сильна была бы перестановкѣ слагаемыхъ, отъ чего y по виду не измѣнится.

Случай уравненія

$$(21)\qquad y''+a^2y=0,$$

не представляетъ большихъ затрудненій; рѣшеніе его можетъ быть получено изъ (20) такъ же, какъ и это послѣднее уравненіе изъ прежняго уравненія (8), чрезъ перемѣну a на $a\sqrt{-1}$; и мы поэтому можемъ прямо написать:

$$(22)\qquad y=C'e^{ax\sqrt{-1}}+C''e^{-ax\sqrt{-1}};$$

но сюда входятъ мнимыя величины; онѣ устранятся, если мы подставимъ сюда вмѣсто экспоненціальныхъ функцій ихъ извѣстныя выраженія черезъ тригонометрическія и соберемъ члены съ cos и съ sin; будемъ имѣть:

$$(23)\qquad y=(C'+C'')\cos ax+(C'-C'')\sqrt{-1}\sin ax,$$

или, полагая $C'+C''=A$; $(C'-C'')\sqrt{-1}=B$:

$$(24)\qquad y=A\cos ax+B\sin ax.$$

Полагая $A=K\cos\alpha$, $B=K\sin\alpha$, найдемъ $K=\sqrt{A^2+B^2}$, $\cos\alpha=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B}}$, $\sin\alpha=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, а выраженіе y приведемъ къ такому виду:

$$(25)\qquad y=K\cos(ax+\alpha),$$

гдѣ K и α такія же произвольныя постоянныя, какъ и A и B, изъ которыхъ онѣ составлены. Въ этой формѣ можно получить интегралъ уравненія (20), если прямо къ нему приложить изложенную методу, что предоставляется сдѣлать читателю самому, какъ примѣръ для упражненія.

116. Болѣе общій случай уравненія

$$(1)\qquad f(y^{(n)},\ y^{(n-2)})=0,$$

содержащаго не двѣ послѣдовательныя производныя, а чрезъ одну, приводится къ только-что разсмотрѣнному уравненію, если положить $y^{(n-2)}=p$; тогда мы будемъ имѣть:

$$(2)\qquad f(p'',p)=0.$$

Если это уравненіе рѣшимо относительно p'' и мы получаемъ изъ него

$$(3)\qquad p''=\varphi(p),$$

то по предыдущему § найдемъ: $p'^2=2\int_{p_0}^{p}\varphi(p)dp+C$, и далѣе:

$$(4)\qquad dx=\frac{dp}{\sqrt{2\int_{p_0}^{p}\varphi(p)dp+C}};\quad \text{слѣд.}\quad x=\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\sqrt{2\int_{p_0}^{p}\varphi(p)dp+C}}+C_1;$$

такъ какъ $dy^{(n-3)}=y^{(n-2)}dx=pdx$, то будемъ имѣть:

$$y^{(n-3)}=\int_{p_0}^{p}\frac{pdp}{\sqrt{2\int_{p_0}^{p}\varphi(p)dp+C}}+C_2; \tag{5}$$

такъ какъ $dy^{(n-4)}=y^{(n-3)}dx$, то будетъ

$$y^{(n-4)}=\int_{p_0}^{p}\left(\int_{p_0}^{p}\frac{pdp}{\sqrt{2\int_{p_0}^{p}\varphi(p)dp+C}}\right)\frac{dp}{\sqrt{2\int_{p_0}^{p}\varphi(p)dp+C}}+C_2x+C_3; \tag{6}$$

и т. д.

Если уравненіе (1) рѣшимо относительно $y^{(n-2)}$ и даетъ

$$y^{(n-2)}=\psi(q), \tag{7}$$

гдѣ $q=y^{(n)}$; то, дифференцируя это выраженіе, мы будемъ имѣть:

$$dy^{(n)}=y^{(n-1)}dx=\psi'(q)dq; \tag{8}$$

откуда находимъ:

$$dx=\frac{1}{y^{(n-1)}}\psi'(q)dq. \tag{9}$$

Чтобы выразить $y^{(n-1)}$ чрезъ q, замѣтимъ, что $dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx=qdx$; внося сюда вмѣсто dx только что найденное выраженіе его и помножая на $2y^{(n-1)}$, мы получимъ:

$$2y^{(n-1)}dy^{(n-1)}=2q\psi'(q)dq; \tag{10}$$

интегрируя, найдемъ:

$$(y^{(n-1)})^2=\int_{q_0}^{q}2q\psi'(q)dq+C; \tag{11}$$

отсюда

$$y^{(n-1)}=\sqrt{\int_{q_0}^{q}2q\psi'(q)dq+C}; \tag{12}$$

внося это въ (9), будемъ имѣть:

$$dx=\frac{\psi'(q)dq}{\sqrt{\int_{q_0}^{q}2q\psi'(q)dq+C}}, \tag{13}$$

и, слѣд.

$$x=\int_{q_0}^{q}\frac{\psi'(q)dq}{\sqrt{\int_{q_0}^{q}2q\psi'(q)dq+C}}+C_1. \tag{14}$$

Такъ какъ $dy^{(n-3)}=y^{(n-2)}dx=\psi(q)dx$, то, внося сюда вмѣсто dx его выраженіе изъ (13) и интегрируя, будемъ имѣть:

$$y^{(n-3)}=\int_{q_0}\frac{\psi(q)\psi'(q)dq}{\sqrt{\int_{q_0}^{q}2q\psi'(q)dq+C}}+C_2. \tag{15}$$

Такъ какъ $dy^{(n-4)}=y^{(n-3)}dx$, то, помножая это на (13) и интегрируя, получимъ:

$$(16)\quad y^{(n-4)}=\int_{q_0}^{q}\left(\int_{q_0}^{q}\frac{\psi(q)\psi'(q)dq}{\sqrt{\int_{q_0}^{q}2q\psi'(q)dq+C}}\right)\frac{\psi'(q)dq}{\sqrt{\int_{q_0}^{q}2q\psi'(q)dq+C}}+C_2x+C_3$$

и т. д.; наконецъ дойдемъ до выраженія y чрезъ q и x; исключая q изъ этого выраженія y и изъ (14), получимъ искомый полный интегралъ.

117. Подобно тому, какъ въ §§ 114 и 116 мы достигали пониженія порядка дифференціальнаго уравненія полагая равною p производную низшаго порядка, такъ точно это можно сдѣлать, когда дано уравненіе такого вида:

$$(1)\qquad f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots y^{(n)})=0;$$

полагая

$$(2)\qquad y^{(k)}=p,$$

мы преобразуемъ это уравненіе въ такое:

$$(3)\qquad f(x, p, p', p'', \dots p^{(n-k)})=0,$$

и если мы его проинтегрируемъ, то получимъ полный его интегралъ въ видѣ уравненія:

$$(4)\qquad F(x, p; C_1, C_2, \dots C_{n-k})=0;$$

если оно рѣшимо относительно p, то достаточно будетъ взять k разъ квадратуру отъ этого выраженія, чтобы получить полный интегралъ уравненія (1), ибо эта квадратура введетъ по § 114 недостающія k произвольныя постоянныя.

118. Если данное уравненіе не содержитъ независимой перемѣнной x, слѣд. вида:

$$(1)\qquad f(y, y', y'', y''' \dots y^{(n)})=0,$$

то его порядокъ можетъ быть пониженъ на 1; для этого нужно его преобразовать, полагая $y'=p$ и вводя y вмѣсто x какъ независимую перемѣнную. Изъ уравненія

$$(2)\qquad y'=\frac{dy}{dx}=p$$

получаемъ

$$(3)\qquad dx=\frac{1}{p}dy;$$

потому будемъ имѣть:

$$(4)\qquad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=p\frac{dp}{dy};$$

$$(5)\qquad y'''=\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d\left(p\dfrac{dp}{dy}\right)}{dx}=p\frac{d\left(p\dfrac{dp}{dy}\right)}{dy}=p^2\frac{d^2p}{dy^2}+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2$$

и т. д.; каждая производная y выразится чрезъ всѣ производныя p по y порядковъ, предшествующихъ ея порядку, и потому $y^{(n)}$ выразится чрезъ производныя p по y до порядка $n-1$ включительно; потому послѣ подстановки этихъ выраженій изъ (2), (4), (5) и т. д. въ (1) оно обратится въ такое:

$$\varphi\left(y,\ p,\ \frac{dp}{dy},\frac{d^2p}{dy^2},\ldots\frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right)=0. \qquad (6)$$

Примѣчаніе 1. Формулы (4), (5) и дальнѣйшія можно послѣдовательно получать, по замѣчанію Нойel'я, такимъ образомъ: мы имѣемъ очевидно:

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}}; \qquad (7)$$

отсюда получаемъ:

$$y^{(n)}=y'\frac{dy^{(n-1)}}{dy}=p\frac{dy^{(n-1)}}{dy}; \qquad (8)$$

подставляя сюда вмѣсто $\dfrac{dy^{(n-1)}}{dy}$ его выраженіе, получаемое чрезъ дифференцированіе выраженія для $y^{(n-1)}$ чрезъ p и его производныя по y, мы получимъ таковое для $y^{(n)}$.

Примѣчаніе 2-е. Если бы въ уравненіе (1) входили бы только производныя, начиная съ $y^{(m)}$, то слѣдовало бы ее взять за новую независимую перемѣнную, а $y^{(m+1)}$ положить $=p$.

119. Пониженіе порядка на единицу можно достигнуть и въ уравненіи, содержащемъ x и y, когда оно однородно относительно y и его производныхъ; пусть уравненіе

$$f(x, y, y', y'',\ldots y^{(n)})=0 \qquad (1)$$

однородно относительно $y, y', y'',\ldots y^{(n)}$ измѣренія m; тогда его можно такъ представить:

$$y^m f\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y},\ldots\frac{y^{(n)}}{y}\right)=0, \qquad (2)$$

гдѣ множитель y^m можетъ быть отброшенъ. Положимъ:

$$y=e^{\int_{x_0}^{x} z\,dx}; \qquad (3)$$

тогда будемъ имѣть:

$$\left.\begin{array}{l} y'=yz; \qquad y''=y'z+yz'=y(z^2+z'); \\ y'''=y'(z^2+z')+y(2zz'+z'')=y(z^3+3zz'+z'') \text{ и т. д.} \end{array}\right\} \qquad (4)$$

откуда найдемъ:

$$(5)\qquad \frac{y'}{y}=z;\quad \frac{y''}{y}=z^2+z'\quad \frac{y'''}{y}=z^3+3zz'+z'',\ \text{и т. д.};$$

внося это во (2), получимъ уравненіе вида:

$$(6)\qquad \varphi(x, z, z', \ldots z^{(n-1)})=0,$$

ибо порядокъ производныхъ z по x отстаетъ на единицу отъ порядка производной y по x, какъ то видно изъ предыдущихъ формулъ.

Примѣръ. Дано уравненіе:

$$(7)\qquad x^2y''+xy'-y=0;$$

оно однородное 1-го измѣренія. Съ помощію формулъ (5) (по раздѣленіи на y) оно приводится къ такому:

$$(8)\qquad x^2(z^2+z')+xz-1=0,$$

или

$$(9)\qquad z'+z^2+\frac{1}{x}z-\frac{1}{x^2}=0.$$

Это уравненіе принадлежитъ къ типу уравненій § 63, которыя приводятся къ уравненію Ив. Бернулли, когда извѣстно какое-либо частное рѣшеніе ихъ. Здѣсь одно рѣшеніе легко прямо усмотрѣть; это:

$$(10)\qquad z_1=\frac{1}{x};$$

легко видѣть, что $z=z_1$ удовлетворяетъ уравненію. Полагая

$$(11)\qquad z=z_1+u,$$

мы сведемъ уравненіе (9) къ такому:

$$(12)\qquad u'+\left(2z_1+\frac{1}{x}\right)u=-u^2,$$

или въ виду (10):

$$(13)\qquad u'+\frac{3}{x}u=-u^2.$$

По формулѣ (29) § 61 его интегралъ будетъ:

$$(14)\qquad u^{-1}=-\frac{x}{2}-Cx^3,$$

откуда

$$(15)\qquad u=-\frac{1}{x\left(\frac{1}{2}+Cx^2\right)}.$$

Внося это и изъ (10) въ (11), найдемъ:

$$z=\frac{1}{x}-\frac{1}{x\left(\frac{1}{2}+Cx^2\right)}=\frac{Cx^2-\frac{1}{2}}{x\left(\frac{1}{2}+Cx^2\right)};\tag{16}$$

раздѣляя числителя и знаменателя на C и полагая $\frac{1}{2C}=C'$, мы будемъ имѣть изъ (16):

$$z=\frac{x^2-C'}{x(x^2+C')}=-\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+C'}.\tag{17}$$

Поэтому будетъ

$$\int_{x_0}^{x} zdx=\log\left[C_1\frac{x^2+C'}{x}\right]\tag{17}$$

и слѣд.

$$y=e^{\int_{x_0}^{x} zdx}=C_1\frac{x^2+C'}{x},\tag{19}$$

или

$$y=C_1x+\frac{C_2}{x},\tag{20}$$

полагая $C_1C'=C_2$.

120. Если имѣемъ уравненіе

$$f(y,y',y'',y'''\ldots y^{(n)})=0,\tag{1}$$

однородное относительно первой производной и отношеній каждой производной къ предшествующей:

$$y',\ \frac{y''}{y'},\ \frac{y'''}{y''},\ldots\frac{y^{(n)}}{y^{(n-1)}},\tag{2}$$

то нужно сдѣлать замѣну перемѣнныхъ, указанную въ § 118; тогда будетъ изъ формулъ (2), (4), (5) и т. д. того § слѣдовать, что всѣ величины (2) выразятся чрезъ p и его производныя по y дробными однородными функціями перваго измѣренія относительно этихъ величинъ; слѣд. результатъ вставки этихъ выраженій въ (1) будетъ уравненіе порядка $n-1$-го:

$$\varphi(y,p,p',\ldots p^{(n-1)})=0,\tag{3}$$

однородное относительно p и его производныхъ по y, а потому допускающее примѣненіе преобразованія пред. §, которое еще понизитъ порядокъ уравненія на единицу. Такимъ образомъ порядокъ уравненія этого вида съ помощью обѣихъ подстановокъ §§ 118 и 119 можетъ быть пониженъ на 2 единицы. Пояснимъ эту теорію на слѣдующемъ примѣрѣ (изъ книги Алексѣева).

Дано уравненіе:

$$y'''=ay^m.y''.y'.\tag{4}$$

Представивъ его такъ:

$$\frac{y'''}{y''}=ay^m.y', \tag{5}$$

видимъ, что оно однородное перваго измѣренія относительно величинъ (2). Полагая теперь $y'=p$, по (4) и (5) § 118 будемъ имѣть:

$$p^2\frac{d^2p}{dy^2}+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2=ay^m.p\frac{dp}{dy}.p, \tag{6}$$

и дѣля это на p^3:

$$\frac{1}{p}\frac{d^2p}{dy^2}+\left(\frac{1}{p}\frac{dp}{dy}\right)^2=ay^m.\frac{1}{p}\frac{dp}{dy}; \tag{7}$$

но, полагая

$$p=e^{\int_{y_0}^{y}zdy}, \tag{8}$$

по (5) пред. §, перемѣняя тамъ соотвѣтственно настоящему случаю y на p, x на y, будемъ имѣть:

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dy}=z; \qquad \frac{1}{p}\frac{d^2p}{dy^2}=z^2+\frac{dz}{dy}; \tag{9}$$

внося это въ (7), получимъ:

$$\frac{dz}{dy}+2z^2=ay^mz, \tag{10}$$

или перенося члены изъ одной части въ другую:

$$\frac{dz}{dy}-ay^mz=-2z^2, \tag{11}$$

— уравненіе Ив. Бернулли. По формулѣ (29) § 61 интегралъ его представится такъ:

$$z^{-1}=e^{-a\frac{y^{m+1}}{m+1}}\left[2\int_{y_0}^{y}e^{a\frac{y^{m+1}}{m+1}}dy+C'\right], \tag{12}$$

и по (8) будемъ имѣть:

$$p=e^{\int_{y_0}^{y}e^{a\frac{y^{m+1}}{m+1}}\left[2\int_{y_0}^{y}e^{a\frac{y^{m+1}}{m+1}}dy+C'\right]^{-1}.dy}=\frac{dy}{dx}; \tag{13}$$

отдѣляя перемѣнныя, найдемъ:

$$x=\int_{y_0}^{y}e^{-\int_{y_0}^{y}e^{a\frac{y^{m+1}}{m+1}}\left[2\int_{y_0}^{y}e^{a\frac{y^{m+1}}{m+1}}dy+C'\right]^{-1}dy}.dy+C''. \tag{14}$$

Уравненіе (1) можетъ быть еще охарактеризовано какъ такое, въ которомъ сумма порядковъ производныхъ y въ каждомъ членѣ есть одно и то же постоянное цѣлое число. Дѣйствительно, первая часть уравненія (1) имѣетъ такой видъ:

$$U=\sum Y_k y'^{\mu'}\left(\frac{y''}{y'}\right)^{\mu''}\left(\frac{y'''}{y''}\right)^{\mu'''}\cdots\left(\frac{y^{(n)}}{y^{(n-1)}}\right)^{\mu^{(n)}}, \tag{15}$$

гдѣ во всѣхъ членахъ

$$\mu'+\mu''+\mu'''+\cdots+\mu^{(n)}=m, \tag{16}$$

а Y_k функціи y; но это выраженіе можно и такъ представить:

$$\begin{aligned}U=\sum Y_k y'^{\mu'-\mu''}y''^{\mu''-\mu'''}y'''^{\mu'''-\mu''}\ldots y^{(n-1)^{\mu^{(n-1)}-\mu^{(n)}}}y^{(n)^{\mu^{(n)}}}=\\ =\sum Y_k y'^{\lambda'}y''^{\lambda''}y'''^{\lambda'''}\ldots y^{(n-1)^{\lambda^{(n-1)}}}y^{(n)^{\lambda^{(n)}}},\end{aligned} \tag{17}$$

полагая

$$\mu'-\mu''=\lambda',\ \mu''-\mu'''=\lambda'',\ \mu'''-\mu^{\mathrm{IV}}=\lambda''',\ldots\mu^{(n-1)}-\mu^{(n)}=\lambda^{(n-1)},\ \mu^{(n)}=\lambda^{(n)}; \tag{18}$$

сумма порядковъ каждаго члена въ (17) будетъ:

$$s=1.\lambda'+2\lambda''+3\lambda'''+\cdots+(n-1)\lambda^{(n-1)}+n\lambda^{(n)}, \tag{19}$$

а это по (18) такъ напишется:

$$\begin{aligned}s=1.(\mu'-\mu'')+2(\mu''-\mu''')+3(\mu'''-\mu^{\mathrm{IV}})+\cdots+(n-1)(\mu^{(n-1)}-\mu^{(n)})+n\mu^{(n)}=\\ =\mu'+\mu''+\mu'''+\mu^{\mathrm{IV}}+\cdots+\mu^{(n-1)}+\mu^{(n)}=m,\end{aligned} \tag{20}$$

откуда и слѣдуетъ сказанное.

121. Разсмотримъ еще уравненіе однородное относительно x и y и ихъ дифференціаловъ: dx, dy, d^2y, $d^3y,\ldots d^ny$, или, — что слѣдуетъ изъ выраженій $y', y'', y'''\ldots y^{(n)}$ чрезъ эти дифференціалы, — уравненіе, которое окажется однороднымъ, если разсматривать x и y какъ величины измѣренія 1, y' измѣренія 0, y'' измѣренія -1, y''' измѣренія -2, и наконецъ $y^{(n)}$ измѣренія $-(n-1)$. Такое уравненіе можетъ быть такъ представлено:

$$x^m f\left(1,\frac{dx}{x},\ \frac{y}{x},\ \frac{dy}{x},\ \frac{d^2y}{x},\ldots,\frac{d^ny}{x}\right)=0. \tag{1}$$

Положимъ теперь

$$\frac{dx}{x}=dt,\ \text{и, слѣд.}\ x=e^t,\quad \text{и}\quad \frac{y}{x}=z,\quad \text{или}\quad y=e^tz. \tag{2}$$

Отсюда будемъ имѣть, такъ какъ $dx=xdt=e^tdt$, обозначая по Лагранжу производныя y по x, а z по t:

$$
(3)\left\{\begin{array}{ll}
dy\ \ =e^t(z+z')dt; & y'\ \ =\dfrac{dy}{dx}=z+z';\\[2ex]
dy'=(z'+z'')dt; & y''\ \ =\dfrac{dy'}{dx}=e^{-t}(z'+z'');\\[2ex]
dy''=e^{-t}(z'''-z')dt; & y'''\ \ =\dfrac{dy''}{dx}=e^{-2t}(z'''-z');\\[2ex]
dy'''=e^{-2t}(z^{\mathrm{IV}}-2z'''-z''+2z')dt; & y^{(\mathrm{IV})}=\dfrac{dy'''}{dx}=e^{-3t}(z^{\mathrm{IV}}-2z'''-z''+2z');
\end{array}\right.
$$

и т. д.

Помножая первое изъ правыхъ равенствъ на $\dfrac{dx}{x}=dt$; второе на $\dfrac{(dx)^2}{x}=$ $=e^t dt^2$, третье на $\dfrac{dx^3}{x}=e^{2t}dt^3$, четвертое на $\dfrac{dx^4}{x}=e^{3t}dt^4$ и т. д., мы будемъ имѣть:

$$
(4)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{dy}{x}=dt.(z'+z),\\[2ex]
\dfrac{d^2y}{x}=(dt)^2(z''+z'),\\[2ex]
\dfrac{d^3y}{x}=(dt)^3(z'''-z'),\\[2ex]
\dfrac{d^4y}{x}=(dt)^4(z^{\mathrm{IV}}-2z'''-z''+2z') \text{ и т. д.}
\end{array}\right.
$$

Подставляя эти выраженія дифференціаловъ въ наше уравненіе, вслѣдствіе предположенной однородности его, dt уйдетъ изъ уравненія, и оно обратится въ такое:

$$
(5)\qquad F(z,\ z',\ z'',\ z''' \ldots z^{(n)})=0,
$$

въ которое независимая перемѣнная не будетъ входить, а потому порядокъ его можетъ быть, по § 118, понижень на единицу. Замѣтимъ, что, если обозначить производную по t, слѣдуя Коши, знакомъ D_t, поставленнымъ передъ дифференцируемой функціей, то, отдѣляя операціонный символъ отъ функціональнаго, формуламъ (4) можно дать символически такой видъ:

$$
\frac{dy}{x}=dt.(D_t+1)z,\quad \frac{d^2y}{x}=dt^2(D_t+1)D_tz;\quad \frac{d^3y}{x}=dt^3(D_t+1)D_t(D_t-1)z,
$$

$$
(6)\qquad \frac{d^4y}{x}=dt^4(D_t+1)D_t(D_t-1)(D_t-2)z. \quad \text{и т. д.}
$$

Обобщая ихъ, можемъ написать:

$$
(7)\qquad \frac{d^ky}{x}=dt^k(D_t+1)D_t(D_t-1)(D_t-2)\ldots(D_t-k+2)z.
$$

Докажется эта формула такимъ образомъ. Раздѣляя обѣ части на $dx^k:x$, мы въ виду (2) будемъ имѣть:

$$y^{(k)}=\frac{d^ky}{dx^k}=e^{-(k-1)t}(D_t+1)D_t(D_t-1)(D_t-2)\dots(D_t-k+2)z; \tag{8}$$

дифференцируя, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} dy^{(k)}=e^{-(k-1)t}[-(k-1)(D_t+1)D_t(D_t-1)\dots(D_t-k+2)+\\ +D_t(D_t+1)D_t(D_t-1)\dots(D_t-k+2)]z\,dt=\\ =e^{-(k-1)t}(D_t+1)D_t(D_t-1)\dots(D_t-k+2)(D_t-k+1)z\,.\,dt;\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

дѣля это на $dx=e^tdt$, получимъ:

$$\frac{dy^{(k)}}{dx}=e^{-kt}(D_t+1)D_t(D_t-1)\dots(D_t-k+1)z, \tag{10}$$

или

$$y^{(k+1)}=e^{-kt}(D_t+1)D_t(D_t-1)\dots(D_t-k+1)z; \tag{11}$$

помножая это $(dx)^{k+1}:x$, въ виду (2) получимъ:

$$\frac{d^{(k+1)}y}{x}=dt^{k+1}(D_t+1)D_t(D_t-1)\dots(D_t-k+1)z; \tag{12}$$

эта же формула получается изъ (7) чрезъ перемѣну k на $k+1$. Такимъ образомъ формула (7) вѣрна для всякаго k, ибо разъ она вѣрна для порядка k, то она будетъ вѣрна и для порядка $k+1$. Эта формула (7) съ помощью принятаго въ теоріи конечныхъ разностей *) обозначенія можетъ быть написана короче такимъ образомъ:

$$\frac{d^ky}{x}=dt^k(D_t+1)^{(k)}z. \tag{13}$$

Возьмемъ для примѣра уравненіе:

$$nx^3d^2y=(ydx-xdy)^2. \tag{14}$$

Оно однородное четвертаго измѣренія (въ указанномъ смыслѣ,) относительно x и y и ихъ дифференціаловъ, ибо, раздѣляя обѣ части на x^4, приводимъ его къ виду:

$$n\frac{d^2y}{x}=\left(\frac{y}{x}\frac{dx}{x}-\frac{dy}{x}\right)^2; \tag{15}$$

съ помощью (4) мы дадимъ ему такой видъ (по сокращеніи):

$$n(z''+z')=z'^2, \tag{16}$$

*) См. нашъ „Курсъ теоріи конечныхъ разностей.“ Харьковъ, 1890 г., стр. 12, формула (2).

или

(17) $$z''+z'=\frac{1}{n}z'^2,$$

что представляетъ уравненіе Ив. Бернулли, если z' считать за неизвѣстную функцію; потому будемъ имѣть по формулѣ (29) § 61:

$$-\frac{1}{z'}=e^t\left[-\frac{1}{n}e^{-t}+C\right]=-\frac{1}{n}+Ce^t,$$

откуда

(18) $$z'=\frac{n}{1-Cne^t}=\frac{ne^{-t}}{e^{-t}-Cn};$$

пожножая на dt и интегрируя, получимъ:

(19) $$z=-n[\log(e^{-t}-Cn)+\log C']=-n\log(C'e^{-t}-CC'n)$$

или

(20) $$z=n\log\frac{e^t}{C'-CC'ne^t},$$

или, полагая $-CC'n=C_1$, $C'=C_2$, и помня, что $e^t=x$:

(21) $$z=n\log\frac{x}{C_1x+C_2};$$

а такъ какъ $y=zx$, то искомый интегралъ будетъ:

(22) $$y=nx\log\frac{x}{C_1x+C_2}.$$

122. Обобщеніемъ предыдущаго представляется случай уравненія, которое дѣлается однороднымъ, если считать x и dx за величины 1-го измѣренія, а y и его дифференціалы за величины измѣренія μ. Это всё равно, что считать y за величину измѣренія μ, y' за величину измѣренія $\mu-1$, y''— измѣренія $\mu-2$, ... наконецъ $y^{(n)}$ за величину измѣренія $\mu-n$. Такое уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ:

(1) $$x^m f\left(1,\frac{dx}{x},\ \frac{y}{x^\mu},\ \frac{dy}{x^\mu},\dots\frac{d^ny}{x^\mu}\right)=0,$$

(ибо, перемѣняя x, y и его дифференціалы на tx, $t^\mu y$, $t^\mu d^k y$, по понятію объ однородности должна явиться возможность вывесть t^m за скобки). Полагая, какъ и въ пред. §:

(2) $$\frac{dx}{x}=dt,\ \text{слѣд.}\ x=e^t,\quad \frac{y}{x^\mu}=z \quad \text{или} \quad y=e^{\mu t}z,$$

мы придемъ къ символическимъ формуламъ, аналогичнымъ формуламъ (6) пред. §:

(3) $$\frac{dy}{x^\mu}=dt(D_t+\mu)z;\quad \frac{d^2y}{x^\mu}=dt^2(D_t+\mu)(D_t+\mu-1)z,\ \dots$$

и вообще:

$$\frac{d^k y}{x^\mu} = dt^k (D_t + \mu)(D_t + \mu - 1) \ldots (D_t + \mu - k + 1) z, \tag{4}$$

или короче:

$$\frac{d^k y}{x^\mu} = dt^k (D_t + \mu)^{(k)} z, \tag{5}$$

(которыя предлагаемъ читателю вывести самому *). Подставляя эти выраженія въ данное уравненіе, получимъ такое, въ которое t не входитъ, и которое потому допускаетъ пониженіе порядка на единицу.

Для примѣра пусть дано уравненіе:

$$x^4 d^2 y = (x^3 + 2xy) dx dy - 4y^2 dx^2; \tag{6}$$

раздѣляя его на x^6, приводимъ къ такому:

$$\frac{d^2 y}{x^2} = \left(1 + 2\frac{y}{x^2}\right) \frac{dx}{x} \frac{dy}{x^2} - 4\frac{y^2}{x^4} \frac{dx^2}{x^2}, \tag{7}$$

которое вида (1), причемъ $\mu = 2$. По (3) будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{x^2} &= dt(D_t + 2) z = (z' + 2z) dt; \\ \frac{d^2 y}{x^2} &= dt^2 (D_t + 2)(D_t + 1) z = dt^2 (D_t^2 + 3D_t + 2) z = dt^2 (z'' + 3z' + 2z); \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

кромѣ того $\dfrac{y}{x^2} = z$; подставляя это въ (7), будемъ имѣть, отбрасывая dt^2:

$$z'' + 3z' + 2z = (1 + 2z)(z' + 2z) - 4z^2 = z' + 2z + 2zz'$$

или, упрощая:

$$z'' - 2zz' + 2z' = 0. \tag{9}$$

Такъ какъ сюда t не входитъ, то мы имѣемъ случай § 118; потому вводимъ z за независимую перемѣнную; тогда по (4) того § будемъ имѣть, полагая $z' = p$:

$$p\frac{dp}{dz} - 2zp + 2p = 0, \tag{10}$$

или, отбрасывая множитель p, слѣд. устраняя рѣшеніе $p = z' = 0$, (которое даетъ для z' постоянное значеніе и потому $y = Cx^\mu$, что не представляетъ полнаго интеграла), мы будемъ имѣть уравненіе:

$$\frac{dp}{dz} - 2z + 2 = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{dp}{dz} = 2(z - 1); \tag{11}$$

интегрируя, получимъ:

$$z' = p = (z - 1)^2 + C; \tag{12}$$

---

*) См. *Hoüel*. Cours de Calcul infinitésimal. T. II. p. 412.

слѣд., помножая на dt:

(13) $$dz=[(z-1)^2+C]dt.$$

Въ этомъ уравненіи перемѣнныя отдѣляются, и мы будемъ имѣть:

(14) $$t+C'=\int\frac{d(z-1)}{(z-1)^2+C}=\frac{1}{\sqrt{C}}\operatorname{arctg}\frac{z-1}{\sqrt{C}}.$$

Отсюда

(15) $$z-1=\sqrt{C}\operatorname{tg}\sqrt{C}(t+C').$$

Помножая это на x^2, перемѣняя C' на $\log C_1$ и вводя вмѣсто t его значеніе изъ (2), мы получимъ окончательно:

(16) $$y=x^2\{1+\sqrt{C}\operatorname{tg}[\sqrt{C}.\log(C_1x)]\}.—$$

Этимъ мы и закончимъ главу объ интегрированіи уравненій высшихъ порядковъ, выдѣливъ классъ линейныхъ уравненій въ особую главу по обширности и важности предмета. Что касается интегрированія уравненій высшихъ порядковъ, первая часть которыхъ есть полный дифференціалъ. до интегрирующаго множителя уравненій высшаго порядка, а также особенныхъ рѣшеній ихъ, то читатели найдутъ это въ курсахъ Буля, проф. Деларю, отчасти у Серре. У Алексѣева и Серре они найдутъ также достаточное количество разобранныхъ геометрическихъ задачъ, приводящихся къ интегрированію уравненій высшихъ порядковъ; здѣсь же мы ограничимся приведеніемъ нѣсколькихъ примѣровъ, которые полезно раздѣлать для лучшаго уясненія и усвоенія изложенныхъ способовъ.

Примѣры для упражненій.

1) $y''=x+\sin x$; $\quad y=\frac{x^3}{6}-\sin x+c+c'x.$

2) $y''=-\frac{a^2}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}$; $y=?$ 3) $\sin^4 x.y'''=\sin 2x.$ 4) $x^2y''=a.$

5) $ay''=\sqrt{1+y'^2}$; $\quad y+C_1=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-C}{a}}+e^{-\frac{x-C}{a}}\right).$

6) $ay''=-(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$; $\quad (x-C)^2+(y-C')^2=a^2.$ 7) $y'y''=a.$

8) $y''=(1+y'^2)^2.$ 9) $y''+ay'^2=0.$ 10) $y''=a+by'^2.$

11) $[y''^2+y'^2]^2+[y''^2-y'^2]=0$; рѣшеніе:

$$x=\int_{z_0}^{z}\frac{(z^2-3)dz}{1-z^4}+C;\ y=\int_{z_0}^{z}\frac{(z^2-3)dz}{(1+z)^2\sqrt{1-z^2}}+C'.$$

12) $ay''' = y''$; $y = Ae^{\frac{x}{a}} + Bx + C$. 13) $y''' = y''^2$.

14) $y^{IV} = a\sqrt{y'''}$. 15) $y^{IV}y'''^3 + a = 0$. 16) $y^{IV} - a^2y'' = 0$.

17) $y''' = y''^3$; $y = \frac{1}{3}(C_1 - 2x)^{\frac{3}{2}} + C_2x + C_3$.

18) $y'''y'' = 1$; $y = \frac{1}{15}(2x + C_1)^2\sqrt{2x + C_1} + C_2x + C_3$.

19) $y'' = (ay)^{-\frac{1}{2}}$. 20) $y'' = \frac{a}{b+y} - c$. 21) $y'' = \frac{a}{(b-y)^2}$.

22) $y'' + ay'^2 + b = 0$. 23) $yy''^2 = 1$; $x = \frac{2}{3}(\sqrt{y} - 2C)\sqrt{\sqrt{y} + C} + C_1$.

24) $a^2y^3y'' = 1$; $Cax = \sqrt{a^2Cy^2 - 1} + C'$. 25) $y'' = a - by$.

26) $a^2y^{IV} = y''$; $y = Ae^{\frac{x}{a}} + Be^{-\frac{x}{a}} + Cx + D$.

27) $y'''y'^3 = 1$. 28) $y^{IV} - a^2y'' = 0$.

29) $y^{IV} + y'' = 0$; $y = C_1\sin x + C_2\cos x + C_3x + C_4$.

30) $(1 + x^2)y'' + 1 + y'^2 = 0$; $y + C_1x + C_2 = (1 + C_1{}^2)\log(x + C_1)$.

31) $x^2y^{IV} = \lambda y''$; $y = C_1 + C_2x + C_3x^{\frac{5+\alpha}{2}} + C_4x^{\frac{5-\alpha}{2}}$, гдѣ $\alpha = \sqrt{1 + 4\lambda}$.

32) $c^2y''' = y'(1 + y'^2)^2$; рѣшеніе: $(y' = p)$

$$x + C_2 = c\int\frac{dp}{\left[C_1 + \frac{1}{3}(1 + p^2)^3\right]^{\frac{1}{2}}}; \quad y + C_3 = c\int\frac{pdp}{\left[C_1 + \frac{1}{3}(1 + p^2)^3\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

33) $1 + y'^2 + xy'y'' = ay''\sqrt{1 + y'^2}$; рѣшеніе:

$$y = \sqrt{a^2 + b^2 - x^2} - b\log\left\{\left[b + \sqrt{a^2 + b^2 - x^2}\right] : c(x - a)\right\}.$$

34) $y' + a^2y''^2 = 2axy''$; при $a = \frac{1}{2}$ $y = Cx(x - C) + C_1$.

35) $xy'' + y' = 3x + 1$; $y = \frac{3x^2}{4} + x + C_1\log x + C_2$.

36) $xy'' + 2y' = 3x + 1$; $y = \frac{1}{2}(x^2 + x) + C_1 + \frac{C_2}{x}$.

37) $xy''' + y'' = x + 1$; $y = \frac{1}{12}(x^3 + 6x^2) + C_1x\log x + C_2x + C_3$.

38) $y'' = f(y)y'^2$; $x + c' = c\int e^{-\int f(y)dy}dy$.

39) $yy'' + y'^2 = 1$; $x + c = \sqrt{a^2 + y^2}$, a и c произвольныя постоянныя.

40) $2(2a - y)y'' = 1 + y'^2$; $\int\sqrt{\frac{2a - y}{C - 2a + y}}dy = x + C'$.

41) $aby'' = \sqrt{y^2 + a^2 y'^2}$. 42) $yy'' + \sqrt{y'^2 + a^2 y''^2} = y'^2$.

43) $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$; рѣшеніе: $y = \dfrac{C}{\cos^2(x+\alpha)}$, α произв. постоянное.

44) $y'^2 + 2yy'' = 0$. 45) $y'' - ayy' = 0$.

46) $y'y''' + ay''^2 + by'^2 y'' = 0$; рѣшеніе:

$$bx = \int \frac{dp}{p^2 \log \dfrac{C}{p}} + C_1; \quad by = \log C_2 - \log\left(\log \frac{C}{p}\right).$$

47) $ayy'' + by'^2 = \dfrac{yy'}{\sqrt{c^2 + x^2}}$. 48) $xy'' + y' = 0$.

49) $x^2 y'' = 2y$; рѣшеніе: $y = \dfrac{1}{3} Cx^2 + C' x^{-1}$.

50) $2xy'' = y'$. 51) $x^2 d^2 y + x dx^2 + y dy^2 = 0$.

52) $y'y''.x^3 + 2y^2 = 0$; рѣшеніе: $\log y = \int_{x_0}^{x} z dx + C'$, гдѣ z опредѣляется изъ уравненія:

$$-\log x + \frac{1}{5} \log \frac{xz+1}{\sqrt{(xz-1)^2 + 2}} - \frac{3}{5} \operatorname{arctg}(xz - 1) = C.$$

53) $x^2 y'' + xy' - y = 0$; рѣшить по § 74.

54) $yy''' = y'y''$; $y = \dfrac{1}{2}\left[e^{C_2(x+C_3)} - C_1 e^{-C_2(x+C_3)}\right]$.

55) $yy'' - y'^2 = 0$; $y = C_2 e^{C_1 x}$.

56) $y''' = f(y) y' y''$; $x = \displaystyle\int \frac{dy}{\varphi(y)}$, гдѣ $\varphi(y) = \sqrt{2\int F(y) dy}$, $F(y) = e^{\int f(y) dy}$.

57) $x^2 y'' = y$; $x = C_1 e^{s'}$, $y = CC_1 e^{s+s'}$, гдѣ

$$s = \int \frac{(\vartheta - 1) d\vartheta}{1 + \vartheta - \vartheta^2}; \quad s' = \int \frac{d\vartheta}{1 + \vartheta - \vartheta^2}.$$ (Алексѣевъ, стр. 140—141.)

58) $x^2 y'' = xy' + 3y$; $y = c_2 x^2 - \dfrac{c'}{x}$. (Деларю, стр. 164—161.)

59) $x^2 y'' = ay + bxy'$; $y = C'(C_2^{\alpha} x^{-\alpha} + C_2^{-\beta} x^{\alpha})$, гдѣ α и β опредѣляются изъ уравненій: $\alpha\beta = a$; $\beta - \alpha = b + 1$. (Деларю, стр. 167—168.)

60) $x^2 y'' = \sqrt{ax^2 y'^2 + by^2}$. 61) $a\sqrt{x^2 + y^2}.y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$. (Forsyth-Maser, S. 93.)

62) $x^4 y'' = x^3 y' + 2xyy' - 4y^2$. 63) $y'' + y'^2 = 1$.

ГЛАВА VIII.

Линейныя дифференціальныя уравненія.

123. Дифференціальное уравненіе, въ которое неизвѣстная функція и ея производныя входятъ лишь въ первой степени, называется *линейнымъ*. Общій видъ линейнаго дифференціальнаго уравненія слѣд. таковъ:

$$X_0 y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + X_2 y^{(n-2)} + \cdots + X_{n-1} y' + X_n = V, \tag{1}$$

гдѣ X_i и V означаютъ функціи одного x, или постоянныя, или короче:

$$\sum_{k=0}^{n} X_k y^{(n-k)} = V, \tag{2}$$

гдѣ подъ знакомъ суммы стоитъ общій членъ лѣвой части (1). Это сокращенное обозначеніе представляетъ большое удобство, и мы имъ будемъ постоянно пользоваться въ этой главѣ. Если $V=0$, слѣд. мы имѣемъ уравненіе вида:

$$\sum_{k=0}^{n} X_k y^{(n-k)} = 0, \tag{3}$$

то оно называется уравненіемъ *безъ послѣдняго члена*, въ противоположность (2), которое называется уравненіемъ *съ послѣднимъ членомъ*. Уравненіе (3) принадлежитъ къ однороднымъ уравненіямъ § 119.

Зная частное рѣшеніе уравненія (2), напр.

$$y = y_1, \tag{4}$$

мы сведемъ отысканіе полнаго рѣшенія его на интегрированіе уравненія (3), т. е. безъ послѣдняго члена. Дѣйствительно, подставляя во (2) y_1 вмѣсто y, мы получимъ тождественно:

$$\sum_{k=0}^{n} X_k y_1^{(n-k)} = V; \tag{5}$$

вычитая это изъ (2), и полагая

$$y - y_1 = z, \quad \text{слѣд.} \quad y^{(n-k)} - y_1^{(n-k)} = z^{(n-k)}, \tag{6}$$

мы будемъ имѣть:

$$\sum_{k=0}^{n} X_k z^{(n-k)} = 0; \tag{7}$$

найдя полный интегралъ этого уравненія, изъ (6) будемъ имѣть полный интегралъ уравненія (2) въ такомъ видѣ:

$$y = y_1 + z. \tag{8}$$

Отсюда слѣдуетъ, что въ ближайшемъ мы должны заняться уравненіемъ безъ послѣдняго члена (3), а затѣмъ разсмотрѣть, какъ получается частное рѣшеніе уравненія съ послѣднимъ членомъ (2): Лагранжъ показалъ, что его можно получить по способу измѣненія производныхъ постоянныхъ, какъ и для линейнаго уравненія 1-го порядка, изъ полнаго рѣшенія уравненія (3).

124. Линейное уравненіе безъ послѣдняго члена

$$\sum_{k=0}^{n} X_k y^{(n-k)} = 0 \tag{1}$$

обладаетъ многими свойствами, аналогичными съ обыкновенными алгебраическими уравненіями. Допустивъ, что всякое такое уравненіе имѣетъ одно рѣшеніе *), легко показать, что независимыхъ рѣшеній будетъ n; затѣмъ, что коэффиціенты уравненія будутъ въ нѣкоторомъ смыслѣ симметрическими функціями этихъ независимыхъ рѣшеній; далѣе, что знаніе m корней понижаетъ порядокъ уравненія на m единицъ; что могутъ быть кратныя рѣшенія, и что въ такомъ случаѣ рѣшеніе уравненія сводится къ рѣшенію уравненій низшихъ порядковъ; что общія рѣшенія двухъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій могутъ быть сведены при помощи алгориѳма, представляющаго аналогію съ алгориѳмомъ общаго наибольшаго дѣлителя, къ рѣшенію уравненій низшаго порядка; наконецъ, что эти уравненія имѣютъ свои «группы», аналогичныя «группамъ» алгебраическихъ уравненій. Обстоятельное изложеніе этого интереснаго предмета однако вывело бы насъ далеко за предѣлы элементарнаго курса, и мы должны поэтому отослать любознательнаго читателя къ другимъ сочиненіямъ **); здѣсь же мы должны ограничиться лишь самымъ необходимымъ изъ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

125. Если уравненію (1) пред. § удовлетворяетъ $y = y_1$, то ему будетъ удовлетворять и $y = Cy_1$. Дѣйствительно, полагая $y = Cy_1$ въ упомя-

---

*) Доказательство существованія таковаго спеціально для линейнаго однороднаго уравненія читатель найдетъ въ сочиненіи проф. *Анисимова*: „Основанія теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій". Москва, 1889 г., а также въ сочиненіи *Савича, С. Е.*: „О линейныхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ съ правильными интегралами". СПБ. 1892 г. Здѣсь найдутся и литературныя указанія. Для частнаго случая гипергеометрическаго диф. уравненія, 2-го пор., читатель найдетъ его и въ нашемъ сочиненіи: „О гипергеометрическихъ рядахъ". СПБ. 1876 г. Самое полное сочиненіе по этому предмету: *Schlesinger, L.* Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Bd. 1—2. Leipzig, 1895, 1897, 1898. См. также *Heffter, L.* Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen. Leipzig, 1894. О раціональныхъ рѣшеніяхъ такихъ диф. уравненій см. *Синцовъ, Д.* „Раціональные интегралы линейныхъ диф. уравненій". Казань, 1898.

