнія сужденія; а потому предположеніе

$$\Psi_1 \, (\psi_1) = e_1^{(0)}, \; \Psi_2 \, (\psi_2) = e_2^{(0)}, \ldots \Psi_{m-3} \, (\psi_{m-3}) = e_{m-3}^{(0)}$$

приведетъ опять къ прежнему интегральному отношенію

$$\psi_{m-2} = e_{m-2}$$

и прежнему же второму преобразованному уравненію; слѣдовательно и прочее.

25. Свойства опредѣлителей позволяютъ также дать болѣе общій характеръ доказательству нашей теоремы.

Въ самомъ дѣлѣ, чтобы уравненіе

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots + X_m\,\partial x_m = 0 \quad (61)$$

самымъ общимъ образомъ преобразовать въ другое съ числомъ перемѣнныхъ единицею меньше, можемъ допустить слѣдующія отношенія:

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_1\,(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\ \varphi_{m-1}) = c^{00}_{1} \\ \Pi_2\,(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\ \varphi_{m-1}) = c^{00}_{2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Pi_{m-1}\,(\varphi_1,\ \varphi_2,\ldots\ \varphi_{m-1}) = c^{00}_{m-1} \end{array}\right\} \quad (62)$$

и искать уравненіе въ частныхъ производныхъ, изъ котораго можно было бы опредѣлить функцію Π_m такъ, чтобы равенство

$$\Pi_m = c^{00}_{m} \quad (62')$$

было однимъ изъ искомыхъ интегральныхъ отношеній. Продифференцировавъ формулу

$$\Pi_j\,(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\ \varphi_{m-1}) = c^{00}_{j}$$

въ предложеніи c^{00}_{j} постояннымъ, получимъ:

$$\frac{\partial\Pi_j}{\partial\varphi_1}\,\partial\varphi_1 + \frac{\partial\Pi_j}{\partial\varphi_2}\,\partial\varphi_2 + \ldots + \frac{\partial\Pi_j}{\partial\varphi_{m-1}}\,\partial\varphi_{m-1} = 0,$$

или

$$\Pi_{j.0}\,\partial x + \Pi_{j.1}\,\partial x_1 + \Pi_{j.2}\,\partial x_2 + \ldots + \Pi_{j.m-1}\,\partial x_{m-1} + \Pi_{j.m}\,\partial x_m = 0 \quad (63),$$

гдѣ вообще

$$\Pi_{j.\kappa} = \frac{\partial \Pi_j}{\partial \varphi_1}\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_\kappa} + \frac{\partial \Pi_j}{\partial \varphi_2}\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_\kappa} + \ldots + \frac{\partial \Pi_j}{\partial \varphi_{m-1}} \cdot \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x_\kappa} \quad (64).$$

Уравненіе (63) заключаетъ въ себѣ $m-1$ равенствъ. Если ихъ разсматривать вмѣстѣ съ

$$(63') \quad \frac{\partial \Pi_m}{\partial x}\,\partial x + \frac{\partial \Pi_m}{\partial x_1}\,\partial x_1 + \frac{\partial \Pi_m}{\partial x_2}\,\partial x_2 + \ldots + \frac{\partial \Pi_m}{\partial x_m}\,\partial x_m = 0$$

и съ даннымъ (61), и составить опредѣлитель системы; то отношеніе

$$\begin{vmatrix} X, & X, & X_2, & \ldots\ldots & X_m \\ \Pi_{1.0}, & \Pi_{1.1}, & \Pi_{1.2}, & \ldots\ldots & \Pi_{1.m} \\ \Pi_{2.0}, & \Pi_{2.1}, & \Pi_{2.2}, & \ldots\ldots & \Pi_{2.m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Pi_{m-1.0}, & \Pi_{m-1.1}, & \Pi_{m-1.2}, & \ldots & \Pi_{m-1.m} \\ \frac{\partial \Pi_m}{\partial x}, & \frac{\partial \Pi_m}{\partial x_1}, & \frac{\partial \Pi_m}{\partial x_2}, & \ldots\ldots & \frac{\partial \Pi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = 0 \ldots (65)$$

будетъ искомымъ уравненіемъ въ частныхъ производныхъ.