**) *Koenigsberger, L.* Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln. Leipzig, 1899. и

Picard, E. Traité d'Analyse. T. III. Paris, 1894.

путомъ уравненіи и помня, что постоянный множитель можно выносить за знакъ производной, мы будемъ имѣть:

$$\sum_{k=0}^{n} X_k (Cy_1)^{(n-k)} = C\sum_{k=0}^{n} X_k y_1^{(n-k)} \equiv 0,$$

ибо множитель при C есть результатъ вставки y_1 вмѣсто y въ (1) пред. §, который есть тождественный нуль. Общнѣе, если $y_1, y_2, \dots y_m$ суть частныя рѣшенія названнаго уравненія, то и

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m = \sum_{i=1}^{m} C_i y_i, \tag{1}$$

гдѣ C_i производныя постоянныя, будетъ его рѣшеніемъ; въ самомъ дѣлѣ, подставляя это выраженіе вмѣсто y въ (1) пред. §, будемъ имѣть:

$$\sum_{k=0}^{n} X_k \sum_{i=1}^{m} C_i y_i^{(n-k)} = \sum_{i=1}^{m} C_i \sum_{k=0}^{n} X_k y_i^{(n-k)} \equiv 0, *)$$

ибо множитель при каждомъ C_i есть тождественный нуль, будучи результатомъ вставки въ уравненіе (1) пред. § его рѣшенія.

Рѣшенія $y_1, y_2, \dots y_m$ называются независимыми, если они не связаны уравненіемъ вида:

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_m y_m = 0; \tag{2}$$

въ такомъ случаѣ формула содержитъ m произвольныхъ постоянныхъ; если же между $y_1, y_2, \dots y_m$ имѣетъ мѣсто соотношеніе вида (2), то рѣшенія будутъ зависимы, и число произвольныхъ постоянныхъ будетъ меньше на единицу. Въ самомъ дѣлѣ, рѣшая уравненіе (2) по y_m и внося въ (1), будемъ имѣть:

$$y = \left(C_1 - \frac{a_1}{a_m} C_m\right) y_1 + \left(C_2 - \frac{a_2}{a_m} C_m\right) y_2 + \dots + \left(C_{m-1} - \frac{a_{m-1}}{a_m} C_m\right) y_{m-1}; \tag{3}$$

здѣсь коэффиціенты при $y_1, y_2, \dots y_{m-1}$ суть величины произвольныя, которыя могутъ быть названы $C'_1, C'_2, \dots C'_{m-1}$, и мы будемъ имѣть:

$$y = C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_{m-1} y_{m-1}, \tag{4}$$

выраженіе, содержащее всего $m-1$ произвольныхъ постоянныхъ. Если бы соотношеній вида (2), независимыхъ между собою, было бы числомъ $g < m$, то число постоянныхъ уменьшилось бы на g единицъ, какъ нетрудно убѣдиться, послѣдовательно примѣняя только что доказанное предложеніе.

Если $m = n$ и всѣ $y_1, y_2, \dots y_n$ независимы, въ только что указанномъ смыслѣ, то выраженіе

---

*) подводя X_k подъ вторую сумму, мѣняя порядокъ суммированія по i и k и выводя C_i за знакъ второй суммы (первая и вторая, разумѣемъ по порядку написанія ихъ).

(5) $$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

представитъ полный интегралъ уравненія (1) предыдущаго §, какъ содержащее n произвольныхъ постоянныхъ. Всякій другой интегралъ, принимающій со своими производными $y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ произвольно-заданныя значенія $b, b', b'', \ldots b^{(n-1)}$ при $x = a$, выразится чрезъ него. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя уравненіе (5) одинъ разъ, другой, … $(n-1)$-ый, мы будемъ имѣть, полагая $x = a$, систему n уравненій линейныхъ относительно постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_n$, которыя изъ нея и опредѣлятся, если только для $x = a$ опредѣлитель этой системы

(6) $$\Delta(y) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ *)}.$$

Онъ не можетъ быть тождественно $= 0$, т. е. для всякаго x, ибо это было бы равносильно существованію между $y_1, y_2, \cdots y_n$ такого соотношенія:

(7) $$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y = 0,$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ постоянныя количества, чего мы не допускаемъ. Что въ случаѣ существованія такого соотношенія опредѣлитель (6) будетъ $= 0$, — это слѣдуетъ изъ того, что въ силу (7) всѣ элементы послѣдняго столбца превращаются въ одинаковую линейную функцію элементовъ прочихъ столбцевъ той же строки; а разлагая такой опредѣлитель на сумму опредѣлителей, мы получимъ, по вынесеніи общихъ множителей элементовъ столбца за скобки, лишь опредѣлители, имѣющіе два столбца одинаковые, каковые тождественно равны нулю; обратное этому предложеніе, которое намъ собственно и нужно, такъ докажется. Обозначая чрезъ Δ_{ni} миноръ $\Delta(y)$ отвѣчающій элементу послѣдняго столбца и i-ой строки и раскрывая $\Delta(y)$ (6) по элементамъ послѣдняго столбца, мы будемъ имѣть такое уравненіе:

(8) $$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta_{ni}\, y_n^{(i)} = 0,$$

откуда видно, что $y_n^{(i)}$ есть интегралъ уравненія

(9) $$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta_{ni}\, y^{(i)} = 0$$

порядка $n-1$, какъ и прочіе y_m, ибо по свойствамъ опредѣлителя:

---

*) Объ опредѣлителяхъ см. нашъ „Краткій курсъ высшей алгебры", изд. 2-е Харьковъ, 1892 г. Гл. XII.

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Delta_{ni}\, y_m^{(i)}=0 \tag{10}$$

при $m<n$. Слѣд. допустивъ вѣрность нашего предложенія для уравненія всѣхъ порядковъ $<n$, *) мы будемъ имѣть:

$$y_n=\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j\, y_j, \tag{11}$$

гдѣ β_j постоянныя; написавъ теперь (11) такъ:

$$\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j\, y_j - y_n=0, \tag{12}$$

имѣемъ, очевидно, соотношеніе вида (7). Слѣд. если $\Delta=0$, то между $y_1, y_2, \dots y_n$ имѣетъ мѣсто соотношеніе (7) съ постоянными коэффиціентами, что и требовалось доказать.—Система n линейно независимыхъ интеграловъ называется *фундаментальною*.

126. Присоединивъ къ данному уравненію

$$\sum_{k=0}^{n} X_k\, y^{(n-k)}=0 \tag{1}$$

n тождествъ, получаемыхъ отъ вставки сюда n независимыхъ интеграловъ $y_1, y_2, \dots y_n$, именно:

$$\sum_{k=0}^{n} X_k\, y_i^{(n-k)}=0, \quad (i=1, 2, \dots n) \tag{2}$$

мы будемъ имѣть систему $n+1$ уравненій, однородныхъ относительно величинъ $X_0, X_1, X_2, \dots X_n$; исключая ихъ, получимъ такой результатъ въ формѣ опредѣлителя n-го порядка:

$$\begin{vmatrix} y^{(n)} & y^{(n-1)} & y^{(n-2)} & \dots y' & y \\ y_1^{(n)} & y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} & \dots y_1' & y_1 \\ y_2^{(n)} & y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} & \dots y_2' & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} & \dots y_n' & y_n \end{vmatrix}=0, \tag{3}$$

который есть не что иное, какъ уравненіе (1), представленное въ формѣ опредѣлителя. Въ этой формѣ сейчасъ видно, что y_i есть его рѣшеніе, подобно тому какъ въ теоріи алгебраическихъ уравненій видны корни уравненія, когда оно представлено разложеннымъ на множители. Отсюда также видно, что коэффиціенты уравненія (1) пропорціональны опредѣлителямъ порядка n изъ $\overset{n}{\underset{1}{y_i}}$ и ихъ производныхъ до порядка n, именно минорамъ

*) Оно вѣрно для $n=1$.

опредѣлителя первой части уравненія (3), отвѣчающимъ элементамъ первой строки. Отсюда слѣдуетъ, что отношеніе коэффиціентовъ къ первому, будучи равно отношенію соотвѣтственныхъ миноровъ къ минору отвѣчающему $y^{(n)}$, будетъ симметрическая функція $y_1, y_2, \dots y_n$, ибо отъ перестановки двухъ y_i и y_j между собою эти опредѣлители только перемѣнятъ знакъ, отчего частное ихъ не измѣнится. Но эти отношенія $X_k : X_0$ будутъ симметрическими функціями въ болѣе широкомъ смыслѣ, который сейчасъ объяснится. Мы видѣли, что всѣ интегралы можно выразить чрезъ n независимыхъ интеграловъ

(4) $$y_1, y_2, \dots y_n;$$

пусть будетъ другая система интеграловъ:

(5) $$Y_1, Y_2, \dots Y_n.$$

Элементы послѣдней можно по пред. § выразить чрезъ элементы первой, и пусть

(6) $$\left.\begin{array}{l} Y_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ Y_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots \\ Y_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n, \end{array}\right|$$

гдѣ предположимъ опредѣлитель подстановки:

(7) $$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

не равнымъ нулю; тогда (5) будетъ представлять такую же систему независимыхъ интеграловъ, ибо всякое соотношеніе вида (7) пред. § между $\overset{n}{\underset{1}{Y_i}}$ было бы при $A \neq 0$ соотношеніемъ между $\overset{n}{\underset{1}{y_i}}$, а это невозможно. Въ самомъ дѣлѣ, если бы было

(8) $$\sum_{j=1}^{n} b_j Y_j = 0,$$

то, подставляя сюда вмѣсто Y_j ихъ выраженія изъ (6), получили бы:

(9) $$\sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{n} a_{ji} y_j = \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_j = 0;$$

но какъ $\overset{n}{\underset{1}{y_i}}$ независимы, то должно быть для $i=1, 2 \dots n$:

(10) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ji} b_j = 0; \qquad (i=1,\dots n)$$

опредѣлитель же этой системы есть A, въ которомъ только строчки сдѣланы столбцами и наоборотъ, отъ чего онъ не измѣняется; но если опредѣлитель системы линейныхъ однородныхъ относительно n величинъ b_j уравненій не $=0$, то возможно только одно рѣшеніе: $b_j=0$ для $j=1, 2, \ldots n$; отсюда и слѣдуетъ сказанное относительно Y_i. При A не $=0$ нулю уравненія (6) могутъ быть рѣшимы относительно y_i. Если мы изъ Y_i и ихъ производныхъ составимъ такіе же опредѣлители, какъ миноры, отвѣчающіе элементамъ первой строки въ (3), то они приведутся на основаніи правилъ умноженія опредѣлителей къ прежнимъ помноженнымъ на A; но какъ A не нуль, то на него можно сократить, и мы видимъ такимъ образомъ, что отношенія $\dfrac{X_k}{X_0}$ не измѣнятся, если систему (4) рѣшеній уравненія (1) замѣнимъ системою (5). Слѣд. и въ этомъ смыслѣ, болѣе широкомъ, эти отношенія $X_k : X_0$ суть симметрическія функціи n независимыхъ рѣшеній линейнаго уравненія. Всякая другая симметрическая въ этомъ смыслѣ функція выразится цѣлой функціей коэффиціентовъ дифференціальнаго уравненія и ихъ производныхъ, умноженной на $e^{-\int (X_1 : X_0)\,dx}$, въ нѣкоторой положительной степени *).

Этотъ множитель есть не что иное какъ $\Delta(y)$ [(6) § 125]. Дѣйствительно, легко убѣдиться, что

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{d\Delta(y)}{dx} = \begin{vmatrix} y_1^{(n)} & y_1^{(n-2)} & y_1^{(n-3)} & \ldots y_1 \\ y_2^{(n)} & y_2^{(n-2)} & y_2^{(n-3)} & \ldots y_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-2)} & y_n^{(n-3)} & \ldots y_n \end{vmatrix} \text{**)}; \qquad (11)$$

въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ каждый членъ опредѣлителя n-го порядка есть произведеніе n множителей, то его производная будетъ состоять изъ n членовъ, получаемыхъ изъ него чрезъ замѣну каждаго множителя по очереди его производною; совокупность членовъ въ которыхъ k-ый членъ замѣненъ производной представитъ опредѣлитель, въ которомъ элементы k-аго столбца замѣнены соотвѣтственно ихъ производными; слѣд. производная опредѣлителя n-го порядка представится суммою опредѣлителей, въ которыхъ, по очереди, каждый столбецъ замѣненъ столбцемъ изъ производныхъ отъ его элементовъ; это должно было бы имѣть мѣсто и для $\Delta(y)$; но въ нашемъ случаѣ, всѣ такіе опредѣлители, кромѣ перваго, какъ содержащіе по 2 столбца одинакихъ, будутъ тождественно $=0$. Дѣля (11) на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta(y)$, направо получимъ отношеніе опредѣлителя къ $\Delta(y)$, т. е.

*) См. Koenigsberger, S. 140.

**) Сдѣлавъ строки столбцами и наоборотъ, и мѣняя затѣмъ порядокъ столбцевъ на обратный, что и вводитъ множитель $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, перенесенный нами налѣво.

минора, отвѣчающаго второму элементу первой строки опредѣлителя въ (3), къ минору, отвѣчающему первому элементу той же строки, каковое $=-\frac{X_1}{X_0}$, (принимая во вниманіе перестановку столбцевъ); слѣд. мы можемъ написать:

$$\frac{d\log\Delta(y)}{dx}=-\frac{X_1}{X_0}, \tag{12}$$

откуда, интегрируя и переходя отъ логариѳма къ числу, получимъ:

$$\Delta(y)=C_0 e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{X_1}{X_0}dx}, \tag{13}$$

гдѣ $C_0=\Delta(y)_{x=x_0}$. Отсюда видно, что если $\Delta(y)_{x=x_0}$ не $=0$, то $\Delta(y)$ не можетъ обратиться въ нуль, слѣд. фундаментальная система $y_1, y_2, \cdots y_n$ не можетъ перестать быть таковою, какъ бы x не измѣнялся, только бы не приходилъ въ тѣ точки, въ которыхъ показатель при e въ формулѣ (13) обращается въ безконечность. Если коэффиціенты даннаго линейнаго дифференціальнаго уравненія суть цѣлыя функціи x, то это возможно только тогда, когда будетъ $X_0=0$: корни этого уравненія и $x=\infty$ суть критическія точки $\Delta(y)$ и интеграловъ уравненія. Поэтому, если комплексная перемѣнная x опишетъ сомкнутую кривую вокругъ такой точки, то $y_1, y_2, \cdots y_n$ могутъ и не вернуться къ прежнимъ своимъ значеніямъ, а перейти, не переставая образовать фундаментальную систему, въ другія, которыя связаны съ ними такими же уравненіями, какъ (6), причемъ опредѣлитель (7) зависитъ какъ отъ разсматриваемой критической точки, такъ и отъ интеграловъ $y_1, y_2, \cdots y_n$. Это привело къ новымъ функціямъ измѣняющимся при обходѣ критическихъ точекъ чрезъ линейную подстановку. Это свойство интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія безъ послѣдняго члена есть основное, послужившее исходнымъ пунктомъ Фуксовой (Fuchs) теоріи этихъ уравненій *). Простѣйшій случай ихъ представляетъ уравненіе гипергеометрическаго ряда:

$$x(1-x)y''+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)y'-\alpha\beta y=0, \tag{14}$$

гдѣ α, β, γ постоянныя; для него

$$\Delta(y)=Cx^{-\gamma}(x-1)^{\gamma-\alpha-\beta-1}, \tag{15}$$

что читатель легко можетъ найти самъ. (См. наше вышеприведенное сочиненіе объ этомъ рядѣ.)

---

*) См. классическій мемуаръ его: „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 66, 68.

127. Пусть $y=y_1$ есть частное рѣшеніе уравненія:

$$\sum_{k=0}^{n} X_k y^{(n-k)} = 0; \tag{1}$$

положимъ

$$y=y_1 z; \tag{2}$$

дифференцируя это равенство $n-k$ разъ по формулѣ Лейбница, мы будемъ имѣть:

$$y^{(n-k)} = y_1^{(n-k)} z + (n-k) y_1^{(n-k-1)} z' + \frac{(n-k)(n-k-1)}{1.2} y_1^{(n-k-2)} z'' + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(n-k)(n-k-1)\ldots(n-k-l+1)}{1.2.3\ldots.l} y_1^{(n-k-l)} z^{(l)} + \cdots \tag{3}$$

$$\cdots + (n-k) y'_1 z^{(n-k-1)} + y_1 z^{(n-k)},$$

или короче:

$$y^{(n-k)} = \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(n-k)(n-k-1)\ldots(n-k-l+1)}{1.2.3\ldots.l} y_1^{(n-k-l)} z^{(l)}; \tag{3'}$$

внося это въ (1), будемъ имѣть:

$$\sum_{k=0}^{n} X_k \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(n-k)(n-k-1)\ldots(n-k-l+1)}{1.2.3\ldots.l} y_1^{(n-k-l)} z^{(l)} = 0, \tag{4}$$

или, мѣняя порядокъ суммированія по k и l:

$$\sum_{l=0}^{n} \frac{z^{(l)}}{1.2\ldots l} \sum_{k=0}^{n-l} (n-k)(n-k-1)\ldots(n-k-l+1) X_k y_1^{(n-k-l)} = 0. \tag{5}$$

Этотъ результатъ напоминаетъ разложеніе полинома $f(x+h)$ по степенямъ h по строкѣ Тэйлора, ибо коэффиціенты при $\frac{z^l}{l!}$ составлены совершенно по тому же закону, какъ будто $y_1^{(n-k)}$ была бы не производная отъ y_1, а степень y_1^{n-k} этой величины. Такъ какъ y_1 по предположенію рѣшеніе уравненія, то коэффиціентъ при z, (для этого члена $l=0$), будетъ тождественно равенъ нулю; а потому, полагая

$$z'=u, \qquad \text{слѣд.} \qquad z=\int_{x_0}^{x} u\,dx + C_1, \tag{6}$$

мы приведемъ уравненіе (5) къ такому виду:

$$\sum_{k'=0}^{n-1} X_{k'}^{(1)} u^{(n-1-k')} = 0, \tag{7}$$

(гдѣ для краткости положено:

$$\frac{1}{l!} \sum_{k=0}^{n-l} (n-k)(n-k-1)\ldots(n-k-l+1) X_k y_1^{(n-k-l)} = X_{n-l}^{(1)}, \tag{8}$$

и затѣмъ въ суммѣ

$$\sum_{l=1}^{n} z^{(l)} X_{n-l}^{(1)} = \sum_{l=1}^{n} u^{(l-1)} X_{n-l}^{(1)}$$

члены написаны въ обратномъ порядкѣ, полагая $n-l=k'$), и въ то же время изъ (2) получимъ такое рѣшеніе уравненія (1):

(9) $$y = C_1 y_1 + y_1 \int_{x_0}^{x} u dx.$$

Это уравненіе (7) имѣетъ по крайней мѣрѣ одно рѣшеніе $u=u_1$; полагая

(10) $$u = u_1 (\int_{x_0}^{x} v dx + C_2),$$

мы точно такъ же приведемъ уравненіе (7) къ виду:

(11) $$\sum_{k''=0}^{n-2} X_{k''}^{(2)} v^{(n-1-k'')} = 0,$$

и въ тоже время получимъ, изъ (10) внося въ (9):

(12) $$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int_{x_0}^{x} u_1 dx + y_1 \int_{x_0}^{x} u_1 (\int_{x_0}^{x} v dx) dx.$$

И такъ далѣе поступая, придемъ наконецъ къ такому выраженію:

(13) $$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int_{x_0}^{x} u_1 dx + C_3 y_1 \int_{x_0}^{x} u_1 (\int_{x_0}^{x} v_1 dx) dx + \cdots$$
$$\cdots + C_n y_1 \int_{x_0}^{x} u_1 \int_{x_0}^{x} v_1 \ldots \int_{x_0}^{x} w_1 dx^{n-1},$$

гдѣ w_1 есть частное рѣшеніе послѣдняго полученнаго такимъ образомъ уравненія, $n-1$-аго по счету, слѣд. 1-го порядка:

(14) $$X_0^{(n-1)} w' + X_1^{(n-1)} w = 0,$$

которое всегда имѣетъ одно рѣшеніе, какъ мы знаемъ.

Здѣсь оправдывается вышеупомянутая аналогія съ алгебраическимъ уравненіемъ: сколько корней его знаемъ, на столько единицъ можемъ понизить его показателя; здѣсь каждый извѣстный интегралъ понижаетъ порядокъ на единицу; слѣд. если знаемъ m интеграловъ, то порядокъ понизится на m единицъ. Въ самомъ дѣлѣ, если $y_1, y_2, \ldots y_m$ суть рѣшенія уравненія (1), то, какъ то слѣдуетъ изъ (2) и (6), будутъ:

(15) $$u_1 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \quad u_2 = \left(\frac{y_3}{y_1}\right)', \ldots u_{m-1} = \left(\frac{y_m}{y_1}\right)'$$

рѣшенія уравненія (7); функціи

$$v_1=\left(\frac{u_2}{u_1}\right)', \quad v_2=\left(\frac{u_3}{u_1}\right)', \ldots . v_{m-2}=\left(\frac{u_{m-1}}{u_1}\right)' \tag{16}$$

уравненія (11) и т. д.; зная же одно рѣшеніе каждаго изъ этихъ уравненій, мы понижаемъ его порядокъ на единицу по указанному способу.

128. Полагая въ (13) пред. § по очереди каждое C равнымъ единицѣ, а прочія нулю, мы получимъ фундаментальную систему интеграловъ нашего уравненія, именно:

$$y_1, \quad y_1\int_x u_1 dx, \quad y_1\int_{x_0}^x u_1\int_{x_0}^x v_1 dxdx, \ \ldots \ y_1\int_{x_0}^x u_1\int_{x_0}^x v_1\ldots\int_{x_0}^x w_1 dx^{n-1}; \tag{1}$$

для доказательства этого нужно показать, что между ними невозможно соотношеніе вида (7) § 125 иначе, какъ при $\alpha_1=0, \alpha_2=0, \ldots \alpha_n=0$. Для краткости ограничимся случаемъ $n=4$ и допустимъ, что между рѣшеніями (1) существуетъ такое соотношеніе:

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_1\int_{x^0}^x u_1 dx+\alpha_3 y_1\int_{x_0}^x u_1\int_{x_0}^x v_1 dxdx+\alpha_4 y_1\int_{x_0}^x u_1\int_{x_0}^x v_1\int_{x_0}^x w_1 dxdxdx=0; \tag{2}$$

раздѣливъ его на общаго множителя всѣхъ членовъ y_1 и дифференцируя, получимъ:

$$\alpha_2 u_1+\alpha_3 u_1\int_{x_0}^x v_1 dx+\alpha_4 u_1\int_{x_0}^x v_1\int_{x_0}^x w_1 dxdx=0; \tag{3}$$

сокративъ на u_1 и продифференцировавъ, получимъ:

$$\alpha_3 v_1+\alpha_4 v_1\int_{x_0}^x w_1 dx=0; \tag{4}$$

сокративъ на v_1 и продифференцировавъ, получимъ:

$$\alpha_4 w_1=0; \tag{5}$$

изъ послѣдняго слѣдуетъ $\alpha_4=0$; слѣд. изъ (4) $\alpha_3=0$, изъ (3) $\alpha_2=0$ и изъ (2) $\alpha_1=0$, что и требовалось доказать.

Итакъ, теперь доказано существованіе фундаментальной системы, ибо мы знаемъ одну; а зная одну, найдемъ безчисленное множество ихъ по § 125.

Для такой фундаментальной системы, какъ (1), опредѣлитель $\Delta(y)$ (6) § 125 выражается очень просто:

$$\Delta(y)=Ky_1^n u_1^{n-1} v_1^{n-2}\ldots w_1. \tag{6}$$

Для $n=2$, $n=3$ въ этомъ нетрудно убѣдиться непосредственнымъ вычисленіемъ, что рекомендуется читателю, какъ полезное упражненіе въ вычисленіи опредѣлителей; но эта формула легко получается въ общемъ видѣ на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Изъ (8) пред. § для $k'=0$, слѣд. $l=n$, и для $k'=1$, слѣд. $l=n-1$ имѣемъ:

$$(7)\qquad X_0^{(1)}=\frac{1}{n!}n!\,X_0y_1;$$

$$X_1^{(1)}=\frac{1}{(n-1)!}\Big[n(n-1)\ldots 3.2\,X_0y'_1+(n-1)(n-2)\ldots 2.1.\,X_1y_1\Big];$$

а потому

$$(8)\qquad -\frac{X_1^{(1)}}{X_0^{(1)}}=-n\frac{y'_1}{y_1}-\frac{X_1}{X_0},\quad \text{откуда}\quad -\frac{X_1}{X_0}=n\frac{y'_1}{y_1}-\frac{X_1^{(1)}}{X_0^{(1)}},$$

или по (12) 126, обозначая чрезъ $\Delta^{(1)}(u)$ опредѣлитель для уравненія (7) пред. §:

$$(9)\qquad \frac{d\log\Delta(y)}{dx}=n\frac{d\log y_1}{dx}+\frac{d\log\Delta^{(1)}(u)}{dx};$$

интегрируя и переходя отъ логариѳма къ числу, получимъ:

$$(10)\qquad \Delta(y)=C^{(1)}y_1{}^n\,\Delta^{(1)}(u).$$

Примѣняя эту формулу къ уравненію (7) пред. § и означая чрезъ $\Delta^{(2)}(v)$ опредѣлитель уравненія (11), будемъ имѣть:

$$(11)\qquad \Delta^{(1)}(y)=C^{(2)}u_1{}^{n-1}\Delta^{(2)}(v);$$

и т. д.; наконецъ придемъ къ равенству:

$$(12)\qquad \Delta^{(n-1)}(w)=C^{(n)}w_1;$$

подставляя изъ каждаго равенства въ предшествующее, начиная съ послѣдняго, мы и придемъ къ формулѣ (6), гдѣ $K=C^{(1)}C^{(2)}\ldots C^{(n)}$.

129. Можетъ случиться, что въ уравненіи (5) § 127 обращаются въ нуль не только членъ, для котораго $l=0$ (онъ обращается въ нуль, ибо подъ y_1 мы разумѣемъ частное рѣшеніе уравненія (1)), но и слѣдующіе $m-1$ членовъ, т. е. тѣ, для которыхъ $l=1, 2,\ldots m-1$, обращаются въ нуль, или мы имѣемъ:

$$\sum_{k=0}^{n}X_ky_1{}^{(n-k)}=0;\quad \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)X_ky_1{}^{(n-k-1)}=0;$$

$$(1)\qquad \sum_{k=0}^{n-2}(n-k)\,(n-k-1)\,X_ky^{(n-k-2)}=0,\ \ldots$$

$$\ldots\sum_{k=0}^{n-m+1}(n-k)\,(n-k-1)\ldots(n-k-m+2)\,X_ky^{(n-k-m+1)}=0;$$

въ этомъ случаѣ говорятъ, по аналогіи съ алгебраическими уравненіями что $y=y_1$ есть m-кратное рѣшеніе уравненія (1) § 127. Въ этомъ случаѣ уравненіе (5) начнется съ члена съ $z^{(m)}$ и будетъ содержать кромѣ нея производныя до порядка n. Потому, полагая,

$$z^{(m)} = u, \tag{2}$$

мы понизимъ порядокъ на m единицъ, ибо u будетъ рѣшеніемъ уравненія порядка $n-m$. Найдя u, будемъ имѣть:

$$z = \int_{x_0}^{x(m)} u dx^m + C_1 x^{m-1} + C_2 x^{m-2} + \dots + C_{m-1} x + C_m, \tag{3}$$

(скрывая дѣлители въ произвольныхъ постоянныхъ) и слѣд.

$$y = y_1 z = y_1 [\int_{x_0}^{x(m)} u dx^m + C_1 x^{m-1} + C_2 x^{m-2} + \dots + C_{m-1} x + C_m]. \tag{4}$$

Такимъ образомъ утрачиваемые вслѣдствіе кратности рѣшенія $y = y_1$ интегралы фундаментальной системы восполнятся интегралами:

$$x^{m-1} y_1, \quad x^{m-2} y_1, \quad x^{m-3} y_1, \dots x^2 y_1, \quad x y_1. \tag{5}$$

Это можетъ случиться лишь съ приводимыми уравненіями. Такъ называются уравненія, либо приводимыя въ алгебраическомъ смыслѣ относительно производной наивысшаго порядка,—это не имѣетъ мѣста для линейныхъ уравненій,—либо имѣющія рѣшенія, общія съ уравненіями низшаго порядка. Послѣднее здѣсь какъ разъ имѣетъ мѣсто, какъ то видно изъ (1), гдѣ первое уравненія порядка n, остальныя низшихъ порядковъ. Для того, чтобы такое обстоятельство имѣло мѣсто относительно даннаго уравненія, его коэффиценты X_n должны удовлетворять извѣстнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ, которыя получимъ, исключивъ алгебраически y и его производныя до порядка n изъ уравненій (1) и ихъ производныхъ, взятыхъ до надлежащаго порядка.

Если въ (4) будемъ разумѣть подъ u полный интегралъ уравненія порядка $n-m$, которое чрезъ положеніе (2) выводится изъ (5) § 127 для m кратнаго рѣшенія $y = y_1$, то будемъ имѣть

$$u = \sum_{j=1}^{n-m} C' u_j, \tag{6}$$

гдѣ $\overset{n-m}{\underset{1}{u_j}}$ система независимыхъ интеграловъ сейчасъ упомянутаго уравненія. Внося это въ (4), будемъ имѣть:

$$y = y_1 \sum_{j=1}^{n-m} C'_j \int_{x_0}^{x(m)} u_j dx + y_1 \sum_{l=1}^{m} C_l x^{l-1}; \tag{7}$$

давая по очереди каждому C значеніе $=1$, а прочимъ $=0$, мы будемъ имѣть фундаментальную систему интеграловъ:

$$\left.\begin{aligned} & y_1 \int_{x_0}^{x(m)} u_j dx, \quad (j=1,2\dots n-m) \\ & y_1 x^{l-1}, \quad (l=1,\dots m) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

—изъ которыхъ послѣдніе совпадаютъ съ (5). Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что между этими интегралами существуетъ такое линейное соотношеніе:

$$(9) \qquad \sum_{j=1}^{n-m}\alpha_j y_1 \int_{x_0}^{x(m)} u_j dx_j + \sum_{l=1}^{m}\beta_l y_1 x^{l-1} = 0;$$

раздѣливъ это соотношеніе на y_1 и продифференцировавъ m разъ, мы придемъ къ соотношенію между u_j:

$$(10) \qquad \sum_{j=1}^{n-m}\alpha_j u_j = 0,$$

каковое возможно не иначе, какъ при $\overset{n-m}{\underset{1}{\alpha_j}} = 0$; но тогда изъ уравненія (9) и его производныхъ до $m-1$ порядка будетъ слѣдовать $\overset{m}{\underset{1}{\beta_l}} = 0$.

Итакъ соотношеніе (9) возможно не иначе какъ тогда, когда всѣ α и β равны нулю; отсюда и слѣдуетъ сказанное.

130. Интегралы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій высшихъ порядковъ приводятся къ извѣстнымъ функціямъ лишь въ очень немногихъ случаяхъ; вообще же они приводятъ къ новымъ функціямъ, свойства которыхъ должны быть выведены изъ самыхъ уравненій. Это составляетъ предметъ спеціальнаго курса теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ перемѣнными коэффицієнтами; важнѣйшія сочиненія по этому предмету были выше указаны; здѣсь же мы ограничимся лишь разсмотрѣніемъ сейчасъ упомянутыхъ частныхъ случаевъ.

Первый изъ нихъ это, когда коэффиціенты уравненія X_k суть постоянныя, почему мы ихъ означимъ лучше чрезъ a_k, такъ что уравненіе будетъ:

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(n-k)} = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

Такъ какъ линейныя дифференціальныя уравненія безъ послѣдняго члена суть однородныя, то порядокъ ихъ можетъ быть пониженъ на единицу по способу § 119, т. е. полагая

$$(2) \qquad y = e^{\int_{x_0}^{x} z dx}, \text{ слѣд. } y' = yz,\ y'' = y(z^2 + z')\ y''' = y(z^3 + 3zz' + z'') \text{ и т. д.;}$$

но только тогда уравненіе утратитъ свой характеръ линейнаго, ибо въ него войдутъ произведенія, составленныя изъ z и его производныхъ, возвышенныхъ въ разныя степени, какъ то видно уже по выраженію y''' и слѣдующему y^{IV}; но въ этомъ уравненіи членъ, несодержащій производныхъ z, будетъ такой, какъ то слѣдуетъ изъ (2), гдѣ наивысшая степень z равна порядку производнаго y:

$$(3) \qquad Z = \sum_{k=0}^{n} X_k z^{n-k};$$

если бы случилось, что уравненіе $Z = 0$ имѣло бы постоянный корень $z = r$, то тогда наше уравненіе имѣло бы интегралъ

$$y = e^{r(x-x_0)}, \tag{4}$$

ибо уравненію, полученному для z, положеніе $z=r$ удовлетворяло бы, такъ какъ члены съ производными обратились бы въ нуль, ибо $z'=0$, $z''=0 \ldots z^{(n-1)}=0$, такъ какъ $z=$ постоянному, послѣдній же членъ обратился бы въ нуль въ силу того, что $z=r$ есть корень уравненія $Z=0$. Это всегда будетъ имѣть мѣсто для разсматриваемаго нами теперь уравненія съ постоянными коэффиціентами, ибо уравненіе $Z=0$ теперь будетъ:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k} = 0, \tag{5}$$

которое, имѣя постоянные коэффиціенты, можетъ имѣть лишь постоянные корни. Въ этомъ случаѣ, вообще говоря, мы получимъ не одинъ интегралъ, а n интеграловъ,—такъ какъ уравненіе (5) степени n и потому имѣетъ n корней, вообще различныхъ,—вида (4). Если всѣ n корней различны, то мы будемъ имѣть такіе частные интегралы:

$$y_1 = e^{r_1(x-x_0)}, \quad y_2 = e^{r_2(x-x_0)}, \ldots \quad y_n = e^{r_n(x-x_0)}, \tag{6}$$

которые всѣ будутъ различны, и потому составятъ фундаментальную систему,—если $\Delta(y)$ для этой системы не будетъ $=0$. Но такъ какъ

$$y_i^{(k)} = r_i^k e^{r_i(x-x_0)}, \tag{7}$$

то

$$\Delta(y) = e^{r_1(x-x_0)+r_2(x-x_0)+\cdots+r_n(x-x_0)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & \ldots r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & \ldots r_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & r_3^{n-1} & \ldots r_n^{n-1} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

входящій же сюда опредѣлитель$=$

$$= \prod_{i,j=1}^{n}{}' (r_i - r_j), \tag{9}$$

гдѣ $\prod\limits_{i,j=1}^{n}{}'$ показываетъ, что произведеніе берётся для всѣхъ различныхъ комбинацій значковъ i, j по два изъ ряда $1, 2 \ldots n$ *). Это произведеніе можетъ быть $=0$ лишь, когда по крайней мѣрѣ одинъ изъ его множителей равенъ нулю, т. е.

*) Дѣйствительно, этотъ опредѣлитель обращается въ нуль, когда $r_i = r_j$, а потому дѣлится на разность $r_i - r_j$, гдѣ i и j какіе угодно различные значки изъ $1, 2, \ldots n$; слѣд. онъ дѣлится и на произведеніе этихъ разностей, т. е. на (9); степени $r_1, r_2, \ldots r_n$ въ обоихъ выраженіяхъ одинаковыя; сравнивая коэффиціенты, напр. главнаго члена въ обоихъ, находимъ, что они равны, отсюда и слѣдуетъ сказанное въ текстѣ.

(10) $$r_g - r_h = 0,$$

или $r_g = r_h$, т. е. когда уравненіе (5) имѣетъ равные корни. Если всѣ корни различные, то функціи (6) составятъ фундаментальную систему интеграловъ, и полный интегралъ уравненія (1) будетъ потому слѣдующій:

(11) $$y = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{r_i(x-x)_0},$$

или, переводя $e^{-r_i x_0}$ въ C_i, короче:

(12) $$y = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{r_i x}.$$

Если же y_h есть m-кратный корень, то, какъ мы видѣли въ § 129, недостающіе интегралы восполняются системою такихъ:

(13) $$e^{r_h x}, \quad x e^{r_h x}, \quad x^2 e^{r_h x}, \ldots x^{m-1} e^{r_h x},$$

числомъ m (включая въ этотъ рядъ $y_h = e^{r_h x}$). Это будетъ имѣть мѣсто для каждаго кратнаго корня уравненія (5), называемаго *характеристическимъ*.

131. Мы вывели предыдущіе результаты для линейнаго дифференціальнаго уравненія съ постоянными коэффиціентами изъ общей теоріи. Они могутъ быть получены и независимо отъ того.

Пусть дано уравненіе

(1) $$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(n-k)} = 0,$$

гдѣ a_k постоянныя величины. Попробуемъ удовлетворить ему, полагая

(2) $$y = e^{rx};$$

такъ какъ $y^{(n-k)} = r^{(n-k)} e^{rx}$, то по внесеніи этого въ уравненіе (1) будемъ имѣть, вынося e^{rx} за скобки:

(3) $$e^{rx} \sum_{k=0}^{n} a_k r^{(n-k)} = 0;$$

такъ какъ множитель e^{rx} отличенъ отъ нуля, то другой множитель долженъ равняться нулю; отсюда такое уравненіе для опредѣленія r:

(4) $$F(r) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^{(n-k)} = 0.$$

Мы получаемъ такимъ образомъ то же самое характеристическое уравненіе. Если оно имѣетъ n различныхъ корней, то его интегралъ выразится формулою (12) пред. §. Если оно имѣетъ равные корни, то недостающіе интегралы фундаментальной системы такъ найдутся. Напишемъ наше уравненіе (1) при помощи Лейбницевскаго обозначенія производныхъ, которое теперь для насъ представляетъ большія удобства; будемъ имѣть:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}} = 0; \tag{5}$$

подставляя въ первую часть этого уравненія вмѣсто y функцію e^{rx}, гдѣ r пока совершенно произвольная величина, мы получимъ такое тождество:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^{n-k}(e^{rx})}{dx^{n-k}} = F(r)e^{rx}, \tag{6}$$

гдѣ $F(r)$ имѣетъ то же значеніе, какъ въ (4), т. е. обозначаетъ функцію, представляющую лѣвую часть уравненія (4), (которая при произвольномъ r не будетъ нуль). Дифференцируя m разъ тождество (6) по r,—вторую часть по формулѣ Лейбница, мы будемъ имѣть, въ виду того, что по независимости r и y, одного отъ другого, порядокъ диффиренцированія по нимъ можетъ быть измѣненъ, слѣдующее тождество:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^{n-k}(x^m e^{rx})}{dx^{n-k}} = e^{rx} \sum_{l=0}^{m} \frac{m(m-1)\ldots(m-l+1)}{1.2.3\ldots l} F^{(l)}(r) x^{m-l}, \tag{7}$$

такъ какъ $\frac{d^m e^{rx}}{dr^m} = x^m e^{rx}$. Если теперь вмѣсто произвольнаго r подставимъ корень r_g кратности p, то всѣ $F^{(l)}(r)$ для $l \leqq m < p$ обратятся въ нуль, и мы будемъ имѣть такое тождество:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^{n-k}(x^m e^{rx})}{dx^{n-k}} = 0, \tag{8}$$

откуда слѣдуетъ, что $y = x^m e^{rx}$, при $m \leqq p-1$, если r есть p-кратный корень уравненія $F(r)=0$, есть рѣшеніе даннаго дифференціальнаго уравненія. Давая здѣсь m всѣ цѣлыя значенія отъ 0 до $p-1$, мы получимъ p интеграловъ:

$$e^{rx}, \quad xe^{rx}, \quad x^2e^{rx}, \quad x^3e^{rx} \ldots x^{p-1}e^{rx}. \tag{9}$$

Что они будутъ независимы — это видно изъ того, что, отбрасывая множитель e^{rx}, линейное соотношеніе между ними обратилось бы въ такое:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{p-1} x^{p-1} = 0, \tag{10}$$

а при всякомъ x оно возможно не иначе, какъ при $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{p-1} = 0$. Что вмѣстѣ съ прочими они составятъ линейно независимую систему, это мы видѣли уже въ § 129; не трудно это повторить для разсматриваемыхъ нами теперь уравненій съ постоянными коэффиціентами. Пусть только одинъ корень ур. $F(r)=0$ p-кратный, а прочіе простые. Тогда линейное соотношеніе, по раздѣленіи на e^{rx} приметъ такой видъ:

(11) $\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots+\alpha_{p-1}x^{p-1}+\alpha_p e^{(r_p-r)x}+\cdots+\alpha_n e^{(r_n-r)x}=0;$

если его продифференцируемъ p разъ по x, то придемъ къ такому:

(12) $$\alpha_p(r_p-r)^p e^{(r_p-r)x}+\cdots+\alpha_n(r_n-r)^p e^{(r_n-r)x}=0,$$

т. е. къ линейному соотношенію между $e^{r_p x}$, $e^{r_{p+1}x}, \ldots e^{r_n x}$, помножая на e^{rx}; а таковое не можетъ быть. Дѣйствительно, написавъ (12) для простоты такъ:

(13) $$\beta_p e^{r_p x}+\beta_{p+1}e^{r_{p+1}x}+\cdots+\beta_n e^{r_n x}=0,$$

гдѣ по предположенію всѣ r_p различны, мы будемъ имѣть линейное соотношеніе между функціями $e^{r_k x}$, а въ невозможности его мы убѣдимся какъ въ § 128. Лишь для простоты мы предположили, что уравненіе имѣетъ одинъ корень p-кратный, а прочіе—простые; но и при существованіи нѣсколькихъ корней разной кратности, продифференцировавъ предположенное линейное соотношеніе столько разъ, сколько единицъ въ показателѣ кратности корня, по раздѣленіи на e^{rx}, гдѣ r этотъ корень, мы освободимся отъ соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ, причемъ уравненіе будетъ прежняго вида, только перемѣнятся коэффиціенты полиномовъ, на которые помножаются прочіе e^{rx}; повторяя дифференцированія надлежащее число разъ, мы придемъ къ соотношенію вида (13) между интегралами, отвѣчающими неравнымъ корнямъ, а таковое невозможно.

132. Пусть дано уравненіе:

(1) $$y''-5y'+6y=0;$$

полагая $y=e^{rx}$ и раздѣляя результатъ подстановки на e^{rx}, получимъ такое характеристическое уравненіе:

(2) $$r^2-5r+6=0,$$

корни котораго будутъ: $r_1=2$, $r_2=3$; слѣд. полный интегралъ уравненія (1) будетъ:

(3) $$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}.$$

Другой примѣръ. Дано уравненіе:

(4) $$y'''-y'-6y=0;$$

полагая $y=e^{rx}$, по раздѣленіи на e^{rx} будемъ имѣть:

(5) $$F(r)=r^3-r-6=0.$$

Одинъ корень этого уравненія есть $r_1=2$, что легко усматривается; освобождая отъ него уравненіе, получимъ другіе два корня изъ уравненія:

(6) $$F(x):(r-2)=r^2+2r+3=0,$$

которые будутъ: $r_2=-1+\sqrt{2}i$, $r_3=-1-\sqrt{2}i$, гдѣ $i=\sqrt{-1}$; слѣд. полный интегралъ будетъ:

$$y=Ce^{2x}+C_1e^{-x+\sqrt{2}xi}+C_2e^{-x-\sqrt{2}xi}. \tag{7}$$

Отъ мнимыхъ величинъ легко освободиться; представимъ сперва такъ этотъ интегралъ:

$$y=Ce^{2x}+e^{-x}[C_1e^{\sqrt{2}xi}+C_2e^{-\sqrt{2}xi}]; \tag{8}$$

но по формуламъ Эйлера:

$$e^{\pm\sqrt{2}xi}=\cos(\sqrt{2}x)\pm i\sin(\sqrt{2}x); \tag{9}$$

а потому будетъ

$$y=Ce^{2x}+e^{-x}[(C_1+C_2)\cos(\sqrt{2}x)+(C_1-C_2)i\sin(\sqrt{2}x)], \tag{10}$$

или, полагая $C_1+C_2=A$, $(C_1-C_2)i=B$,

$$y=Ae^{-x}\cos(\sqrt{2}x)+Be^{-x}\sin(\sqrt{2}x)+Ce^{2x}. \tag{11}$$

Примѣчаніе: То, что мы сдѣлали въ этомъ примѣрѣ, всегда возможно сдѣлать, въ случаѣ, если коэффиціенты уравненія вещественные; тогда каждому корню $r_1=\alpha+\beta i$ будетъ отвѣчать сопряженный $r_2=\alpha-\beta i$, и если первый есть p-кратный, то и второй будетъ p-кратный, а потому въ числѣ элементовъ фундаментальной системы будутъ такіе два:

$$x^me^{(\alpha+\beta i)x} \quad \text{и} \quad x^me^{(\alpha-\beta i)x}, \tag{12}$$

гдѣ $m=0, 1, 2,\ldots p-1$; каждую же пару такихъ элементовъ, помноженныхъ на C_1 и C_2, можно такъ преобразовать на основаніи формулъ Эйлера:

$$\begin{aligned} C_1x^me^{(\alpha+\beta i)x}+C_2x^me^{(\alpha-\beta i)} &= x^me^{\alpha x}[C_1e^{\beta xi}+C_2e^{-\beta xi}]= \\ &= x^me^{\alpha x}[(C_1+C_2)\cos\beta x+(C_1-C_2)i\sin\beta x]= \\ &= Ax^me^{\alpha x}\cos\beta x+Bx^me^{\alpha x}\sin\beta x, \end{aligned} \tag{13}$$

полагая $C_1+C_2=A$, $(C_1-C_2)i=B$, гдѣ A и B новыя произвольныя постоянныя, какъ составленныя изъ таковыхъ.

Третій примѣръ. Дано уравненіе:

$$y^{(V)}-y'''-2y''+2y'=0. \tag{14}$$

Полагая $y=e^{rx}$, по раздѣленіи на e^{rx} будемъ имѣть:

$$F(r)=r^5-r^3-2r^2+2r=0. \tag{15}$$

Это уравненіе имѣетъ корни: $r_1=0$, $r_2=+1$, $r_3=+1$, — ибо $F(+1)=0$, и $F'(r)=5r^4-3r^2-4r+2$ тоже $=0$ при $r=+1$; освобождая это уравненіе (15) отъ этихъ трехъ корней дѣленіемъ на $r^3-2r^2+r=r(r-1)^2$, получимъ такое:

$$(16)\qquad r^2+2r+2=0,$$

откуда найдемъ остальные корни уравненія (15):

$$(17)\qquad r_4=-1+i \quad \text{и} \quad r_5=-1-i.$$

Такимъ образомъ, полный интегралъ уравненія (14) будетъ:

$$(18)\qquad y=C_1+C_2e^x+C_3xe^x+C'e^{-x+xi}+C''e^{-x-xi},$$

или, освобождаясь отъ мнимыхъ величинъ:

$$(19)\qquad y=C_1+C_2e^x+C_3xe^x+C_4e^{-x}\cos x+C_5e^{-x}\sin x,$$

полагая $C'+C''=C_4$, $(C'-C'')i=C_5$.

133. Къ линейному уравненію съ постоянными коэффиціентами сводится уравненіе (1) § 124, когда имѣемъ:

$$(1)\qquad X_k=A_k(ax+b)^{n-k} \qquad (k=0, 1, 2\ldots n),$$

гдѣ A_k, a и b суть постоянныя, слѣд. когда имѣемъ такое уравненіе:

$$(2)\qquad \sum_{k=0}^{n} A_k(ax+b)^{n-k}y^{(n-k)}=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если введемъ новую независимую перемѣнную t вмѣсто x, положивъ

$$(3)\qquad ax+b=e^t, \quad \text{слѣд.} \quad t=\log(ax+b),$$

то будемъ имѣть:

$$(4)\qquad \frac{dt}{dx}=\frac{a}{ax+b}=ae^{-t},$$

и потому:

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} y'&=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=ae^{-t}\frac{dy}{dt};\\ y''&=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy'}{dt}ae^{-t}=ae^{-t}\left[-ae^{-t}\frac{dy}{dt}+ae^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right]=\\ &=a^2e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right];\\ y'''&=\frac{dy''}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy''}{dt}ae^{-t}=a^3e^{-3t}\left[\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right] \text{ и т. д.}\end{aligned}\right.$$

Легко видѣть, что вообще будетъ

$$(6)\qquad y^{(n-k)}=a^{n-k}e^{-(n-k)t}\left[\frac{d^{n-k}y}{dt^{n-k}}+\lambda_1\frac{d^{n-k-1}y}{dt^{n-k-1}}+\cdots+\lambda_{n-k-1}\frac{dy}{dt}\right];$$

въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя еще по x, слѣд. правую часть по t, и помножая на (4), получимъ:

$$y^{(n-k+1)}=a^{(n-k+1)}e^{-(n-k+1)t}\left\{\frac{d^{n-k+1}y}{dt^{n-k+1}}+[\lambda_1-(n-k)]\frac{d^{n-k}y}{dt^{n-k}}+\right.$$

$$+[\lambda_2-\lambda_1(n-k)]\frac{d^{n-k-1}y}{dt^{n-k-1}}+\cdots+$$

$$\left.+[\lambda_{n-k-1}-\lambda_{n-k-2}(n-k)]\frac{d^2y}{dt^2}-\lambda_{n-k-1}(n-k)\frac{dy}{dt}\right\},$$

слѣд. выраженіе того же вида. Подставляя изъ (5) и (6) во (2) и имѣя виду, что по (3)

$$(ax+b)e^{-t}=1, \tag{7}$$

мы получимъ результатъ такого вида, располагая по производнымъ y по t:

$$\sum a_k\frac{d^{n-k}y}{dt^{n-k}}=0, \tag{8}$$

гдѣ всѣ коэффиціенты a_k суть линейныя функціи отъ A_k съ цѣлыми коэффиціентами, слѣд. величины постоянныя. Найдя интегралъ этого уравненія, останется только подставить вмѣсто t его выраженіе чрезъ x изъ (3), чтобы имѣть интегралъ даннаго уравненія.

Такъ уравненіе

$$2x^2y''+3xy'-3y=0 \tag{9}$$

на основаніи (5), полагая $x=e^t$, обращается въ такое:

$$2\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-3y=0; \tag{10}$$

характеристическое уравненіе для него будетъ:

$$2r^2+r-3=0; \tag{11}$$

его корни суть $r_1=+1$, $r_2=-\frac{3}{2}$, и потому полный интегралъ будетъ

$$y=C_1e^t+C_2e^{-\frac{3}{2}t}; \tag{12}$$

вноси сюда вмѣсто e^t его значеніе x, получимъ искомый интегралъ уравненія (9):

$$y=C_1x+C_2x^{-\frac{3}{2}}. \tag{13}$$

134. Уравненіе (2) предыдущаго §, т. е.

(1) $$\sum_{k=0}^{n} A_k(ax+b)^{n-k}y^{(n-k)}=0,$$

можно проинтегрировать, и не дѣлая вышеуказаннаго преобразованія. Положимъ въ этомъ уравненіи

(2) $$y=(ax+b)^r;$$

тогда будемъ имѣть:

(3) $$y^{(n-k)}=r(r-1)\ldots(r-n+k+1)(ax+b)^{r-n+k}a^{n-k};$$

внося это въ (1), будемъ имѣть, употребляя Лейбницевское обозначеніе производныхъ:

(4) $$\sum_{k=0}^{n} A_k(ax+b)^{n-k}\frac{d^{n-k}[(ax+b)^r]}{dx^{n-k}}=(ax+b)^r F(r),$$

гдѣ

(5) $$F(r)=\sum_{k=0}^{n} A_k r(r-1)\ldots(r-n+k+1)a^{n-k}.$$

Отсюда видно, что, если r обозначаетъ корень уравненія

(6) $$F(r)=0,$$

то выраженіе (2) будетъ интеграломъ уравненія (1). Если всѣ n корней этого уравненія различны, то полный интегралъ будетъ

(7) $$y=\sum_{i=1}^{n} C_i(ax+b)^{r_i}.$$

Въ случаѣ равныхъ корней, недостающіе интегралы получатся, какъ въ § 131; дифференцируя тождество (4) m разъ по r, мы будемъ имѣть:

(8) $$\sum_{k=0}^{n} A_k(ax+b)^{n-k}\frac{d^{n-k}\{(ax+b)^r[\log(ax+b)]^m\}}{dx^{n-k}}=$$

$$=(ax+b)^r\sum_{l=0}^{m}\frac{m(m-1)\ldots(m-l+1)}{1.2.3\ldots l}F^{(l)}(r)[\log(ax+b)]^{m-l};$$

если r будетъ p-кратнымъ корнемъ уравненія (6), то всѣ члены второй части (8) для $m \leqq p-1$ будутъ равны нулю порознь; слѣд. выраженія

(9) $$y=(ax+b)^r[\log(ax+b)]^m$$

для $m=0, 1, 2,\ldots p-1$ будутъ интегралами уравненія (1).

Пусть дано уравненіе:

(10) $$x^2y''-(2n-1)xy'+n^2y=0;$$

полагая $y=x^r$ и отбрасывая этотъ множитель, мы будемъ имѣть такое характеристическое уравненіе:

$$r(r-1)-(2n-1)r+n^2=0, \tag{11}$$

или

$$(r-n)^2=0; \tag{12}$$

такъ какъ оба корня $r=n$, то частные интегралы уравненія (10) будутъ:

$$y_1=x^n, \quad y_2=x^n\log x, \tag{13}$$

и потому полный интегралъ будетъ:

$$y=x^n(C_1+C_2\log x). \tag{14}$$

Замѣтимъ, что метода пред. § не отличается существенно отъ сейчасъ изложенной, ибо для интегрированія уравненія (8) пред. § мы должны положить $y=e^{rt}$, а это въ силу (3) того же § равносильно положенію (2) настоящаго § въ данномъ уравненіи.

135. Переходимъ теперь къ интегрированію уравненія съ послѣднимъ членомъ:

$$\sum_{k=0}^{n} X_k y^{(n-k)}=V. \tag{1}$$

Въ частномъ случаѣ, когда $V:X_n=b$, гдѣ b постоянное, это уравненіе сразу приводится къ линейному безъ послѣдняго члена, полагая

$$y=z+b,$$

ибо тогда

$$y^{(n-k)}=z^{(n-k)},$$

и уравненіе (1) приводится къ такому:

$$\sum_{k=0}^{n} X_k z^{(n-k)}+X_n b=V,$$

или вычитая изъ него

$$X_n b=V,$$

къ уравненію:

$$\sum_{k=0}^{n} X_k z^{(n-k)}=0.$$

Въ общемъ случаѣ, если извѣстенъ интегралъ уравненія безъ послѣдняго члена:

$$\sum_{k=0}^{n} X_k y^{(n-k)}=0, \tag{2}$$

именно

$$\overline{y}=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i, \tag{3}$$

гдѣ C_i произвольныя постоянныя, то можно попытаться получить отсюда интегралъ уравненія (1), разсматривая $\overset{n}{\underset{1}{C_i}}$ не какъ постоянныя, а какъ функціи x, слѣд. положивъ

$$(4) \qquad y=\sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i$$

и опредѣливъ эти функціи такъ, чтобы это выраженіе удовлетворяло тождественно уравненію (1). Такъ какъ всѣхъ функцій $C_i(x)$ числомъ n, то къ послѣднему условію можемъ присоединить $n-1$ произвольно выбранныхъ; мы выберемъ эти условія такъ, чтобы всѣ производныя отъ y до порядка $n-1$ включительно, имѣли тотъ самый видъ, какъ и при постоянныхъ C_i. Дифференцируя выраженіе (4) и приравнивая нулю совокупность членовъ, происшедшихъ отъ измѣненія $C_i(x)$, будемъ имѣть:

$$(5) \qquad y'=\sum_{i=1}^{n} C_i(x) y'_i \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{n} C'_i(x) y_i=0; \qquad (6)$$

поступая такъ же съ (5), какъ съ (4), получимъ:

$$(7) \qquad y''=\sum_{i=1}^{n} C_i(x) y''_i \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{n} C'_i(x) y'_i=0; \qquad (8)$$

продолжая такъ, придемъ къ уравненію:

$$(9) \qquad y^{(n-1)}=\sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n-1)}, \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{n} C'_i(x) y_i^{(n-2)}=0; \qquad (10)$$

дифференцируя (9), получимъ:

$$(11) \qquad y^{(n)}=\sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n)}+\sum_{i=1}^{n} C'_i(x) y_i^{(n-1)}.$$

Подставляя изъ (4), (5), (7), (9), (11) въ (1) и имѣя въ виду, что въ силу того, что $\overset{n}{\underset{1}{y_i}}$ суть интегралы уравненія (2), члены съ $C_i(x)$ исчезнутъ, мы будемъ имѣть:

$$(12) \qquad X_0 \sum_{i=1}^{n} C'_i(x) y_i^{(n-1)}=V,$$

или, раздѣляя обѣ части на X_0:

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{n} C'_i(x) y_i^{(n-1)}=\frac{V}{X_0}.$$

Изъ уравненій (6), (8), (10) и (13) мы и найдемъ $C'_i(x)$. Опредѣлитель этой системы уравненій есть $\Delta(y)$ [(6) § 125]; означая его миноры, отвѣчающіе элементу k-ой строки i-го столбца чрезъ Δ_{ik}, будемъ имѣть:

$$(14) \qquad C'_i(x)=\frac{\Delta_{in}}{\Delta}\frac{V}{X_0}; \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

интегрируя, получимъ отсюда:

$$C_i(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\Delta_{in}}{\Delta} \frac{V}{X_0} dx + c_i, \qquad (i=1, 2, \ldots n) \qquad (15)$$

гдѣ $\overset{n}{\underset{1}{c_i}}$ произвольныя постоянныя. Внося это въ (4), будемъ имѣть полный интегралъ уравненія (1):

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_{x_0}^{x} \frac{\Delta_{in}}{\Delta} \frac{V}{X_0} dx + \sum_{i=1}^{n} c_i y_i. \qquad (16)$$

Полагая всѣ $c_i = 0$, мы получимъ частный интегралъ этого уравненія

$$y^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_{x_0}^{x} \frac{\Delta_{in}}{\Delta} \frac{V}{X_0} dx, \qquad (17)$$

тогда какъ вторая сумма въ (16) представитъ полный интегралъ (3) уравненія (2), согласно съ формулою (8) § 123.

Изложенный способъ интегрированія линейнаго дифференціальнаго уравненія принадлежитъ Лагранжу, какъ уже было упомянуто въ § 123, и называется *способомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ*.

Для приложенія формулы (17) возьмемъ линейное уравненіе съ постоянными коэффиціентами (5) § 130; тогда Δ опредѣлится формулою (8) того же §, а $(-1)^{n+i}\Delta_{in}$ получится изъ нея вычеркиваніемъ изъ опредѣлителя послѣдней строки и i-го столбца, и множителя $e^{r_i(x-x_0)}$, отвѣчающаго этому столбцу. Но опредѣлитель, входящій въ первую формулу, по (9) § 130 будетъ равенъ произведенію

$$\prod_{g,h=1}^{n}{}'(r_g - r_h), \qquad (18)$$

распространенному на всѣ различныя комбинаціи g и h изъ ряда $1, 2, \ldots n$; опредѣлитель, входящій въ Δ_{in}, получится изъ этого по выбрасываніи изъ него множителей, для которыхъ g или $h = i$, произведеніе которыхъ $= (-1)^{n-i}[F'(r_i) : a_0]$; слѣд. будетъ

$$\frac{\Delta_{in}}{\Delta} = \frac{a_0}{e^{r_i(x-x_0)} F'(r_i)} = \frac{a_0}{F'(r_i)} e^{-r_i(x-x_0)}. \qquad (19)$$

Внося это въ (17), замѣчая, что теперь $X_0 = a_0$, помня, что теперь $y_i = e^{r_i(x-x_0)}$, затѣмъ что $\dfrac{e^{r_i x_0}}{F'(r_i)}$ можетъ быть вынесено, какъ постоянный множитель, за знакъ интеграла, мы получимъ такое выраженіе для частнаго рѣшенія уравненія съ послѣднимъ членомъ:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(n-k)} = V, \qquad (20)$$

опредѣляемаго формулою (17):

(21) $$y^{(1)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{r_ix}}{F'(r_i)}\int_{x_0}^{x}e^{-r_ix}Vdx.$$

Входящія сюда квадратуры выполнимы, когда V цѣлая функція x, или линейная функція относительно sin или cos отъ дугъ вида $\alpha x+\beta$, или вида $x^m\sin(\alpha x+\beta)$ или $x^m\cos(\alpha x+\beta)$, какъ то извѣстно изъ главы объ интегрированіи трансцендентныхъ функцій.

136. Коши къ тому же результату пришелъ слѣдующимъ путемъ. Опредѣлимъ въ полномъ интегралѣ уравненія безъ послѣдняго члена (2) пред. §, выражаемаго формулою (3) того же §, произвольныя постоянныя C_i такъ, чтобы при $x=\alpha$ было:

(1) $$\sum_{i=1}^{n}C_iy_i^{(m)}=0\quad(m=0,1,\ldots(n-2));\qquad\sum_{i=1}^{n}C_iy_i^{(n-1)}=f(\alpha):X_0(\alpha)$$

если $V=f(x)$. Изъ этихъ равенствъ опредѣлятся C_i въ функціи α такими же точно формулами, какъ C'_i въ предыдущемъ § въ функціи x, такъ какъ эти уравненія отличаются отъ (6), (8), (10) и (13) предыдущаго § только тѣмъ, что мѣсто x заступаетъ α, и вмѣсто C'_i стоитъ C_i. Полагая

(2) $$Y(\alpha,x)=\sum_{i=1}^{n}C_i(\alpha)y_i,$$

гдѣ $C_i(\alpha)$ только-что полученныя изъ (1) выраженія, мы будемъ имѣть для искомаго интеграла уравненія (1) пред. § такое выраженіе:

(3) $$y=\int_{x_0}^{x}Y(\alpha,x)d\alpha.$$

Въ самомъ дѣлѣ дифференцируя этотъ интегралъ по параметру x одинъ разъ, другой,... наконецъ n-ый разъ, на основаніи (1) будемъ имѣть:

$$y'=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial Y(\alpha,x)}{\partial x}d\alpha,\quad y''=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^2 Y(\alpha,x)}{\partial x^2}d\alpha,\ \ldots\ y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^{n-1}Y(\alpha,x)}{\partial x^{n-1}}d\alpha,$$

(4) $$y^{(n)}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^{(n)}Y(\alpha,x)}{\partial x^{(n)}}d\alpha+\frac{f(x)}{X_0(x)},$$

ибо члены, зависящіе отъ верхняго предѣла въ этихъ формулахъ:

$$Y(\alpha,x)\Big|_{\alpha=x},\quad\frac{\partial Y(\alpha,x)}{\partial x}\Big|_{\alpha=x},\quad\frac{\partial^2 Y(\alpha,x)}{\partial x^2}\Big|_{\alpha=x},\ldots\quad\frac{\partial^{n-1}Y(\alpha,x)}{\partial x^{n-1}}\Big|_{\alpha=x}$$

будучи результатомъ замѣны въ первыхъ $(n-1)$ уравненіяхъ (1), которыя, послѣ подстановки $C_i(\alpha)$ въ нихъ, обращаются въ тождества, α чрезъ x, будутъ тождественно $=0$, такъ какъ эти $n-1$ выраженій тождественно равны нулю, т. е. при всякомъ α; послѣднее же въ (4) получается изъ послѣдняго въ (1) тождества чрезъ замѣну α чрезъ x, допустимую на томъ же основаніи. Подставляя же изъ (4) въ (1) пред. §, мы получимъ, перемѣняя порядокъ суммированія и интегрированія:

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{n} X_k \frac{\partial^{n-k} Y(\alpha,x)}{\partial x^{n-k}} + f(x) = f(x), \tag{5}$$

а это есть тождество, ибо

$$\sum_{k=0}^{n} X_k \frac{\partial^{n-k} Y(\alpha,x)}{\partial x^{n-k}} = 0, \tag{6}$$

такъ какъ по (2) выраженіе $Y(\alpha,x)$ есть интегралъ уравненія безъ послѣдняго члена (2) пред. §. Итакъ, выраженіе (3) дѣйствительно есть интегралъ уравненія (1) пред. §. Подставляя во (2) ихъ выраженія, получаемыя чрезъ рѣшеніе уравненій (1), а затѣмъ въ (3), по вынесеніи затѣмъ y_i за знакъ интеграла по α, такъ какъ это функціи x, отъ α независящія, мы приведемъ выраженіе (3) къ (17) пред. §. Предоставляемъ это выполнить читателю самому.

137. Поясним изложенное на примѣрахъ. Пусть дано уравненіе:

$$y'' - 5y' + 6y = x; \tag{1}$$

уравненіе безъ послѣдняго члена будетъ

$$y'' - 5y' + 6y = 0; \tag{2}$$

его полный интегралъ былъ нами найденъ въ § 132:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}. \tag{3}$$

Будемъ теперь разсматривать здѣсь C_1 и C_2 какъ функціи x; дифференцируя въ этомъ предположеніи опредѣлимъ C_1 и C_2 такъ, чтобы форма y' была бы та же, что при C_1 и C_2 постоянныхъ; будемъ имѣть:

(4) $\qquad y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} \quad$ при $\quad C_1' e^{2x} + C_2' e^{3x} = 0; \qquad$ (5)

дифференцируя еще разъ (4), получимъ:

$$y'' = 4C_1 e^{2x} + 9C_2 e^{3x} + 2C_1' e^{2x} + 3C_2' e^{3x}; \tag{6}$$

внося изъ (4) и (6) въ (1), получимъ:

$$2C_1' e^{2x} + 3C_2' e^{3x} = x; \tag{7}$$

изъ этого уравненія и (5) мы должны опредѣлить C_1' и C_2'.

Положимъ для упрощенія:

$$C_1' e^{2x} = u_1, \quad C_2' e^{3x} = u_2; \tag{8}$$

тогда уравненія (5) и (7) примутъ такой видъ:

(9) $$\begin{cases} u_1+u_2=0. \\ 2u_1+3u_2=x; \end{cases}$$

отсюда находимъ:

(10) $$u_1=-x; \qquad u_2=+x;$$

внося это въ (8), найдемъ оттуда:

(11) $$C_1'=-xe^{-2x}; \qquad C_2'=xe^{-3x};$$

интегрируя, найдемъ:

(12) $$C_1=\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C_1; \quad C_2'=-\frac{1}{3}e^{-3x}\left(x+\frac{1}{3}\right)+C_2;$$

внося это въ (3), будемъ имѣть полное рѣшеніе уравненія (1);

(13) $$y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)+c_1e^{2x}+c_2e^{3x},$$

или, упрощая:

(14) $$y=\frac{1}{6}x+\frac{5}{36}+c_1e^{2x}+c_2e^{3x}.$$

Найдемъ частное рѣшеніе уравненія (1) по методу Коши. Опредѣлимъ во (2) произвольныя постоянныя C_1 и C_2 такъ, чтобы были при $x=\alpha$ функціи $y=0$, $y'=\alpha$; имѣемъ изъ (3) и (4), перемѣняя тамъ x на α согласно требованію:

(15) $$\begin{cases} C_1e^{2\alpha}+C_2e^{3\alpha}=0, \\ 2C_1e^{2\alpha}+3C_2e^{3\alpha}=\alpha; \end{cases}$$

отсюда находимъ

(16) $$C_1=-\alpha e^{-2\alpha}; \quad C_2=\alpha e^{-3\alpha};$$

слѣд. искомый интегралъ уравненія (2) будетъ по (3):

(17) $$Y(\alpha, x)=-\alpha e^{2(x-\alpha)}+\alpha e^{3(x-\alpha)}.$$

(Не трудно видѣть, что при $x=\alpha$ этотъ интегралъ обращается въ нуль, а его производная по x,

(18) $$\frac{\partial Y(\alpha, x)}{\partial x}=-2\alpha e^{2(x-\alpha)}+3\alpha e^{3(x-\alpha)},$$

при $x=\alpha$ обращается въ α.) Частное рѣшеніе уравненія (1) будетъ потому слѣдующее:

(19) $$y^{(1)}=\int_0^x[-\alpha e^{2(x-\alpha)}+\alpha e^{3(x-\alpha)}]d\alpha,$$

или

$$y^{(1)} = e^{2x}\int_0^x -\alpha e^{-2\alpha}d\alpha + e^{3x}\int_0^x \alpha e^{-3\alpha}d\alpha, \tag{20}$$

а выполняя квадратуры:

$$y^{(1)} = e^{2x}\left(\frac{1}{2}e^{-2\alpha}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)+C_1\right)_0^x + e^{3x}\left(-\frac{1}{3}e^{-3\alpha}\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)+C_2\right)_0^x =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9}e^{3x} = \tag{21}$$

$$= \frac{1}{6}x + \frac{5}{36} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{9}e^{3x}.$$

Этотъ частный интегралъ получается изъ (14), полагая тамъ $c_1 = -\frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{1}{9}$. Если къ нему придать выраженіе (3), представляющее полный интегралъ соотвѣтственнаго уравненія безъ послѣдняго члена (2), то, полагая $C_1 - \frac{1}{4} = c_1$, $C_2 + \frac{1}{9} = c_2$, мы опять придемъ къ формулѣ (14).

138. Для другого примѣра возьмемъ уравненіе:

$$y''' - y' - 6y = e^{-x}; \tag{1}$$

соотвѣтственное уравненіе безъ послѣдняго члена:

$$y''' - y' - 6y = 0 \tag{2}$$

было нами проинтегрировано въ § 132 (другой примѣръ), гдѣ мы нашли для него такой полный интегралъ:

$$y = Ae^{-x}\cos(\sqrt{2}x) + Be^{-x}\sin(\sqrt{2}x) + Ce^{2x}. \tag{3}$$

Положимъ:

$$y_1 = e^{-x}\cos(\sqrt{2}x), \quad y_2 = e^{-x}\sin(\sqrt{2}x), \quad y_3 = e^{2x}; \tag{4}$$

тогда $\Delta(y) = C_0$ — постоянному, какъ то слѣдуетъ изъ формулы (13) § 126, такъ какъ въ нашемъ уравненіи $X_1 = 0$; а потому онъ можетъ быть найденъ, полагая въ функціяхъ (4) и ихъ производныхъ перваго порядка:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= -e^{-x}\cos(\sqrt{2}x) - \sqrt{2}e^{-x}\sin(\sqrt{2}x); \\ y_2' &= -e^{-x}\sin(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}e^{-x}\cos(\sqrt{2}x); \quad y_3' = 2e^{2x}; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} y_1'' &= e^{-x}\cos(\sqrt{2}x) + 2\sqrt{2}e^{-x}\sin(\sqrt{2}x) - (\sqrt{2})^2e^{-x}\cos(\sqrt{2}x); \\ y_2'' &= e^{-x}\sin(\sqrt{2}x) - 2\sqrt{2}e^{-x}\cos(\sqrt{2}x) - (\sqrt{2})^2e^{-x}\sin(\sqrt{2}x); \quad y_3'' = 4e^{2x}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$x = 0$; сдѣлавъ это, будемъ имѣть:

$$(7)\ \Delta(y)=C_0=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & \sqrt{2} & 2\\ -1 & -2\sqrt{2} & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 3\\ 0 & -2\sqrt{2} & 5\end{vmatrix}=\sqrt{2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 5\end{vmatrix}=11.\sqrt{2}.$$

Миноры его будутъ:

$$(8)\ \begin{cases}\Delta_{13}=\begin{vmatrix}y_2 & y_3\\ y_2' & y_3'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^{-x}\sin(\sqrt{2}x) & e^{2x}\\ -e^{-x}\sin(\sqrt{2}x)+\sqrt{2}e^{-x}\cos(\sqrt{2}x) & 2e^{2x}\end{vmatrix}=\\ =e^x\begin{vmatrix}\sin(\sqrt{2}x) & 1\\ \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x) & 3\end{vmatrix}=e^x[3\sin(\sqrt{2}x)-\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)];\end{cases}$$

$$(9)\ \begin{cases}\Delta_{23}=\begin{vmatrix}y_3 & y_1\\ y_3' & y_1'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}e^{2x} & e^{-x}\cos(\sqrt{2}x)\\ 2e^{2x} & -e^{-x}\cos(\sqrt{2}x)-\sqrt{2}e^{-x}\sin(\sqrt{2}x)\end{vmatrix}=\\ =e^x\begin{vmatrix}1 & \cos(\sqrt{2}x)\\ 3 & -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)\end{vmatrix}=e^x[-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)-3\cos(\sqrt{2}x)];\end{cases}$$

$$(10)\ \begin{cases}\Delta_{33}=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=\\ =\begin{vmatrix}e^{-x}\cos(\sqrt{2}x) & e^{-x}\sin(\sqrt{2}x)\\ -e^{-x}\cos(\sqrt{2}x)-\sqrt{2}e^{-x}\sin(\sqrt{2}x) & -e^{-x}\sin(\sqrt{2}x)+\sqrt{2}e^{-x}\cos(\sqrt{2}x)\end{vmatrix}\\ =e^{-2x}\begin{vmatrix}\cos(\sqrt{2}x) & \sin(\sqrt{2}x)\\ -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x) & \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)\end{vmatrix}=\sqrt{2}e^{-2x};\end{cases}$$

а потому, въ виду того, что $V=e^{-x}$ и $X_0=1$, мы будемъ имѣть:

$$(11)\ \begin{cases}A'=\dfrac{\Delta_{13}}{\Delta}e^{-x}=\dfrac{1}{11.\sqrt{2}}[3\sin(\sqrt{2}x)-\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)];\\ B'=\dfrac{\Delta_{23}}{\Delta}e^{-x}=\dfrac{1}{11.\sqrt{2}}[-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)-3\cos(\sqrt{2}x)];\\ C'=\dfrac{\Delta_{33}}{\Delta}e^{-x}=\dfrac{1}{11}e^{-3x};\end{cases}$$

интегрируя эти выраженія, найдемъ:

$$(12)\ \begin{cases}A=\dfrac{1}{11\sqrt{2}}\left[-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}x)-\sin(\sqrt{2}x)\right]+a;\\ B=\dfrac{1}{11\sqrt{2}}\left[\cos(\sqrt{2}x)-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}x)\right]+b;\\ C=-\dfrac{1}{33}e^{-3x}+c;\end{cases}$$

а потому будемъ имѣть, внося это въ (3):

$$\left.\begin{aligned}
y=&\frac{1}{22}[-3\cos(\sqrt{2}x)-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)]e^{-x}\cos(\sqrt{2}x)+\\
&+\frac{1}{22}[\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)-3\sin(\sqrt{2}x)]e^{-x}\sin(\sqrt{2}x)-\frac{1}{33}e^{-x}+\\
&+ae^{-x}\cos(\sqrt{2}x)+be^{-x}\sin(\sqrt{2}x)+ce^{2x}.
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Послѣдняя строчка представляетъ полное рѣшеніе уравненія (2), отличаясь отъ (3) лишь обозначеніемъ произвольныхъ постоянныхъ; остальные же члены приведутся послѣ приведенія подобныхъ членовъ къ такой суммѣ: $-\frac{3}{22}e^{-x}-\frac{1}{33}e^{-x}=-\frac{9+2}{66}e^{-x}=-\frac{1}{6}e^{-x}$; такимъ образомъ полное рѣшеніе нашего уравненія принимаетъ окончательно такой видъ:

$$y=-\frac{1}{6}e^{-x}+ae^{-x}\cos(\sqrt{2}x)+be^{-x}\sin(\sqrt{2}x)+ce^{2x}, \qquad (14)$$

или еще нѣсколько иначе:

$$y=e^{-x}\left[a\cos(\sqrt{2}x)+b\sin(\sqrt{2}x)-\frac{1}{6}\right]+ce^{2x}. \qquad (15)$$

Нетрудно провѣрить, что функція $-\frac{1}{6}e^{-x}$, къ которой приводится полный интегралъ при $a=b=c=0$, удовлетворяетъ нашему уравненію; мы имѣемъ:

$$y=-\frac{1}{6}e^{-x};\quad y'=\frac{1}{6}e^{-x};\quad y''=-\frac{1}{6}e^{-x};\quad y'''=\frac{1}{6}e^{-x}, \qquad (16)$$

и слѣд.

$$y'''-y'-6y=\frac{1}{6}e^{-x}-\frac{1}{6}e^{-x}+e^{-x}=e^{-x}, \qquad (17)$$

—второй части уравненія (1).

Примѣры для упражненій.

1) $y''-7y'+12y=x;\quad y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}+\frac{1}{12}x+\frac{7}{144}.$

2) $y''+a^2y=e^x;\quad y=\frac{e^x}{1+a^2}+C_1\cos ax+C_2\sin ax.$

3) $y''-2y'+y=e^x;\quad y=e^x(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2).$

4) $y''-2y'+5y=\cos 2x;\ y=\frac{1}{17}(\cos 2x-4\sin 2x)+e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$

5) $y''-n^2y=ax;\quad y=C_1e^{nx}+C_2e^{-nx}-\frac{ax}{n^2}.$

6) $y''-3y'+2y=x^2$; $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{4}(2x^2+6x+7)$.

7) $y''-4y'+4y=e^{2x}$; $y=e^{2x}(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2)$.

8) $y''+n^2y=\cos x$; $y=\frac{1}{2}x\sin x+C_1\cos x+C_2\sin x$.

9) $y'''-6y''+11y'-6y=x$; $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}-\frac{1}{6}\left(x+\frac{11}{6}\right)$.

10) $y'''-13y'-12y=0$; $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-x}+C_3e^{-3x}$.

11) $y'''+3y''+4y'+2y=0$; $y=e^{-x}(C_1+C_2\cos x+C_3\sin x)$.

12) $y^{\mathrm{IV}}+2y''+y=0$; $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$.

13) $y^{\mathrm{IV}}-a^4y=x^3$; $y=-\frac{x^3}{a^4}+C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}+C_3\cos(ax+C_4)$.

14) $y'''+2y''-y'-2y=x+e^{-3x}$; рѣшеніе:

$$y=-\frac{2x-1}{4}-\frac{e^{-3x}}{8}+C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{-2x}$$

15) $y^{\mathrm{IV}}-2y'''+y''=x^3$;

$$y=(A+Bx)e^x+C+Dx+\frac{x^5}{20}+\frac{x^4}{2}+3x^3+12x^2.$$

16) $y^{\mathrm{IV}}+2y'''+3y''+2y'+y=1+x+x^2$;

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}\left\{(C_1+C_2x)\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+(C_3+C_4x)\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right\}+x^2-3x+1$$

17) $y'''+y''-y'+15y=x^2$;

$$y=C_1e^{-3x}+e^x(C_2\sin 2x+C_3\cos 2x)+\frac{x^2}{15}+\frac{2x}{(15)^2}-\frac{28}{(15)^3}.$$

18) $y^{\mathrm{V}}-2y^{\mathrm{IV}}+y'''=0$; $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^x+C_5xe^x$.

19) $y'''-7y''+6y=x^2$. 20) $y+a^4y^{(\mathrm{IV})}=0$,

21) $y''+y=x^n$. 22) $y''+3y'+2y=\frac{x}{(1+x)^2}$.

23) $y''-2ay'+a^2y=\sin bx$. 24) $y^{\mathrm{IV}}+2a^2y''+a^4y=\cos x$.

25) $y^{\mathrm{V}}-2y^{\mathrm{IV}}+5y'''-10y''-36y'+72y=e^{ax}$. 26) $y^{(n)}-y=0$; рѣшеніе:

$$y=Ce^x+C_1\cos\frac{2\pi}{n}x+C_2\sin\frac{2\pi}{n}x+C_3\cos\frac{3\pi}{n}x+C_4\sin\frac{3\pi}{n}x+\cdots$$

27) $(a+bx)^2y''+b(a+bx)y'+n^2y=0$; рѣшеніе:

$$y=C_1\cos\left[\frac{n\log(a+bx)}{b}\right]+C_2\sin\left[\frac{n\log(a+bx)}{b}\right].$$

28) $(2x+1)^2y''-2(2x+1)y'+y=0$;

$$y=C_1(2x+1)^{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}+C_2(2x+1)^{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}.$$

29) $x^3y'''+x^2y''-2xy'+2y=0$; $y=C_1x+C_2x^2+\frac{C_3}{x}$.

30) $x^3y'''+xy'-y=0$; $y=x[C_1+C_2\log x+C_3(\log x)^2]$.

31) $(x-1)^2y''-3(x-1)y'+5y=0$;

$$y=(x-1)^2[C_1\cos(\log(x-1))+C_2\sin(\log(x-1))].$$

32) $y''+2y'+y=x^2e^{-x}\cos x$; $y=[C_1+C_2x+4x\sin x-(x^2-6)\cos x]e^{-x}$.

33) $y'''-2y''-y'+2y=x^4-2x^3-x^2+4x+1$;

$$y=\frac{1}{4}(2x^4+22x^2+6x+49)+C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}.$$

34) $(x+1)^2y''+(x+1)y'-y=2x^2$; рѣшеніе:

$$y=C_1(x+1)+\frac{C_2}{x+1}+\frac{2x^2+8x}{3}-2(x+1)\log(x+1).$$

35) $x^2y''-4xy'+6y=x$; $y=C_1x^2+C_2x^3+\frac{1}{2}x$.

36) $x^2y''-xy'+2y=x\log x$; $y=x[C_1\cos(\log x)+C_2\sin(\log x)]+x\log x$.

37) $x^3y'''-x^2y''+2xy'-2y=x^3+3x$; рѣшеніе:

$$y=x(C_1+C_2\log x)+C_3x^2+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x(\log x)^2.$$

38) $x^2y''-2y=x+\cos x$; рѣшеніе:

$$y=C_1x^{-1}+C_2x^2-\frac{1}{2}x-\frac{\sin x}{3x}-\frac{1}{6}\cos x+\frac{1}{6}x\sin x-\frac{1}{6}x^2\int\frac{\cos x}{x}dx.$$

39) $x^2y''-3xy'+2y=x-3x^3$. 40) $x^2y''+3xy'+y=\frac{1}{(1-x)^2}$.

ГЛАВА IX.

Системы совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій. Общія разсматриванія.

139. Общій видъ системы совокупныхъ уравненій, представленной въ сжатомъ видѣ, есть слѣдующій:

$$(1)\qquad F_k\Big(x;\overset{n}{\underset{1}{y_i}},\frac{d^{m_i^k}y_i}{dx^{m_i^k}}\Big)=0,\qquad (k=1,2,\ldots n)$$

гдѣ $m_i^k=1,2\ldots p_i^k$, $i=1,2\ldots n$. Эту систему можно замѣнить системой уравненій перваго порядка, положивъ:

$$(2)\qquad \frac{dy_i}{dx}=y_{i,1},\ \frac{d^2y_i}{dx^2}=\frac{dy_{i,1}}{dx}=y_{i,2},\ldots\ \frac{d^{p_i^k-1}y_i}{dx^{p_i^k-1}}=y_{i,p_i^k-1};\quad (i=1,2\ldots n)$$

тогда будетъ

$$(3)\qquad \frac{d^{p_i^k}y_i}{dx^{p_i^k}}=\frac{dy_{i,p_i^k-1}}{dx},$$

и система уравненій (1) замѣнится такою:

$$(4)\qquad \left|\begin{array}{l}\dfrac{dy_i}{dx}=y_{i,1},\ \dfrac{dy_{i,1}}{dx}=y_{i,2},\ldots\ \dfrac{dy_{i,p_i^k-2}}{dx}=y_{i,p_i^k-1};\\[2ex] F_k\Big(x;y_i,y_{i,1},\underset{i=1}{\overset{n}{y_{i,2}}},\ldots y_{i,p_i^k-1},\dfrac{dy_{i,p_i^k-1}}{dx}\Big)=0,\end{array}\right.\qquad (k=1,2,\ldots n)$$

въ которой входятъ лишь производныя перваго порядка, но число неизвѣстныхъ функцій и число уравненій равны

$$(5)\qquad N=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}p_i^k.$$

Можетъ случиться, что послѣ этого нѣкоторыя изъ уравненій $F_k=0$ не будутъ содержать производныхъ, а только функціи; въ такомъ случаѣ съ помощью такихъ уравненій и ихъ производныхъ можно исключить такое же число неизвѣстныхъ функцій и ихъ производныхъ изъ системы (4), которая послѣ этого сведется къ системѣ, состоящей изъ меньшаго числа уравненій съ такимъ же числомъ неизвѣстныхъ функцій, по нахожденіи которыхъ остальныя выразятся чрезъ нихъ алгебраическимъ путемъ. Можетъ случиться, что, исключая одну изъ производныхъ, мы исключимъ вмѣстѣ съ нею и другія, такъ что получатся уравненія безъ производныхъ, которыми мы можемъ опять воспользоваться, какъ только-что было указано, для исключенія нѣкоторыхъ неизвѣстныхъ функцій и ихъ производныхъ. Такъ напр., если дана такая система уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}+x=0, \\ &x\frac{dy}{dx}+x\frac{dz}{dx}+y-x^2=0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

то изъ перваго находимъ $\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=-x$, и, подставляя это во второе, получимъ уравненіе безъ производныхъ:

$$y-2x^2=0, \tag{6}$$

которое даетъ y въ функціи x; отсюда находимъ

$$\frac{dy}{dx}=4x, \tag{7}$$

и, подставляя это въ первое, будемъ имѣть:

$$\frac{dz}{dx}+5x=0; \tag{8}$$

интегрируя его, получаемъ:

$$z+\frac{5}{2}x^2=C. \tag{9}$$

140. Когда система уравненій приведена къ такому виду, что каждое уравненіе системы будетъ содержать по крайней мѣрѣ одну производную которой-нибудь изъ функцій, относительно которыхъ производныхъ она притомъ рѣшима, то число произвольныхъ постоянныхъ будетъ равно числу неизвѣстныхъ функцій, и если ихъ m, то система будетъ m-го порядка. Въ этомъ случаѣ она можетъ быть приведена къ одному уравненію порядка m. Пусть

$$F_k(x, \overset{m}{\underset{1}{y_i}}, y'_i)=0, \qquad (k=1, 2 \ldots m) \tag{1}$$

будетъ данная система, причемъ опредѣлитель

$$\left|\frac{\partial F_k}{\partial y'_i}\right|_{i=1 \quad i=m}^{k=1 \quad k=m} \neq 0; \tag{2}$$

въ такомъ случаѣ по крайней мѣрѣ одинъ изъ миноровъ его не будетъ равенъ нулю; пусть

(3) $$\left|\frac{\partial F_k}{\partial y'_i}\right|_{i=2\quad i=m}^{k=2\quad k=m} \neq 0;$$

тогда, дифференцируя $m-1$ разъ уравненія (1), для $k=2,3...m$, мы будемъ получать уравненія съ тѣмъ же опредѣлителемъ относительно производныхъ высшаго порядка функцій $y_2, y_3 ... y_m$; а потому изъ этихъ уравненій можно будетъ выразить эти производныя чрезъ $y_2, y_3 ... y_m$ и y_1 съ его производными до порядка m; подставляя полученныя выраженія въ уравненіе $F_1=0$ и его производныя до порядка $m-1$, мы получимъ систему m уравненій, изъ которыхъ можно будетъ исключить $y_2, y_3 ... y_m$, чрезъ что получится уравненіе

(4) $$f(x, y_1, y_1', y_1'', ... y^{(m)}) = 0,$$

а полный интегралъ такого уравненія содержитъ m произвольныхъ постоянныхъ, ибо при $x=x_0$ мы можемъ задать произвольно $y_1, y_1', ... y^{(m-1)}$.