26. Преобразованіе этого уравненія совершится на основаніи слѣдующихъ свойствъ опредѣлителей:

1) Величина опредѣлителя не измѣнится, если въ символическомъ его выраженіи линіи замѣнить столбцами, а столбцы линіями. Но если переставить между собою двѣ линіи, или два столбца, то опредѣлитель перемѣнитъ знакъ, сохранивъ то-же самое численное значеніе. Поэтому, опредѣлитель обращается въ нуль, коль-скоро двѣ линіи или два столбца сдѣлаются тожественными.

2) Если въ выраженіи опредѣлителя всѣ члены одной линіи, или одного столбца умножить на одно и то-же количество, то это все равно, что самый опредѣлитель помножить тѣмъ-же количествомъ. Этими двумя свойствами мы уже пользовались въ предыдущихъ сужденіяхъ.

3) Если элементы какой-нибудь линіи или какого-нибудь столбца суть суммы нѣсколькихъ количествъ, то опредѣлитель равняется суммѣ такого числа другихъ опредѣлителей, сколько находится этихъ количествъ; такъ что:

$$\begin{vmatrix} a_1 + g_1, & b_1, & c_1 \ldots \\ a_2 + g_2, & b_2, & c_2, \ldots \\ a_3 + g_3, & b_3, & c_3, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, \ldots \\ a_2, & b_2, & c_2, \ldots \\ a_3, & b_3, & c_3, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_1, & b_1, & c_1, \ldots \\ g_2, & b_2, & c_2, \ldots \\ g_3, & b_3, & c_3, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Если количества g_1, g_2, g_3, . . . , прибавляемыя къ элементамъ опредѣлителя, суть члены b_1, b_2, b_3, . . . или c_1, c_2, c_3, . . . другаго столбца, или отличаются отъ нихъ постояннымъ множителемъ; то второй опредѣлитель въ правой части исчезаетъ; такимъ образомъ

$$\begin{vmatrix} a_1 + hb_1, & b_1, & c_1 \ldots \\ a_2 + hb_2, & b_2, & c_2 \ldots \\ a_3 + hb_3, & b_3, & c_3 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, \ldots \\ a_2, & b_2, & c_2, \ldots \\ a_3, & b_3, & c_3, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

27. Подставивъ въ (65) вмѣсто $\Pi_{j.k}$ ихъ значенія изъ формулы (64), въ силу теоремъ, лишь-только приведенныхъ, уравненіе (65) приметъ видъ произведенія двухъ опредѣлителей:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Pi_1}{\partial \varphi_1}, & \frac{\partial \Pi_1}{\partial \varphi_2}, & \dots & \frac{\partial \Pi_1}{\partial \varphi_{m-1}} \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial \varphi_1}, & \frac{\partial \Pi_2}{\partial \varphi_2}, & \dots & \frac{\partial \Pi_2}{\partial \varphi_{m-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial \varphi_1}, & \frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial \varphi_2}, & \dots & \frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial \varphi_{m-1}} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} X, & X_1, & X_2, & \dots & X_m \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \Pi_m}{\partial x}, & \frac{\partial \Pi_m}{\partial x_1}, & \frac{\partial \Pi_m}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial \Pi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = 0 \quad (66);$$

и слѣдовательно розысканіе функціи Π_m сведется на рѣшеніе уравненія:

$$\begin{vmatrix} X, & X_1, & X_2, & \dots & X_m \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, & \dots & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Pi_m}{\partial x}, & \frac{\partial \Pi_m}{\partial x_1}, & \frac{\partial \Pi_m}{\partial x_2}, & \dots & \frac{\partial \Pi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = 0 \quad (67)$$

которое отличается отъ (9) только тѣмъ, что здѣсь находится Π_m вмѣсто φ_m; слѣдовательно и прочее.