141. Иногда важно бываетъ знать только порядокъ предложенной системы (1) § 139, т. е. число произвольныхъ постоянныхъ въ полномъ ея рѣшеніи; приводить её къ уравненію (4) пред. § для этой цѣли было бы слишкомъ большой работой; желательно было бы имѣть болѣе простой способъ для опредѣленія ея порядка; такой способъ былъ найденъ Якоби и опубликованъ Клебшемъ въ 64 т. журнала Креля и, въ приложеніяхъ къ его «Vorlesungen über Dynamik», а также вошелъ и въ C. G. J. Jacobi Gesammelte Werke, Bd. 5; S. 193. Мемуаръ объ этомъ озаглавленъ такъ: «De investigando ordine systematis aequationum differentialium cujuscunque». Якоби прежде всего показываетъ, что достаточно умѣть это дѣлать для системъ линейныхъ уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

(1) $$y_i = \varphi_i(x, ... C_j ...) \qquad (i=1,2...n)$$

представляетъ полное рѣшеніе системы ур. (1) § 139. Предположивъ, что эти выраженія подставлены въ (1) § 139, мы можемъ дифференцировать уравненія системы по каждой произвольной постоянной, входящей въ это рѣшеніе, и какъ x и C_j независимы, то порядокъ дифференцированія по этимъ величинамъ можетъ быть измѣненъ, и мы получимъ такой результатъ:

(2) $$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial F_k}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial C_j} + \sum_{m_i=1}^{p_i^k}\frac{\partial F_k}{\partial \dfrac{d^{m_i^k} y_i}{dx^{m_i^k}}}\,\frac{d^{m_i^k}\dfrac{\partial y_i}{\partial C_i}}{dx^{m_i^k}}\right\} = 0, \qquad (k=1,2,...n)$$

представляющій систему линейныхъ уравненій относительно функцій $\frac{\partial y_i}{\partial C_j}$ тѣхъ же порядковъ, какъ данныя, относительно y_i, съ коэффиціентами, которыя вообще функціи x и C_j. Общій интегралъ этой системы представится функціями

$$\sum_{j=1}^{N} c_j \frac{\partial y_i}{\partial C_j}, \qquad (i=1,2,\ldots n) \tag{3}$$

гдѣ N порядокъ системы, одинаковый съ числомъ произвольныхъ постоянныхъ C_j, входящихъ въ (1), и гдѣ c_j новыя произвольныя постоянныя, относящіяся къ уравненію (2): такимъ образомъ порядокъ этой системы будетъ тотъ же самый, что и (1) § 139. Далѣе, онъ замѣчаетъ, что въ вопросѣ о порядкѣ такой системы можно предположить коэффиціенты уравненія постоянными (давъ x какое-либо частное значеніе, напр. положивъ $x=x_0$); такъ что, полагая

$$\frac{\partial F_k}{\partial y_i} = A^k_{i,0}, \quad \frac{\partial F_k}{\partial \frac{d^{m^k_i} y_i}{dx^{m^k_i}}} = A^k_{i,m^k_i}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial C_j} = z_i, \tag{4}$$

далѣе

$$A^k_{i,0} z_i + \sum_{m^k_i=1}^{p^k_i} A^k_{i,m^k_i} \frac{d^{m^k_i} z_i}{dx^{m^k_i}} = (z_i)^k_i, \tag{5}$$

мы можемъ нашу систему совокупныхъ линейныхъ уравненій такъ написать:

$$\sum_{i=1}^{n} (z_i)^k_i = 0. \qquad (k=1,2,\ldots n) \tag{6}$$

Можно попытаться удовлетворить ей, полагая

$$z_i = a_i e^{\lambda x}; \qquad (i=1,2\ldots n), \tag{7}$$

гдѣ a_i и λ постоянныя, которыя еще нужно опредѣлить; подставляя это въ (6) и отбрасывая общій множитель $e^{\lambda x}$, мы получимъ для опредѣленія этихъ величинъ такія уравненія, линейныя однородныя относительно постоянныхъ $\overset{n}{\underset{1}{a_i}}$:

$$\sum_{i=1}^{n} [\lambda]^k_i a_i = 0, \qquad (k=1,2\ldots n), \tag{8}$$

гдѣ по (5) и по правиламъ дифференцированія функціи $e^{\lambda x}$ будетъ:

$$[\lambda]^k_i = A^k_{i,0} + \sum_{m^k_i=1}^{p^k_i} A^k_{i,m^k_i} \lambda^{m^k_i}, \tag{9}$$

слѣд. полиномъ относительно λ степени p_i^k. Исключая $\overset{n}{\underset{1}{a_i}}$ изъ системы (8), получимъ для опредѣленія λ такое уравненіе въ формѣ опредѣлителя:

$$(10) \qquad \left| \, [\lambda]_i^k \, \right|_{i=1 \,\ldots\, i=n}^{k=1 \,\ldots\, k=n} = 0.$$

Найдя отсюда λ и подставляя въ $n-1$ уравненій изъ (8), найдемъ отношенія всѣхъ a_i къ одному, слѣд. опредѣлимъ ихъ до общаго множителя, который остается произвольною постоянною. Слѣд. число рѣшеній нашего уравненія опредѣлится степенью уравненія (10). Эта степень, на основаніи закона составленія опредѣлителей, будетъ равна наибольшей суммѣ, получаемой беря изъ слѣдующей таблицы степеней полиномовъ $[\lambda]_i^k$, элементовъ этого опредѣлителя.

$$(11) \qquad \boxed{\begin{array}{ccccc} \overset{1}{p}_1 & \overset{1}{p}_2 & \overset{1}{p}_3 & \cdots & \overset{1}{p}_n \\ \overset{2}{p}_1 & \overset{2}{p}_2 & \overset{2}{p}_3 & \cdots & \overset{2}{p}_n \\ \overset{3}{p}_1 & \overset{3}{p}_2 & \overset{3}{p}_3 & \cdots & \overset{3}{p}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{n}{p}_1 & \overset{n}{p}_2 & \overset{n}{p}_3 & \cdots & \overset{n}{p}_n \end{array}}$$

по одному слагаемому изъ каждой строчки и каждаго столбца, слѣд. вида

$$(12) \qquad p_1^{(i_1)} + p_2^{(i_2)} + p_3^{(i_3)} + \cdots + p_n^{(i_n)},$$

гдѣ всѣ $i_1, i_2, \ldots i_n$ различны между собою, если только не равенъ нулю коэффиціентъ этого члена, который получится изъ опредѣлителя лѣвой части (10), замѣняя элементы опредѣлителя въ тѣхъ членахъ, которые даютъ эту наибольшую сумму, чрезъ коэффиціенты полинома $[\lambda]_i^k$ при наивысшей степени λ:

$$(13) \qquad A^k_{ip_i^k} = \frac{\partial F_k}{\partial \dfrac{d^{p_i^k} y_i}{dx^{p_i^k}}},$$

а въ остальныхъ нулями. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ степень уравненія (10), а слѣд. и порядокъ нашей системы понизится.

142. Задача объ опредѣленіи порядка системы сведена такимъ образомъ къ задачѣ опредѣленія суммы (12) такъ, чтобы она имѣла наибольшее значеніе. Если бы наибольшія числа каждаго столбца находились въ то же время въ различныхъ строкахъ таблицы (11), то, складывая ихъ, мы сейчасъ имѣли бы порядокъ нашей системы. Такого вида таблицу, гдѣ сейчасъ сказанное имѣетъ мѣсто, Якоби назвалъ «канономъ»; онъ показалъ, какимъ образомъ можно всякую таблицу привести къ канону. Если ко всѣмъ элементамъ какой-либо строки i_h, напр., придать одно и тоже число, напр. l_{i_h}, то каждая сумма, подобная (12), увеличится на то же число, такъ какъ она содержитъ одно слагаемое изъ этой строки, и только одно; а потому наибольшая между прежними сдѣлается наибольшею между новыми, и она найдется, вычитая l_{i_h} изъ этой наибольшей между новыми. То, что мы сдѣлали съ этой строкой, можно сдѣлать съ каждой; выбирая же надлежащимъ образомъ эти числа l_{i_h}, можно превратить таблицу (4) въ канонъ; онъ будетъ *простѣйшимъ*, когда числа l_{i_h} будутъ наименьшія возможныя. Чтобы получить простѣйшій канонъ, нужно такъ поступать: выбрать maximum-ы каждаго столбца и подчеркнуть; затѣмъ отмѣтить звѣздочкой тѣ maxima, въ одной строкѣ съ которыми не лежитъ другихъ maximum-овъ: эти числа войдутъ въ составъ максимальной суммы, и эти строки не подлежатъ измѣненію; точно такъ же отмѣчаемъ звѣздочкою наибольшіе maxima другихъ строкъ, въ которыхъ лежитъ ихъ нѣсколько; затѣмъ къ строкамъ безъ maximum-овъ придаемъ наименьшія числа, способныя поднять нѣкоторыя изъ ихъ чиселъ до maximum-овъ, лежащихъ въ одной строкѣ, съ отмѣченными звѣздочкою; тогда въ каждой строкѣ будетъ число не меньшее максимальнаго въ столбцѣ; затѣмъ повторяемъ это съ новыми строками, отмѣчая каждый разъ звѣздочкою тѣ, которыя не будутъ имѣть maximum-овъ въ одной строкѣ съ собою. Пояснимъ это на слѣдующемъ примѣрѣ. Дана таблица:

15*	2	7	9	4	5
6	7	12	4	4	7
3	8	14	11	9	3
2	14	8	10	15*	9
3	12	7	9	10	8
4	10	14	17*	9	6

(1)

мы подчеркнули всѣ maxima и отмѣтили звѣздочкой число 15 въ первомъ столбцѣ и первой строкѣ, затѣмъ число 15 въ 5-омъ столбцѣ и 4-ой строкѣ, какъ самое большое изъ 3 maximum-овъ этой строки, и 17 въ 4-мъ столбцѣ и 6-ой строкѣ, какъ наибольшій изъ двухъ maximum-овъ этой строки; строка 3-ья содержитъ maximum 14, но онъ въ одномъ столбцѣ съ maximum-омъ 14 послѣдней строки; его пока не отмѣчаемъ; строки 2-я и 5-я вовсе безъ maximum-овъ; мы придаемъ къ нимъ число 2, чтобы и въ нихъ появились maxima, именно 14. Получится такая таблица:

(2)

	15*	2	7	9	4	5
+2	8	9	14	6	6	9
	3	8	14	11	9	3
	2	14	8	10	15*	9
+2	5	14	9	11	12	10
	4	10	14	17*	9	6

Въ этой таблицѣ всѣ строки имѣютъ maxima; изъ нихъ 5-ая даже два. Прибавимъ ко 2-ой и 3-ьей строкѣ по 1: тогда разностное отношеніе ихъ соотвѣтственныхъ элементовъ не измѣнится, но въ послѣднемъ столбцѣ 2-ой строки появится новый maximum 10, одинаковый съ maximum-омъ того же столбца 5-ой строки; получится такая таблица, въ которой 3-ья строка будетъ имѣть одинъ только maximum, который мы поэтому и отмѣчаемъ звѣздочкой; тогда не останется выбора относительно другихъ строкъ: во второй нужно отмѣтить послѣднее число, 10, звѣздочкой, и слѣд. въ 5-ой второе число, 14:

(3)

	15*	2	7	9	4	5
+1	9	10	15	7	7	10*
+1	4	9	15*	12	10	4
	2	14	8	10	15*	9
	5	14*	9	11	12	10
	4	10	14	17*	9	6

Складывая отмѣченныя звѣздочкою числа, будемъ имѣть:

(4) $$15+14+15+17+15+10=86;$$

эта сумма превосходитъ истинную, т. е. относящуюся къ таблицѣ (1) на такую сумму чиселъ:

(5) $$2+2+1+1=6;$$

слѣд. истинная сумма будетъ 80. И, дѣйствительно, складывая въ таблицѣ (1) числа, занимающія тѣ же мѣста, мы будемъ имѣть:

$$15+12+14+17+15+7=80.$$

Можетъ однако здѣсь случиться, что членовъ, дающихъ ту же сумму, будетъ нѣсколько, а потому нѣсколькими подобными путями можно придти къ простѣйшему канону; но таковый всётаки будетъ единственный, какъ то доказалъ Якоби въ упомянутомъ мемуарѣ, и числа l_{i_h}, которыя нужно придавать къ строкамъ i_h данной таблицы, будутъ вполнѣ опредѣленныя. Для нашего примѣра эти числа по порядку строкъ получились такія:

$$0, \quad 2+1=3, \quad 1, \quad 0, \quad 2, \quad 0.$$

143. Когда опредѣленъ порядокъ системы, тогда возникаетъ вопросъ, сколько разъ нужно дифференцировать каждое изъ данныхъ уравненій, чтобы получить достаточное число ихъ для исключенія остальныхъ функцій съ ихъ производными. Но при безконечномъ разнообразіи системъ, которыя могутъ быть предложены, трудно сказать что-либо общее на этотъ счётъ. Во избѣжаніе лишнихъ уравненій, первое, что представляется — это дифференцировать каждое уравненіе столько разъ, сколько недостаетъ до порядка системы (въ нашемъ примѣрѣ онъ=80) той функціи, которая имѣетъ наивысшую производную въ разсматриваемомъ уравненіи. Въ нашемъ примѣрѣ для перваго уравненія недостаетъ:

$80-15$, во второмъ $80-12$, въ третьемъ $80-14$, въ четвертомъ $80-15$, въ пятомъ $80-12$, въ шестомъ $80-17$; дифференцируя каждое сейчасъ указанныя числа разъ соотвѣтственно, получимъ вмѣстѣ съ данными всего

$$6+6.80-85=6.81-85 \text{ уравненій,} \tag{1}$$

тогда какъ исключенію подлежатъ 5 функцій съ ихъ производными до 80 порядка включательно, что составитъ всего $5+5.80=5.81$ величинъ. вычитая это число изъ предыдущаго, получимъ

$$6.81-85-5.81=81-85=-4; \tag{2}$$

не хватаетъ 5 уравненій для возможности исключенія. Эти недостающія уравненія получатся дифференцируя еще разъ нѣкоторыя уравненія, (напр. 2-е), исключая наивысшую производную прежде новаго дифференцированія, съ помощью другихъ уравненій, въ которыя она входитъ.

144. Уравненіе (4) § 140 легко получается въ частномъ случаѣ, часто встрѣчающемся, системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными функціями y и z:

$$\left.\begin{aligned} f(x;\ y,\ y',\ y'',\dots y^{(m)};\ z,\ z',\ z''\dots z^{(n)})=0,\\ F(x;\ y,\ y',\ y'',\dots y^{(m_1)};\ z,\ z',\ z''\dots z^{(n_1)})=0.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Чтобы исключить z, дифференцируемъ первое уравненіе n_1 разъ, а второе n; тогда вмѣстѣ съ данными будемъ имѣть $n+n_1+2$ уравненій, достаточныхъ для исключенія $n+n_1+1$ величинъ $z, z', z'' \dots z^{(n+n_1)}$. Въ производныхъ уравненія $f=0$ производныя функціи y достигнутъ порядка $m+n_1$, въ производныхъ уравненія $F=0$, онѣ достигнутъ порядка m_1+n; порядокъ полученнаго дифференціальнаго уравненія для y опредѣлится наибольшимъ изъ этихъ чиселъ, согласно съ общей теоріей, вышеизложенной, ибо для этого случая наша таблица (11) § 141 будетъ:

$$\boxed{\begin{array}{cc} m & n \\ m_1 & n_1 \end{array}}. \tag{2}$$

Если бы желали исключить y, то нужно было бы первое уравненіе дифференцировать m_1 разъ, чрезъ что производныя z достигнутъ порядка m_1+n, второе m разъ, чрезъ что производныя z достигнутъ порядка $m+n_1$; наибольшее изъ этихъ чиселъ опредѣлитъ порядокъ полученнаго для z дифференціальнаго уравненія. Этотъ порядокъ будетъ тотъ же, что и для функцій y, опять согласно съ общей теоріей.

145. Мы видѣли въ § 139, что всякую систему можно привести къ такому виду, что она будетъ содержать лишь производныя перваго порядка. Если первыя части всѣхъ уравненій суть алгебраическія функціи всѣхъ производныхъ, то, исключая изъ каждаго уравненія всѣ производныя кромѣ одной, можно съ помощью пріемовъ алгебры привести всѣ уравненія системы къ такому виду:

$$f_k(x;\ y_1, y_2, \dots y_n;\ y'_k)=0, \qquad (k=1,2,\dots n) \tag{1}$$

гдѣ f_k цѣлая функція своихъ аргументовъ; мы покажемъ теперь, что, введя вспомогательную алгебраическую функцію t отъ $x, y_1, y_2, \dots y_k$, можно будетъ рѣшить эти уравненія по $y_1', y_2', \dots y_n'$. Положимъ

$$t=a_1y_1'+a_2y_2'+\dots+a_ny_n', \tag{2}$$

гдѣ $\overset{n}{\underset{1}{a_i}}$ неопредѣленные постоянные коэффиценты. Если уравненіе (1) степени m_k относительно y'_k, то замѣняя во (2) написанную комбинацію $y_1', y_2', \dots y_n'$ всѣми возможными другими комбинаціями значеній, даваемыхъ этимъ величинамъ уравненіями (1), мы получимъ для t всего

$$N=m_1.m_2\dots m_n \tag{3}$$

значеній. Положимъ

$$\Phi(t)=\prod_{i=1}^{N}(t-t_i), \tag{4}$$

означая чрезъ t_i эти значенія t; тогда

$$\Phi(t) = 0 \tag{5}$$

будетъ уравненіемъ, опредѣляющимъ t какъ корень алгебраическаго уравненія, коэффиціенты котораго будутъ раціональныя функціи $x, y_1, y_2, \dots y_n$: въ самомъ дѣлѣ, эти коэффиціенты, какъ симметрическія функціи величинъ t_i и слѣд. корней каждаго уравненія изъ системы (1), выразятся раціонально чрезъ его коэффиціенты.

Положимъ также

$$u = b_1 y'_1 + b_2 y'_2 + \dots + b_n y'_n, \tag{6}$$

гдѣ $b_1, b_2, \dots b_n$ другія неопредѣленныя постоянныя величины; эта величина будетъ имѣть точно также N различныхъ значеній, (ибо вида, подобнаго t). Выраженіе вида:

$$\sum_{i=1}^{N} t_i^{\rho} u_i \tag{7}$$

будетъ симметрическая функція корней уравненія (5) и потому выразится раціонально чрезъ его коэффиціенты, слѣд. раціонально чрезъ $x, y_1, y_2, \dots y_n$; означимъ это выраженіе чрезъ $\omega_\rho(x, y_1, y_2, \dots y_n)$, такъ что будетъ

$$\sum_{i=1}^{N} t_i^{\rho} u_i = \omega_\rho(x, y_1, y_2, \dots y_n). \tag{8}$$

Сдѣлавъ это для $\rho = 0, 1, 2, \dots N-1$, мы будемъ имѣть систему N линейныхъ отностительно u_i уравненій; уравненіе (8) будетъ теперь, слѣд. представителемъ этихъ уравненій. Помножимъ каждое уравненіе (8) на неопредѣленный множитель $\lambda_{N-\rho}$ и просуммируемъ по ρ отъ 0 до $N-1$: будемъ имѣть:

$$\sum_{i=1}^{N} u_i \sum_{\rho=0}^{N-1} \lambda_{N-\rho} t_i^{\rho} = \sum_{\rho=0}^{N-1} \lambda_{N-\rho} \omega_\rho(x, y_1, y_2, \dots y_n). \tag{9}$$

Опредѣлимъ теперь множители $\lambda_{N-\rho}$ такъ, чтобы было

$$\sum_{\rho=0}^{N-1} \lambda_{N-\rho} t_i^{\rho} = 0 \tag{10}$$

для $i \gtrless k$. Это сдѣлать легко: уравненіе (10), имѣя всѣ корни уравненія (5) кромѣ t_k, будетъ не что иное, какъ (5) освобожденное отъ этого корня:

$$\sum_{\rho=0}^{N-1} \lambda_{N-\rho} t^{\rho} = \frac{\Phi(t)}{t - t_k} = 0; \tag{11}$$

тогда въ лѣвой части (9) останется только одинъ членъ, котораго коэффиціентъ будетъ не что иное, какъ результатъ вставки t_k вмѣсто t въ (11); этотъ же результатъ будетъ не что иное, какъ $\Phi'(t_k)$, какъ то легко видѣть, раскрывая получающуюся неопредѣленность $\frac{0}{0}$. Потому, послѣ сказаннаго опредѣленія $\lambda_{N-\rho}$, мы будемъ имѣть изъ (9):

$$(12) \qquad u_k = \frac{1}{\Phi'(t_k)} \sum_{\rho=0}^{N-1} \lambda_{N-\rho} \omega_\rho (x, y_1, y_2 \ldots y_n).$$

Входящія сюда $\lambda_{N-\rho}$ будутъ извѣстными цѣлыми функціями отъ t_k *), коэффиціенты которыхъ раціональныя функціи $x, y_1, y_2 \ldots y_n$, ибо суть не что иное, какъ коэффиціенты функціи $\Phi(t)$. Эта формула показываетъ, что функція u, подобная t, выразится раціональною функціей t съ коэффиціентами, раціональными функціями $x, y_1, y_2 \ldots y_n$.

Можно составить такимъ же образомъ подобную t функцію v, перемѣнивъ коэффиціенты $\overset{n}{\underset{1}{a_i}}$ на другія $\overset{n}{\underset{1}{c_i}}$ и т. д. наконецъ функцію w, перемѣнивъ эти коэффиціенты на $n_1, n_2, \ldots n_n$; такимъ образомъ будемъ имѣть n уравненій:

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} a_i y'_{i\alpha} = t_\alpha, \\ \sum_{i=1}^{n} b_i y'_{i\alpha} = u_\alpha, \\ \sum_{i=1}^{n} c_i y'_{i\alpha} = v_\alpha, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} n_i y'_{i\alpha} = w_\alpha, \end{array} \right.$$

гдѣ u_α, $v_\alpha, \ldots w_\alpha$ раціональныя функціи отъ t_α, съ одинаковымъ знаменателемъ $\Phi'(t_\alpha)$; мы приписали къ y'_i значекъ α, чтобы указать, что разумѣются подъ y'_i тѣ именно значенія, для которыхъ t получаетъ значеніе t_α. Неопредѣленныя постоянныя a_i, $b_i, \ldots n_i$ такъ выбираются, чтобы опредѣлитель изъ нихъ

$$(14) \qquad \sum \pm a_1 b_2 c_3 \ldots n_n$$

(по Якобіевскому обозначенію) не равнялся нулю; тогда, рѣшая систему (13) по $y'_{k\alpha}$, мы будемъ имѣть результатъ такого вида:

$$(15) \qquad y'_{k\alpha} = \frac{\overset{N-1}{\psi_k}(t_\alpha; x, y_1, y_2, \ldots y_n)}{\varphi_0(x, y_1, y_2, \ldots y_n) \Phi'(t_\alpha)},$$

*) См. мой „Краткій курсъ Высшей Алгебры", изданіе 2-е. Харьковъ, 1892 г., стр. 181, формулы (9).

гдѣ $\overset{N-1}{\psi}_k(t_\alpha;\, x, y_1, y_2, \cdots y_n)$ цѣлыя функціи степени $N-1$ относительно t_α, ибо высшія степени можно исключить при помощи уравненія (5), отчего появляется общій знаменатель, означенный нами чрезъ $\varphi_0(x, y_1, y_2, \cdots y_n)$ такъ, что ψ цѣлая функція и прочихъ аргументовъ. Происхожденіе знаменателя ясно показываетъ, что онъ будетъ одинъ и тотъ же во всѣхъ уравненіяхъ, а потому его можно слить съ функціей $\Phi(t)$, положивъ

$$\varphi_0(x, y_1, y_2, \cdots y_n)\,\Phi(t) = G(t;\, x, y_1, y_2 \cdots y_n), \qquad (16)$$

гдѣ G обозначаетъ (по примѣру нѣмецкихъ математиковъ) цѣлую функцію стоящихъ въ скобкахъ величинъ. Перемѣнивъ обозначеніе ψ_k на G_k, такъ какъ и это цѣлая функція своихъ аргументовъ, мы будемъ имѣть, замѣчая, что по (16)

$$\varphi_0(x, y_1, y_2, \cdots y_n)\,\Phi'(t) = \frac{\partial G(t;\, x, y_1, y_2, \cdots y_n)}{\partial t}, \qquad (17)$$

слѣдующія уравненія:

$$y'_{k\alpha} = \frac{G_k(t_\alpha;\, x, y_1, y_2, \cdots y_n)}{\dfrac{\partial G(t_\alpha;\, x, y_1, y_2, \cdots y_n)}{\partial t_\alpha}}. \qquad (18)$$

Эту форму системы дифференціальныхъ уравненій перваго порядка Кенигсбергеръ называетъ *нормальною* или *Якоби-Вейерштрассовскою* по имени ученыхъ, пользовавшихся этою формой уравненій въ своихъ изслѣдованіяхъ касательно ихъ. [Для бóльшихъ подробностей отсылаемъ къ Koenigsberger'a Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln. Leipzig, 1889. I-es Kapitel.].

146. Переходя теперь къ вопросу о существованіи интеграловъ данной системы совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій, мы можемъ на основаніи предыдущаго предположить ее данною въ такомъ видѣ:

$$\frac{dy_g}{dx} = f_g(x;\overset{n}{\underset{1}{y_h}}), \qquad (g = 1, 2, \ldots n) \qquad (1)$$

гдѣ $f_g(x;\overset{n}{\underset{1}{y_h}})$ написано для краткости вмѣсто $f_g(x;\, y_1, y_2 \cdots y_n)$ и представляетъ функцію, которая опредѣленна, конечна и непрерывна для всѣхъ значеній x и y_h, лежащихъ въ предѣлахъ, опредѣляемыхъ такими неравенствами:

$$|x - x_0| < a, \quad |y_h - y_{h,0}| < b, \qquad (h = 1, 2 \ldots n) \qquad (2)$$

— это значитъ, что для x и $y_1, y_2 \cdots y_n$, лежащихъ въ этихъ предѣлахъ ко всякому сколько угодно малому числу ε можно подыскать такое δ, что для всякихъ

$$|\Delta x| < \delta, \quad |\Delta y_h| < \delta, \qquad (h = 1, 2 \ldots n) \qquad (3)$$

будутъ имѣть мѣсто неравенства:

$$(4) \qquad \left| f_g(x+\Delta x; y_h \overset{n}{\underset{1}{+}} \Delta y_h) - f_g(x, \overset{n}{\underset{1}{y_h}}) \right| < \varepsilon;$$

— еще предположимъ вмѣстѣ съ *Липшицомъ*, что для двухъ системъ $\overset{n}{\underset{1}{y}}_{h,1}$ и $\overset{n}{\underset{1}{y}}_{h,2}$, лежащихъ въ предѣлахъ (2), будутъ имѣть мѣсто неравенства:

$$(5) \qquad \left| f_g(x; \overset{n}{\underset{1}{y}}_{h,2}) - f_g(x; \overset{n}{\underset{1}{y}}_{h,1}) \right| < \sum_{h=1}^{n} k_h \left| y_{h,2} - y_{h,1} \right|,$$

гдѣ $\overset{n}{\underset{1}{k}}_h > 0$.

Предположимъ теперь, что

$$(6) \qquad 0 < A < a, \qquad AM < b,$$

гдѣ M обозначаетъ наибольшее изъ $\left| f_g(x, \overset{n}{\underset{1}{y}}_h) \right|$ для x и $\overset{n}{\underset{1}{y}}_h$, лежащихъ въ предѣлахъ (2) и для $g = 1, 2, \ldots n$. Пусть $|x - x_0| < A$; возьмемъ рядъ чиселъ:

$$(7) \qquad x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_p < x \text{ *)},$$

такихъ, что для всякаго i

$$(8) \qquad x_{i+1} - x_i < \delta.$$

Составимъ рядъ соотвѣтствующихъ значенiй для $\overset{n}{\underset{1}{y}}_g$:

$$(9) \qquad y_{g,0},\ y_{g,1},\ y_{g,2},\ y_{g,3}, \ldots y_{g,i},\ y_{g,i+1}, \ldots y_{g,p},\ y_g$$

по формулѣ:

$$(10) \qquad y_{g,i+1} - y_{g,i} = f_g(x_i, \overset{n}{\underset{1}{y}}_{h,i})(x_{i+1} - x_i);$$

всѣ эти значенiя $\overset{n}{\underset{1}{y}}_{g,i}$ будутъ таковы, что $|y_{g,i} - y_{g,0}| < b$. Допустимъ, что это справедливо для $g = 1, 2 \ldots n$ и $i = k$; тогда, суммируя (10) по i отъ 0 до k, будемъ имѣть:

$$(11) \qquad y_{g,k+1} - y_{g,0} = \sum_{i=0}^{k} f_g(x_i; \overset{n}{\underset{1}{y}}_{h,i})(x_{i+1} - x_i);$$

отсюда выводимъ такое неравенство, замѣняя $\left| f_g(x_i, \overset{n}{\underset{1}{y}}_{h,i}) \right|$ чрезъ M, что мы вправѣ сдѣлать, ибо $\overset{n}{\underset{1}{y}}_{h,i}$ лежатъ по предположенiю въ предѣлахъ (2):

$$(12) \qquad \begin{aligned} \left| y_{g,k+1} - y_{g,0} \right| &< \sum_{i=0}^{k} \left| f_g(x_i; \overset{n}{\underset{1}{y}}_{h,i}) \right| \cdot (x_{i+1} - x_i) < \sum_{i=0}^{k} M (x_{i+1} - x_i) = \\ &= M(x_{k+1} - x_0) < MA < b; \end{aligned}$$

---

*) Мы предположили, чтобы имѣть дѣло съ опредѣленнымъ случаемъ, $x > x_0$; если $x < x_0$, то въ рядѣ (7) знакъ $<$ долженъ быть перемѣненъ на $>$; въ неравенствѣ (12) надобно тогда вмѣсто $x_i - x_0$ написать $x_0 - x_i$.

слѣд. $\overset{n}{\underset{1}{y}}_{g,k+1}$ лежать въ указанныхъ же предѣлахъ; а потому будутъ лежать тамъ же и слѣдующія значенія $\overset{n}{\underset{1}{y}}_{g,k+2}$, и т. д. Нужно теперь показать, что съ увеличеніемъ числа p членовъ ряда (7) промежуточныхъ между x_0 и x, величины $\overset{n}{\underset{1}{y}}_{g,p}$ будутъ стремиться при сдѣланныхъ предположеніяхъ къ нѣкоторымъ предѣламъ, которые и будутъ значенія $\overset{n}{\underset{1}{y}}_g$ въ точкѣ x.

Вставимъ съ этою цѣлью между каждыми двумя членами ряда (7) промежуточныя числа; разсмотримъ часть этого ряда отъ x_i до x_{i+1}:

$$x_i = x'_l < x'_{l+1} < x'_{l+2} < \ldots < x'_m < x'_{m+1} < \ldots < x'_{q-1} < x'_q = x_{i+1}; \tag{13}$$

соотвѣтствующія значенія y_g, опредѣляемыя по формулѣ

$$y'_{g,m+1} - y'_{g,m} = f_g(x'_m;\ \overset{n}{\underset{1}{y'}}_{h,m})(x'_{m+1} - x'_m), \tag{14}$$

будутъ:

$$y'_l,\ y'_{l+1},\ y'_{l+2}, \ldots y'_m,\ y'_{m+1}, \ldots y'_{q-1},\ y'_q. \tag{15}$$

Въ силу непрерывности f_g внутри разсматриваемой области, будетъ:

$$f_g(x'_m;\ \overset{n}{\underset{1}{y'}}_{h,m}) = f_g(x'_l;\ \overset{n}{\underset{1}{y'}}_{h,l}) + \vartheta_{g,m}\varepsilon, \tag{16}$$

гдѣ $|\vartheta_{g,m}| < 1$; внося это въ (14), будемъ имѣть:

$$y'_{g,m+1} - y'_{g,m} = [f_g(x'_l;\ \overset{n}{\underset{1}{y'}}_{h,l}) + \vartheta_{g,m}\varepsilon](x'_{m+1} - x'_m); \tag{17}$$

суммируя это по m отъ l до $q-1$ и полагая

$$\sum_{m=l}^{q-1} \vartheta_{g,m}(x'_{m+1} - x'_m) = \vartheta_g(x'_q - x'_l), \tag{18}$$

такъ что ϑ_g, какъ средняя между $\vartheta_{g,m}$ будетъ тоже удовлетворять неравенству:

$$|\vartheta_g| < 1, \tag{19}$$

мы будемъ имѣть:

$$y'_{g,q} - y'_{g,l} = [f_g(x'_l;\ \overset{n}{\underset{1}{y'}}_{h,l}) + \vartheta_g\varepsilon](x'_q - x'_l). \tag{20}$$

Но по обозначенію (13) имѣемъ

$$x'_q - x'_l = x_{i+1} - x_i; \tag{21}$$

а потому, вычитая (10) изъ (20), легко получимъ:

$$y'_{g,q} - y_{g,i+1} = (y'_{g,l} - y'_{g,i}) + [f_g(x'_l;\ \overset{n}{\underset{1}{y'}}_{h,l}) - f_g(x_i,\ \overset{n}{\underset{1}{y}}_{h,i}) + \vartheta_g\varepsilon](x_{i+1} - x_i). \tag{22}$$

Но по (5) будетъ, такъ какъ $x'_l = x_i$:

(23) $$\left|f_g(x'_l;\ \overset{n}{\underset{1}{y'_{h,l}}}) - f_g(x_i,\ \overset{n}{\underset{1}{y_{h,i}}})\right| < \sum_{h=1}^{n} k_h \left|y'_{h,l} - y_{h,i}\right|;$$

имѣя это въ виду, а также (19), и полагая

(24) $$\left|y'_{g,l} - y_{g,i}\right| = V_{g,i}, \qquad \left|y'_{g,q} - y_{g,i+1}\right| = V_{g,i+1},$$

мы будемъ имѣть такое неравенство:

(25) $$V_{g,i+1} < V_{g,i} + \left(\sum_{h=1}^{n} k_h V_{h,i} + \varepsilon\right)(x_{i+1} - x_i).$$

Положимъ

(26) $$U_i = \sum_{h=1}^{n} k_h V_{h,i},$$

такъ, что (25) такъ перепишется:

(27) $$V_{g,i+1} < V_{g,i} + (U_i + \varepsilon)(x_{i+1} - x_i);$$

помножая это неравенство на k_g и суммируя по g отъ 1 до n, будемъ имѣть, полагая для краткости

(28) $$K = \sum_{g=1}^{n} k_g,$$

такое неравенство:

(29) $$U_{i+1} < U_i + K(U_i + \varepsilon)(x_{i+1} - x_i),$$

а придавая къ обѣимъ частямъ по ε, такое:

(30) $$U_{i+1} + \varepsilon < (U_i + \varepsilon)(1 + K(x_{i+1} - x_i)),$$

отсюда же, такъ какъ

(31) $$1 + K(x_{i+1} - x_i) < e^{K(x_{i+1} - x_i)},$$

слѣдующее:

(32) $$U_{i+1} + \varepsilon < (U_i + \varepsilon) e^{K(x_{i+1} - x_i)}.$$

Давая здѣсь i значенія отъ 0 до $p-1$, перемножая и принимая во вниманіе, что $U_0 = 0$, ибо $V_{h0} = 0$, $(h = 1, 2 \ldots n)$, такъ какъ начальныя значенія $\overset{n}{\underset{1}{y_h}}$ не измѣняются при переходѣ отъ одного ряда значеній x къ слѣдующему, мы получимъ по сокращеніи:

(33) $$U_p + \varepsilon < \varepsilon e^{K(x - x_0)},$$

откуда

(34) $$U_p < \varepsilon (e^{K(x - x_0)} - 1);$$

это неравенство показываетъ, что U_p стремится къ нулю вмѣстѣ съ ε. Внося изъ (33) въ (27), будемъ имѣть:

$$V_{g,i+1} < V_{g,i} + \varepsilon e^{K(x-x_0)}(x_{i+1} - x_i); \tag{35}$$

суммируя по i отъ 0 до $p-1$, по сокращеніи, получимъ:

$$V_{g,p+1} < \varepsilon e^{K(x-x_0)}(x - x_0), \tag{36}$$

откуда слѣдуетъ, что $V_{g,p+1}$, т. е. модуль разности двухъ значеній y въ точкѣ x, получаемыхъ при первомъ и второмъ рядѣ промежуточныхъ значеній независимой перемѣнной между x_0 и x, будетъ убывать до нуля вмѣстѣ съ ε. Но, переходя къ третьему ряду, мы можемъ взять $\varepsilon' < \varepsilon$ вмѣсто ε, ибо разность $x'_{m+1} - x'_m < \delta' < \delta$; переходя къ четвертому, взять $\varepsilon'' < \varepsilon'$, и т. д. Слѣд. при увеличеніи числа промежуточныхъ значеній между x_0 и x, причемъ разность ихъ убываетъ до безконечности, значенія $\overset{n}{\underset{1}{y_g}}$, получаемыя по этому способу, будутъ стремиться къ нѣкоторому предѣлу, зависящему отъ x, слѣд. функціи x. Остается показать, что эти предѣльныя значенія $\overset{n}{\underset{1}{y_g}}$ удовлетворяютъ данной системѣ уравненій (1).

Съ этою цѣлью возьмемъ значеніе x', такое, что $|x' - x| < \delta$; значеніе y_g, въ немъ полученное чрезъ продолженіе ряда (7) до x' съ помощью только-что описаннаго процесса, мы означимъ чрезъ y'_g; значеніе же, полученное по формулѣ (10), перемѣняя тамъ x_i на x, x_{i+1} на x', означимъ чрезъ Y'_g; тогда будемъ имѣть по (36):

$$Y'_g - y'_g < \varepsilon e^{K(x'-x)}(x' - x), \tag{37}$$

а по (10):

$$Y'_g - y_g = f_g(x, \overset{n}{\underset{1}{y_h}})(x' - x); \tag{38}$$

неравенство (37) можно замѣнить такимъ равенствомъ:

$$Y'_g - y'_g = \vartheta \varepsilon e^{K(x'-x)}(x' - x), \tag{39}$$

гдѣ $\vartheta^2 < 1$. Вычитая это изъ предыдущаго, по раздѣленіи на $x' - x$, будемъ имѣть:

$$\frac{y'_g - y_g}{x' - x} = f_g(x; \overset{n}{\underset{1}{y_h}}) - \varepsilon . \vartheta e^{K(x'-x)}; \tag{40}$$

при одновременномъ убываніи ε и δ до нуля, лѣвая часть будетъ стремиться къ $\frac{dy_g}{dx}$, правая къ $f_g(x, \overset{n}{\underset{1}{y_h}})$; но если двѣ величины постоянно равны, то и предѣлы ихъ равны; слѣд. переходя къ предѣлу, получаемъ:

$$\frac{dy_g}{dx} = f_g(x; \overset{n}{\underset{1}{y_h}}), \tag{41}$$

что согласно съ (1); предложеніе такимъ образомъ доказано. — Это доказательство извѣстно подъ названіемъ доказательства *Коши-Липшица*.

147. Переходимъ къ доказательству *Пикара*, основанному на способѣ послѣдовательныхъ приближеній. Относительно данной системы:

(1) $$\frac{dy_g}{dx} = f_g(x; \overset{n}{\underset{1}{y_h}}), \qquad (g=1, 2, \ldots n)$$

сохраняемъ предположенія пред. §. Оставляя прежнія обозначенія начальныхъ значеній функцій y_h (т. е. при $x=x_0$), вмѣсто данной системы будемъ интегрировать получающуюся изъ нея чрезъ замѣну во второй части y_h ихъ начальными значеніями $y_{h,0}$:

(2) $$\frac{dy_{g,1}}{dx} = f_g(x; \overset{n}{\underset{1}{y_{h,0}}}), \qquad (g=1, 2, \ldots n)$$

при тѣхъ же начальныхъ значеніяхъ; задача сведена къ квадратурѣ; интегрируя, будемъ имѣть:

(3) $$y_{g,1} = \int_{x_0}^{x} f_g(x; \overset{n}{\underset{1}{y_{h,0}}})\, dx + y_{g,0}. \qquad (g=1, 2, \ldots n)$$

Подставляя эти значенія вмѣсто y_h во вторую часть (1), получимъ, интегрируя, результатъ:

(4) $$y_{g,2} = \int_{x_0}^{x} f_g(x; \overset{n}{\underset{1}{y_{h,1}}})\, dx + y_{g,0}. \qquad (g=1, 2, \ldots n)$$

Подставляя это во вторую часть (1) вмѣсто y_g, интегрируя и продолжая это такимъ же образомъ далѣе, придемъ наконецъ къ такому выраженію:

(5) $$y_{g,m} = \int_{x_0}^{x} f_g(x; \overset{n}{\underset{1}{y_{h,m-1}}})\, dx + y_{g,0}.$$

Всѣ полученныя такимъ образомъ функціи

(6) $$y_{g,1},\ y_{g,2},\ y_{g,3} \cdots\cdots y_{g,k-1},\ y_{g,k} \cdots\cdots y_{g,m}$$

для значеній x такихъ, что

(7) $$|x - x_0| < A,$$

гдѣ $A < a$, будутъ лежать въ указанныхъ въ пред. § предѣлахъ для y, т. е. будетъ

(8) $$|y_{g,m} - y_{g,0}| < b$$

для всѣхъ значеній m. Допустивъ справедливость этого для всѣхъ значеній $m < k-1$, съ помощью (5) легко убѣдиться, что оно будетъ имѣть мѣсто и для $m=k$. Такъ какъ по допущенію $y_{h,k-1}$ лежатъ въ указанныхъ предѣлахъ, то $|f_g(x, \overset{n}{\underset{1}{y_{h,k-1}}})| < M$; слѣд. изъ (5), полагая $m=k$, будемъ имѣть такое неравенство:

$$|y_{g,k}-y_{g,0}|<M|x-x_0|<MA<b, \tag{9}$$

что и требовалось доказать.

Разсмотримъ теперь разности двухъ сосѣднихъ членовъ ряда (6). Изъ (3) находимъ:

$$|y_{g,1}-y_{g,0}|<M(x-x_0); \tag{10}$$

вычитая (3) изъ (4), получаемъ:

$$y_{g,2}-y_{g,1}=\int_{x_0}^{x}[f_g(x;\ \overset{n}{\underset{1}{y}}{}_{h,1})-f_g(x;\ \overset{n}{\underset{1}{y}}{}_{h,0})]\,dx;$$

слѣд.

$$|y_{g,2}-y_{g,1}|<\int_{x_0}^{x}|f_g(x;\ \overset{n}{\underset{1}{y}}{}_{h,1})-f_g(x;\ \overset{n}{\underset{1}{y}}{}_{h,0})|\,dx;$$

но по (5) § 146 и затѣмъ по (10) настоящаго § имѣемъ:

$$|f_g(x;\ \overset{n}{\underset{1}{y}}{}_{h,1})-f_g(x;\ \overset{n}{\underset{1}{y}}{}_{h,0})|<\sum_{h=1}^{n}k_h|y_{h,1}-y_{h,0}|<KM(x-x_0),$$

гдѣ K опредѣляется (28) пред. §; а потому изъ предшествующаго неравенства будемъ имѣть:

$$|y_{g,2}-y_{g,1}|<\int_{x_0}^{x}KM(x-x_0)\,dx;$$

но $\int_{x_0}^{x}KM(x-x_0)\,dx=KM\dfrac{(x-x_0)^2}{1.2}$; а потому будетъ

$$|y_{g,2}-y_{g,1}|<KM\frac{(x-x_0)^2}{1.2}. \tag{11}$$

Точно также будетъ

$$|y_{g,3}-y_{g,2}|<\int_{x_0}^{x}|f_g(x;\ \overset{n}{\underset{1}{y}}{}_{h,2})-f_g(x;\ \overset{n}{\underset{1}{y}}{}_{h,1})|\,dx<\int_{x_0}^{x}\sum_{h=1}^{n}k_h|y_{h,2}-y_{h,1}|\,dx<$$

$$<KM\int_{x_0}^{x}\sum_{h=1}^{n}k_h\frac{(x-x_0)^2}{1.2}\,dx=MK^2\frac{(x-x_0)^3}{1.2.3},$$

т. е.

$$|y_{g,3}-y_{g,2}|<MK^2\frac{(x-x_0)^3}{1.2.3}. \tag{12}$$

Допустимъ, что справедливо такое неравенство:

$$|y_{g,k}-y_{g,k-1}|<MK^{k-1}\frac{(x-x_0)^k}{k!}; \tag{13}$$

вычитая изъ (5) для $m=k+1$, его же для $m=k$, мы будемъ имѣть:

$$y_{g,k+1}-y_{g,k}=\int_{x_0}^{x}[f_g(x;\ \overset{n}{\underset{1}{y}}{}_{h,k})-f_g(x;\ \overset{n}{\underset{1}{y}}{}_{h,k-1})]\,dx;$$

отсюда будемъ имѣть по (5) пред. § и (13) настоящаго:

$$|y_{g,k+1}-y_{g,k}|<\int_{x_0}^{x}|f_g(x;\overset{n}{\underset{1}{y_{h,k}}})-f_g(x;\overset{n}{\underset{1}{y_{h,k-1}}})|\,dx<\int_{x_0}^{x}\sum_{h=1}^{n}k_h\,|y_{h,k}-y_{h,k-1}|\,dx<$$

$$<\int_{x_0}^{x}K.M.K^{k-1}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\,dx=MK^k\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!};$$

т. е.

(14) $$|y_{g,k+1}-y_{g,k}|<MK^k\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!};$$

слѣд. законъ, выражаемый неравенствомъ (13), есть общій.

Мы имѣемъ:

(15) $$y_{g,m}=y_{g,0}+\sum_{k=1}^{m}(y_{g,k}-y_{g,k-1});$$

рядъ модулей членовъ суммы направо удовлетворяетъ по (13) такому неравенству:

(16) $$\sum_{i=1}^{m}|y_{g,k}-y_{g,k-1}|<\frac{M}{K}\sum_{k=1}^{n}\frac{[K(x-x_0)]^k}{k!};$$

здѣсь вторая часть есть рядъ сходящійся; и потому таковымъ будетъ и рядъ лѣвой части, а слѣд. и сумма въ (15) будетъ представлять сходящійся рядъ; отсюда слѣдуетъ, что съ безпредѣльнымъ возрастаніемъ m функціи $y_{g,m}$ стремятся каждая къ извѣстному предѣлу.

Остается показать, что эти предѣльныя значенія, которыя суть функціи x, будутъ удовлетворять данной системѣ уравненій (1).

На основаніи только-что доказаннаго при $m=\infty$ будетъ $y_{g,m}=$ $=y_{g,m-1}=y_g$; а потому формула (5) обратится въ предѣлѣ въ такую:

(17) $$y_g=\int_{x_0}^{x}f_g(x;\overset{n}{\underset{1}{y_h}})dx+y_{g,0};$$

дифференцируя, получимъ:

(18) $$\frac{dy_g}{dx}=f_g(x;\overset{n}{\underset{1}{y_h}}),$$

что и доказываетъ утверждаемое.

148. Въ предыдущихъ двухъ доказательствахъ существованія интеграла системы совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій:

(1) $$\frac{dy_j}{dx}=f_j(x;\overset{n}{\underset{1}{y_h}}).$$

Мы предполагали независимую перемѣнную x и функціи $\overset{n}{\underset{1}{y_h}}$ вещественными; теперь изложимъ доказательство Бріо и Букэ для случая комплексныхъ перемѣнныхъ. Мы можемъ принять за начальныя значенія x и $\overset{n}{\underset{1}{y_h}}$ нули; ибо къ этому всегда можно свести общій случай, полагая $x-x_0=\xi$, $\overset{n}{\underset{1}{y_h-y_{h,0}}}=\eta_h$, и вводя $x_0+\xi$ вмѣсто x, $y_{h,0}+\eta_h$ вмѣсто y_h. Итакъ, пусть для всѣхъ значеній x внутри круга радіуса$=a$, и круговъ радіуса b для $\overset{n}{\underset{1}{y_h}}$, описанныхъ изъ точки 0 въ соотвѣтственныхъ плоскостяхъ, функціи $f_j(x,\overset{n}{\underset{1}{y_h}})$ однозначны, конечны и непрерывны — короче сказать—голоморфны (holomorphes); покажемъ, что существуютъ такія голоморфныя внутри круга радіуса a функціи $\overset{n}{\underset{1}{y_h}}$ отъ x, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ (1) и обращаются въ нуль вмѣстѣ съ x. Нетрудно построить такія функціи, представивъ ихъ, какъ голоморфныя, степенными рядами отъ x, которыя формально будутъ удовлетворять уравненіямъ; показавъ это, намъ останется доказать сходимость полученныхъ рядовъ, чрезъ что существованіе интеграловъ системы дифференціальныхъ уравненій (1) будетъ доказано. Но по строкѣ Маклореня имѣемъ:

$$y_j=\sum_{k=1}^{\infty} y_{j,0}^{(k)}\frac{x^k}{k!}; \tag{2}$$

производныя $y_{j,0}^{(1)}$ перваго порядка получатся прямо, полагая $x=0$, $\overset{n}{\underset{1}{y_h}}=0$; производныя 2-го порядка, получатся, дѣлая то же въ производныхъ отъ (1) уравненіяхъ:

$$\frac{d^2y_j}{dx^2}=\frac{\partial f_j}{\partial x}+\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial y_h}\frac{dy_h}{dx}; \tag{3}$$

производныя 3-го порядка также найдутся изъ производныхъ уравненій отъ этихъ послѣднихъ:

$$\frac{d^3y_j}{dx^3}=\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2}+2\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial^2 f_j}{\partial x\partial y_h}\frac{dy_h}{dx}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial^2 f_j}{\partial y_k\partial y_h}\frac{dy_h}{dx}\frac{dy_k}{dx}+\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial y_h}\frac{d^2y_h}{dx^2}, \tag{4}$$

и т. д. Разлагая вторую часть (1) по строкѣ Маклореня, мы должны будемъ находить для $x=0$ значенія функціи f_j и ея производныхъ перваго, второго... порядковъ, разсматривая f_j какъ сложную функцію x, зависящую отъ x какъ непосредственно, такъ и чрезъ посредство y_h; но

$$\left.\begin{aligned}\frac{df_j}{dx}&=\frac{\partial f_j}{\partial x}+\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial y_h}\frac{dy_h}{dx};\\ \frac{d^2f_j}{dx^2}&=\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2}+2\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial^2 f_j}{\partial x\partial y_h}\frac{dy_h}{dx}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial^2 f_j}{\partial y_k\partial y_h}\frac{dy_h}{dx}\frac{dy_k}{dx}+\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial y_h}\frac{d^2y_h}{dx^2},\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и т. д.

отсюда для $x=0$ мы получимъ для $f_j, \frac{df_j}{dx}, \frac{d^2f_j}{dx^2}$ и т. д. тѣ же значенія, какъ для $y'_j, y''_{j,0}, y'''_{j,0}$ и т. д. Отсюда слѣдуетъ, что разложенія обѣихъ частей равенства (1) будутъ тождественны; а отсюда и слѣдуетъ, что ряды (2) формально удовлетворяютъ системѣ дифференціальныхъ уравненій (1), а потому представятъ ея рѣшенія, какъ скоро будетъ доказана ихъ сходимость.

Съ этою цѣлью будемъ разсматривать параллельно данной системѣ дифференціальныхъ уравненій еще такую:

$$(6) \qquad \frac{dY_j}{dx}=\varphi(x, \overset{n}{\underset{1}{Y_h}}),$$

гдѣ

$$(7) \qquad \varphi(x, \overset{n}{\underset{1}{Y_h}})=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{Y_1}{b}\right)\left(1-\frac{Y_2}{b}\right)\cdots\left(1-\frac{Y_n}{b}\right)};$$

а M означаетъ наибольшій изъ модулей функцій $f_j(x, \overset{n}{\underset{1}{y_h}})$ $(j=1, 2\ldots n)$, когда x лежитъ внутри круга радіуса a, а $\overset{n}{\underset{1}{y_h}}$ внутри круговъ радіуса b въ своихъ плоскостяхъ каждая, такъ какъ при $x=0$ всѣ $Y_j=0$, то всѣ они равны, ибо вторыя части всѣхъ уравненій системы (6) одинаковы; а потому, положивъ

$$(8) \qquad Y_1=Y_2=\cdots=Y_n=Y,$$

мы можемъ систему (6) представить однимъ такимъ уравненіемъ:

$$(9) \qquad \frac{dY}{dx}=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{Y}{b}\right)^n}.$$

Въ этомъ уравненіи перемѣнныя отдѣляются чрезъ умноженіе его на $\left(1-\frac{Y}{b}\right)^n$, и тогда мы будемъ имѣть:

$$(10) \qquad \left(1-\frac{Y}{b}\right)^n dY=M\frac{dx}{1-\frac{x}{a}}.$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ, имѣя въ виду, что при $x=0$ и $Y=0$, слѣдующее:

$$(11) \qquad \frac{b}{n+1}\left[\left(1-\frac{Y}{b}\right)^{n+1}-1\right]=aM\log\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

откуда найдемъ, рѣшая его по Y:

$$Y = b\left[1 - \sqrt[n+1]{1 + (n+1)M\frac{a}{b}\log\left(1 - \frac{x}{a}\right)}\right]. \qquad (12)$$

Эта функція голоморфна, пока корень не обращается въ нуль; а это будетъ, когда

$$1 + (n+1)M\frac{a}{b}\log\left(1 - \frac{x}{a}\right) = 0, \qquad (13)$$

откуда находимъ

$$x = a\left(1 - e^{-\frac{b}{(n+1)Ma}}\right) = r; \qquad (14)$$

внутри круга радіуса $r < a$, она голоморфна, а потому разлагается въ рядъ по строкѣ Маклореня, и мы будемъ имѣть:

$$Y = \sum_{k=1}^{\infty} Y_0^{(k)} \frac{x^k}{k!}. \qquad (15)$$

Такъ какъ уравненія (6) совершенно такого же вида какъ уравненія (1), то $Y_0^{(k)}$ найдутся по формуламъ, которыя получатся изъ (1), (3), (4) и т. д., перемѣняя тамъ $f_g(x_i, \overset{n}{\underset{1}{y_h}})$ на $\varphi(x, \overset{n}{\underset{1}{Y_h}})$. Такъ какъ въ этихъ формулахъ встрѣчающіяся дѣйствія суть сложеніе, умноженіе, возвышеніе въ степень, то результаты ихъ будутъ положительные, коль скоро будутъ положительными величины, къ которымъ они примѣняются. Но производныя отъ φ всѣхъ порядковъ при $x = 0$ будутъ положительныя, ибо общій видъ ихъ:

$$\frac{\partial^m \varphi(x, \overset{n}{\underset{1}{Y_h}})}{\partial x^{\mu} \partial y_1^{\mu_1} \partial y_2^{\mu_2} \ldots \partial y_n^{\mu_n}} = \frac{\mu! \mu_1! \mu_2! \ldots \mu_n!}{a^{\mu} b^{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n}} \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\mu+1} \left(1 - \frac{Y_1}{b}\right)^{\mu_1+1} \cdots \left(1 - \frac{Y_n}{b}\right)^{\mu_n+1}}; \quad (16)$$

гдѣ $\mu + \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = m$. Полагая $x = 0$, а слѣд. и $\overset{n}{\underset{1}{Y_h}} = 0$, мы будемъ имѣть:

$$\left(\frac{\partial^m \varphi(x, \overset{n}{\underset{1}{Y_h}})}{\partial x^{\mu} \partial y_1^{\mu_1} \ldots \partial y_n^{\mu_n}}\right)_0 = \frac{\mu! \mu_1! \mu_2! \ldots \mu_n!}{a^{\mu} . b^{\mu_1 + \cdots \mu_n}} M; \qquad (17)$$

это величины положительныя. Далѣе, изъ (9) имѣемъ:

$$y_0' = \left.\frac{dY}{dx}\right|_{x=0} = M, \qquad (18)$$

что также величина положительная; а потому будетъ и y_0'' положительная, слѣд. равна своему модулю; на основаніи этого будетъ и y_0''' положительная, и т. д.; т. е. всѣ производныя Y будутъ положительныя.

Въ то же время они будутъ больше модулей соотвѣтствующихъ производныхъ функцій y_g. Въ самомъ дѣлѣ, модули вторыхъ частей равенствъ (3), (4) и т. д. меньше результатовъ замѣны входящихъ въ нихъ количествъ ихъ модулями; они еще меньше будутъ тѣхъ количествъ, которыя получимъ, замѣнивъ нѣкоторыя изъ входящихъ въ нихъ количествъ положительными величинами, большими ихъ модулей соотвѣтственно. Но это какъ разъ мы дѣлаемъ, когда отъ системы (1) переходимъ къ системѣ (6); въ самомъ дѣлѣ, по формуламъ Коши (8) § 19 имѣемъ:

$$\left|\frac{\partial^m f_g(x, \overset{n}{\underset{1}{y_h}})}{\partial x^{\mu} \partial y_1^{\mu_1} \partial y_2^{\mu_2} \ldots \partial y_n^{\mu_n}}\right| < \frac{\mu! \mu_1! \mu_2! \ldots \mu_n!}{a^{\mu} b^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n}} M. \tag{19}$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\left| y_{g,0}^{(k)} \right| < Y_0^{(k)}; \tag{20}$$

но такъ какъ рядъ (15) сходящійся, то слѣд. будетъ сходящимся и рядъ модулей членовъ каждаго ряда (2), а слѣд. и сами ряды (2), которые такимъ образомъ представятъ интегралы данной системы совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (1).

149. Если такимъ образомъ доказано существованіе интеграловъ данной системы совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій, то отсюда не слѣдуетъ вовсе, что ихъ всегда можно найти, т. е. выразить чрезъ извѣстныя намъ функціи; напротивъ, чаще всего мы этого не можемъ сдѣлать, и тогда остается изучать свойства интеграловъ по самымъ уравненіямъ; но это относится уже къ спеціальному курсу теоріи функцій, опредѣляемыхъ дифференціальными уравненіями; предметъ этотъ достаточно хорошо разработанъ относительно линейныхъ уравненій съ перемѣнными коэффицентами; что же касается нелинейныхъ уравненій, то можно сказать, что разработка ихъ еще въ начальной стадіи своего развитія. Интересующіеся этимъ предметомъ могутъ обратиться къ II и III томамъ *E. Picard*. Cours d'Analyse, и къ сочиненію *Forsyth*. A treatise on the theorie of differential equations. Part 2. Ordinary equations, not linear. 2 Vol. 1900. Мы же здѣсь ограничимся системой линейныхъ уравненій, а затѣмъ разсмотримъ нѣкоторые другіе случаи, когда данныя дифференціальныя уравненія удачно комбинируются въ другія, легко интегрируемыя.

Пусть дана система линейныхъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій, которую въ сжатомъ видѣ можно такъ написать:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{n_k} X_{n_k-i}^{(k,l)} y_k^{(n_k-i)} = V_l, \qquad (l=1,2,\ldots m) \tag{1}$$

гдѣ $X_{n_k-i}^{(k,l)}$ суть функціи x, равно, какъ и V_l; въ частности они могутъ быть постоянными. По общему способу, увеличивъ число функцій и уравненій, можно её привести къ системѣ линейныхъ уравненій перваго порядка; но многія ея свойства можно обнаружить и въ этомъ видѣ. Такъ, если извѣстно частное рѣшеніе системы (1), представляемое уравненіями

$$y_k = \varphi_k(x), \qquad (k=1,2,\dots m;) \tag{2}$$

то, полагая

$$y_k = \varphi_k + z_k, \tag{3}$$

мы сведемъ нашу систему (1) къ такой, безъ послѣдняго члена:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{n_k} X_{n_k-i}^{(k,l)} z_k^{(n_k-i)} = 0. \qquad (l=1,2,\dots m) \tag{4}$$

Если $z_{k,h}$, $[k=1,2,\dots m;]$ суть частныя рѣшенія системы (4), то

$$z_k = \sum_{h=1}^{p} C_h z_{k,h} \qquad (k=1,2,\dots m) \tag{5}$$

будутъ тоже ея рѣшеніями; въ самомъ дѣлѣ, дѣлая подстановку изъ (5) въ (4), будемъ имѣть:

$$\sum_{h=1}^{p} C_h \sum_{i=0}^{n_k} X_{n_k-i}^{(k,l)} z_{k,h}^{(n_k-i)} \equiv 0, \tag{6}$$

ибо множитель при каждомъ C_h тождественно равенъ нулю. Это доказать мы считали должнымъ въ виду того, что мы этимъ предложеніемъ пользовались въ § 141; на практикѣ же и въ теоріи удобнѣе трактовать эти уравненія по приведеніи ихъ къ первому порядку, что мы и предположимъ далѣе сдѣланнымъ.

150. Пусть дана система линейныхъ уравненій 1-го порядка:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{h=1}^{n} X_h^{(k)} y_h + X^{(k)}, \qquad (k=1,2,\dots n) \tag{1}$$

гдѣ всѣ $X_h^{(k)}$ и $X^{(k)}$ суть функціи x, или постоянныя. Такъ какъ, зная частное рѣшеніе этой системы уравненій, можно свести её къ системѣ уравненій однородныхъ относительно y_h и ихъ производныхъ, то мы должны сперва заняться рѣшеніемъ системы уравненій безъ послѣдняго члена:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{h=1}^{n} X_h^{(k)} y_h. \qquad (k=1,2,\dots n) \tag{2}$$

Эта система порядка n, ибо, дифференцируя это уравненіе (для $k=l$) разъ, другой, третій и т. д., подставляя каждый разъ предъ новымъ дифференцированіемъ вмѣсто производныхъ y'_k ихъ выраженія чрезъ $\overset{n}{\underset{1}{y_h}}$ изъ самыхъ уравненій (2), мы будемъ имѣть систему такихъ уравненій:

$$(3)\qquad \frac{d^m y_l}{dx^m}=\sum_{h=1}^{n} X_h^{(k,m)} y_h, \qquad (m=1,2,3,\dots n),$$

изъ которыхъ, исключивъ всѣ y_h, кромѣ y_l, получимъ, очевидно, линейное уравненіе n-го порядка. Слѣд., полный интегралъ системы уравненій (2) представится такъ:

$$(4)\qquad y_k=\sum_{i=1}^{n} C_i y_{k,i}, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

означая чрезъ $y_{k,i}$ независимыя частныя рѣшенія, т. е. такія, между которыми нѣтъ зависимости вида:

$$(5)\qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot y_{k,i}=0.$$

Когда эти частныя значенія будутъ извѣстны, тогда можно будетъ изъ полной системы интеграловъ (4) системы (2) вывести полный интегралъ системы (1) по способу измѣненія произвольныхъ постоянныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, считая C_i теперь за функціи x, и потому, перемѣнивъ ихъ въ (4) на $C_i(x)$, мы будемъ имѣть:

$$(6)\qquad y_k=\sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_{k,i};$$

дифференцируя, будемъ имѣть:

$$(7)\qquad \frac{dy_k}{dx}=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\frac{dy_{k,i}}{dx}+\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_{k,i};$$

подставляя это въ (1), будемъ имѣть:

$$(8)\qquad \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\frac{dy_{k,i}}{dx}+\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_{k,i}=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\sum_{h=1}^{n} X_h^{(k)} y_{h,i}+X^{(k)}; \qquad (k=1,2\dots n)$$

но

$$(8')\qquad \frac{dy_{k,i}}{dx}=\sum_{h=1}^{n} X_h^{(k)} y_{h,i};$$

а потому предыдущее приведется къ такому:

$$(9)\qquad \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_{k,i}=X^{(k)}. \qquad (k=1,2\dots n)$$

Рѣшая эти уравненія по $C_g'(x)$, обозначая при этомъ чрезъ $\Delta(y_{h,i})$ опредѣлитель:

$$(10)\qquad \Delta=\begin{vmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & \cdots & y_{1,n} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & \cdots & y_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n,1} & y_{n,2} & \cdots & y_{n,n} \end{vmatrix}$$

а чрезъ $\Delta_{k,g}$ миноръ, отвѣчающій элементамъ на пересѣченіи g-го столбца съ k-ой строкой, мы будемъ имѣть:

$$C'_g(x)=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}\Delta_{k,g}X^{(k)};\qquad (g=1,2\ldots n)\qquad (11)$$

интегрируя, будемъ имѣть:

$$C_g(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}\Delta_{k,g}X^{(k)}dx+c_g.\qquad (g=1,2\ldots n)\qquad (12)$$

Подставляя это въ (6), будемъ имѣть общее рѣшеніе системы (1):

$$y_h=\sum_{i=1}^{n}y_{h,i}\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}\Delta_{k,i}X^{(k)}dx+\sum_{i=1}^{n}c_iy_{h,i}.\qquad (h=1,2\ldots n)\qquad (13)$$

Первые члены отдѣльно представляютъ частное рѣшеніе, получающееся чрезъ положеніе всѣхъ $c_i=0$; второй членъ есть не что иное, какъ полный интегралъ системы уравненій безъ послѣдняго члена (2); такъ что эта формула подтверждаетъ выводъ предыдущаго §. Этотъ методъ принадлежитъ Лагранжу.

151. Частныя рѣшенія уравненія (2) въ полномъ числѣ мы можемъ находить въ очень немногихъ случаяхъ. Всегда это можно сдѣлать въ случаѣ постоянныхъ коэффиціентовъ, т. е. когда

$$X_h^k=a_{k,h},\qquad (1)$$

гдѣ $a_{k,h}$ постоянныя. Система уравненій (2) обращается тогда въ такую:

$$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{h=1}^{n}a_{k,h}y_h.\qquad (k=1,2\ldots n)\qquad (2)$$

Положимъ

$$y_h=b_he^{\lambda x};\qquad (h=1,2\ldots n)\qquad (3)$$

тогда

$$\frac{dy_k}{dx}=b_k\lambda e^{\lambda x};\qquad (4)$$

внося это въ уравненія (2) и отбрасывая множитель $e^{\lambda x}$, общій всѣмъ членамъ, мы получимъ такую систему уравненій:

$$b_k\lambda=\sum_{k=1}^{n}a_{k,h}b_h.\qquad (5)$$

Перенесемъ направо $b_k\lambda$, и напишемъ подробно эту систему уравненій:

$$\left.\begin{array}{l}
(a_{11}-\lambda)b_1+a_{12}b_2+a_{13}b_3+\cdots+a_{1n}b_n=0,\\
a_{21}b_1+(a_{22}-\lambda)b_2+a_{23}b_3+\cdots+a_{2n}b_n=0,\\
a_{31}b_1+a_{32}b_2+(a_{33}-\lambda)b_3+\cdots+a_{3n}b_n=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{n1}b_1+a_{n2}b_2+a_{n3}b_3+\cdots+(a_{nn}-\lambda)b_n=0.
\end{array}\right\}\qquad (6)$$

Такимъ образомъ мы здѣсь имѣемъ n уравненій для опредѣленія $n+1$ величинъ; одна должна остаться произвольною. Исключая величины $\overset{n}{\underset{1}{b_h}}$, мы будемъ имѣть такое уравненіе для опредѣленія λ:

$$\text{(7)}\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Оно степени n относительно λ, а потому будетъ имѣть n корней: $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$. Подставляя въ (6) по очереди эти корни вмѣсто λ, будемъ имѣть систему n однородныхъ уравненій относительно $\overset{n}{\underset{1}{b_h}}$, но совмѣстныхъ въ силу выполненія условія (7); а потому изъ нихъ найдемъ отношенія всѣхъ къ одному, выбравъ любыя $n-1$ изъ этихъ уравненій. Слѣд., всѣ b_h будутъ опредѣлены до постояннаго множителя, который останется произвольною постоянною. Если всѣ $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ будутъ различны, то полное рѣшеніе системы (2) представится такими формулами:

$$\text{(8)}\qquad y_k = \sum_{h=1}^{n} C_h \beta_{kh} e^{\lambda_h x}, \qquad (k=1,2\dots n)$$

гдѣ β_{kh} значеніе b_k, получаемое до постояннаго множителя C_h изъ уравненій (6), когда положимъ тамъ $\lambda=\lambda_h$. C_h не зависитъ отъ k, слѣд. во всѣхъ n формулахъ будетъ одно и то же.

Если между $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ будутъ равныя, напр. $\lambda_h=\lambda_{h'}$, то формула (8) не представитъ полнаго рѣшенія. Его можно однако получить изъ (8) по способу д'Аламберта, который состоитъ въ томъ, что полагаютъ сперва $\lambda_{h'}=\lambda_h+\varepsilon$, гдѣ ε очень малая величина, и послѣ нѣкотораго преобразованія полагаютъ $\varepsilon=0$. Мы разсмотримъ два члена суммы (8), отвѣчающіе этимъ корнямъ:

$$\text{(9)}\qquad C_h\beta_{kh}e^{\lambda_h x}+C_{h'}\beta_{kh'}e^{\lambda_{h'}x};$$

ихъ сумму можно такъ представить:

$$\text{(10)}\quad C_h\beta_{kh}e^{\lambda_h x}+C_{h'}\beta_{kh'}e^{\lambda_{h'}x}=(C_h+C_{h'})\beta_{kh}e^{\lambda_h x}+C_{h'}\varepsilon\frac{\beta_{kh'}e^{\lambda_{h'}x}-\beta_{kh}e^{\lambda_h x}}{\varepsilon};$$

полагая $C_h+C_{h'}=C'_h$, $C'_h\varepsilon=C''_h$, и, переходя къ предѣлу, получимъ во второй части

$$\text{(11)}\qquad C'_h\beta_{kh}e^{\lambda_h x}+C''_h\frac{\partial(\beta_{kh}e^{\lambda_h x})}{\partial\lambda_h};$$

недостающій интегралъ восполнится вторымъ членомъ. Если три корня будутъ равны: $\lambda_h=\lambda_{h'}=\lambda_{h''}$, то сумму соотвѣтственныхъ трехъ членовъ можно такъ представить, предполагая $\lambda_{h'}=\lambda_h+\varepsilon$, $\lambda_{h''}=\lambda_{h'}+\varepsilon$:

$$C_h\beta_{kh}e^{\lambda_h x}+C_{h'}\beta_{kh'}e^{\lambda_{h'}x}+C_{h''}\beta_{kh''}e^{\lambda_{h''}x}=$$

$$=(C_h+C_{h'}+C_{h''})\beta_{kh}e^{\lambda_h x}+(C_{h'}+2C_{h''})\varepsilon\frac{\beta_{kh'}e^{\lambda_{h'}x}-\beta_{kh}e^{\lambda_h x}}{\varepsilon}+ \qquad (12)$$

$$+C_{h''}\varepsilon^2\frac{\beta_{kh''}e^{\lambda_{h''}}-2\beta_{kh'}e^{\lambda_{h'}x}+\beta_{kh}e^{\lambda_h x}}{\varepsilon^2}.$$

Полагая

$$C_h+C_{h'}+C_{h''}=C'_h;\quad (C_{h'}+2C_{h''})\varepsilon=C''_h;\quad C_{h''}\varepsilon^2=C'''_h, \qquad (13)$$

и переходя къ предѣлу, получимъ во второй части:

$$C'_h\beta_{kh}e^{\lambda_h x}+C''_h\frac{\partial(\beta_{kh}e^{\lambda_h x})}{\partial\lambda_h}+C'''_h\frac{\partial^2(\beta_{kh}e^{\lambda_h x})}{\partial\lambda_h^2}. \qquad (14)$$

Второй и третій члены этой суммы дополнятъ недостающія два рѣшенія въ этомъ случаѣ. Такъ можно итти какъ угодно далеко *).

Эта метода интегрированія и прямо примѣнима къ уравненіямъ (4) § 149, какъ то уже было сдѣлано въ § 141. (См. Hoüel тамъ же). Мы еще увидимъ это на примѣрахъ.

152. Пояснимъ изложенное на примѣрахъ.

Примѣръ 1-й. Пусть дана система уравненій:

$$\left.\begin{aligned} y'_1+5y_1-2y_2&=e^x;\\ y'_2-\ y_1+6y_2&=e^{2x}.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Найдемъ сперва интегралы такой системы:

$$\left.\begin{aligned} y'_1+5y_1-2y_2&=0,\\ y'_2-\ y_1+6y_2&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Положимъ, такъ какъ коэффиценты постоянные:

$$y_1=b_1e^{\lambda x};\qquad y_2=b_2e^{\lambda x}; \qquad (3)$$

подставляя это въ уравненія (2), будемъ имѣть, раздѣливъ на $e^{\lambda x}$:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda+5)b_1-2b_2&=0;\\ -b_1+(\lambda+6)b_2&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

---

*) Hoüel въ своемъ Cours de Calcul infinitésimal, T. III, p. 20—22, трактуетъ этотъ вопросъ по способу, представляющему распространеніе примѣненнаго нами къ линейному уравненію высшаго порядка, прибѣгая однако къ англійскимъ символамъ.

Исключая b_1 и b_2, получимъ такое уравненіе для λ:

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} \lambda+5 & -2 \\ -1 & \lambda+6 \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 + 11\lambda + 28 = 0.$$

Корни этого уравненія будутъ: $\lambda_1 = -4$: $\lambda_2 = -7$. Внося ихъ, напр., въ первое изъ уравненій (4), будемъ имѣть:

$$(6)\qquad \frac{b_{1,1}}{2} = \frac{b_{2,1}}{1} = C_1; \qquad \frac{b_{1,2}}{1} = \frac{b_{2,2}}{-1} = C_2;$$

слѣд.

$$\left.\begin{aligned} y_{1,1} &= 2C_1 e^{-4x}; \\ y_{2,1} &= C_1 e^{-4x}; \end{aligned}\right\} (a) \qquad \left.\begin{aligned} y_{1,2} &= C_2 e^{-7x}; \\ y_{2,2} &= -C_2 e^{-7x}, \end{aligned}\right\} (b)$$

и потому полное рѣшеніе будетъ:

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} y_1 &= 2C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-7x}; \\ y_2 &= C_1 e^{-4x} - C_2 e^{-7x}. \end{aligned}\right.$$

Теперь будемъ трактовать C_1 и C_2 какъ функціи x. Дифференцируя въ этомъ предположеніи, будемъ имѣть:

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} y_1' &= -8C_1 e^{-4x} - 7C_2 e^{-7x} + 2C_1' e^{-4x} + C_2' e^{-7x}; \\ y_2' &= -4C_1 e^{-4x} + 7C_2 e^{-7x} + C_1' e^{-4x} - C_2' e^{-7x}; \end{aligned}\right.$$

внося это въ (1) и сокращая, что можно, получимъ:

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} 2C_1' e^{-4x} + C_2' e^{-7x} &= e^{x}; \\ C_1' e^{-4x} - C_2' e^{-7x} &= e^{2x}. \end{aligned}\right.$$

Рѣшая эти уравненія, получимъ:

$$(10)\qquad C_1' = \frac{1}{3} e^{5x} + \frac{1}{3} e^{6x}; \qquad C_2' = \frac{1}{3} e^{8x} - \frac{2}{3} e^{9x};$$

интегрируя ихъ, будемъ имѣть:

$$(11)\qquad C_1 = \frac{1}{15} e^{5x} + \frac{1}{18} e^{6x} + c_1; \quad C_2 = \frac{1}{24} e^{8x} - \frac{2}{27} e^{9x} + c_2;$$

внося это въ (7), получимъ рѣшеніе системы уравненій (1):

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{2}{15} e^{x} + \frac{1}{9} e^{2x} + \frac{1}{24} e^{x} - \frac{2}{27} e^{2x} + 2c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-7x}; \\ y_2 &= \frac{1}{15} e^{x} + \frac{1}{18} e^{2x} - \frac{1}{24} e^{x} + \frac{2}{27} e^{2x} + c_1 e^{-4x} - c_2 e^{-7x}, \end{aligned}\right\}$$

или, упрощая:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{7}{40}e^{x} + \frac{1}{27}e^{2x} + 2c_1e^{-4x} + c_2e^{-7x};\\ y_2 &= \frac{1}{40}e^{x} + \frac{7}{54}e^{2x} + c_1e^{-4x} - c_2e^{-7x}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

153. *Примѣръ 2-й.* Дана система

$$\left.\begin{aligned} y'+y-\ z &= x;\\ z'+y+3z &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Найдемъ сперва интегралы такой системы:

$$\left.\begin{aligned} y'+y-\ z &= 0;\\ z'+y+3z &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

съ этою цѣлью положимъ:

$$y = b_1e^{\lambda x};\quad z = b_2e^{\lambda x}; \tag{3}$$

вставляя эти величины во (2), по сокращеніи на $e^{\lambda x}$ будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda+1)b_1 - b_2 &= 0;\\ b_1 + (\lambda+3)b_2 &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

исключая b_1 и b_2, получимъ такое уравненіе для λ:

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1\\ 1 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 = 0; \tag{5}$$

слѣд. имѣемъ случай двухъ корней $=-2$. Поэтому одно рѣшеніе частное будетъ, такъ какъ изъ (4)

$$\frac{b_1}{1} = \frac{b_2}{\lambda+1} = C, \text{ слѣд. } b_1 = C;\ b_2 = C(\lambda+1), \tag{6}$$

полагая $\lambda = -2$, такое:

$$y_1 = Ce^{-2x},\qquad z_1 = -Ce^{-2x}; \tag{7}$$

другое представится такъ:

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= \frac{\partial(Ce^{\lambda x})}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=-2} = Cxe^{-2x};\\ z_2 &= \frac{\partial(C(\lambda+1)e^{\lambda x})}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=-2} = Ce^{-2x}(1-x); \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

и слѣд. полное рѣшеніе такъ:

$$y = (C + C_1x)e^{-2x};\qquad z = [-C + C_1(1-x)]e^{-2x}. \tag{9}$$

Чтобы вывести отсюда полное рѣшеніе системы (7), должно C и C_1 разсматривать какъ функціи x; дифференцируя (9) въ такомъ предположеніи и вставляя вмѣстѣ съ (9) въ (1), получимъ по сокращеніи такую систему уравненій:

$$(10)\qquad \begin{cases} C' + C_1'x = xe^{2x}; \\ -C' + C_1'(1-x) = e^{2x}. \end{cases}$$

Рѣшая её, находимъ:

$$(11)\qquad C_1' = (x+1)e^{2x}; \qquad C' = -x^2e^{2x};$$

интегрируя, получаемъ:

$$(12)\qquad C_1 = \frac{2x+1}{4}e^{2x} + c_1; \quad C = \frac{-2x^2+2x-1}{4}e^{2x} + c;$$

внося эти величины въ (9), по упрощенiи получаемъ:

$$(13)\qquad \begin{cases} y = \dfrac{3x-1}{4} + (c + c_1x)e^{-2x}; \\ z = \dfrac{2-x}{4} + (-c + c_1(1-x))e^{-2x}. \end{cases}$$

154. *Примѣръ 3-й.*

$$(1)\qquad \begin{cases} -y'' + 3y + 4z = 3; \\ z'' + \ y + \ z = -5. \end{cases}$$

Эта система уравненiй сведется къ системѣ 4-хъ уравненiй 1-го порядка, если положимъ:

$$(2)\qquad y' = y_1, \qquad z' = z_1;$$

— предлагаемъ это выполнить читателю самому, такъ какъ предыдущiя два примѣра достаточно уяснили, какъ надобно рѣшать такую систему; но можно и прямо къ системѣ (1), не преобразуя ея предварительно, примѣнить тотъ же прiемъ. Положимъ

$$(3)\qquad y = \eta e^{\lambda x}, \qquad z = \zeta e^{\lambda x},$$

гдѣ η и ζ двѣ постоянныя, которыя нужно намъ опредѣлить вмѣстѣ съ λ. Отсюда будемъ имѣть, дифференцируя два раза:

$$(4)\qquad y'' = \eta\lambda^2e^{\lambda x}; \qquad z'' = \zeta\lambda^2e^{\lambda x};$$

подставляя это въ уравненiя безъ послѣдняго члена:

$$(5)\qquad \begin{cases} -y'' + 3y + 4z = 0. \\ z'' + \ y + \ z = 0, \end{cases}$$

и отбрасывая множитель $e^{\lambda x}$, мы будемъ имѣть:

$$(6)\qquad \begin{cases} (-\lambda^2+3)\eta + 4\zeta = 0, \\ \eta + (\lambda^2+1)\zeta = 0; \end{cases}$$

исключая η и ζ, мы будемъ имѣть такое уравненiе:

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} -\lambda^2+3 & 4 \\ 1 & \lambda^2+1 \end{vmatrix} = 0,$$

или раскрывая опредѣлитель и помножая его на -1:

$$\lambda^4-2\lambda^2+1=0=(\lambda^2-1)^2=0; \tag{7'}$$

это уравненіе имѣетъ два корня $=+1$ и два $=-1$. Изъ второго изъ уравненій (6) находимъ

$$\eta=-(\lambda^2+1)\zeta; \tag{8}$$

слѣд. для всѣхъ корней будетъ:

$$\eta=-2\zeta; \tag{9}$$

одна пара рѣшеній будетъ поэтому, если положить $\zeta=C$:

$$y_1=-2Ce^x, \qquad z_1=Ce^x; \tag{10}$$

другая, если положить $\zeta=C'$:

$$y_2=-2C'e^{-x}, \qquad z_2=C'e^{-x}. \tag{11}$$

Недостающія получимъ такъ:

$$\left.\begin{aligned} y_3&=\frac{\partial[-(\lambda^2+1)C''e^{\lambda x}]}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=+1}= \\ &=\Big[-(2\lambda+(\lambda^2+1)x)C''e^{\lambda x}\Big]_{\lambda=1}=-2C''(x+1)e^x; \\ z_3&=\frac{\partial C''e^{\lambda x}}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=+1}=\Big[C''xe^{\lambda x}\Big]_{\lambda=+1}=C''xe^x; \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

и

$$\left.\begin{aligned} y_4&=\frac{\partial[-(\lambda^2+1)C'''e^{\lambda x}]}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=-1}= \\ &=\Big[-(2\lambda+(\lambda^2+1)x)C'''e^{\lambda x}\Big]_{\lambda=-1}=-2C'''(x-1)e^{-x}; \\ z_4&=\frac{\partial C'''e^{\lambda x}}{\partial x}\bigg|_{\lambda=-1}=\Big[C'''xe^{\lambda x}\Big]_{\lambda=-1}=C'''xe^{-x}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Общее рѣшеніе поэтому будетъ:

$$\left.\begin{aligned} y&=-2(C+C''+C''x)e^x-2(C'-C'''+C'''x)e^{-x}; \\ z&=(C+C''x)e^x+(C'+C'''x)e^{-x}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Чтобы получить отсюда рѣшенія системы уравненій (1), станемъ разсматривать C, C', C'', C''' какъ функціи x. Дифференцируя ихъ, получимъ тогда:

$$\left.\begin{aligned} y'&=-2(C+2C''+C''x)e^x-2(-C'+2C'''-C'''x)e^{-x}; \\ z'&=(C+C''+C''x)e^x+(-C'+C'''-C'''x)e^{-x}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

полагая при этомъ:

$$(16)\quad \begin{cases} -2\left(\frac{dC}{dx}+(1+x)\frac{dC''}{dx}\right)e^{x}-2\left(\frac{dC'}{dx}+(-1+x)\frac{dC'''}{dx}\right)e^{-x}=0, \\ \left(\frac{dC}{dx}+x\frac{dC''}{dx}\right)e^{x}+\left(\frac{dC'}{dx}+x\frac{dC'''}{dx}\right)e^{-x}=0; \end{cases}$$

дифференцируя (15), получимъ:

$$(17)\quad \begin{cases} y''=-2(C+3C''+C''x)e^{x}-2(C'-3C'''+C'''x)e^{-x}- \\ \qquad -2\left(\frac{dC}{dx}+(x+2)\frac{dC''}{dx}\right)e^{x}-2\left(-\frac{dC'}{dx}+(2-x)\frac{dC'''}{dx}\right)e^{-x}; \\ z''=(C+2C''+C''x)e^{x}+(C'-2C'''+C'''x)e^{-x}+ \\ \qquad +\left(\frac{dC}{dx}+(x+1)\frac{dC''}{dx}\right)e^{x}+\left(-\frac{dC'}{dx}+(1-x)\frac{dC'''}{dx}\right)e^{-x}; \end{cases}$$

вставляя это въ (1), по сокращенiи получимъ:

$$(18)\quad \begin{cases} 2\left(\frac{dC}{dx}+(x+2)\frac{dC''}{dx}\right)e^{x}+2\left(-\frac{dC'}{dx}+(2-x)\frac{dC'''}{dx}\right)e^{-x}=3; \\ \left(\frac{dC}{dx}+(x+1)\frac{dC''}{dx}\right)e^{x}+\left(-\frac{dC'}{dx}+(1-x)\frac{dC'''}{dx}\right)e^{-x}=-5. \end{cases}$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ 4 уравненія (16) и (18) для опредѣленія производныхъ C, C', C'', C'''. Раздѣливъ первое изъ уравненій (16) на -2 и вычитая затѣмъ изъ него второе, получимъ:

$$(19)\qquad \frac{dC''}{dx}e^{x}-\frac{dC'''}{dx}e^{-x}=0;$$

раздѣливъ первое изъ (18) на 2 и вычитая изъ него второе, получимъ:

$$(20)\qquad \frac{dC''}{dx}e^{x}+\frac{dC'''}{dx}e^{-x}=\frac{13}{2};$$

изъ этихъ уравненій находимъ;

$$(21)\qquad \frac{dC''}{dx}=\frac{13}{4}e^{-x};\qquad \frac{dC'''}{dx}=\frac{13}{4}e^{x};$$

интегрируя, получаемъ:

$$(22)\qquad C''=-\frac{13}{4}e^{-x}+c'';\qquad C'''=\frac{13}{4}e^{x}+c'''.$$

Помножая (20) на x и вычитая затѣмъ изъ второго (16), мы получимъ:

$$(23)\qquad \frac{dC}{dx}e^{x}+\frac{dC'}{dx}e^{-x}=-\frac{13}{2}x;$$

вычитая же произведенiе (19) на x и (20) изъ второго (18), получимъ:

$$\frac{dC}{dx}e^{x}-\frac{dC'}{dx}e^{-x}=-\frac{23}{2};\tag{24}$$

изъ этихъ уравненій находимъ:

$$\frac{\partial C}{\partial x}=-\frac{1}{4}(13x+23)e^{-x};\qquad \frac{\partial C'}{\partial x}=-\frac{1}{4}(13x-23)e^{x};\tag{25}$$

интегрируя ихъ, получаемъ:

$$C=\frac{1}{4}(13x+36)e^{-x}+c;\qquad C'=-\frac{1}{4}(13x-36)e^{x}+c'.\tag{26}$$

Вносязъ (22) и (26) значенія C, C', C'', C''' въ (14), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} y&=-23-2(C+C''+C''x)e^{x}-2(C'-C'''+C'''x)e^{-x};\\ z&=18+(C+C''x)e^{x}+(C'+C'''x)e^{-x}.\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

Этотъ результатъ могъ бы быть полученъ однако скорѣе слѣдующимъ способомъ. Положимъ въ уравненіяхъ (1)

$$y=\alpha+\eta,\qquad z=\beta+\zeta;\tag{28}$$

подставляя и полагая

$$\left.\begin{aligned} 3\alpha+4\beta&=3;\\ \alpha+\beta&=-5,\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

мы приведемъ ихъ къ (5), которыхъ общее рѣшеніе выражается формулами (14), а изъ этихъ уравненій мы будемъ имѣть:

$$\alpha=-23,\qquad \beta=18.\tag{30}$$

Понятно, что практически этотъ послѣдній способъ правильнѣе; мы хотѣли только пояснить общую методу на несложномъ примѣрѣ, примѣнивъ къ нему общій способъ.