28. Послѣ этого нетрудно открыть систему множителей $H_1, H_2, H_3 \dots H_m$ такого свойства, что будемъ имѣть

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \dots + X_m\,\partial x_m = H_1\,\partial c_1^{00} + H_2\,\partial c_2^{00} + \dots + H_m\,\partial c_m^{00} \quad (68).$$

Для этого поступить должно слѣдующимъ образомъ: замѣтивъ, что

$$\partial c_j^{00} = \frac{\partial \Pi_j}{\partial c_1} \partial c_1 + \frac{\partial \Pi_j}{\partial c_2} \partial c_2 + \ldots + \frac{\partial \Pi_j}{\partial c_{m-1}} \partial c_{m-1}, \quad (69)$$

гдѣ $c_1, c_2, c_3, \ldots c_{m-1}$ введены для краткости вмѣсто $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{m-1}$, а j измѣняется въ предѣлахъ 1 и $m-1$; для $\partial c_1, \partial c_2, \ldots \partial c_{m-1}$ равно какъ и на мѣсто $\partial c_m^{00} = \partial c_m$ нужно будетъ подставить ихъ выраженія вида:

$$\partial c_k = \frac{\partial c_k}{\partial x} \partial x + \frac{\partial c_k}{\partial x_1} \partial x_1 + \frac{\partial c_k}{\partial x_2} \partial x_2 + \ldots + \frac{\partial c_k}{\partial x_m} \partial x_m,$$

въ слѣдствіе чего ∂c_j^{00} перейдетъ въ

$$\begin{aligned} \partial c_j^{00} = & \left\{ \frac{\partial \Pi_j}{\partial c_1} \frac{\partial c_1}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_j}{\partial c_2} \frac{\partial c_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial \Pi_j}{\partial c_{m-1}} \frac{\partial c_{m-1}}{\partial x} \right\} \partial x \\ & + \left\{ \frac{\partial \Pi_j}{\partial c_1} \frac{\partial c_1}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_j}{\partial c_2} \frac{\partial c_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \Pi_j}{\partial c_{m-1}} \frac{\partial c_{m-1}}{\partial x_1} \right\} \partial x_1 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left\{ \frac{\partial \Pi_j}{\partial c_1} \frac{\partial c_1}{\partial x_m} + \frac{\partial \Pi_j}{\partial c_2} \frac{\partial c_2}{\partial x_m} + \ldots + \frac{\partial \Pi_j}{\partial c_{m-1}} \frac{\partial c_{m-1}}{\partial x_m} \right\} \partial x_m; \end{aligned}$$

или проще въ

$$\partial c_1^{00} = L_{j.0}\, \partial x + L_{j.1}\, \partial x_1 + L_{j.2}\, \partial x_2 + \ldots + L_{j.m}\, \partial x_m \quad (70),$$

гдѣ

$$L_{jr} = \frac{\partial \Pi_j}{\partial c_1} \frac{\partial c_1}{\partial x_r} + \frac{\partial \Pi_j}{\partial c_2} \frac{\partial c_2}{\partial x_r} + \ldots + \frac{\partial \Pi_j}{\partial c_{m-1}} \frac{\partial c_{m-1}}{\partial x_r} \quad (71).$$

Послѣ этого равенство (68) разобьется на $m+1$ другихъ, заключающихся въ общемъ выраженіи

$$H_1 L_{1.s} + H_2 L_{2.s} + \ldots + H_{m-1} L_{m-1.s} + H_m \frac{\partial c_m}{\partial x_s} = X_s \quad (72).$$

Отдѣливъ отсюда послѣднія m равенствъ; мы вычислимъ всѣ H. Если опредѣлитель этихъ m равенствъ будетъ D_2, то онъ изобразится чрезъ:

$$D_2 = \begin{vmatrix} L_{1.1}, & L_{2.1}. & L_{3.1}, \ldots L_{m-1.1}, & \frac{\partial c_m}{\partial x_1} \\ L_{1.2}, & L_{2.2}, & \ldots\ldots L_{m-1.2}, & \frac{\partial c_m}{\partial x_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{1.m}, & L_{2.m}, & \ldots\ldots L_{m-1.m}, & \frac{\partial c_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \quad (73)$$