155. Д'Аламбертъ еще въ 18 столѣтіи предложилъ другую методу. Пояснимъ её сперва на простѣйшемъ случаѣ системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными функціями:

$$\left.\begin{aligned} y'+X_{11}y+X_{12}z&=V_1\\ z'+X_{21}y+X_{22}z&=V_2.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

Помножимъ второе изъ этихъ уравненій на неопредѣленный множитель λ и придадимъ къ первому; будемъ имѣть:

$$y'+\lambda z'+(X_{11}+\lambda X_{21})y+(X_{12}+\lambda X_{22})z=V_1+\lambda V_2;\tag{2}$$

положимъ теперь:

$$y+\lambda z=t;\tag{3}$$

отсюда, дифференцируя, будемъ имѣть:

$$y'+\lambda z'+z\lambda'=t',\tag{4}$$

откуда получимъ:

(5) $$y'+\lambda z'=t'-z\lambda';$$

внося это во (2), а также вмѣсто y его выраженіе изъ (3), будемъ имѣть:

(6) $$t'+(X_{11}+\lambda X_{21})t+[X_{12}+\lambda X_{22}-(X_{11}+\lambda X_{21})\lambda-\lambda']z=V_1+\lambda V_2;$$

полагая коэффиціентъ при z равнымъ нулю, получимъ такое уравненіе для опредѣленія λ:

(7) $$\lambda'+X_{21}\lambda^2+(X_{11}-X_{22})\lambda-X_{12}=0,$$

и уравненіе для опредѣленія t:

(8) $$t'+(X_{11}+\lambda X_{21})t=V_1+\lambda V_2.$$

Это послѣднее уравненіе линейное относительно t перваго порядка, а потому всегда проинтегрируется, когда изъ (7) будетъ найдено λ. Но уравненіе (7) не линейное, и потому вообще мы его интегрировать не умѣемъ; но общаго рѣшенія его знать и не нужно для нашей цѣли: достаточно знать только два частныя его рѣшенія; ибо если эти рѣшенія суть λ_1 и λ_2, то, давая λ въ уравненіи (8) по очереди эти значенія, мы найдемъ соотвѣтствующія значенія t,—пусть они t_1 и t_2; и тогда для опредѣленія y и z мы будемъ имѣть слѣдующія два уравненія:

(9) $$\begin{cases} y+\lambda_1 z=t_1; \\ y+\lambda_2 z=t_2, \end{cases}$$

откуда и найдемъ y и z.

Это очень легко сдѣлать, если коэффиціенты уравненія X_{11} и проч. суть постоянныя, когда, слѣд., даны такія уравненія:

(10) $$\begin{cases} y'+a_{11}y+a_{12}z=V_1; \\ z'+a_{21}y+a_{22}z=V_2. \end{cases}$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе (7) обращается въ такое:

(11) $$\lambda'+a_{21}\lambda^2+(a_{11}-a_{22})\lambda-a_{12}=0;$$

очевидно, ему можно удовлетворить, приравнивая λ корнямъ уравненія:

(12) $$a_{21}\lambda^2+(a_{11}-a_{22})\lambda-a_{12}=0,$$

которые, какъ постоянныя количества, будутъ имѣть своими производными нуль. Этотъ пріемъ видоизмѣняется въ случаѣ, когда это уравненіе имѣетъ равные корни, и когда слѣд. оно приводимо къ виду:

(13) $$a_{21}(\lambda-\lambda_1)^2=0;$$

въ этомъ случаѣ уравненіе (11) принимаетъ такой видъ:

(14) $$\lambda'+a_{21}(\lambda-\lambda_1)^2=0;$$

въ этомъ уравненіи постоянныя легко отдѣляются:

(15) $$\frac{\lambda'}{(\lambda-\lambda_1)^2}+a_{21}=0,$$

и интегрированіе его даетъ:

$$-\frac{1}{\lambda-\lambda_1}+a_{21}x=C; \tag{16}$$

отсюда получаемъ:

$$\lambda=\lambda_1+\frac{1}{a_{21}x-C}; \tag{17}$$

полагая $C=\infty$, и $C=0$, мы получаемъ слѣдующія два частныя рѣшенія уравненія для λ:

$$\lambda=\lambda_1; \qquad \lambda=\lambda_1+\frac{1}{a_{21}x}, \tag{18}$$

подстановка которыхъ вмѣсто λ въ уравненіе (3) даетъ такія два уравненія для опредѣленія y и z:

$$\left.\begin{aligned} &y+\lambda_1 z=t_1;\\ &y+\left(\lambda_1+\frac{1}{a_{21}x}\right)z=t_2. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

156. Приложимъ способъ д'Аламберта къ интегрированію такой системы совокупныхъ линейныхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &y'+\frac{z}{x^2}=1; \text{*)}\\ &z'+y=x. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Помножая второе на λ и складывая, будемъ имѣть:

$$y'+\lambda z'+\frac{z}{x^2}+\lambda y=1+\lambda x; \tag{2}$$

полагая теперь

$$y+\lambda z=t, \tag{3}$$

будемъ имѣть отсюда чрезъ дифференцированіе:

$$y'+\lambda z'=t'-\lambda' z; \tag{4}$$

внося это, а также и значеніе y изъ (3) въ (2), получимъ:

$$t'+\left[-\lambda'+\frac{1}{x^2}-\lambda^2\right]z+\lambda t=1+\lambda x; \tag{5}$$

полагая

$$\lambda'+\lambda^2-\frac{1}{x^2}=0, \tag{6}$$

приведемъ уравненіе (5) къ такому:

$$t'+\lambda t=1+\lambda x. \tag{7}$$

---

*) Изъ лекцій П. Л. Чебышева, читанныхъ въ 1864 г.

Уравненіе (6) есть уравненіе Риккати; приведемъ его къ однородному, положивъ для этого $\lambda = \frac{1}{v}$, слѣд. $\lambda' = -\frac{1}{v^2}v'$; получимъ, по умноженіи на $-v^2$:

$$v' + \frac{v^2}{x^2} - 1 = 0. \tag{8}$$

Чтобы проинтегрировать это уравненіе, должно положить:

$$v = xw; \quad \text{слѣд.} \quad v' = w + xw'; \tag{9}$$

тогда оно обратится въ такое:

$$xw' + w + w^2 - 1 = 0; \tag{10}$$

здѣсь перемѣнныя отдѣляются, и мы получаемъ:

$$\frac{dw}{1 - w - w^2} = \frac{dx}{x}. \tag{11}$$

Интегрируя, получимъ:

$$\log \left\{ \frac{w - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}{w - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \right\}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \log Cx. \tag{12}$$

откуда

$$\frac{w - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}{w - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = C_1 x^{\sqrt{5}} \tag{13}$$

(полагая $C^{\sqrt{5}} = C_1$). Но $w = \frac{v}{x}$, а $v = \frac{1}{\lambda}$; слѣд. $w = \frac{1}{\lambda x}$; вставляя это, получимъ послѣ легкихъ преобразованій:

$$\frac{2 + (1+\sqrt{5})x\lambda}{2 + (1-\sqrt{5})x\lambda} = C_1 x^{\sqrt{5}}, \tag{14}$$

откуда найдемъ:

$$\lambda = \frac{2C_1 x^{\sqrt{5}} - 2}{(1+\sqrt{5})x - C_1(1-\sqrt{5})x^{\sqrt{5}+1}}. \tag{15}$$

Полагая здѣсь $C_1 = 0$ и $C_1 = \infty$, получимъ слѣдующія два частныя значенія λ:

$$\lambda_1 = -\frac{2}{(1+\sqrt{5})x}; \qquad \lambda_2 = -\frac{2}{(1-\sqrt{5})x}. \tag{16}$$

Мы вывели эти частныя рѣшенія изъ полнаго интеграла; но ихъ можно было бы получить скорѣе слѣдующимъ частнымъ пріемомъ (замѣчаніе Чебышева). Попробуемъ удовлетворить уравненію (6), полагая

$$\lambda = \frac{k}{x}, \tag{17}$$

гдѣ k постоянное количество. Въ этомъ случаѣ $\lambda' = -\frac{k}{x^2}$, и потому, послѣ подстановки въ (6) и умноженія на x^2, это уравненіе обратится въ такое:

$$k^2 - k - 1 = 0, \tag{18}$$

откуда получимъ: $k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, слѣд. можемъ положить

$$k_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad k_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{19}$$

что доставитъ такія два значенія λ:

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2x}, \qquad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2x}; \tag{20}$$

къ этимъ выраженіямъ приведутся выраженія (16) послѣ перевода ирраціональности въ числитель. Вставляя эти значенія λ по очереди въ (7), легко получимъ такія уравненія:

$$t_1' + \frac{1-\sqrt{5}}{2x} t_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \tag{21}$$

$$t_2' + \frac{1+\sqrt{5}}{2x} t_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}. \tag{22}$$

Эти уравненія линейныя; интегрируя ихъ по общему способу, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= x + Cx^{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}; \\ t_2 &= x + C'x^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Внося эти значенія t и соотвѣтствующія имъ значенія λ изъ уравненій (20) въ уравненіе (3), будемъ имѣть такія уравненія для опредѣленія y и z:

$$\left.\begin{aligned} y + \frac{1-\sqrt{5}}{2x} z &= x + Cx^{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}; \\ y + \frac{1+\sqrt{5}}{2x} z &= x + C'x^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Рѣшая эти уравненія относительно y и z, найдемъ:

$$(25)\quad \begin{cases} y=x+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}Cx^{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}C'x^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}; \\ z=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}Cx^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}C'x^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}. \end{cases}$$

157. Пусть дана такая система уравненій:

$$(1)\quad \begin{cases} y'+3y+z=0; \\ z'-\ y+z=0. \end{cases}$$

Примѣняя методу д'Аламберта, приведемъ уравненіе къ такому:

$$(2)\quad t'+(3-\lambda)t=0,$$

въ которомъ λ будемъ опредѣляться изъ уравненія:

$$(3)\quad \lambda'-(\lambda-1)^2=0.$$

Это уравненіе приводится къ такому:

$$(4)\quad -\frac{d\lambda}{(\lambda-1)^2}+dx=0,$$

котораго интегралъ будетъ:

$$(5)\quad \frac{1}{\lambda-1}+x=C;$$

отсюда находимъ:

$$(6)\quad \lambda=1-\frac{1}{x-C};$$

полагая $C=\infty$ и $C=0$, находимъ:

$$(7)\quad \lambda_1=1;\qquad \lambda_2=1-\frac{1}{x}.$$

Внося эти значенія въ уравненіе (2), будемъ имѣть:

$$(8)\quad t_1'+2t_1=0;$$

$$(9)\quad t_2'+\left(2+\frac{1}{x}\right)t_2=0.$$

Изъ перваго находимъ:

$$\frac{t_1'}{t_1}+2=0;\ \text{интегрируя: } \log t_1+2x=\log C_1,$$

откуда

$$(10)\quad t_1=C_1e^{-2x};$$

изъ второго:

$$\frac{t_2'}{t_2}+2+\frac{1}{x}=0;\ \text{интегрируя: } \log t_2+2x+\log x=\log C_2;$$

откуда

$$(11)\quad t_2=C_2\frac{1}{x}e^{-2x}.$$

Вnося это въ равенство $y+\lambda z=t_1$, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} y+z&=C_1e^{-2x};\\ y+z-\frac{z}{x}&=C_2\frac{1}{x}e^{-2x}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Отсюда находимъ:

$$z=(C_1x-C_2)e^{-2x}; \qquad y=(C_1+C_2-C_1x)e^{-2x}. \qquad (13)$$

158. Способъ д'Аламберта примѣнимъ къ какой угодно системѣ совокупныхъ линейныхъ уравненій.

Пусть дана система изъ n уравненій:

$$\left.\begin{aligned} y'_k+\sum_{i=1}^{n}X_{ki}y_i&=V_k; \quad (k=1, 2,\dots n-1)\\ y'_n+\sum_{i=1}^{n}X_{ni}y_i&=V_n. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

гдѣ всѣ X_{ki} и V_k, X_{ni} и V_n суть функціи независимой перемѣнной x, либо постоянныя. Помножимъ уравненія (1) на λ_k и, просуммировавъ по k отъ 1 до $n-1$, придадимъ къ послѣднему; будемъ имѣть:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k y'_k+y'_n+\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k X_{ki}+X_{ni}\Big)y_i=\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k V_k+V_n. \qquad (2)$$

Положимъ теперь:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i y_i+y_n=t, \quad \text{откуда} \quad y_n=t-\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i y_i; \qquad (3)$$

дифференцируя первое, легко получимъ:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i y'_i+y'_n=t'-\sum_{i=1}^{n-1}\lambda'_i y_i. \qquad (4)$$

Внося изъ (3) и (4) во (2), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} t'-\sum_{i=1}^{n-1}\Big\{\lambda'_i+\sum_{k=1}^{n-1}(X_{kn}\lambda_i-X_{ki})\lambda_k+X_{nn}\lambda_i-X_{ni}\Big\}y_i+\\ +\Big(\sum_{k=1}^{n-1}X_{kn}\lambda_k+X_{nn}\Big)t=\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k V_k+V_n. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Приравнивая нулю коэффиціентъ каждаго y_i, мы будемъ имѣть такую систему уравненій для опредѣленія λ_k $(k=1,2\dots n-1)$:

$$\lambda'_i+\sum_{k=1}^{n-1}(X_{kn}\lambda_i-X_{ki})\lambda_k+X_{nn}\lambda_i-X_{ni}=0, \quad (i=1,2,\dots n-1) \qquad (6)$$

и приведемъ уравненіе (5) къ такому виду:

$$t'+\sum_{k=1}^{n-1}(X_{kn}\lambda_k+X_{nn})t=\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k V_k+V_n. \qquad (7)$$

Это уравненіе есть линейное и проинтегрируется по общему способу, когда изъ (6) будутъ найдены λ_k; но система совокупныхъ уравненій (6) не есть система линейныхъ уравненій; а потому полное ея рѣшеніе представляетъ большія трудности; но если намъ удастся найти n системъ ея рѣшеній:

(8) $$\lambda_1^{(m)},\ \lambda_2^{(m)}, \ldots \lambda_{n-1}^{(m)}, \qquad (m=1,2,3\ldots n),$$

то, найдя $t^{(m)}$, отвѣчающее каждой такой системѣ изъ (7), и внося эти значенія въ лѣвое изъ (3), мы будемъ имѣть такую систему n линейныхъ относительно $\overset{n}{\underset{1}{y_i}}$ уравненій, откуда ихъ и найдемъ:

(9) $$\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^{(m)}y_i+y_n=t^{(m)}. \qquad (m=1,2,3\ldots n)$$

Нахожденіе этихъ частныхъ рѣшеній сводится къ рѣшенію алгебраическаго уравненія, когда коэффиціенты X_{ki} предложенной системы уравненій суть постоянныя величины a_{ki}, когда, слѣд., дана такая система линейныхъ дифференціальныхъ уравненій:

(10) $$\left\{\begin{aligned} &y'_k+\sum_{i=1}^{n}a_{ki}y_i=V_k; \qquad (k=1,2\ldots n-1)\\ &y'_n+\sum_{i=1}^{n}a_{ni}y_i=V_n. \end{aligned}\right.$$

Въ этомъ случаѣ система уравненій (6) обратится въ такую:

(11) $$\lambda'_i+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{kn}\lambda_i-a_{ki})\lambda_k+a_{nn}\lambda_i-a_{ni}=0. \qquad (i=1,2,\ldots n-1)$$

Очевидно, этой системы мы удовлетворимъ, положивъ

(12) $$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{kn}\lambda_i-a_{ki})\lambda_k+a_{nn}\lambda_i-a_{ni}=0, \qquad (i=1,2,\ldots n-1)$$

ибо отсюда получатся для всѣхъ λ_i постоянныя значенія, и тогда $\lambda'_i=0$. Эту систему уравненій можно такъ переписать:

(13) $$\Big(\sum_{k=1}^{n-1}a_{kn}\lambda_k+a_{nn}\Big)\lambda_i-\Big(\sum_{k=1}^{n-1}a_{ki}\lambda_k+a_{ni}\Big)=0, \qquad (i=1,2\ldots n-1)$$

или еще такъ:

(14) $$\frac{\sum_{k=1}^{n-1}a_{ki}\lambda_k+a_{ni}}{\lambda_i}=\frac{\sum_{k=1}^{n-1}a_{kn}\lambda_k+a_{nn}}{1}=\rho; \qquad (i=1,2,\ldots(n-1))$$

а это можно такъ представить:

(15) $$\left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{i-1}a_{ki}\lambda_k+(a_{ii}-\rho)\lambda_i+\sum_{k=i+1}^{n-1}a_{ki}\lambda_k+a_{ni}=0, \qquad (i=1,2,\ldots n-1)\\ &\qquad\qquad \sum_{k=1}^{n-1}a_{kn}\lambda_k+a_{nn}-\rho=0. \end{aligned}\right.$$

Эту систему можно разсматривать какъ линейную, однородную относительно n величинъ:

$$\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_{n-1}, 1; \tag{16}$$

а потому результатъ исключенія этихъ величинъ изъ системы (15) будетъ такое уравненіе въ формѣ опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-\rho & a_{32} & \ldots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\rho & \ldots & a_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \ldots & a_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

Это уравненіе степени n относительно ρ, слѣд., имѣетъ ρ корней; вставляя ихъ въ (15), изъ первыхъ $n-1$ этихъ уравненій мы найдемъ n системъ совокупныхъ значеній $\overset{n-1}{\underset{1}{\lambda_k}}$. Это уравненіе тождественно съ уравненіемъ (7) § 151, ибо отличается отъ него только тѣмъ, что столбцы того стали здѣсь строками и наоборотъ, а это, какъ извѣстно, не измѣняетъ опредѣлителя.

Если уравненіе (17) имѣетъ кратные корни, такъ что различныхъ корней будетъ всего p, то мы будемъ имѣть p соотношеній вида (9), съ помощью которыхъ мы выразимъ p функцій $y_1, y_2 \cdots y_p$ въ остальныхъ $y_{p+1}, y_{p+2}, \cdots y_n$; вставивъ эти выраженія въ данную систему, мы выведемъ изъ нея новую въ $n-p$ уравненій съ такимъ же числомъ функцій: $y_{p+1}, y_{p+2} \cdots y_n$, того же самаго вида. Эту новую систему можемъ трактовать опять такъ же, и такъ далѣе.

159. Такъ какъ мы умѣемъ интегрировать полные дифференціалы съ какимъ угодно числомъ перемѣнныхъ, то мы проинтегрируемъ данную систему совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій всякій разъ, когда удается скомбинировать данныя уравненія такъ, чтобы эти комбинаціи были бы полными дифференціалами.

Положимъ дана такая система уравненій:

$$\frac{dx}{bz-cy}=\frac{dy}{cx-az}=\frac{dz}{ay-bx}; \tag{1}$$

по свойству пропорціи того же знаменателя отношенія будемъ имѣть и отношеніе линейной функціи числителей къ такой же линейной функціи знаменателей. Называя для краткости чрезъ dq знаменателя отношеній (1), будемъ имѣть того же знаменателя отношенія, если помножимъ числителя и знаменателя перваго отношенія на a, второго на b, третьяго на c, и сумму новыхъ числителей раздѣлимъ на сумму новыхъ знаменателей; но тогда получимъ:

(2) $$dq = \frac{adx + bdy + cdz}{0};$$

это возможно лишь, когда будетъ

(3) $$adx + bdy + cdz = 0;$$

лѣвая часть есть полный дифференціалъ; интегрируя, получимъ:

(4) $$ax + by + cz = C,$$

гдѣ C произвольная постоянная. Точно также, помножая числителя и знаменателя перваго отношенія на $2x$, второго на $2y$, третьяго на $2z$ и сумму новыхъ числителей раздѣляя на сумму новыхъ знаменателей, будемъ имѣть:

(5) $$dq = \frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{0},$$

что возможно лишь при

(6) $$2xdx + 2ydy + 2zdz = 0;$$

интегрируя это, получимъ

(7) $$x^2 + y^2 + z^2 = C_1.$$

Такимъ образомъ мы нашли два интеграла предложенной системы совокупныхъ уравненій: (4) и (7).

160. Въ общемъ, однако, разысканіе такихъ множителей, которые данную систему уравненій:

(1) $$y_k' = Y_k, \qquad (k=1,2\ldots n)$$

гдѣ для краткости положено: $f_k(x; \overset{n}{\underset{1}{y_i}}) = Y_k$, превращали бы въ систему полныхъ дифференціаловъ, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, вполнѣ эквивалентна задачѣ интегрированія системы (1). Чтобы это показать и притомъ въ болѣе изящной формѣ, мы по примѣру Якоби и Жордана, означимъ искомыя функціи тоже чрезъ x со значками: $\overset{n}{\underset{1}{x_k}}$, а независимую перемѣнную означимъ чрезъ x_0; Y_k перемѣнимъ тоже на X_k. Тогда система уравненій (1) такъ перепишется:

(2) $$\frac{dx_k}{dx_0} = X_k, \qquad (k=1,2\ldots n)$$

или еще такъ:

(2′) $$dx_k - X_k dx_0 = 0. \qquad (k=1,2\ldots n)$$

Помножимъ это уравненіе на μ_{ik} и просуммируемъ по k отъ 1 до n; пусть μ_{ik} таковы, что будетъ:

(3) $$\sum_{k=1}^{n} \mu_{ik}(dx_k - X_k dx_0) = d\varphi_i = 0; \qquad (i=1,2\ldots n)$$

интегрируя, получимъ:

$$\varphi_i = C_i. \qquad (i=1,2\ldots n) \qquad (4)$$

Сравнивая раскрытое выраженіе $d\varphi_i$ съ лѣвой частью (3), мы приходимъ къ такимъ уравненіямъ:

$$-\sum_{k=1}^{n}\mu_{ik}X_k = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_0}; \qquad \mu_{ik} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}. \qquad (i=1,2\ldots n) \quad (k=1,2\ldots n) \qquad (5)$$

Если опредѣлитель

$$\mu = \left|\, \mu_{ik} \,\right| = \left|\, \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} \,\right| \qquad (6)$$
$$(i,k=1,2\ldots n)$$

не равенъ нулю, то система интеграловъ (4) будетъ независимая, и тогда изъ $d\varphi_i = 0$ будутъ слѣдовать уравненія (2′), слѣд. (4) будутъ интегралами данной системы (2). Но изъ вторыхъ уравненій (5) слѣдуетъ, что всѣ μ_{ki} будутъ извѣстны, когда извѣстны φ_i; наоборотъ, если будутъ извѣстны μ_{ki}, то найдутся φ_i, ибо (5) представляютъ частныя производныя отъ φ_i по всѣмъ перемѣннымъ $x_0, x_1, \ldots x_n$.

161. Исключая μ_{ik} изъ уравненій (5), получаемъ такія тождества:

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_0} + \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} = 0. \qquad (i=1,2\ldots n) \qquad (1)$$

Съ помощью этихъ тождествъ (1) легко доказывается, что $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_n}$ будутъ интегрирующіе множители, ибо, вставляя ихъ вмѣсто μ_{ik} въ (3) пред. § и замѣняя

$$-\sum_{n=1}^{n} X_k \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_0},$$

коэффиціентъ при dx_0, чрезъ $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_0}$, равную той суммѣ на основаніи (1), мы будемъ имѣть:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_0} dx_0 = d\varphi = 0. \qquad (2)$$

Изъ (1) слѣдуетъ, что всѣ φ_i суть рѣшенія такого линейнаго уравненія въ частныхъ производныхъ перваго порядка

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} + \sum_{k=1}^{n} X_n \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0; \qquad (3)$$

такъ что рѣшеніе этого уравненія и системы (2) пред. § суть задачи эквивалентныя.

Мы сейчасъ видѣли, что интегралы системы (2) пред. § удовлетворяютъ этому уравненію; если теперь $f=\varphi$ также удовлетворяетъ этому уравненію, то будемъ имѣть тождественно

(4) $$\frac{\partial \underset{i}{\varphi}}{\partial x_0}+\sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial \underset{i}{\varphi}}{\partial x_k}=0;$$

замѣняя здѣсь $1, X_1, X_2 \ldots X_n$ величинами $dx_0, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$, которымъ онѣ пропорціональны по (2) пред. §, мы будемъ имѣть:

(5) $$\frac{\partial \underset{i}{\varphi}}{\partial x_0} dx_0+\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \underset{i}{\varphi}}{\partial x_k} dx_k=d\underset{i}{\varphi}=0,$$

слѣд., $\underset{i}{\varphi}=C$ будетъ тоже интеграломъ нашей системы (2) пред. §. Отсюда легко вывести, что уравненіе въ частныхъ производныхъ имѣетъ только n независимыхъ интеграловъ. Въ самомъ дѣлѣ, если $\overset{n}{\underset{1}{\varphi_i}}$ суть таковые, то будетъ

(6) $$\underset{i}{\varphi}=\Phi(\overset{n}{\underset{1}{\varphi_i}}),$$

ибо исключая $1, \overset{n}{\underset{1}{X_k}}$ изъ системы уравненій (1) и (3), мы получимъ въ результатѣ равнымъ нулю якобіанъ функцій $\underset{i}{\varphi}, \overset{n}{\underset{1}{\varphi_i}}$, откуда, какъ мы знаемъ [см. § 14], и слѣдуетъ (6). Не трудно видѣть, что, наоборотъ, всякая произвольная функція интеграловъ $\underset{i}{\varphi}_i$, какъ $\Phi(\overset{n}{\underset{1}{\varphi_i}})$, будетъ интеграломъ уравненія (3), ибо, полагая тамъ $f=\Phi(\underset{i}{\varphi}_i)$, будемъ имѣть:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \underset{i}{\varphi}_i}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_0}+\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} X_k\right)=0,$$

на основаніи тождествъ (1).

162. Опредѣлитель (6) § 160 Якоби назвалъ *множителемъ системы*, ибо онъ позволяетъ находить послѣдній ея интегралъ, когда извѣстны $n-1$ ея интеграловъ, и вообще представляетъ аналогію Эйлерова интегрирующаго множителя.

Если вмѣсто $\overset{n}{\underset{1}{\varphi_i}}$ возьмемъ n другихъ интеграловъ $\psi_k(\overset{n}{\underset{1}{\varphi_i}})$, такихъ, чтобы опредѣлитель

(1) $$J=\left|\frac{\partial \psi_k}{\partial \varphi_i}\right| \qquad (k,i=1,2 \ldots n)$$

не былъ $=0$ тождественно, то тогда будетъ

(2) $$\left|\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}\right|=J\left|\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right|, \qquad (k,i=1,2 \ldots n)$$

какъ то слѣдуетъ изъ формулъ:

(3) $$\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_k}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$$

и правилъ умноженія опредѣлителей. J есть функція отъ φ_i, зависящая отъ произвольно выбираемыхъ функцій ψ_k, а потому сама могущая быть совершенно произвольною. Въ самомъ дѣлѣ, означая чрезъ F какую угодно функцію отъ $\overset{n}{\underset{1}{\varphi_i}}$, стоитъ только положить

$$\psi_1 = \int_0^{\varphi_1} F d\varphi_1, \quad \psi_2 = \varphi_2, \ldots \psi_n = \varphi_n, \tag{4}$$

чтобы имѣть $J = F$, (ибо всѣ элементы опредѣлителя ниже главной діагонали будутъ нули, а элементы, расположенные по главной діагонали, суть

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \varphi_i} = F, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi_2} = 1, \ldots \frac{\partial \psi_n}{\partial \varphi_n} = 1).$$

Множитель системы дифференціальныхъ уравненій удовлетворяетъ нѣкоторому дифференціальному уравненію въ частныхъ производныхъ перваго порядка. Чтобы его вывести, замѣнимъ h-й столбецъ элементами $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_0}$, и означимъ чрезъ D_h получающійся такимъ образомъ изъ μ [(6) § 160] опредѣлитель:

$$D_h = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \overset{(h)}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0}} \cdots \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_0} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}; \tag{5}$$

подставляя сюда вмѣсто $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_0}$ его выраженіе изъ уравненія (1) пред. §, мы будемъ имѣть:

$$D_h = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \overset{(h)}{-\sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}} \cdots \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \cdots -\sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = -\sum_{k=1}^{n} X_k \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \overset{(h)}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}} \cdots \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_k} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = -X_h \mu, \tag{6}$$

ибо опредѣлители всѣхъ другихъ членовъ, имѣя по два столбца одинаковые, будутъ $= 0$, а тотъ въ которомъ $k = h$, обратится въ μ. Если теперь составимъ такое выраженіе:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial (\mu X_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial \mu}{\partial x_0} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial D_k}{\partial x_k}, \tag{7}$$

— на основаніи (6), то оно будетъ равно нулю. Въ самомъ дѣлѣ

$$(8)\qquad \frac{\partial\mu}{\partial x_0}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_0\partial x_k}\cdots\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x_0\partial x_k}\cdots\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}\end{vmatrix};$$

$$(9)\qquad \frac{\partial D_k}{\partial x_k}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\cdots\overset{(k)}{\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_k\partial x_0}}\cdots\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_k\partial x_0}\cdots\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}+\sum_{h=1}^{n}{}'\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\cdots\overset{(h)}{\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_k\partial x_h}}\cdots\overset{(k)}{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_0}}\cdots\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x_k\partial x_h}\cdots\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_0}\cdots\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}\end{vmatrix};$$

гдѣ $\sum\limits_{h=1}^{n}{}'$ означаетъ сумму, распространенную на всѣ значенія h, кромѣ $h=k$. Одинъ членъ, именно отдѣльно выписанный, выраженія $\frac{\partial D_k}{\partial x_n}$ сократится въ (7) съ k-ымъ членомъ выраженія (8) для $\frac{\partial\mu}{\partial x_0}$; каждый членъ суммы $\sum'$ въ (9) сократится въ (7) съ другимъ членомъ, происходящимъ отъ $\frac{\partial D_h}{\partial x_h}$, въ которомъ столбцы ($h$) и ($k$) будутъ такіе, какъ въ (9) сотвѣтственно (k) и (h). Итакъ, дѣйствительно, множитель μ системы (2) § 160 удовлетворяетъ дифференціальному уравненію:

$$(10)\qquad \frac{\partial\mu}{\partial x_0}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(\mu X_k)}{\partial x_k}=0.$$

Зная два рѣшенія μ_1 и μ_2 этого уравненія, получимъ, приравнивая частное ихъ $\frac{\mu_2}{\mu_1}=\nu$ постоянной, интегралъ

$$(11)\qquad \frac{\mu_2}{\mu_1}=\nu=C$$

системы уравненій (2) § 160. Дѣйствительно, отсюда $\mu_2=\mu_1\nu$; подставляя это въ предыдущее уравненіе, будемъ имѣть:

$$(12)\qquad \frac{\partial\mu_2}{\partial x_0}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(\mu_2 X_k)}{\partial x_k}=0=\nu\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial x_0}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(\mu_1 X_k)}{\partial x_k}\right)+\mu_1\left(\frac{\partial\nu}{\partial x_0}+\sum_{k=1}^{n}X_k\frac{\partial\nu}{\partial x_k}\right);$$

но какъ μ_1 рѣшеніе уравненіе (10), то

$$(13)\qquad \frac{\partial\mu_1}{\partial x_0}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(\mu_1 X_k)}{\partial x_k}=0$$

и предыдущее приводится къ такому:

$$(14)\qquad \frac{\partial\nu}{\partial x_0}+\sum_{k=1}^{n}X_k\frac{\partial\nu}{\partial x_k}=0,$$

отбрасывая отличный отъ нуля множитель μ_1; а это уравненіе, будучи результатомъ вставки ν вмѣсто f въ (3) пред. §, показываетъ, что $\nu=C$ есть интегралъ системы (2) § 160.

Предположимъ, что намъ извѣстны только m $(<n)$ интеграловъ системы (2) § 160:

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m; \tag{15}$$

независимыхъ между собою; пусть

$$y_1, y_2 \dots y_{n-m} \tag{16}$$

будутъ другія функціи, независимыя между собою, а также и съ (15), такъ что совокупность (15) и (16) образуетъ систему n независимыхъ функцій. Вводя ихъ вмѣсто $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$, какъ новыя неизвѣстныя функціи отъ $y_0=x_0$ (для симметріи мѣняемъ обозначеніе независимой перемѣнной) въ уравненія (2′) § 160, мы приведемъ ихъ къ такому виду:

$$F_k=\sum_{i=0}^{n-m} M_{k,i}dy_i+\sum_{j=1}^{m} N_{k,j}d\varphi_j=0. \quad (k=1,2\dots n) \tag{17}$$

Рѣшая ихъ относительно $d\varphi_h$ и dy_i, мы получимъ такую систему уравненій:

$$G'_h=\sum_{k=1}^{n} a_{hk}F_k=d\varphi_h=0; \qquad (h=1,2,\dots m) \tag{18′}$$

$$G''_i=\sum a_{ik}F_k=dy_i-Y_idy_0=0. \quad (i=1,\dots n-m). \tag{18″}$$

Первыя уравненія примутъ такую форму, ибо $\varphi_h=C_h$ есть интегралъ первоначальной системы. Разсматривая φ_h какъ постоянныя въ (18″), мы сведемъ нашу систему къ системѣ въ $n-m$ уравненій съ столькими неизвѣстными функціями: $y_1, y_2 \cdots y_{n-m}$. Разумѣя подъ μ множитель первой системы, т. е. (2′) § 160, а чрезъ μ' послѣдней, мы будемъ имѣть на основаніи предложенія, выражаемаго равенствомъ (2) настоящаго §:

$$\mu=\mu'.A, \tag{19}$$

гдѣ A есть опредѣлитель изъ элементовъ a_{hk}:

$$A=\underset{(h,k=1,2\dots n)}{\left|a_{hk}\right|}. \tag{20}$$

Множитель μ' удовлетворяетъ частному дифференціальному уравненію, составленному по образцу (10) въ примѣненіи къ системѣ (18′) и (18″):

$$\frac{\partial\mu'}{\partial y_0}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial(\mu' Y_k)}{\partial y_k}=0, \tag{21}$$

ибо члены, отвѣчающіе перемѣннымъ φ_k, суть нули, какъ то видно изъ уравненій (18′). Но это есть уравненіе для системы (18″), если φ считать за постоянныя, составленное по образцу (10) для этой системы. Слѣд., получаемая изъ (19) функція

$$\mu'=\frac{\mu}{A} \tag{22}$$

есть множитель системы (18″), къ которой приводится данная, когда извѣстно m рѣшеній. Отсюда слѣдуетъ, что, когда $m=n-1$, т. е. извѣстны $n-1$ интеграловъ данной системы и множитель μ системы, то нахожденіе послѣдняго интеграла сводится къ квадратурѣ, ибо остается проинтегрировать одно уравненіе перваго порядка, съ одной неизвѣстной функціей, котораго интегрирующій множитель извѣстенъ. Въ этомъ заключается *принципъ послѣдняго множителя*, найденный Якоби *).

163. Въ § 161 была указана тѣсная связь вопроса объ интегрированіи системы совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка съ вопросомъ объ интегрированіи линейнаго уравненія съ частными производными перваго порядка одной независимой функціи. Есть одинъ частный видъ системы совокупныхъ уравненій, встрѣчающійся въ Аналитической Механикѣ, который стоитъ въ тѣсной связи съ вопросомъ объ интегрированіи нелинейнаго уравненія съ частными производными перваго порядка, какъ то впервые замѣтилъ Гамильтонъ (Hamilton) и обстоятельно разъяснилъ Якоби въ рядѣ мемуаровъ (см. его Werke), а также въ Vorlesungen über Dynamik **). Эти уравненія, извѣстныя подъ именемъ *каноническихъ* (Якоби), имѣютъ такой видъ:

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i};\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}; \tag{1}$$

гдѣ H функція отъ q_i, p_i $(i=1,2\ldots n)$. Въ виду тѣсной ихъ связи съ нелинейными уравненіями съ частными производными, мы находимъ болѣе удобнымъ разсматривать ихъ вмѣстѣ съ послѣдними.

---

*) *C. G. J. Jacobi.* Gesammelte Werke, Bd. IV. Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi (S. 317—509). Также см. его же: Vorlesungen über Dynamik. Berlin, 1866. (S. 71—141.). Болѣе краткое изложеніе въ „Lehrbuch“ Koenigsberger'a. (S. 45—61) и Jordan, Cours d'Analyse. T. III. стр. 45—51, изложенія котораго мы придерживались въ §§ 160—162.

**) На русскомъ языкѣ можно объ этомъ найти въ курсахъ: *И. Соколова.* Динамика, Харьковъ, 1860 г. Часть II; *Хандрикова, М.* Курсъ Анализа. (Послѣдняя глава), и въ спеціальной монографіи *В. П. Ермакова.* Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій Механики. Кіевъ, 1877, содержащей полное изложеніе предмета, дополненнаго собственными изслѣдованіями автора.

Примѣры для упражненій.

1) $\left.\begin{aligned} & y''+y'+z''-z=e^x \\ & y'+2y+z'+z=e^{-x} \end{aligned}\right\}$ Проинтегрировать чрезъ исключеніе одной функціи. Рѣшеніе:

$$y=\frac{1}{2}e^x+e^{-x};\quad z=-\frac{3}{4}e^x+C_1e^{-x}.$$

2) $\left.\begin{aligned} & y''+y'+z''-z=e^x \\ & y'+2y-z'+z=e^{-x} \end{aligned}\right\}$ Рѣшить такъ же. Найдемъ: $y=\frac{1}{8}e^x+(1-2C_1+3C_2-2C_2x)e^{-x}$;

$$z=\left(\frac{3}{8}x+C_3\right)e^x+(C_1+C_2x)e^{-x}.$$

3) $\left.\begin{aligned} & y'+z=e^x \\ & z'+\frac{2}{x^2}y=\log x \end{aligned}\right\}$ Рѣшеніе:

$$y=\left[\frac{2}{3}e^x(x-1)+\frac{x^3}{9}\left(\log x-\frac{1}{3}\right)+c_1\right]\frac{1}{x}+\left[-\frac{1}{3}\frac{e^x}{x}+\frac{1}{3}\int\frac{e^x dx}{x}-\frac{1}{6}(\log x)^2+c_2\right]x^2;$$

$$z=\left[\frac{2}{3}e^x(x-1)+\frac{x^3}{9}\left(\log x-\frac{1}{3}\right)+c_1\right]\frac{1}{x^2}-\left[-\frac{1}{3}\frac{e^x}{x}+\frac{1}{3}\int\frac{e^x dx}{x}-\frac{1}{6}(\log x)^2+c_2\right]2x.$$

4) $\left.\begin{aligned} & y'+z=0; \\ & z'+v=0; \\ & v'+y=0. \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} & y=Ce^{-x}+2\rho e^{\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\alpha\right); \\ & z=Ce^{-x}+2\rho e^{\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\alpha-\frac{2}{3}\pi\right); \\ & v=Ce^{-x}-2\rho e^{\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\alpha-\frac{1}{3}\pi\right). \end{aligned}$

(Эти 4 примѣра взяты изъ лекцій П. Л. Чебышева, читанныхъ въ 1864 г.).

5) $\left.\begin{aligned} & y'=y+z+x; \\ & z'=y-2z+2x. \end{aligned}\right\}$ $y=C_1e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}x}+C_2e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}x}-\frac{4}{3}x-\frac{7}{9}.$

$$z=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}C_1e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}x}-\frac{3+\sqrt{13}}{2}C_2e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}x}-\frac{7}{3}x-\frac{7}{9}.$$

6) $\left.\begin{aligned} & x'=3y+4z-2x-3t; \\ & y'=7y+6z-6x-7t+1; \\ & z'=-y+z+x+t; \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} & x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{3t}; \\ & y=C_1e^t+3C_3e^{3t}+t; \\ & z=C_2e^{2t}-C_3e^{3t}. \end{aligned}$

7) $\left.\begin{aligned} & x'=y+z; \\ & y'=z+x; \\ & z'=x+y; \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} & x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}; \\ & y=-(C_1+C_3)e^{-t}+C_2e^{2t}; \\ & z=C_3e^{-t}+C_2e^{2t}. \end{aligned}$

8) $x'+4x-2y=t;$ $\quad y'+x+y=0.$ $\qquad x=\frac{1}{6}t+\frac{1}{36}+2C_1e^{-3t}-C_2e^{-2t};$ $\quad y=-\frac{1}{6}t+\frac{5}{36}+C_1e^{-3t}-C_2e^{-2t}.$

9) $x'-2x-4y=\cos t;$ $\quad y'+x+2y=\sin t.$ $\qquad x=C_1(1+2t)-2C_2-2\cos t-3\sin t.$ $\quad y=-C_1t+C_2+2\sin t.$ (Поссе.)

10) $x'=y+z;$ $\quad y'=x+z;$ $\quad z'=y-x.$ $\qquad x=C_1+C_2e^t;$ $\quad y=C_1+C_2e^t+C_3e^{-t};$ $\quad z=-C_1-C_2e^{-t}.$ (Хандриковъ.)

11) $y'+2y+3z=x^2+1;$ $\quad z'+y+4z=2x-1.$ $\qquad y=\frac{100x^2-340x+543}{125}+c_1e^{-5x}+3c_2e^{-x};$ $\quad z=-\frac{25x-160x+207}{125}+c_1e^{-5x}-c_2e^{-x}.$

12) $y'+2y-2z=\sin x;$ $\quad z'+y+4z=x.$ Рѣшеніе:

$$y=[(C_1-C_2)\cos x+(C_1+C_2)\sin x]e^{-3x}+\frac{14\sin x-5\cos x}{39}+\frac{5x-3}{25};$$

$$z=[C_2\cos x-C_1\sin x]e^{-3x}+\frac{2\cos x-3\sin x}{39}+\frac{10x-1}{50}.$$ (Рощинъ.)

13) $x'+4x+3y=t;$ $\quad y'+2x+5y=e^t.$ $\qquad x=-\frac{31}{196}+\frac{5}{14}t-\frac{1}{8}e^t+C_1e^{-7t}+3C_2e^{-2t}.$ $\quad y=\frac{9}{98}-\frac{1}{7}t+\frac{5}{24}e^t+C_1e^{-7t}-2C_2e^{-2t}.$

14) $4y'+9z'+44y+49z=x$ $\quad 3y'+7z'+34y+38z=e^x$ Рѣшеніе:

$$y=\frac{19}{3}x-\frac{56}{9}-\frac{29}{7}e^x+\frac{C}{5}e^{-6x}+\frac{C'}{5}e^{-x};$$

$$z=-\frac{17}{3}x+\frac{55}{9}+\frac{24}{7}e^x+\frac{4C}{5}e^{-6x}-\frac{C'}{5}e^{-x}.$$ (Sturm.)

15) $x'=-\omega y;$ $\quad y'=\omega x.$ $\qquad x=A\cos\omega t+B\sin\omega t;$ $\quad y=A\sin\omega t-B\cos\omega t.$

16) $x'+7x-y=0;$ $\quad y'+2x+5y=0.$ $\qquad x=e^{-6t}(A\cos t+B\sin t);$ $\quad y=e^{-6t}\{(B+A)\cos t+(B-A)\sin t\}.$

17) $x'+5x+y=e^t;$ $\quad y'+3y-x=e^{2t}.$ $\qquad x=\frac{4}{25}e^t-\frac{1}{36}e^{2t}+(C+C_1t)e^{-4t};$ $\quad y=\frac{1}{25}e^t+\frac{7}{36}e^{2t}-(C+C_1+C_1t)e^{-4t}.$

18) $\left.\begin{aligned}4x'+9y'+2x+31y&=e^t;\\ 3x'+7y'+x+24y&=3.\end{aligned}\right|\begin{aligned}x&=e^{-4t}(A\cos t+B\sin t)+\frac{31}{26}e^t-\frac{93}{17};\\ y&=e^{-4t}(A-B)\sin t-(A+B)\cos t-\frac{2}{13}e^t+\frac{6}{17}.\end{aligned}$

19) $\left.\begin{aligned}x''+m^2y&=0;\\ y''-m^2x&=0.\end{aligned}\right|\begin{aligned}x&=e^{\alpha t}(C_1\cos\alpha t+C_2\sin\alpha t)+e^{-\alpha t}(C_3\cos\alpha t+C_4\sin\alpha t);\\ y&=e^{\alpha t}\left(\frac{1}{2}C_1\sin\alpha t-\frac{1}{2}C_2\cos\alpha t\right)+e^{-\alpha t}\left(\frac{1}{2}C_4\cos\alpha t-\frac{1}{2}C_3\sin\alpha t\right),\end{aligned}$

гдѣ $\alpha=\frac{m}{\sqrt{2}}$.

20) $\left.\begin{aligned}t\,dx&=(t-2x)dt;\\ t\,dy&=(tx+ty+2x-t)dt;\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}x&=\frac{1}{3}t+Ct^{-2};\\ x+y&=C_1e^t.\end{aligned}$

21) $\left.\begin{aligned}tx''+2x'+tx&=0;\\ y'+\frac{2}{t}y&=x'\end{aligned}\right\}$ Рѣшеніе: $x=\frac{C_1\cos t+C_2\sin t}{t}$;

$$y=\frac{C_3+2C_2\cos t-2C_1\sin t}{t^2}+\frac{C_1\cos t+C_2\sin t}{t}.$$ (Forsyth-Maser.)