а имѣя въ виду розысканіе H_j, гдѣ j не больше $m-1$, числитель въ выраженіи для H_j будетъ слѣдующимъ опредѣлителемъ

$$\begin{vmatrix} L_{1.1}, L_{2.1}, \ldots L_{j-1.1}, L_{j+1.1}, \ldots L_{m-1.1}, \frac{\partial c_m}{\partial x_1}, X_1 \\ L_{1.2}, L_{2.2}, \ldots L_{j-1.2}, L_{j+1.2}, \ldots L_{m-1.2}, \frac{\partial c_m}{\partial x_2}, X_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_{1.m}, L_{2.m}, \ldots L_{j-1.m}, L_{j+1.m}, \ldots L_{m-1.m}, \frac{\partial c_m}{\partial x_m}, X_m \end{vmatrix} \quad (74).$$

Во уваженіе извѣстныхъ уже свойствъ опредѣлителей, оба послѣдніе опредѣлителя преобразуются такъ:

1-й въ произведеніе двухъ опредѣлителей

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Pi_1}{\partial \varphi_1}, & \frac{\partial \Pi_2}{\partial \varphi_1}, & \ldots & \frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial \varphi_1} \\ \frac{\partial \Pi_1}{\partial \varphi_2}, & \frac{\partial \Pi_2}{\partial \varphi_2}, & \ldots & \frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial \varphi_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \Pi_1}{\partial \varphi_{m-1}}, & \frac{\partial \Pi_2}{\partial \varphi_{m-1}}, & \ldots & \frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial \varphi_{m-1}} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial c_2}{\partial x_1}, & \ldots & \frac{\partial c_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial c_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial c_2}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial c_m}{\partial x_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial c_1}{\partial x_m}, & \frac{\partial c_2}{\partial x_m}, & \ldots & \frac{\partial c_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \quad (75);$$

2-й въ сумму вида:

$$
\Pi'\left(\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_1}\right)
\begin{vmatrix}
\frac{\partial c_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial c_3}{\partial x_1}, & \ldots & \frac{\partial c_m}{\partial x_1}, & X_1 \\
\frac{\partial c_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial c_3}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial c_m}{\partial x_2}, & X_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial c_2}{\partial x_m}, & \frac{\partial c_3}{\partial x_m}, & \ldots & \frac{\partial c_m}{\partial x_m}, & X_m
\end{vmatrix}
$$

$$
+\Pi'\left(\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_2}\right)
\begin{vmatrix}
\frac{\partial c_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial c_3}{\partial x_1}, & \ldots & \frac{\partial c_m}{\partial x_1}, & X_1 \\
\frac{\partial c_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial c_3}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial c_m}{\partial x_2}, & X_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial c_1}{\partial x_m}, & \frac{\partial c_3}{\partial x_m}, & \ldots & \frac{\partial c_m}{\partial x_m}, & X_m
\end{vmatrix}
$$

$$
+\ldots+\Pi'\left(\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_j}\right)
\begin{vmatrix}
\frac{\partial c_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial c_2}{\partial x_1}, & \ldots & \frac{\partial c_{j-1}}{\partial x_1}, & \frac{\partial c_{j+1}}{\partial x_1}, & \ldots & \frac{\partial c_m}{\partial x_1}, & X_1 \\
\frac{\partial c_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial c_2}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial c_{j-1}}{\partial x_2}, & \frac{\partial c_{j+1}}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial c_m}{\partial x_2}, & X_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial c_1}{\partial x_m}, & \frac{\partial c_2}{\partial x_m}, & \ldots & \frac{\partial c_{j-1}}{\partial x_m}, & \frac{\partial c_{j+1}}{\partial x_m}, & \ldots & \frac{\partial c_m}{\partial x_m}, & X_m
\end{vmatrix}
\tag{76}
$$

$$
+\ldots+\Pi'\left(\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_{m-1}}\right)
\begin{vmatrix}
\frac{\partial c_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial c_2}{\partial x_1}, & \ldots & \frac{\partial c_{m-2}}{\partial x_1}, & \frac{\partial c_m}{\partial x_1}, & X_1 \\
\frac{\partial c_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial c_2}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial c_{m-2}}{\partial x_2}, & \frac{\partial c_m}{\partial x_2}: & X_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial c_1}{\partial x_m}, & \frac{\partial c_2}{\partial x_m}, & \ldots & \frac{\partial c_{m-2}}{\partial x_m}, & \frac{\partial c_m}{\partial x_m}, & X_m,
\end{vmatrix}
$$

гдѣ вообще $\Pi'\left(\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_h}\right)$ изображаетъ производную по измѣняемости $\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_h}$, какъ простаго количества, взятую отъ

$$\Pi = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Pi_1}{\partial c_1}, & \frac{\partial \Pi_2}{\partial c_1}, & \ldots & \frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial c_1} \\ \frac{\partial \Pi_1}{\partial c_2}, & \frac{\partial \Pi_2}{\partial c_2}, & \ldots & \frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial c_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \Pi_1}{\partial c_{m-1}}, & \frac{\partial \Pi_2}{\partial c_{m-1}}, & \ldots & \frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial c_{m-1}} \end{vmatrix} \quad (77).$$

Такъ какъ множитель:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial c_2}{\partial x_1}, & \ldots & \frac{\partial c_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial c_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial c_2}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial c_m}{\partial x_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial c_1}{\partial x_m}, & \frac{\partial c_2}{\partial x_m}, & \ldots & \frac{\partial c_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}$$

въ (75) есть Δ_1 формулы (24), а множитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial c_2}{\partial x_1}, & \ldots & \frac{\partial c_{h-1}}{\partial x_1}, & \frac{\partial c_{h+1}}{\partial x_1}, & \ldots & \frac{\partial c_m}{\partial x_1}, & X_1 \\ \frac{\partial c_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial c_2}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial c_{h-1}}{\partial x_2}, & \frac{\partial c_{h+1}}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial c_m}{\partial x_2}, & X_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial c_1}{\partial x_m}, & \frac{\partial c_2}{\partial x_m}, & \ldots & \frac{\partial c_{h-1}}{\partial x_m}, & \frac{\partial c_{h+1}}{\partial x_m}, & \ldots & \frac{\partial c_m}{\partial x_m}, & X_m \end{vmatrix}$$

при $\Pi'\left(\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_h}\right)$ въ (76), очевидно, составляетъ числителя въ выраженіи C_h по формулѣ (24); то искомое H_j можетъ быть представлено такъ:

$$H_j = \frac{\Pi'\left(\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_1}\right)C_1 + \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_2}\right)C_2 + \ldots + \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_{m-1}}\right)C_{m-1}}{\Pi} \quad (78)$$

Положивъ въ этой формулѣ $j = 1, 2, \ldots m-1$, получимъ соотвѣтственныя значенія для $H_1, H_2, \ldots H_{m-1}$. Что касается H_m, то величина его найдется сей-часъ. Числитель въ выраженіи H_m выводится изъ знаменателя (73) чрезъ подстановку количествъ

$$X_1, X_2, \ldots X_m$$

вмѣсто $\frac{\partial c_m}{\partial x_1}, \frac{\partial c_m}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial c_m}{\partial x_m}$; слѣдовательно по (75) онъ изобразится такъ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Pi_1}{\partial c_1}, & \frac{\partial \Pi_2}{\partial c_1}, & \ldots & \frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial c_1} \\ \frac{\partial \Pi_1}{\partial c_2}, & \frac{\partial \Pi_2}{\partial c_2}, & \ldots & \frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial c_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \Pi_1}{\partial c_{m-1}}, & \frac{\partial \Pi_2}{\partial c_{m-1}}, & \ldots & \frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial c_{m-1}} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial c_2}{\partial x_1}, & \ldots & \frac{\partial c_{m-1}}{\partial x_1}, & X_1 \\ \frac{\partial c_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial c_2}{\partial x_2}, & \ldots & \frac{\partial c_{m-1}}{\partial x_2}, & X_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial c_1}{\partial x_m}, & \frac{\partial c_2}{\partial x_m}, & \ldots & \frac{\partial c_{m-1}}{\partial x_m}, & X_m \end{vmatrix} \quad (79)$$

гдѣ вмѣсто $\frac{\partial \Pi_r}{\partial \varphi_s}$ поставлено $\frac{\partial \Pi_r}{\partial c_s}$ для однообразія съ предыдущимъ: первый множитель въ этомъ произведеніи есть наше Π (77), а второй производитель равняется числителю формулы (24) въ предположеніи $j = m$; поэтому

$$H_m = C_m \ldots (80).$$

29. Найдя такимъ образомъ систему величинъ H_1, $H_2, \ldots H_m$, легко увѣриться, что она удовлетворяетъ остальному условному равенству системы (72).