22) $\left.\begin{aligned}x'+5x-2y&=e^t;\\ y'-x+6y&=e^{2t}.\end{aligned}\right\}$ Рѣшеніе:

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{2}{3}C_1e^{-4t}+\frac{1}{3}C_2e^{-7t}+\frac{7}{40}e^t+\frac{1}{27}e^{2t};\\ y&=\frac{1}{3}C_1e^{-4t}-\frac{1}{3}C_2e^{-7t}+\frac{1}{40}e^t+\frac{7}{54}e^{2t}.\end{aligned}\right\}$$

23) $\left.\begin{aligned}x'-8x+y&=e^t;\\ y'-25x+2y&=3t.\end{aligned}\right\}$ Рѣшеніе:

$$x=(C_1-C_2t)e^{2t}+\frac{3}{4}e^t-\frac{1}{3}t-\frac{2}{9};$$

$$y=[5C_1+C_2(1-5t)]e^{3t}+\frac{25}{4}e^t-\frac{8}{3}t-\frac{13}{9}.$$

24) $\left.\begin{aligned}x''-\frac{a+b-c}{b}my'-4m^2\frac{a-c}{b}x&=0;\\ y''+\frac{a+b-c}{b}mx'-m^2\frac{b-c}{a}y&=0.\end{aligned}\right\}$

25) $\left.\begin{aligned}ax'+(c-b)yz&=0;\\ by'+(a-c)zx&=0;\\ cz'+(b-a)xy&=0.\end{aligned}\right\}$ (Houël.)

ГЛАВА X.

Частныя дифференціальныя уравненія. Ихъ происхожденіе.

164. Переходя къ частнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ, мы должны прежде всего разсмотрѣть, какъ они получаются.

Мы видѣли въ главѣ II, что обыкновенныя дифференціальныя уравненія получаются изъ первообразнаго чрезъ исключеніе произвольныхъ постоянныхъ изъ этого уравненія и его производныхъ, взятыхъ въ числѣ, равномъ числу произвольныхъ постоянныхъ, которое потому всегда равно порядку дифференціальнаго уравненія, и на оборотъ. Въ частности, если въ первообразное входитъ одна произвольная постоянная, то нужно къ первообразному присоединить его производное уравненіе перваго порядка, чрезъ что явится возможность исключить эту произвольную постоянную, и получится при этомъ дифференціальное уравненіе 1-го порядка. Но, если намъ дано уравненіе, опредѣляющее z какъ функцію n независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2 \dots x_n$, то оно будетъ имѣть n частныхъ производныхъ уравненій, чрезъ что представляется возможнымъ исключить n произвольныхъ постоянныхъ, и, сдѣлавъ это, мы будемъ имѣть частное дифференціальное уравненіе 1-го порядка. Если дано, именно, уравненіе съ n произвольными постоянными:

$$F(x_1, x_2, \dots x_n, z;\ C_1, C_2 \dots C_n) = 0, \tag{1}$$

то, дифференцируя по каждой изъ независимыхъ перемѣнныхъ, мы будемъ имѣть еще n такихъ уравненій:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial z} p_i = 0; \qquad (i=1, 2 \dots n) \tag{2}$$

исключая изъ $(n+1)$ уравненій (1) и (2) n величинъ $C_1, C_2 \dots C_n$, мы получимъ уравненіе съ частными производными перваго порядка:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n;\ z;\ p_1, p_2 \dots p_n) = 0. \tag{3}$$

Если бы произвольныхъ постоянныхъ было бы въ (1) $m < n$, то, исключая ихъ изъ той же системы въ $n+1$ уравненій (1) и (2), мы получили бы $n+1-m$ такихъ уравненій, какъ (3); въ результатѣ явилась бы такимъ образомъ система совокупныхъ уравненій съ частными производными 1-го порядка отъ одной функціи.

Если $m > n$, то для исключенія произвольныхъ постоянныхъ нужно прибѣгнуть къ частнымъ производнымъ высшаго порядка. Здѣсь однако по сравненію съ обыкновенными дифференціальными уравненіями представляется та огромная разница, что число такихъ уравненій быстрѣе растетъ, чѣмъ ихъ порядокъ. Изъ дифференціальнаго исчисленія извѣстно что производныхъ порядка p будетъ для функціи n независимыхъ перемѣнныхъ такое число:

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1.2.3\ldots.p}; \tag{4}$$

слѣд., всѣхъ производныхъ уравненій до порядка p включительно будетъ числомъ

$$\mu=\sum_{k=1}^{p}\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{1.2.3\ldots.k}; \tag{5}$$

если число произвольныхъ постоянныхъ $m=\mu$, то, присоединяя производныя уравненія къ первообразному, мы будемъ имѣть всего $\mu+1$ уравненій, изъ которыхъ, исключивъ $m=\mu$ произвольныхъ постоянныхъ, получимъ одно уравненіе съ частными производными до порядка p. Если же m не $=\mu$ ни для какого p, то нужно взять для исключенія произвольныхъ постоянныхъ такой порядокъ p, чтобы было $\mu>m$, и тогда чрезъ исключеніе m произвольныхъ постоянныхъ получится система совокупныхъ уравненій съ частными производными порядка p числомъ $\mu+1-m$.

165. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что уравненіе съ частными производными перваго порядка можетъ быть разсматриваемо, какъ получающееся изъ уравненія (1) пред. § съ n произвольными постоянными чрезъ исключеніе этихъ послѣднихъ, а потому самое полное рѣшеніе его должно содержать n произвольныхъ постоянныхъ, независящихъ одна отъ другой. Такое рѣшеніе даннаго частнаго дифференціальнаго уравненія 1-го порядка называется *полнымъ интеграломъ* его.

Что же касается до частныхъ дифференціальныхъ уравненій высшихъ порядковъ, то лишь въ рѣдкихъ случаяхъ можно ихъ разсматривать, какъ происшедшія чрезъ исключеніе нѣкотораго числа произвольныхъ постоянныхъ. Кромѣ того, мы видимъ, что иногда система уравненій можетъ быть разсматриваема, какъ происшедшая чрезъ исключеніе произвольныхъ постоянныхъ изъ одного уравненія. Теорія частныхъ дифференціальныхъ уравненій высшаго порядка представляетъ большія трудности и вообще мало разработана, если число независимыхъ перемѣнныхъ болѣе двухъ; что же касается до уравненій съ частными производными перваго порядка, то теорія ихъ разработана очень полно, и въ этой разработкѣ принимали участіе и русскіе ученые, какъ: В. Г. Имшенецкій, А. Н. Коркинъ, В. П. Ермаковъ, Д. А. Граве, Н. Н. Салтыковъ.

166. Но уравненія съ частными производными допускаютъ однако и другое происхожденіе: ихъ можно получить чрезъ исключеніе произвольныхъ функцій изъ даннаго уравненія. Уравненія, опредѣляющія функцію одной независимой перемѣнной, ничего подобнаго не представляютъ. Въ самомъ дѣлѣ, если дано уравненіе:

(1) $$f(x, y, \varphi(x)) = 0,$$

гдѣ $\varphi(x)$ произвольная функція отъ x, тогда какъ f есть данная функція своихъ аргументовъ, то сколько бы разъ мы ни дифференцировали это уравненіе, мы никогда не получимъ возможности исключить функцію $\varphi(x)$ и ея производныя, ибо каждое новое дифференцированіе, прибавляя одно уравненіе, вводитъ и одну новую величину, подлежащую исключенію, именно новую производную отъ $\varphi(x)$. Это понятно и à priori: въ самомъ дѣлѣ уравненіе, какъ (1) этого §, способно представить всякую функцію, какъ то мы видѣли въ началѣ главы VI, тогда какъ дифференціальное уравненіе характеризуетъ опредѣленный классъ функцій, выражая ихъ общее свойство. Совсѣмъ другое дѣло, если мы имѣемъ уравненіе вида

(2) $$F(x_1, x_2, \dots x_n; z; u_1, u_2 \dots u_{n-1}, \varphi(u_1, u_2 \dots u_{n-1})) = 0,$$

гдѣ $u_1, u_2 \dots u_{n-1}$ данныя функціи $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z$, а φ произвольная функція отъ $u_1, u_2 \dots u_{n-1}$: оно представляетъ и при произвольномъ φ лишь извѣстный классъ функцій n перемѣнныхъ. Такъ напр., какъ это мы увидимъ ниже, всякая коническая поверхность можетъ быть представлена уравненіемъ:

(3) $$\frac{x-\alpha}{z-\gamma} = \varphi\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right),$$

всякая поверхность вращенія — такимъ:

(4) $$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \varphi(ax+by+cz);$$

но извѣстно, что не всякая поверхность вращенія есть коническая, и наоборотъ; слѣд. вообще уравненія (3) и (4), хотя и содержатъ произвольную функцію, но представляютъ вообще совершенно различныя поверхности. Слѣд. исключеніе произвольныхъ функцій изъ подобныхъ уравненій должно привести къ частнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ, характеризующимъ эти классы функцій z отъ $x_1, x_2 \dots x_n$.

Здѣсь обнаруживается другая группировка уравненій съ частными производными, облегчающая ихъ изученіе, тогда какъ исключеніе произвольныхъ постоянныхъ дало намъ только раздѣленіе частныхъ дифференціальныхъ уравненій на порядки.

167. Если въ уравненіи (2) пред. § функціи $u_1, u_2 \dots u_{n-1}$ даны непосредственно, то дѣйствія надъ $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$ и z, ими опредѣляемыя, когда онѣ стоятъ не подъ знакомъ произвольной функціи φ, могутъ быть слиты въ обозначеніи съ тѣми, которыя въ (2) подразумѣваются въ знакѣ F, а слѣд. это уравненіе можетъ быть такъ написано:

(1) $$F(x_1, x_2, \dots x_n, z, \varphi(u_1, u_2, \dots u_{n-1})) = 0.$$

Рѣшая его относительно φ, можно его такъ представить:

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots u_{n-1}) - u_n = 0, \tag{2}$$

гдѣ u_n опредѣленная функція $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$ и z. Это же представляетъ частный случай такого уравненія:

$$\Phi(u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, u_n) = 0, \tag{3}$$

гдѣ Φ произвольная функція, а $\overset{n}{\underset{1}{u_i}}$ данныя. Поэтому достаточно разсмотрѣть исключеніе Φ изъ этого уравненія.

Дифференцируя его по x_i, $(i=1,2\ldots n)$, мы получимъ n такихъ уравненій:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial z} p_i\right) = 0, \qquad (i=1,2\ldots n) \tag{4}$$

гдѣ положено

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}. \tag{5}$$

Уравненія (4) уже не содержатъ функціи $\Phi(\overset{n}{\underset{1}{u_k}})$, а только ея частныя производныя, относительно которыхъ они суть линейныя однородныя; результатъ ихъ исключенія представится поэтому уравненіемъ въ формѣ опредѣлителя:

$$\left| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial z} p_i \right|_{(i,k=1,2\ldots n)} = 0, \tag{6}$$

или, выписавъ его подробно:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial z} p_1 & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial z} p_1 & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + \frac{\partial u_n}{\partial z} p_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial z} p_2 & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial z} p_2 & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} + \frac{\partial u_n}{\partial z} p_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial u_1}{\partial z} p_n & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} + \frac{\partial u_2}{\partial z} p_n & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial z} p_n \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Это уравненіе можно и такъ представить по извѣстнымъ свойствамъ опредѣлителя:

$$
(8)\qquad \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-p_1 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial z}p_1 & \frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial z}p_1 & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1}+\frac{\partial u_n}{\partial z}p_1 \\
-p_2 & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_1}{\partial z}p_2 & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial z}p_2 & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_2}+\frac{\partial u_n}{\partial z}p_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-p_n & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}+\frac{\partial u_1}{\partial z}p_n & \frac{\partial u_2}{\partial x_n}+\frac{\partial u_2}{\partial z}p_n & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n}+\frac{\partial u_n}{\partial z}p_n
\end{vmatrix} = 0.
$$

Помножая первый столбецъ на $\frac{\partial u_1}{\partial z}$ и придавая ко второму, на $\frac{\partial u_2}{\partial z}$ и придавая къ третьему, и т. д., наконецъ, помножая на $\frac{\partial u_n}{\partial z}$ и придавая къ послѣднему, приведемъ это уравненіе къ такому виду:

$$
(9)\qquad \begin{vmatrix}
1 & \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial z} \\
-p_1 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\
-p_2 & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-p_n & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n}
\end{vmatrix} = 0.
$$

Раскрывая его по элементамъ перваго столбца, мы будемъ имѣть, называя миноры одной буквой:

$$
(10)\qquad Z - X_1 p_1 - X_2 p_2 - \cdots - X_n p_n = 0,
$$

которое пишутъ часто и такъ:

$$
(11)\qquad X_1 p_1 + X_2 p_2 + \cdots + X_n p_n = Z,
$$

гдѣ X_i и Z суть извѣстныя функціи $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$ и z. Это уравненіе, будучи первой степени относительно частныхъ производныхъ $\overset{n}{\underset{1}{p_i}}$ отъ z, называется *линейнымъ уравненіемъ въ частныхъ производныхъ 1-го порядка*. И такъ исключеніе произвольной функціи Φ изъ уравненія вида (3) приводитъ къ линейному уравненію въ частныхъ производныхъ перваго порядка.

Прежде чѣмъ идти далѣе, полезно пояснить эту теоріи примѣрами. Съ этою цѣлью разсмотримъ въ слѣдующихъ §§ наиболѣе замѣчательные классы поверхностей: выведемъ для каждаго сперва уравненіе въ конечномъ видѣ, потомъ частное дифференціальное уравненіе, а затѣмъ разсмотримъ какъ опредѣляется произвольная функція въ конечномъ уравненіи поверхности по даннымъ дополнительнымъ условіямъ, выдѣляющимъ индивидуальную поверхность изъ ея класса.

168. *Цилиндрическая* поверхность есть слѣдъ прямой, движущейся въ пространствѣ такъ, что она при этомъ остается параллельною одной и той же неподвижной прямой (иначе говоря, сохраняетъ свое направленіе въ пространствѣ). Уравненія всякой прямой въ пространствѣ можно такъ представить:

$$\left.\begin{aligned} x &= az+\alpha, \\ y &= bz+\beta, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

гдѣ a и b постоянныя, опредѣляющія неизмѣнное направленіе движущейся прямой, а α, β координаты слѣда ея на плоскости $z=0$ (XOY). При движеніи прямой, ея слѣдъ будетъ чертить на этой плоскости нѣкоторую кривую линію, уравненіе которой будетъ:

$$\varphi(\alpha, \beta)=0. \tag{2}$$

Здѣсь функція φ можетъ быть задана по произволу. Беря изъ (1) выраженія α и β чрезъ прочія величины и внося во (2), будемъ имѣть общее уравненіе всѣхъ цилиндрическихъ поверхностей, которыхъ образующія имѣютъ данное чрезъ a и b направленіе, именно:

$$\varphi(x-az, y-bz)=0. \tag{3}$$

Это уравненіе такого типа, какъ (3) пред. §; а потому, полагая $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$, и замѣчая, что $\alpha=x-az$ и $\beta=y-bz$ отвѣчаютъ функціямъ u_1 и u_2, мы будемъ имѣть, такъ какъ

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z}=-a; \quad \text{и} \quad \frac{\partial \beta}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y}=1, \quad \frac{\partial \beta}{\partial z}=-b, \tag{4}$$

по (9) пред. §:

$$\begin{vmatrix} 1 & -a & -b \\ -p & 1 & 0 \\ -q & 0 & 1 \end{vmatrix}=0, \tag{5}$$

или, раскрывая опредѣлитель:

$$ap+bq-1=0. \tag{6}$$

Это уравненіе выражаетъ то характерное свойство цилиндрической поверхности, что нормаль къ ней перпендикулярна къ производящей, ибо косинусы угловъ послѣдней съ осями пропорціональны a, b, 1, а нормали величинамъ p, q, -1.

Индивидуальная цилиндрическая поверхность опредѣлится, когда 1) будетъ задана нѣкоторая линія въ пространствѣ, чрезъ которую должна проходить искомая цилиндрическая поверхность, или 2) когда будетъ задана поверхность, къ которой должна касаться искомая цилиндрическая поверхность.

Въ 1) случаѣ пусть кривая задана уравненіями:

$$(7)\qquad \begin{cases} f(x, y, z) = 0; \\ F(x, y, z) = 0; \end{cases}$$

внося сюда вмѣсто x и y ихъ значенія изъ (1), будемъ имѣть:

$$(8)\qquad \begin{cases} f(az+\alpha, bz+\beta, z) = 0; \\ F(az+\alpha, bz+\beta, z) = 0; \end{cases}$$

исключая z изъ этихъ уравненій, получимъ соотношеніе между α и β:

$$(9)\qquad \Phi(\alpha, \beta) = 0.$$

Слѣд. нужно во (2) положить $\varphi = \Phi$, чтобы имѣть искомую поверхность.

Во 2) случаѣ пусть

$$(10)\qquad f(x, y, z) = 0.$$

представляетъ поверхность, къ которой должна касаться искомая цилиндрическая. Такъ какъ касающіяся поверхности имѣютъ въ точкѣ касанія общую нормаль, то p и q для обѣихъ поверхностей въ точкахъ касанія будутъ имѣть одни и тѣже значенія соотвѣтственно. Но для поверхности (10) они опредѣлятся изъ такихъ уравненій:

$$(11)\qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p = 0; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q = 0;$$

беря ихъ отсюда и подставляя въ (6), легко получимъ такое уравненіе:

$$(12)\qquad a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

которое будетъ имѣть мѣсто во всѣхъ точкахъ касанія искомой цилиндрической поверхности, и потому вмѣстѣ съ (10) опредѣлитъ *линію касанія*, чрезъ которую проходитъ искомая касательная поверхность. Задача такимъ образомъ сведена къ 1) задачѣ: опредѣлить цилиндрическую поверхность, проходящую чрезъ данную линію.

169. *Коническая* поверхность есть слѣдъ прямой въ пространствѣ, движущейся такъ, что, проходя постоянно чрезъ одну и туже точку пространства, она скользитъ по данной кривой. Эта кривая линія называется направляющей.

Уравненія прямой, проходящей чрезъ неподвижную точку (α, β, γ), суть слѣдующія:

$$\frac{x-\alpha}{m}=\frac{y-\beta}{n}=\frac{z-\gamma}{1}; \tag{1}$$

отъ одной производящей къ другой m и n измѣняются, но въ нѣкоторой зависимости, ибо координаты точки встрѣчи производящей и направляющей, по которымъ m и n сейчасъ же опредѣлятся, суть функціи одной перемѣнной t, какъ точки кривой. Пусть эта зависимость будетъ:

$$\varphi(m, n)=0, \tag{2}$$

гдѣ φ совершенно произвольная функція. Но изъ (1) имѣемъ:

$$m=\frac{x-\alpha}{z-\gamma}; \qquad n=\frac{y-\beta}{z-\gamma}; \tag{3}$$

внося это во (2), будемъ имѣть:

$$\varphi\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)=0 \tag{4}$$

— уравненіе конической поверхности, какой угодно, съ вершиною въ точкѣ (α, β, γ). Изъ (3) имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial m}{\partial x}=\frac{1}{z-\gamma}; \quad \frac{\partial m}{\partial y}=0; \qquad \frac{\partial m}{\partial z}=-\frac{x-\alpha}{(z-\gamma)^2};\\
&\frac{\partial n}{\partial x}=0; \qquad \frac{\partial n}{\partial y}=\frac{1}{z-\gamma}; \quad \frac{\partial n}{\partial z}=-\frac{y-\beta}{(z-\gamma)^2};
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

поэтому уравненіе (9) § 167 для нашего случая обратится въ такое:

$$\begin{vmatrix}
1 & -\dfrac{x-\alpha}{(z-\gamma)^2} & -\dfrac{y-\beta}{(z-\gamma)^2}\\[2ex]
-p & \dfrac{1}{z-\gamma} & 0\\[2ex]
-q & 0 & \dfrac{1}{z-\gamma}
\end{vmatrix}=0; \tag{6}$$

помноживъ первую строчку, 2-й и 3-й столбцы на $z-\gamma$, мы ему дадимъ такой видъ:

$$\begin{vmatrix}
z-\gamma & -(x-\alpha) & -(y-\beta)\\
-p & 1 & 0\\
-q & 0 & 1
\end{vmatrix}=0, \tag{7}$$

который легко раскрывается, и мы будемъ имѣть:

$$(x-\alpha)p+(y-\beta)q-(z-\gamma)=0. \tag{8}$$

Это выражаетъ то характерное свойство конической поверхности, что ея нормаль перпендикулярна къ производящей. Если точка (α, β, γ) удалится въ безконечность по направленію $(a, b, 1)$, то это уравненіе переходитъ въ (6) пред. §, какъ въ томъ мы убѣждаемся, раздѣляя его на γ и полагая $\gamma=\infty$, такъ какъ пред. $\frac{\alpha}{\gamma}=a$, пред. $\frac{\beta}{\gamma}=b$.

Индивидуальныя коническія поверхности опредѣляются также или 1) по кривой, чрезъ которую она должна проходить, или 2) по поверхности, къ которой она должна касаться.

Въ первомъ случаѣ, пусть кривая задана уравненіями:

$$(9) \qquad \begin{cases} f(x, y, z)=0; \\ F(x, y, z)=0; \end{cases}$$

исключая x, y, z изъ четырехъ уравненій (3) и (9), получимъ соотношеніе между m и n:

$$(10) \qquad \Phi(m, n)=0;$$

слѣд. въ (4) нужно положить $\varphi=\Phi$, чтобы имѣть искомую коническую поверхность.

Пусть теперь поверхность, къ которой искомая коническая должна касаться, будетъ:

$$(11) \qquad f(x, y, z)=0;$$

такъ какъ въ точкахъ касанія p и q для обѣихъ поверхностей должны быть одни и тѣже, то получаемъ, какъ въ пред. §, такое уравненіе изъ (8):

$$(12) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x-\alpha)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-\beta)+\frac{\partial f}{\partial z}(z-\gamma)=0,$$

которое вмѣстѣ съ (11) опредѣлитъ линію касанія, и задача такимъ образомъ сводится къ первой.

170. Если кривая, неизмѣнно связанная съ нѣкоторою прямой, будетъ вращаться около этой прямой, какъ около оси, то слѣдъ, оставляемый ею въ пространствѣ, будетъ *поверхность вращенія*. Каждая точка производящей кривой будетъ описывать окружность круга, плоскость котораго будетъ перпендикулярна къ оси вращенія. Этотъ кругъ называется *параллельнымъ кругомъ*. Плоскость, проведенная чрезъ ось вращенія, пересѣчетъ поверхность вращенія по линіи, которая называется *меридіаномъ*. При вращеніи онъ, очевидно, будетъ описывать туже поверхность, что и данная кривая. Если выберемъ на оси какую нибудь точку (α, β, γ), то разстояніе отъ нея точки параллельнаго круга при вращеніи не будетъ мѣняться, равно какъ и разстояніе плоскости параллельнаго круга отъ той же точки; но съ переходомъ точки на другую параллель объ эти величины измѣнятся одновременно; слѣд. между ними должна быть связь, выражаемая уравненіемъ

$$\varphi(r^2, d)=0, \tag{1}$$

если r есть разстояніе точки параллели, а d ея плоскости отъ точки (α, β, γ) на оси. Пусть направленіе оси опредѣляется величинами (a, b, c); тогда уравненіе плоскости, перпендикулярной къ ней, будетъ таково:

$$a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0, \tag{2}$$

гдѣ X, Y, Z текущія координаты, а точка (x, y, z) одна изъ точекъ параллели. Ея разстояніе r отъ (α, β, γ) опредѣляется формулою:

$$r^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2; \tag{3}$$

разстояніе d плоскости параллели отъ (α, β, γ) формулою:

$$d=\frac{a(\alpha-x)+b(\beta-y)+c(\gamma-z)}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \tag{4}$$

Внося изъ (3) и (4) въ (1), можно будетъ $\mp\sqrt[-2]{a^2+b^2+c^2}$ скрыть подъ знакомъ произвольной функціи φ, такъ какъ это есть постоянное количество, послѣ чего получимъ уравненіе поверхности вращенія въ такомъ видѣ:

$$\varphi\big((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2,\ ax+by+cz\big)=0, \tag{5}$$

ибо и $-(a\alpha+b\beta+c\gamma)$ тоже можно скрыть подъ знакомъ этой функціи φ по такой же причинѣ.

Полагая для краткости

$$\left.\begin{aligned} u&=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2;\\ v&=ax+by+cz; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

можно уравненіе (5) написать короче такъ:

$$\varphi(u, v)=0. \tag{7}$$

Какъ видимъ, оно имѣетъ видъ (3) § 167, а потому исключеніе φ приведетъ, если примемъ во вниманіе, что

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}=2(x-\alpha); \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2(y-\beta); \quad \frac{\partial u}{\partial z}=2(z-\gamma);\\ &\frac{\partial v}{\partial x}=a; \qquad\quad \frac{\partial v}{\partial y}=b; \qquad\quad \frac{\partial v}{\partial z}=c; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

къ такому уравненію (отбрасывая общій множитель 2):

$$\begin{vmatrix} 1\,. & z-\gamma & c\\ -p & x-\alpha & a\\ -q & y-\beta & b \end{vmatrix}=0, \tag{9}$$

раскрывая которое по элементамъ перваго столбца и умножая на -1, мы получимъ:

$$(10)\quad [(y-\beta)c-(z-\gamma)b]p+[(z-\gamma)a-(x-\alpha)c]q-[(x-\alpha)b-(y-\beta)a]=0.$$

Это уравненіе въ частныхъ производныхъ поверхности вращенія. Оно выражаетъ то характерное свойство ея, что нормаль къ поверхности встрѣчаетъ ея ось, или, лучше, лежитъ въ одной съ нею плоскости. Дѣйствительно, коэффиціенты при $p, q, -1$ въ уравненіи (10) пропорціональны косинусамъ угловъ, которые дѣлаетъ съ осями нормаль къ плоскости, проведенной чрезъ ось вращенія, и прямую, соединяющую точку (x, y, z) съ точкой (α, β, γ), какъ то извѣстно изъ аналитической геометріи; нормаль къ поверхности вращенія, будучи по (10) перпендикулярною къ нормали сказанной плоскости и имѣя съ ней общую точку (x, y, z), будетъ лежать въ этой плоскости.

Для опредѣленія индивидуальной поверхности вращенія нужно: или 1) задать кривую

$$(11)\qquad \begin{cases} f(x, y, z)=0; \\ F(x, y, z)=0, \end{cases}$$

чрезъ которую должна проходить искомая поверхность; или 2) задать поверхность

$$(12)\qquad f(x, y, z)=0,$$

къ которой она должна касаться.

Въ (1) случаѣ, исключая x, y, z изъ четырехъ уравненій (6) и (11), получимъ соотношеніе между u и v:

$$(13)\qquad \Phi(u, v)=0,$$

такъ что нужно въ (5) принять $\varphi=\Phi$.

Во 2) случаѣ, подобно тому, какъ и въ предыдущихъ примѣрахъ будемъ имѣть изъ (10) съ помощію производныхъ отъ (12) уравненіе:

$$(14)\quad [(y-\beta)c-(z-\gamma)b]\frac{\partial f}{\partial x}+[(z-\gamma)a-(x-\alpha)c]\frac{\partial f}{\partial y}+[(x-\alpha)b-(y-\beta)a]\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

которое вмѣстѣ съ (12) опредѣлитъ линію касанія, и задача будетъ сведена къ первой.

171. *Коноидъ* есть поверхность, которую описываетъ прямая, скользящая вдоль прямой и кривой линій, оставаясь параллельною неподвижной плоскости. Ея уравненіе легко получится, если принять плоскость параллелизма за плоскость XOY, а прямую, по которой она должна скользить, за ось Oz. Въ этомъ случаѣ возвышеніе v производящей прямой надъ плоскостью, — величина пропорціональная z, и $u=\operatorname{tg}\vartheta$ угла ея проекціи на плоскость XOY съ осью OX будутъ оба сохранять свое значеніе, когда точка будетъ перемѣщаться вдоль по производящей, и обѣ будутъ измѣняться при переходѣ съ одной производящей на другую; а потому между ними будетъ зависимость:

$$\varphi(u, v)=0, \tag{1}$$

гдѣ

$$u=(\operatorname{tg}\vartheta)=\frac{y}{x}, \quad v=z. \tag{2}$$

Такъ какъ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}=0; \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial z}=1, \tag{3}$$

то по (9) § 167 будемъ имѣть такое частное дифференціальное уравненіе поверхностей коноида:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -p & -\frac{y}{x^2} & 0 \\ +q & \frac{1}{x} & 0 \end{vmatrix}=0, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} p & -y \\ q & x \end{vmatrix}=0 \text{ *)} \tag{4}$$

или окончательно:

$$px+qy=0. \tag{5}$$

Это уравненіе выражаетъ то свойство поверхности, что нормаль перпендикулярна къ производящей, а также и то, что z есть однородная функція x и y нулевого измѣренія.

Если 1) задана кривая;

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z)=0; \\ F(x, y, z)=0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

чрезъ которую долженъ проходить коноидъ, то исключаемъ изъ (6) при помощи (2) сперва z и y, что дастъ:

$$\left.\begin{aligned} f(x, ux, v)=0; \\ F(x, ux, v)=0; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

исключая отсюда x, найдемъ соотношеніе между u и v:

$$\Phi(u, v)=0, \tag{8}$$

и слѣд. будетъ $\varphi\equiv\Phi$. Если задана 2) поверхность

$$f(x, y, z)=0, \tag{9}$$

то прежнія соображенія послужатъ къ выводу изъ (5) уравненія:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0, \tag{10}$$

---

*) Умножая первый столбецъ на —1, второй на x^2.

которое, имѣя мѣсто во всѣхъ точкахъ соприкосновенія поверхностей, вмѣстѣ съ (9) представитъ линію касанія, чрезъ что задача сводится къ предыдущей.

172. Послѣдній примѣръ, приведшій къ уравненію однородной функціи нулевого измѣренія отъ функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, наводитъ на мысль: вывести уравненіе въ частныхъ производныхъ однородной функціи какого угодно измѣренія m отъ какого угодно числа n независимыхъ перемѣнныхъ. Если z однородная m-го измѣренія отъ n независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \dots x_n$:

$$z=\varphi(x_1, x_2, \dots x_n), \tag{1}$$

то её можно такъ представить:

$$z=x_n^m\varphi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}\cdots\frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right); \tag{2}$$

это уравненіе, полагая

$$u_1=\frac{x_1}{x_n}, \quad u_2=\frac{x_2}{x_n}, \dots u_{n-1}=\frac{x_{n-1}}{x_n}, \tag{3}$$

можно такъ переписать:

$$x_n^m\varphi(u_1, u_2, \dots u_{n-1}, 1)-z=0. \tag{4}$$

Дифференцируя это уравненіе по x_k, гдѣ $k<n$, мы будемъ имѣть:

$$x_n^m\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}\cdot\frac{1}{x_n}-p_k=0, \tag{5}$$

гдѣ $p_k=\dfrac{\partial z}{\partial p_k}$. Дифференцируя то же уравненіе по x_n, будемъ имѣть:

$$mx_n^{m-1}\varphi(\overset{n-1}{\underset{1}{u_k}})+x_n^m\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}\cdot-\frac{x_k}{x_n^{\,2}}-p_n=0, \tag{6}$$

или помножая на x_n:

$$mx_n^m\varphi(\overset{n-1}{\underset{1}{u_k}})-x_n^{m-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}x_k-p_nx_n=0; \tag{7}$$

но по (5) $x_n^{m-1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_k}=p_k$, а по (4) $x_n^m\varphi(\overset{n-1}{\underset{1}{u_k}})=z$; на основаніи этого и перенося члены съ $(-)$ въ другую часть, получимъ:

$$\sum_{k=1}^{n-1}p_kx_k+p_nx_n=mz, \tag{8}$$

или подробно выписывая:

$$p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n=mz. \tag{9}$$

Таково частное дифференціальное уравненіе однородныхъ функцій. Оно выражаетъ теорему Эйлера объ однородныхъ функціяхъ.

173. Отъ этихъ примѣровъ возвращаясь къ общей теоріи, предположимъ, что въ уравненіи (2) § 166 функціи $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ не даны явно, а опредѣляются изъ уравненій, въ которыя входитъ и функція $\varphi(\overset{n-1}{\underset{1}{u_k}})$, вслѣдствіе чего они будутъ мѣняться, съ перемѣною φ на другую. Мы будемъ слѣд. имѣть такую систему n уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &f(\overset{n}{\underset{1}{x_i}};\ z;\ \overset{n-1}{\underset{1}{u_k}},\ \varphi(\overset{n-1}{\underset{1}{u_k}}))=0;\\ &f_h(\overset{n}{\underset{1}{x_i}},\ z;\ \overset{n-1}{\underset{1}{u_k}},\ \varphi(\overset{n-1}{\underset{1}{u_k}}))=0, \end{aligned}\right\} \quad (h=1,2,\ldots n-1) \qquad (1)$$

(гдѣ F въ первомъ уравненіи для симметріи мы перемѣнили на f). Теперь нужно исключить не только φ, но и $\overset{n-1}{\underset{1}{u_k}}$, всего n величинъ, для чего системы (1) недостаточно. Поэтому дифференцируемъ первое изъ этихъ уравненій по x_i $(i=1,2,\ldots n)$; получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial z}p_i+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\partial f}{\partial u_k}+\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}\right)\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{\partial u_k}{\partial z}p_i\right)=0. \quad (i=1,2\ldots n) \qquad (2)$$

Исключая изъ этихъ n уравненій, линейныхъ и однородныхъ относительно 1 и $n-1$ величинъ $\frac{\partial f}{\partial u_k}+\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}$, эти величины, получимъ уравненіе въ формѣ опредѣлителя, похожаго на (7) § 167, и отличающагося отъ него однимъ только столбцомъ; раскрывая его по элементамъ этого столбца, будемъ имѣть такое уравненіе:

$$\sum_{i=1}^{n}U_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial z}p_i\right)=0, \qquad (3)$$

гдѣ U_i будутъ миноры по элементамъ послѣдняго столбца въ (7) § 167. Это величины, тоже подлежащія исключенію, какъ составленныя изъ частныхъ производныхъ функцій $\overset{n-1}{\underset{1}{u_k}}$. Но поступая также точно съ прочими уравненіями системы (1) этого §, мы будемъ имѣть еще $n-1$ такихъ уравненій, какъ (3), именно:

$$\sum_{i=1}^{n}U_i\left(\frac{\partial f_h}{\partial x_i}+\frac{\partial f_h}{\partial z}p_i\right)=0; \quad (h=1,2,\ldots(n-1)) \qquad (4)$$

исключая изъ (3) и (4) функціи U_i, получимъ результантъ въ формѣ опредѣлителя:

$$(5)\quad f_n=\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial z}p_1 & \frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial z}p_2 & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}+\frac{\partial f}{\partial z}p_n \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial z}p_1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_1}{\partial z}p_2 & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}+\frac{\partial f_1}{\partial z}p_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_{n-1}}{\partial z}p_1 & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_{n-1}}{\partial z}p_2 & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}+\frac{\partial f_{n-1}}{\partial z}p_n \end{vmatrix}=0,$$

который, подобно уравненіямъ (1), не будетъ содержать никакихъ другихъ, подлежащихъ исключенію величинъ, кромѣ $\overset{n-1}{\underset{1}{u_k}}$ и $\varphi(\overset{n-1}{\underset{1}{u_k}})$; а потому изъ (1) и (5) можно исключить эти величины, послѣ чего получится уравненіе съ частными производными перваго порядка. Уравненіе (5) будетъ линейное относительно $\overset{n}{\underset{1}{p_i}}$; но вслѣдствіе процесса исключенія получится, вообще говоря, уравненіе не первой степени, а высшей. Это уравненіе однако будетъ разлагающееся на линейныя; ибо исключеніе, производимое по правиламъ Высшей Алгебры, такъ выполнится: рѣшивъ уравненія (1) алгебраически по n величинамъ $\overset{n-1}{\underset{1}{u_k}}$ и φ, мы подставимъ каждое рѣшеніе въ f_n, которое линейное относительно p_i, и всѣ эти результаты перемножимъ: получится симметрическая функція рѣшеній уравненій (1) по $\overset{n-1}{\underset{1}{u_k}}$ и φ, слѣд. выразится раціонально чрезъ коэффиціенты ихъ при степеняхъ исключаемыхъ величинъ, т. е. чрезъ $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$ и z. Прежній случай заключается въ этомъ какъ частный, какъ легко видѣть.

Въ частномъ случаѣ, когда уравненія $f_1=0, f_2=0, \dots f_{n-1}=0$ будутъ:

$$(6)\qquad \frac{\partial f}{\partial u_k}+\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial u_k}=0, \qquad (k=1,2\dots n-1)$$

уравненія (2) приведутся къ такимъ:

$$(7)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial z}p_i=0,$$

такъ что $\overset{n-1}{\underset{1}{u_k}}$ и φ исключатся, какъ будто бы они были постоянныя. Но уравненіе уже не будетъ разлагающееся на линейныя, ибо для исключенія надобно рѣшать по $\overset{n-1}{\underset{1}{u_k}}$ и φ уравненія (7) и подставлять въ $f=0$ и перемножать результаты; произведеніе выразится, какъ симметрическая функція этихъ рѣшеній, чрезъ коэффиціенты уравненій (7), въ которыя входятъ и p_i.

Эти уравненія составляютъ другой классъ m нелинейныхъ частныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, представляющій бо́льшія трудности.

174. Пусть теперь дана система уравненій, подобная (1) пред. §, но заключающая m произвольныхъ функцій отъ функцій $\overset{n-1}{\underset{1}{u_k}}$:

$$
\begin{aligned}
& f(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z; \overset{n-1}{\underset{1}{u_k}}; \overset{m}{\underset{1}{\varphi_j}}(\overset{n-1}{\underset{1}{u_k}})) = 0; \\
& f_h(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z; \overset{n-1}{\underset{1}{u_k}}; \overset{m}{\underset{1}{\varphi_j}}(\overset{n-1}{\underset{1}{u_k}})) = 0, \qquad (h=1,2\ldots n-1)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

(гдѣ $\overset{m}{\underset{1}{\varphi_j}}$ отъ $(\overset{n-1}{\underset{1}{u_k}})$ написано вмѣсто $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$). Дифференцируя первое изъ этихъ уравненій, получимъ n такихъ уравненій:

$$
\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial z} p_i + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f}{\partial u_k} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_k} \right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial z} p_i \right) = 0, \quad (i=1,2\ldots n) \tag{2}
$$

изъ которыхъ исключая величины

$$
1, \quad \frac{\partial f}{\partial u_k} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_k}, \qquad (k=1,2\ldots n-1) \tag{3}
$$

относительно которыхъ они линейныя и однородныя, мы придемъ къ уравненію (3) пред. §, а затѣмъ, поступая также съ остальными уравненіями (1), получимъ $n-1$ уравненій какъ (4) пред. §, что приведетъ насъ чрезъ исключеніе $\overset{n}{\underset{1}{U_i}}$ къ уравненію (5) пред. §:

$$
f_n = 0, \tag{4}
$$

линейному относительно $\overset{n}{\underset{1}{p_i}}$, и содержащему тѣже подлежащія исключенію величины, что и уравненія (1). Съ этимъ уравненіемъ будемъ поступать такъ же, какъ съ первымъ изъ (1); мы его продифференцируемъ по x_i; при этомъ мы должны имѣть въ виду, что и $\overset{n}{\underset{1}{p_i}}$, которыя въ него входятъ, суть функціи $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$; потому, обозначая для краткости чрезъ D_{x_i} полную производную по x_i отъ выраженія, содержащаго $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$, z, $\overset{n}{\underset{1}{p_k}}$, мы будемъ имѣть:

$$
\frac{\partial f_n}{\partial x_i} + \frac{\partial f_n}{\partial z} p_i + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial p_h} \frac{\partial p_h}{\partial x_i} = D_{x_i} f_n, \tag{5}
$$

и слѣд. такой результатъ:

$$
D_{x_i} f_n + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_k} \right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial z} p_i \right) = 0. \quad (i=1,2\ldots n) \tag{6}
$$

Эти уравненія линейныя однородныя относительно величинъ (3), а потому, исключая ихъ, мы придемъ, какъ и въ пред. §. къ уравненію:

(7)
$$\sum_{i=1}^{n} U_i D_{x_i} f_n = 0,$$

гдѣ U_i имѣютъ тѣже значенія, какъ и въ пред. §. Присоединяя къ нему уравненія (4) пред. §, мы исключимъ величины $\overset{n}{\underset{1}{U_i}}$, и придемъ къ уравненію вида (5) того же §, въ которомъ только первая строчка будетъ другая, именно она теперь будетъ состоять изъ элементовъ (5) настоящаго §. Это уравненіе будетъ, слѣд., первой степени относительно производныхъ отъ $\overset{n}{\underset{1}{p_j}}$, т. е. производныхъ 2-го порядка отъ z; коэффиціенты его будутъ зависѣть отъ тѣхъ же величинъ, которыя входятъ въ уравненія (1). Означимъ это уравненіе чрезъ

(8)
$$f_{n+1} = 0.$$

Поступая съ нимъ, какъ съ f_n, мы придемъ къ уравненію

(9)
$$f_{n+2} = 0,$$

которое будетъ первой степени относительно производныхъ 3-го порядка отъ z, коэффиціенты при которыхъ будутъ содержать тѣ величины, которыя входятъ въ (8). Продолжая такъ поступать съ каждымъ полученнымъ уравненіемъ, мы будемъ прибавлять къ нашей системѣ по уравненію того же вида, какъ и данныя, съ прибавкой только каждый разъ производныхъ слѣдующаго порядка. Послѣ присоединенія уравненія

(10)
$$f_{n+m-1} = 0$$

съ частными производными до порядка m включительно (относительно послѣдняго, т. е. m-аго, порядка оно будетъ линейное), мы будемъ имѣть систему уравненій вмѣстѣ съ (1) числомъ $n+m$, изъ которой можно будетъ исключить $n+m-1$ величинъ, а именно $\overset{n-1}{\underset{1}{u_k}}$ и $\overset{m}{\underset{1}{\varphi_j}}$, и въ результатѣ получится уравненіе:

(11)
$$F(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z, \overset{n}{\underset{1}{p_i}}, \overset{n}{\underset{1}{p_{ij}}}, \ldots \overset{n}{\underset{1}{p_{i_1 i_2 \ldots i_m}}}) = 0$$

съ частными производными m-аго порядка, которое вообще не будетъ линейнымъ ни относительно производныхъ наивысшаго порядка.