30. Не дѣлая впрочемъ этихъ выкладокъ, не представляющихъ теперь рѣшительно никакого затрудненія, мы возвратимся къ формулѣ (68) и вставимъ въ нее вмѣсто ∂c_j^{00} его выраженіе (69), будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + \ldots + X_m\,\partial x_m = \\ \left\{ H_1 \frac{\partial \Pi_1}{\partial c_1} + H_2 \frac{\partial \Pi_2}{\partial c_1} + \ldots + H_{m-1} \frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial c_1} \right\} \partial c_1 + \\ \left\{ H_1 \frac{\partial \Pi_1}{\partial c_2} + H_2 \frac{\partial \Pi_2}{\partial c_2} + \ldots + H_{m-1} \frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial c_2} \right\} \partial c_2 + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ \left\{ H_1 \frac{\partial \Pi_1}{\partial c_{m-1}} + H_2 \frac{\partial \Pi_2}{\partial c_{m-1}} + \ldots + H_{m-1} \frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial c_{m-1}} \right\} \partial c_{m-1} + \\ C_m\ \partial c_m. \end{aligned} \quad (81)$$

Возьмемъ еще равенство (78) и напишемъ его такъ:

$$\Pi'\left(\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_1}\right) C_1 + \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_2}\right) C_2 + \ldots + \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_{m-1}}\right) C_{m-1} = \Pi H_j \ (82).$$

Оно представляетъ намъ систему $(m-1)$ уравненій между величинами $C_1, C_2, \ldots C_{m-1}$. Когда система эта будетъ разрѣшена, тогда въ силу извѣстнаго отношенія

$$\begin{vmatrix} \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial c_1}\right), \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial c_2}\right), \ldots \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial c_{m-1}}\right) \\ \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial c_1}\right), \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial c_2}\right), \ldots \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial c_{m-1}}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial c_1}\right), \Pi\left(\frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial c_2}\right), \ldots \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial c_{m-1}}\right) \end{vmatrix} = \Pi \ (83)$$

окажется, что величины C будутъ даваться формулою

$$C_j = H_1 \frac{\partial \Pi_1}{\partial c_j} + H_2 \frac{\partial \Pi_2}{\partial c_j} + \ldots + H_{m-1} \frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial c_j}, \ (84)$$

которая тожеству (81) сей-часъ дастъ знакомый уже намъ видъ:

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots + X_m\,\partial x_m = C_1\,\partial c + C_2\,\partial c_2 + \ldots + C_m\,\partial c_m;$$

слѣдовательно и прочее.

31. Всѣми предыдущими умозрѣніями, надѣемся, мы освободили нашъ способъ отъ главнѣйшаго, по нашему мнѣнію, возраженія. Изслѣдованія §§ III и IV еще болѣе будутъ способствовать къ разсѣянію сомнѣній, высказанныхъ въ n° 17.

32. Другое неудобство, можно думать, состоитъ въ томъ, что въ преобразованныхъ уравненіяхъ между величинами c или c', e или e', и т. д. коэффиціенты C илу C', E или E', и т. д. содержатъ еще x, c_1, и т. д. Но легко видѣть, что обстоятельство это нисколько не вредитъ существу дѣла, потому что x, c_1 и т д. во всѣхъ преобразованныхъ уравненіяхъ разсматриваются постоянными. Впрочемъ, если угодно, ихъ всегда можно вывести изъ вычисленія, назначивъ только приличнымъ образомъ функціи

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\ \varphi_{m-1},\ \psi_1,\ \psi_2,\ \ldots\ \psi_{m-3},\ \text{и т. д.}$$

33. Идея эта находится въ самомъ близкомъ соотношеніи съ изслѣдованіями Пфаффа, Якоби и другими изъ моихъ собственныхъ; поэтому мы переходимъ къ слѣдующимъ §§.