175. Процессъ исключенія нѣсколько видоизмѣняется, если предложена такая система уравненій:

$$F(\overset{m}{\underset{1}{x_i}}, z; \overset{n-1}{\underset{1}{u_j}}, \overset{m}{\underset{1}{\varphi_h}}(\overset{n-1}{\underset{1}{u_j}}))=0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_j}+\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial \varphi_h}\frac{\partial \varphi_h}{\partial u_j}=0, \qquad (j=1,2\ldots n-1) \qquad (2)$$

гдѣ уравненія (2) позволятъ опредѣлить $\overset{n-1}{\underset{1}{u_j}}$, какъ скоро будутъ даны $\overset{m}{\underset{1}{\varphi_h}}(\overset{n-1}{\underset{1}{u_j}})$, ибо тогда будутъ извѣстны и $\frac{\partial \varphi_h}{\partial u_j}$. Дифференцируя уравненіе (1) по x_k, мы получимъ уравненіе вида (2) § 174; но на основаніи (2) настоящаго § оно приведется къ такому:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}+\frac{\partial F}{\partial z}p_k=0. \qquad (k=1,2\ldots n) \qquad (3)$$

Въ эти уравненія входятъ тѣже величины, что и въ (1), съ присоединеніемъ $\overset{n}{\underset{1}{p_k}}$. Если $m=1$, то, какъ мы вывели раньше, можно исключить n величинъ изъ (1) и (3), общее число которыхъ есть $n+1$; но въ случаѣ $m>1$, этихъ уравненій недостаточно. Замѣнивъ уравненія (2) уравненіями (3), имѣющими мѣсто при (2), мы выиграли одно уравненіе. Теперь будемъ дифференцировать по x_l уравненіе (3). Полагая для краткости

$$D^2_{x_lx_k}F=\frac{\partial^2 F}{\partial x_l\partial x_k}+\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x_k}p_l+\frac{\partial^2 F}{\partial x_l\partial z}p_k+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}p_kp_l+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial p_k}{\partial x_l}, \qquad (4)$$

мы будемъ имѣть:

$$D^2_{x_lx_k}F+ \qquad (5)$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\left\{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_j\partial x_k}+\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_h\partial x_k}\frac{\partial \varphi_h}{\partial u_j}\right)+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_j\partial z}+\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_h\partial z}\frac{\partial \varphi_h}{\partial u_j}\right)p_k\right\}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l}+\frac{\partial u_j}{\partial z}p_l\right)=0.$$

$$(l=1,2\ldots n)$$

Исключая изъ этой системы выраженія въ скобкахъ $\{\ \}$, относительно которыхъ эта система линейная, мы получимъ результантъ въ формѣ опредѣлителя; располагая его по элементамъ перваго столбца, будемъ имѣть:

$$\sum_{l=1}^{n}D^2_{x_lx_k}F.\,U_l=0, \qquad (k=1,2\ldots n). \qquad (6)$$

гдѣ U_l имѣютъ прежнія значенія. Исключая ихъ изъ этой системы n линейныхъ однородныхъ относительно ихъ уравненій, получимъ уравненіе:

$$F_1\left(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}; z; \overset{n}{\underset{1}{p_i}}; \overset{n}{\underset{1}{p_{k,l}}}; \overset{n-1}{\underset{1}{u_j}}, \overset{m}{\underset{1}{\varphi_h}}(\overset{n-1}{\underset{1}{u_j}})\right)=0, \qquad (7)$$

гдѣ $p_{k,l}=\frac{\partial p_k}{\partial x_l}=\frac{\partial p_l}{\partial x_k}$, и k и l пробѣгаютъ независимо одинъ отъ другого всѣ значенія отъ 1 до n. Если $m=2$, то, присоединяя это уравненіе къ системѣ (1) и (3), мы исключимъ всѣ $\overset{n-1}{\underset{1}{u_j}}$ и $\overset{m}{\underset{1}{\varphi_h}}$; если же $m>2$, то надобно добыть еще одно уравненіе.

Дифференцируя (7) по x_k, будемъ имѣть:

$$D_{x_k}F_1+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial u_j}+\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial F_1}{\partial\varphi_h}\frac{\partial\varphi_h}{\partial u_j}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{\partial u_j}{\partial z}p_k\right)=0. \quad (k=1,2\ldots n) \tag{8}$$

Исключая 1, $\left(\frac{\partial F_1}{\partial u_j}+\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial F_1}{\partial\varphi_h}\frac{\partial\varphi_h}{\partial u_j}\right)$, получимъ:

$$\sum_{k=1}^{n}D_{x_k}F_1 . U_k=0, \tag{9}$$

гдѣ U_k имѣютъ прежнія значенія. Исключая ихъ при помощи $n-1$ изъ (6), мы получимъ уравненіе:

$$F_2\left(\overset{n}{\underset{1}{x_i}},\ z,\ \overset{n}{\underset{1}{p_i}},\ \overset{n}{\underset{1}{p_{k,i}}};\ \overset{n}{\underset{1}{p_{h,k,i}}};\ \overset{n-1}{\underset{1}{u_j}},\ \overset{m}{\underset{1}{\varphi_h}}(\overset{n-1}{\underset{1}{u_j}})\right)=0, \tag{10}$$

третьяго порядка, содержащее тѣже $\overset{n-1}{\underset{1}{u_j}}$ и $\overset{m}{\underset{1}{\varphi_h}}$, какъ и (1). Если $m=3$, то его достаточно для исключенія этихъ величинъ изъ (1), (3), (7); въ противномъ случаѣ поступаемъ съ нимъ, какъ поступали для полученія его съ (7), и т. д.

176. Сдѣлаемъ примѣненіе предыдущей теоріи къ частному случаю: выведемъ частное дифференціальное уравненіе *линейчатыхъ поверхностей*. Такъ называются поверхности, образуемыя движеніемъ прямой по извѣстному закону.

Уравненія прямой, мѣняющей свое положеніе, можно такъ представить:

$$\left\{\begin{aligned} x&=uz+\varphi(u)\\ y&=\psi(u)z+\vartheta(u)\end{aligned}\right. \tag{1}$$

или перенося всё въ одну часть:

$$\left\{\begin{aligned} &-x+uz+\varphi(u)=0, &&\text{короче}\quad f_1=0;\\ &-y+\psi(u)z+\vartheta(u)=0, &&\text{короче}\quad f_2=0.\end{aligned}\right. \tag{1'}$$

Въ данномъ случаѣ нужно исключить 4 величины: u, $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\vartheta(u)$; слѣд. нужно имѣть еще 3 уравненія, для чего нужно дифференцировать 3 раза, а потому получимъ въ результатѣ уравненіе 3-го порядка.

Дифференцируя первое изъ уравненій (1′) по x и по y, получимъ слѣдующія два уравненія:

$$\left\{\begin{aligned} -1+up+(z+\varphi'(u))\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)&=0,\\ uq+(z+\varphi'(u))\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right)&=0;\end{aligned}\right. \tag{2}$$

исключая отсюда $(z+\varphi'(u))$, получимъ:

$$\begin{vmatrix} -1+up & \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p \\ uq & \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q \end{vmatrix}=0, \tag{3}$$

или въ раскрытой формѣ:

$$(-1+up)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right)-uq\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)=0. \tag{3'}$$

Далѣе, поступаемъ также со вторымъ изъ уравненій (1'); дифференцируя его по x и по y, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} \psi(u)p+(\psi'(u)z+\vartheta'(u))\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)=0, \\ -1+\psi(u)q+(\psi'(u)z+\vartheta'(u))\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right)=0; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

исключая $(\psi'(u)z+\vartheta'(u))$ отсюда, получимъ:

$$\begin{vmatrix} \psi(u)p & \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p \\ -1+\psi(u)q & \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q \end{vmatrix}=0, \tag{5}$$

или, раскрывая:

$$\psi(u)p\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right)-(-1+\psi(u)q)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)=0. \tag{5'}$$

Исключая теперь $\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q$ и $-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)$ изъ уравненій (3') и (5'), мы получимъ такое уравненіе:

$$\begin{vmatrix} -1+up & uq \\ \psi(u)p & -1+\psi(u)q \end{vmatrix}=0, \tag{6}$$

или, раскрывая и упрощая:

$$up+\psi(u)q-1=0, \quad \text{короче} \quad f_3=0. \tag{6'}$$

Съ этимъ уравненіемъ будемъ поступать, какъ съ (1'). Положимъ для краткости:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=r; \quad \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}=s; \quad \frac{\partial q}{\partial y}=t. \tag{7}$$

Дифференцируя (6') по x и y, получимъ слѣдующія два уравненія:

$$\left.\begin{aligned} ur+\psi(u)s+(p+\psi'(u)q)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)=0; \\ us+\psi(u)t+(p+\psi'(u)q)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right)=0; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

исключая 1 и $(p+\psi'(u)q)$, будемъ имѣть:

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} ur+\psi(u)s & \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}p \\ us+\psi(u)t & \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}q \end{vmatrix}=0,$$

или, раскрывая:

$$(9')\qquad (ur+\psi(u)s)\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\Big)-(us+\psi(u)t)\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\Big)=0.$$

Исключая отсюда $\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}q\right)$ и $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}p\right)$ при помощи (3′), которое на основаніи (6′) послѣ умноженія на -1 можно такъ представить:

$$(10)\qquad \psi(u)q\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\Big)+uq\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\Big)=0,$$

получимъ:

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} ur+\psi(u)s & -(us+\psi(u)t) \\ \psi(u)q & uq \end{vmatrix}=0,$$

или раскрывая и отбрасывая множитель q:

$$(11')\qquad ru^2+2su\psi(u)+t(\psi(u))^2=0. \qquad (f_4=0.)$$

Съ этимъ уравненіемъ будемъ поступать, какъ съ предыдущимъ. Дифференцируемъ его по x и по y, причемъ по Лагранжу обозначимъ производныя отъ r, s, t; будемъ имѣть:

$$(12)\left\{\begin{aligned} & r'_x u^2+2s'_x u\psi(u)+t'_x(\psi(u))^2+ \\ & +2\left\{ru+s(\psi(u)+u\psi'(u))+t\psi(u)\psi'(u)\right\}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\Big)=0; \\ & r'_y u^2+2s'_y u\psi(u)+t'_y(\psi(u))^2+ \\ & +2\left\{ru+s(\psi(u)+u\psi'(u))+t\psi(u)\psi'(u)\right\}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\Big)=0; \end{aligned}\right.$$

исключая отсюда выраженіе въ скобкахъ $\{\ \}$, умноженное на 2, мы будемъ имѣть:

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} r'_x u^2+2s'_x u\psi(u)+t'_x(\psi(u))^2 & \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}p \\ r'_y u^2+2s'_y u\psi(u)+t'_y(\psi(u))^2 & \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}q \end{vmatrix}=0,$$

или, раскрывая:

$$(13')\qquad \begin{aligned} & [r'_x u^2+2s'_x u\psi(u)+t'_x(\psi(u))^2]\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\Big)- \\ & -[r'_y u^2+2s'_y u\psi(u)+t'_y(\psi(u))^2]\Big(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}q\Big)=0. \end{aligned}$$

Исключая отсюда $\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q$ и $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}q$ при помощи (10), сокращеннаго на q, получимъ:

$$\begin{vmatrix} r'_x u^2+2s'_x u\psi(u)+t'_x(\psi(u))^2 & -(r'_y u^2+2s'_y u\psi(u)+t'_y(\psi(u))^2) \\ \psi(u) & u \end{vmatrix}=0, \quad (14)$$

или, раскрывая, принявъ при этомъ во вниманіе, что $r'_y=s'_x$, $s'_y=t'_x$, слѣдующее:

$$r'_x u^3+3s'_x u^2\psi(u)+3s'_y u(\psi(u))^2+t'_y(\psi(u))^3=0. \quad (f_5=0) \quad (14')$$

Исключая теперь u и $\psi(u)$ изъ уравненій (11′) и (14′) по способу Сильвестра *), мы получимъ искомое частное дифференціальное уравненіе линейчатыхъ поверхностей въ формѣ опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} r'_x & 3s'_x & 3s'_y & t'_y & 0 \\ 0 & r'_x & 3s'_x & 3s'_y & t'_y \\ r & s & t & 0 & 0 \\ 0 & r & s & t & 0 \\ 0 & 0 & r & s & t \end{vmatrix}=0. \quad (15)$$

177. Линейчатая поверхность называется развертывающеюся, когда прямая движется такъ въ пространствѣ, что встрѣчаетъ свое непосредственно предшествующее положеніе. Вслѣдствіе этого она слагается изъ безконечно тонкихъ плоскихъ элементовъ, заключающихся въ углѣ между двумя послѣдовательными положеніями производящей прямой, а потому можетъ быть разсматриваема какъ обертка плоскости, движущейся въ зависимости отъ измѣненія одного параметра. Такая плоскость можетъ быть представлена такимъ уравненіемъ:

$$ux+\varphi(u)y+\psi(u)z-1=0, \quad (1)$$

содержащимъ двѣ произвольныя функціи $\varphi(u)$ и $\psi(u)$; поэтому должно получиться частное дифференціальное уравненіе 2-го порядка. Чтобы получить обертку плоскостей (1), нужно къ этому уравненію присоединить его производное по параметру u:

$$x+\varphi'(u)y+\psi'(u)z=0. \quad (2)$$

Совокупность обоихъ этихъ уравненій представитъ такъ называемую характеристику, т. е. линію пересѣченія двухъ смежныхъ положеній поверхности, у насъ—прямую, такъ какъ оба уравненія первой степени относительно x, y, z; эта прямая очевидно и есть та самая, которая своимъ движеніемъ производитъ развертывающую линейчатую поверх-

*) См. мой „Краткій Курсъ Высшей Алгебры. Изданіе 2-е. Харьковъ, 1892 г. § 195, формула (5) на стр. 276.

ность. Уравненія (1) и (2) вполнѣ отвѣчаютъ, слѣд., уравненіямъ (1) пред. §, представляющимъ подвижную прямую; но они содержатъ только двѣ произвольныя функціи, а не три, потому что условіе встрѣчать свое непосредственно-предшествующее положеніе ограничиваетъ свободу передвиженія прямой. Написавъ рядомъ съ уравненіями (1) пред. §, уравненія смежной прямой:

$$(3) \qquad \begin{cases} x=(u+\Delta u)z+\varphi(u+\Delta u); \\ y=\psi(u+\Delta u)z+\vartheta(u+\Delta u), \end{cases}$$

которыя послѣ вычитанія изъ нихъ (1) пред. §, раздѣленія на Δu и перехода къ предѣлу замѣнятся такими:

$$(4) \qquad \begin{cases} 0=z+\varphi'(u) \\ 0=\psi'(u)z+\vartheta'(u), \end{cases}$$

мы можемъ исключить x, y, z изъ 4 уравненій (1) пред. § и (4) настоящаго §, или, такъ какъ въ (4) x и y уже не входятъ,— исключить z изъ (4) наст. §, чрезъ что получится такое соотношеніе между тремя функціями φ, ψ и ϑ:

$$(5) \qquad \vartheta'(u)=\varphi'(u)\psi'(u),$$

показывающее, что въ данномъ случаѣ и должно быть только двѣ произвольныя функціи $\varphi(u)$ и $\psi(u)$, такъ какъ третья такъ выразится чрезъ нихъ по уравненію (5):

$$(6) \qquad \vartheta(u)=\int\varphi'(u)\psi'(u)du.$$

Переходя къ исключенію произвольныхъ функцій $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ изъ системы уравненій (1) и (2), замѣчаемъ что здѣсь мы имѣемъ случай, разсмотрѣнный въ § 175, такъ что этотъ примѣръ будетъ служить для поясненія изложеннаго въ упомянутомъ сейчасъ §.

Дифференцируя по x и по y уравненіе (1), въ силу (2) будемъ имѣть такія два уравненія:

$$(7) \qquad \begin{cases} u+\psi(u)p=0; \\ \varphi(u)+\psi(u)q=0. \end{cases}$$

Этихъ уравненій еще недостаточно для исключенія трехъ величинъ u, $\varphi(u)$ и $\psi(u)$, ибо уравненіе (2) ихъ не содержитъ, а ихъ производныя по u. Поэтому дифференцируемъ первое изъ этихъ уравненій по x и по y; будемъ имѣть такія два уравненія:

$$(8) \qquad \begin{cases} \psi(u)r+(1+\psi'(u)p)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}p\right)=0, \\ \psi(u)s+(1+\psi'(u)p)\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}p\right)=0; \end{cases}$$

исключая отсюда 1, $(1+\psi'(u)p)$, мы будемъ имѣть:

$$\begin{vmatrix} \psi(u)r & \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p \\ \psi(u)s & \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}p \end{vmatrix}=0; \tag{9}$$

раздѣляя первый столбецъ на $\psi(u)$ и затѣмъ раскрывая опредѣлитель, отбросивши множитель $\psi(u)$, получимъ:

$$r\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right)-s\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)=0. \tag{10}$$

Точно также дифференцируя второе изъ уравненій (7) по x и по y, мы будемъ имѣть такія два уравненія:

$$\left.\begin{aligned} &\psi(u)s+(\varphi'(u)+\psi'(u)q)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)=0; \\ &\psi(u)t+(\varphi'(u)+\psi'(u)q)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right)=0; \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

исключая отсюда 1, $(\varphi'(u)+\psi'(u)q)$, мы получимъ:

$$\begin{vmatrix} \psi(u).s & \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p \\ \psi(u).t & \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q \end{vmatrix}=0; \tag{12}$$

раздѣляя первый столбецъ на $\psi(u)$ и отбрасывая его, затѣмъ раскрывая оставшійся опредѣлитель, получимъ:

$$s\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right)-t\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)=0. \tag{13}$$

Исключая теперь $\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right)$ и $-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)$ изъ уравненій (10) и (13), мы будемъ имѣть искомое частное дифференціальное уравненіе развертывающихся линейчатыхъ поверхностей въ формѣ опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix}=0, \tag{14}$$

или, раскрывая опредѣлитель:

$$rt-s^2=0. \tag{15}$$

Вспомнивъ уравненіе, дающее радіусы кривизны главныхъ сѣченій поверхности, сейчасъ усматриваемъ, что одинъ изъ радіусовъ будетъ безконеченъ, ибо лѣвая часть (15) есть коэффиціентъ при ρ^2 въ этомъ уравненіи; отсюда слѣдуетъ, что одно изъ главныхъ сѣченій идетъ вдоль прямолинейной производящей, и что эта производящая будетъ одною изъ линій кривизны. Выраженіе

$$(16) \qquad \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$$

есть мѣра кривизны поверхности по Гауссу (Gauss) *); изъ (15) слѣдуетъ, что эта кривизна равна нулю, какъ для плоскости. Вотъ какое характерное свойство развертывающихся поверхностей выражаетъ ихъ частное дифференціальное уравненіе, которое 2-го порядка.

178. Мы видѣли, что уравненіе съ частными производными перваго порядка можетъ получиться изъ первообразнаго либо чрезъ исключеніе n произвольныхъ постоянныхъ, либо чрезъ исключеніе произвольной функціи отъ $n-1$ другихъ функцій, либо явно данныхъ, либо неявно уравненіями ихъ опредѣляющими. Отсюда слѣдуетъ, что частное дифференціальное уравненіе 1-го порядка можетъ имѣть и интегралъ, содержащій n произвольныхъ постоянныхъ, если n независимыхъ перемѣнныхъ, называемый *полнымъ интеграломъ*, и другой, содержащій произвольную функцію и называемый *общимъ интеграломъ*. Лагранжъ показалъ, что послѣдній можетъ быть полученъ изъ перваго съ помощью измѣненія произвольныхъ постоянныхъ.

Пусть

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, \ldots x_n, z; p_1, p_2 \ldots p_n) = 0$$

есть данное уравненіе съ частными производными перваго порядка, а

$$(2) \qquad F(x_1, x_2, \ldots x_n, z; C_1, C_2, \ldots C_n) = 0$$

его полный интегралъ. Дифференцируя его по x_i, считая $\overset{n}{\underset{1}{C_k}}$ постоянными, мы получимъ n уравненій:

$$(3) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial z} p_i = 0, \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

съ помощью которыхъ исключая $\overset{n}{\underset{1}{C_k}}$ изъ полнаго интеграла, по опредѣленіи такового, получимъ дифференціальное уравненіе (1). Пусть теперь $\overset{n}{\underset{1}{C_k}}$ будутъ функціи тѣхъ же перемѣнныхъ $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$ и z; дифференцируя (2) въ этомъ предположеніи, будемъ имѣть такія n уравненій:

$$(4) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial z} p_i + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial C_k}\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_i} + \frac{\partial C_k}{\partial z} p_i\right) = 0. \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

Эти уравненія совпадутъ съ (3), а слѣд. чрезъ исключеніе $\overset{n}{\underset{1}{C_k}}$ приведутъ къ тому же уравненію (1), когда функціи $\overset{n}{\underset{1}{C_k}}$ будутъ удовлетворять такимъ условіямъ:

---

*) См. его Disquisitiones generales circa superficies curvas. Göttingen, 1827, p. 16. Есть въ переводѣ на русскій языкъ. См. Записки Физико-Математическаго Общества студентовъ Имп. С.-Петербургскаго Университета. Т. II. (1886 г.).

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial C_k}\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_i}+\frac{\partial C_k}{\partial z}p_i\right)=0. \qquad (i=1,2\ldots n) \qquad (5)$$

Этимъ n уравненіямъ можно удовлетворить, или 1-ое) положивъ

$$\frac{\partial C_k}{\partial x_i}+\frac{\partial C_k}{\partial z}p_i=0, \qquad (i,k=1,2\ldots n) \qquad (6)$$

но тогда $\overset{n}{\underset{1}{C_n}}$ приведутся къ постояннымъ, и мы получимъ опять полный интегралъ (2); или 2-е) положивъ, что опредѣлитель

$$\left|\frac{\partial C_k}{\partial x_i}+\frac{\partial C_k}{\partial z}p_i\right|=0; \qquad (7)$$
$$(i,k=1,2\ldots n)$$

или наконецъ: 3-ье) положивъ

$$\frac{\partial F}{\partial C_k}=0. \qquad (k=1,2\ldots n) \qquad (8)$$

Въ послѣднемъ случаѣ мы будемъ имѣть n уравненій, изъ которыхъ $\overset{n}{\underset{1}{C_k}}$ опредѣлятся функціями $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$, z; внеся эти выраженія во (2), получимъ уравненіе:

$$\Phi(x_1, x_2,\ldots x_n, z)=0, \qquad (9)$$

дающее *особенный интегралъ* даннаго частнаго дифференціальнаго уравненія (1). Онъ, очевидно, представляетъ обертку всѣхъ полныхъ интеграловъ.

Переходя къ разсмотрѣнію второго случая, замѣтимъ, что условіе (7) выражаетъ только, что нѣкоторыя C_k суть функціи остальныхъ, не опредѣляя ближе, какія.

Пусть

$$C_n=\varphi(C_1, C_2,\ldots C_{n-1}), \qquad (10)$$

гдѣ φ произвольная функція остальныхъ C_k, которыя пусть будутъ независимыя одна отъ другой функціи. Тогда будетъ

$$\frac{\partial C_n}{\partial x_i}+\frac{\partial C_n}{\partial z}p_i=\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial C_n}{\partial C_l}\left(\frac{\partial C_l}{\partial x_i}+\frac{\partial C_l}{\partial z}p_i\right); \qquad (11)$$

внося это въ (5), получимъ:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\partial F}{\partial C_k}+\frac{\partial F}{\partial C_n}\frac{\partial C_n}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_i}+\frac{\partial C_k}{\partial z}p_i\right)=0. \qquad (i=1,\ldots n) \qquad (12)$$

Такихъ уравненій n, но одно изъ нихъ въ силу (7) есть слѣдствіе остальныхъ. Взявъ изъ нихъ $n-1$, (напр., первыхъ $n-1$,) мы будемъ имѣть систему $n-1$ однородныхъ, уже независимыхъ, уравненій, опредѣлитель которыхъ слѣд. не нуль, но вторыя части которыхъ суть нули; оттого система (12) эквивалентна такой:

$$\frac{\partial F}{\partial C_k}+\frac{\partial F}{\partial C_n}\frac{\partial C_n}{\partial C_k}=0. \qquad (k=1,2\ldots n-1) \tag{13}$$

Интегралъ, выражаемый совокупностью (2) и этихъ уравненій, т. е. системою:

$$\left\{\begin{aligned} &F(x_1, x_2,\ldots x_n, z; C_1, C_2\ldots C_n)=0,\\ &\frac{\partial F}{\partial C_k}+\frac{\partial F}{\partial C_n}\frac{\partial C_n}{\partial C_k}=0, \qquad (k=1.2\ldots n-1)\end{aligned}\right. \tag{14}$$

$\left(\text{гдѣ } \dfrac{\partial C_n}{\partial C_k}=\dfrac{\partial \varphi}{\partial C_k} \text{ въ силу } (10)\right)$, называется *общимъ интеграломъ*.

Но можно предположить также, чтобы удовлетворить условію (7), что изъ n величинъ C_k только первыя m независимы, а остальныя $n-m$ суть функціи ихъ; тогда, если независимыя будутъ:

$$C_1, C_2,\ldots C_m, \tag{15}$$

мы будемъ имѣть:

$$\frac{\partial C_{m+g}}{\partial x_i}+\frac{\partial C_{m+g}}{\partial z}p_i=\sum_{l=1}^{l=m}\frac{\partial C_{m+g}}{\partial C_l}\left(\frac{\partial C_l}{\partial x_i}+\frac{\partial C_l}{\partial z}p_i\right), \qquad (i=1,2\ldots n) \tag{16}$$

и потому (5) обратятся въ такія:

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial C_k}+\sum_{g=1}^{n-m}\frac{\partial F}{\partial C_{m+g}}\frac{\partial C_{m+g}}{\partial C_k}\right)\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_i}+\frac{\partial C_k}{\partial z}p_i\right)=0. \tag{17}$$

Такихъ уравненій будетъ n, но изъ нихъ независимыхъ будетъ только m, ибо въ силу (16) будутъ равны нулю всѣ миноры опредѣлителя (7) за исключеніемъ тѣхъ m-аго порядка, въ которыя не входятъ C_{m+g} $(g=1,2\ldots n-m)$. Выбравъ слѣд. изъ n уравненій (17) какія нибудь m, мы будемъ имѣть систему уравненій съ опредѣлителемъ отличнымъ отъ нуля, а вторыми частями, равными нулю. Такой системѣ уравненій можно удовлетворить только, полагая:

$$\frac{\partial F}{\partial C_k}+\sum_{g=1}^{n-m}\frac{\partial F}{\partial C_{m+g}}\frac{\partial C_{m+g}}{\partial C_k}=0, \qquad (k=1,2\ldots m) \tag{18}$$

Присоединяя эти m уравненій къ уравненію (2), получимъ интегралъ, выражаемый системою уравненій:

$$\left\{\begin{aligned} &F(x_1, x_2,\ldots x_n, z; C_1, C_2,\ldots C_n)=0,\\ &\frac{\partial F}{\partial C_k}+\sum_{g=1}^{n-m}\frac{\partial F}{\partial C_{m+g}}\cdot\frac{\partial C_{m+g}}{\partial C_k}=0, \qquad (k=1,2\ldots m)\end{aligned}\right. \tag{19}$$

гдѣ $C_{m+1}, \ldots C_n$ произвольныя функціи отъ $C_1, \ldots C_m$, и называемый *полуособеннымъ* (Mansion). Онъ менѣе общій, чѣмъ (14), потому что одна произвольная функція $n-1$ величинъ общнѣе выраженія, содержащаго $n-m$ произвольныхъ функцій отъ m аргументовъ, какъ въ томъ можно убѣдиться, предположивъ произвольную функцію $n-1$ разложенною въ рядъ по независимымъ произвольнымъ функціямъ отъ $n-m$ аргументовъ; она будетъ содержать безконечное множество такихъ функцій въ качествѣ своихъ коэффиціентовъ.

179. Теперь слѣдовало бы изложить доказательство существованія интеграла частнаго дифференціальнаго уравненія, каковое дано покойной *С. В. Ковалевской* въ ея докторской диссертаціи: «Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen». Berlin, 1874 *), и уже вошедшаго въ курсы Jordan'а, Picard'а и книгу Koenigsberger'а; но такъ какъ мы скоро убѣдимся à posteriori въ существованіи этого интеграла, ибо увидимъ, что интегрированіе такихъ уравненій сводится къ интегрированію системъ обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій, существованіе интеграловъ которыхъ нами уже доказано, то мы можемъ указать интересующимся этимъ доказательствомъ на только-что названныя сочиненія.

ГЛАВА XI.

Интегрированіе линейныхъ уравненій съ частными производными 1-го порядка.

180. Разсмотрѣвъ какъ получаются дифференціальныя уравненія съ частными производными, мы переходимъ теперь къ ихъ интегрированію, начиная съ простѣйшаго случая линейныхъ частныхъ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка, и потомъ системъ совокупныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка.

Пусть дано уравненіе:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i p_i = Z, \tag{1}$$

гдѣ X_i $(i=1,2\ldots n)$ и Z суть функціи $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$ и z. Этому уравненію можно дать другой видъ. Пусть

$$f(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z) = 0 \tag{2}$$

*) Напечатанной также въ журналѣ Креля, т. LXXX.

есть его интегралъ, слѣд. даетъ для z функцію, обращающую уравненіе (1) въ тождество. Дифференцируя его по x_i, будемъ имѣть:

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial z}p_i=0; \qquad (i=1,2\ldots n)$$

отсюда

$$(4) \qquad p_i=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}; \qquad (i=1,2\ldots n)$$

подставляя это въ (1), освобождая отъ знаменателей, и перенося все въ одну часть, будемъ имѣть такое уравненіе:

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i\frac{\partial f}{\partial x_i}+Z\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Такимъ образомъ данное уравненіе мы замѣнили однороднымъ линейнымъ уравненіемъ съ частными производными функціи f отъ $n+1$ независимыхъ перемѣнныхъ $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$ и z, которая сама не входитъ въ уравненіе. Найдя функцію $f(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z)$, удовлетворяющую этому уравненію, мы получимъ интегралъ даннаго уравненія, приравнивая её нулю. На основаніи этого мы можемъ ограничиться однородными линейными уравненіями.

181. Мы видѣли въ § 161, что интегрированіе системы обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій и интегрированіе линейнаго однороднаго уравненія съ частными производными суть задачи, сводящіяся одна на другую. Мы пришли къ этому выводу, исходя отъ системы обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій; теперь мы возьмемъ частныя дифференціальныя уравненія за исходный пунктъ.

И такъ пусть дано линейное однородное уравненіе:

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n} X_j\frac{\partial f}{\partial x_j}=0,$$

гдѣ $\overset{n}{\underset{1}{X_j}}$ суть функціи отъ $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$. Пусть

$$(2) \qquad f_k(\overset{n}{\underset{1}{x_i}})$$

есть его интегралъ; тогда по самому опредѣленію будемъ имѣть тождественно:

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{n} X_j\frac{\partial f_k}{\partial x_j}=0.$$

Линейное однородное уравненіе съ частными производными перваго порядка (1) можетъ имѣть только $n-1$ независимыхъ интеграловъ. Дѣйствительно, если имѣемъ n интеграловъ вида (2), ($k=1,2...n$), то будемъ имѣть n такихъ уравненій, какъ (3); исключивъ изъ нихъ X_j, мы получимъ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

а отсюда слѣдуетъ, что между $f_k(\overset{n}{\underset{1}{x_i}})$ существуетъ такая зависимость:

$$\Phi(f_1, f_2, \dots f_n) = 0. \tag{5}$$

И дѣйствительно мы пришли въ пред. главѣ къ уравненію (1), исключая произвольную функцію Φ изъ такого именно уравненія.

Если $f_1, f_2, \dots f_{n-1}$ суть независимыя рѣшенія уравненія (1), т. е. не связанныя соотношеніемъ вида (5), то всякая произвольная функція ихъ будетъ опять интеграломъ уравненія (1). Дѣйствительно, если

$$f_n = \varphi(f_1, f_2, \dots f_{n-1}), \tag{6}$$

то будетъ

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial f_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}; \tag{7}$$

подставляя въ (1), будемъ имѣть:

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial f_n}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} X_j \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial f_k} \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \equiv 0. \tag{8}$$

на основаніи (3).

Если мы приравняемъ каждый изъ этихъ независимыхъ интеграловъ произвольной постоянной, то будемъ имѣть $k-1$ уравненій:

$$f_k(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}) = C_k; \qquad (k=1,2,\dots(n-1)) \tag{9}$$

разсматривая ихъ какъ совмѣстныя, мы превратимъ $n-1$ изъ перемѣнныхъ $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$, напр. первыхъ, въ функціи остальной x_n. Дифференцируя уравненія (9), будемъ имѣть:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} dx_j = 0; \qquad (k=1,2\dots(n-1)) \tag{10}$$

сравнивая эту систему съ системой (3) для $k=1,2\dots n-1$:

(11) $$\sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = 0, \qquad (k=1,2\ldots(n-1))$$

заключаемъ, что dx_j должны быть пропорціональны X_j:

(12) $$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Слѣд. вотъ какимъ дифференціальнымъ совокупнымъ уравненіямъ будутъ удовлетворять функціи, опредѣляемыя уравненіями (9). Отсюда слѣдуетъ, что для того чтобы найти функціи $f_k(\overset{n}{\underset{1}{x_i}})$, которыя были бы независимыми интегралами уравненія (1), достаточно найти $n-1$ независимыхъ интеграловъ системы обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій (12), и рѣшить ихъ по произвольнымъ постояннымъ C_k $(k=1,2\ldots n-1)$, такъ что получатся уравненія вида (9); тогда лѣвыя части этихъ уравненій и будутъ $n-1$ независимыми рѣшеніями уравненія (1); произвольная функція φ отъ нихъ, (6), будетъ тогда общимъ интеграломъ частнаго дифференціальнаго уравненія (1).

182. *Монжъ (Monge)* былъ приведенъ къ этому выводу слѣдующими разсужденіями. Пусть дано линейное частное дифференціальное уравненіе:

(1) $$\sum_{j=1}^{n} X_j p_j = Z,$$

гдѣ $\overset{n}{\underset{1}{X_j}}$ и Z функціи отъ $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$ и z, а $p_j = \frac{\partial z}{\partial x_j}$. Въ силу послѣдняго мы имѣемъ также

(2) $$dz = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i;$$

съ помощью этого соотношенія можно исключить одну изъ величинъ $\overset{n}{\underset{1}{p_i}}$, напр. p_n, изъ (1). Изъ (2) имѣемъ:

(3) $$p_n = \frac{dz - \sum_{i=1}^{n-1} p_i dx_i}{dx_n};$$

вставляя это въ (1), будемъ имѣть:

(4) $$\sum_{j=1}^{n-1} X_j p_j + X_n \frac{dz - \sum_{i=1}^{n-1} p_i dx_i}{dx_n} = Z,$$

или

(5) $$\sum_{j=1}^{n-1}\left(X_j - X_n \frac{dx_j}{dx_n}\right) p_j + X_n \frac{dz}{dx_n} - Z = 0.$$

Чтобы исключить отсюда $\overset{n-1}{\underset{1}{p_j}}$, положимъ

$$X_j - X_n \frac{dx_j}{dx_n} = 0; \qquad (j=1,2\ldots n-1) \tag{6}$$

тогда (5) приведется къ такому:

$$X_n \frac{dz}{dx_n} - Z = 0. \tag{7}$$

Систему уравненій, (6) (условныхъ), и (7) (обусловленнаго) можно представить въ видѣ такой пропорціи:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z}. \tag{8}$$

Найдя интегралы этой системы и рѣшивъ ихъ по произвольнымъ постояннымъ, будемъ имѣть:

$$f_k(x_1, x_2 \ldots x_n; z) = C_k. \qquad (k=1,2\ldots n) \tag{9}$$

Если въ этой системѣ функцій f_k будемъ измѣнять перемѣнныя такъ, чтобы $n-1$ изъ этихъ функцій напр. $n-1$ первыхъ, сохраняли свое значеніе, то и послѣдняя будетъ его сохранять, какъ интегралъ обусловленнаго уравненія, всегда имѣющаго мѣсто одновременно съ условными. Отсюда слѣдуетъ, что между функціями $f_k(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z)$ должна имѣть мѣсто связь такого рода:

$$\Phi(f_1, f_2, \ldots f_n) = 0, \tag{10}$$

гдѣ функція Φ ничѣмъ однако не опредѣлена, и потому есть произвольная *).

Переходя къ примѣрамъ, замѣтимъ, что на практикѣ нѣтъ надобности дѣлать того преобразованія, которое въ § 180 было приведено ради теоретическихъ цѣлей, ради симметріи; ибо по данному частному дифференціальному уравненію вида (1) настоящаго §, можно сразу написать ту систему (8), къ интегрированію которой сводится отысканіе частныхъ рѣшеній уравненія (1), независимыхъ между собою.

183. *Примѣръ 1.* Пусть дано уравненіе:

$$ap + bq = 1, \tag{1}$$

—частное дифференціальное уравненіе цилиндрическихъ поверхностей. Система (8) будетъ для этого уравненія такая:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}; \tag{2}$$

---

*) Эту мысль развивали въ Москвѣ А. Ю. Давыдовъ, К. Петерсонъ въ статьяхъ, помѣщенныхъ въ Математическомъ Сборникѣ, и Н. А. Шапошниковъ въ своей диссертаціи подъ заглавіемъ: „Интегрированіе уравненій съ полными дифференціалами и частными производными перваго порядка". Москва, 1880.

слѣд. мы имѣемъ систему такихъ двухъ совокупныхъ уравненій:

$$(3) \qquad \begin{cases} dx - adz = 0; \\ dy - bdz = 0, \end{cases}$$

интегралы которыхъ будутъ:

$$(4) \qquad \begin{cases} x - az = \alpha, \\ y - bz = \beta; \end{cases}$$

слѣд. общее рѣшеніе уравненія (1) будетъ:

$$(5) \qquad \Phi(x - az, y - bz) = 0,$$

согласно съ § 168.

Примѣръ 2. Дано уравненіе коническихъ поверхностей:

$$(1) \qquad (x-\alpha)p + (y-\beta)q = z - \gamma.$$

Система (8) для него будетъ такая:

$$(2) \qquad \frac{dx}{x-\alpha} = \frac{dy}{y-\beta} = \frac{dz}{z-\gamma};$$

она равносильна такимъ другимъ уравненіямъ:

$$(3) \qquad \frac{dx}{x-\alpha} - \frac{dz}{z-\gamma} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dy}{y-\beta} - \frac{dz}{z-\gamma} = 0,$$

интегралы которыхъ соотвѣтственно суть (послѣ перехода отъ логариѳмовъ къ числамъ):

$$(4) \qquad \frac{x-\alpha}{z-\gamma} = m \quad \text{и} \quad \frac{y-\beta}{z-\gamma} = n,$$

гдѣ m и n произвольныя постоянныя. Потому общій интегралъ уравненія (1) будетъ:

$$(5) \qquad \Phi\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \frac{y-\beta}{z-\gamma}\right) = 0.$$

Примѣръ 3. Пусть дано уравненіе поверхностей вращенія:

$$(1) \quad [(y-\beta)c - (z-\gamma)b]p + [(cz-\gamma)a - (x-\alpha)c]q = [(x-\alpha)b - (y-\beta)a];$$

система (8) для этого уравненія будетъ:

$$\frac{dx}{(y-\beta)c - (z-\gamma)b} = \frac{dy}{(z-\gamma)a - (x-\alpha)} = \frac{dz}{(x-\alpha)b - (y-\beta)a} =$$

$$= \frac{2(x-\alpha)dx + 2(y-\beta)dy + 2(z-\gamma)dz}{0} = \frac{adx + bdy + cdz}{0},$$

гдѣ вторая строчка выведена изъ первой, помножая числителя и знаменателя трехъ отношеній соотвѣтственно первый разъ на $2(x-\alpha)$, $2(y-\beta)$, $2(z-\gamma)$, второй на a, b, c и складывая почленно. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\left.\begin{aligned} 2(x-\alpha)dx+2(y-\beta)dy+2(z-\gamma)dz=0;\\ adx+bdy+cdz=0; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

интегралы этихъ уравненій соотвѣтственно будутъ:

$$\left.\begin{aligned} (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=C_1,\\ ax+by+cz=C_2; \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

а потому общій интегралъ уравненія (1) будетъ:

$$\Phi\big((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2,\ ax+by+cz\big)=0. \qquad (5)$$

Примѣръ 4. Пусть дано уравненіе коноида:

$$xp+yq=0; \qquad (1)$$

соотвѣтственная система (8) будетъ:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{0}; \qquad (2)$$

эта пропорція равносильна такимъ уравненіямъ:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}; \quad dz=0, \qquad (3)$$

интегралы которыхъ будутъ:

$$\frac{y}{x}=C_1; \qquad z=C_2; \qquad (4)$$

слѣд. общій интегралъ уравненія (1) будетъ:

$$\Phi\left(\frac{y}{x},\ z\right)=0. \qquad (5)$$

Примѣръ 5. Дано уравненіе:

$$\sin x.p+\cos y.q=e^z; \qquad (1)$$

соотвѣтственная система (8) будетъ:

$$\frac{dx}{\sin x}=\frac{dy}{\cos y}=\frac{dz}{e^z}, \qquad (2)$$

или

$$\frac{dx}{\sin x}-e^{-z}dz=0; \quad \frac{dy}{\cos y}-e^{-z}dz=0; \qquad (3)$$

интегралы этихъ уравненій будутъ:

$$\log\operatorname{tg}\frac{x}{2}+e^{-z}=C_1; \quad \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)+e^{-z}=C_2, \qquad (4)$$

а потому общій интегралъ уравненія (1) будетъ:

$$\Phi\left(\log\operatorname{tg}\frac{x}{2}+e^{-z},\ \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)+e^{-z}\right)=0. \qquad (5)$$

Примѣръ 6. Дано уравненіе (Лагранжа):

$$(1)\qquad (y+z+u)\frac{\partial u}{\partial x}+(z+x+u)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y+u)\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z.$$

Составляемъ систему (8):

$$(2)\qquad \frac{dx}{y+z+u}=\frac{dy}{z+x+u}=\frac{dz}{x+y+u}=\frac{du}{x+y+z}=$$

вычитая изъ послѣдняго отношенія почленно *) каждое изъ предыдущихъ, присоединимъ еще такія отношенія:

$$(3)\qquad =\frac{du-dx}{x-u}=\frac{du-dy}{y-u}=\frac{du-dz}{z-u}=,$$

а складывая почленно всѣ отношенія, присоединимъ еще такія отношенія:

$$(4)\qquad =\frac{dx+dy+dz+du}{3(x+y+z+u)}=\frac{ds}{3s},$$

гдѣ для краткости положено $s=x+y+z+u$.

Такимъ образомъ, изъ системы (2) у насъ получилась такая:

$$(5)\qquad \frac{du-dx}{x-u}=\frac{du-dy}{y-u}=\frac{du-dz}{z-u}=\frac{ds}{3s},$$

эквивалентная такой системѣ 3-хъ уравненій:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{ds}{3s}+\dfrac{du-dx}{u-x}=0; \\ \dfrac{ds}{3s}+\dfrac{du-dy}{u-y}=0; \\ \dfrac{ds}{3s}+\dfrac{du-dz}{u-z}=0, \end{cases}$$

интегралы которыхъ, послѣ перехода отъ логариѳма къ числу, такъ представятся:

$$(7)\qquad s^{\frac{1}{3}}(u-x)=C_1;\quad s^{\frac{1}{3}}(u-y)=C_2;\quad s^{\frac{1}{3}}(u-z)=C_3,$$

а потому общій интегралъ уравненія (1) будетъ:

$$(8)\qquad \Phi(s^{\frac{1}{3}}(u-x),\ s^{\frac{1}{3}}(u-y),\ s^{\frac{1}{3}}(u-z))=0.$$

Примѣръ 7. Пусть дано уравненіе однородныхъ функцій:

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{n}p_i x_i=mz.$$

Система (8) пред. § для этого уравненія будетъ:

*) Это значитъ числителя изъ числителя, знаменателя изъ знаменателя.

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\ldots=\frac{dx_n}{x_n}=\frac{dz}{mz}, \tag{2}$$

эквивалентная такой:

$$\frac{dx_i}{x_i}-\frac{dx_n}{x_n}=0 \qquad (i=1,2\ldots n-1) \tag{3}$$

и

$$-m\frac{dx_n}{x_n}+\frac{dz}{z}=0. \tag{4}$$

Интегрируя ихъ, получимъ:

$$\frac{x_i}{x_n}=C_i \quad (i=1,2\ldots n-1); \qquad \frac{z}{x_m^n}=C_n; \tag{5}$$

слѣд., общій интегралъ уравненія (1) будетъ:

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_n},\ \frac{x_2}{x_n},\ldots\frac{x_{n-1}}{x_n},\ \frac{z}{x_n^m}\right)=0, \tag{6}$$

или, рѣшая относительно послѣдняго аргумента:

$$z=x^m\varphi\left(\frac{x_1}{x_n},\ \frac{x_2}{x_n},\ldots\frac{x_{n-1}}{x_n},\ 1\right), \tag{7}$$

гдѣ φ тоже произвольная функція, какъ и Φ въ (6); это уравненіе выражаетъ, что z есть какая-либо однородная функція измѣренія m.

184. Переходимъ теперь къ системамъ совокупныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной и той же функціи. Мы видѣли въ § 164, что когда первообразное уравненіе содержитъ m произвольныхъ постоянныхъ, причемъ $m<n$, числа независимыхъ перемѣнныхъ $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$, то чрезъ исключеніе ихъ получается не одно, а вообще $n+1-m$ уравненій съ частными производными одной и той же функціи. Точно такъ же, исключая изъ первообразнаго уравненія произвольную функцію m аргументовъ, при $m<n$, мы получимъ систему совокупныхъ уравненій съ частными производными одной функціи, а не одно такое уравненіе.

Мы покажемъ это въ примѣненіи къ интересующимъ насъ теперь линейнымъ уравненіямъ. Пусть дано уравненіе

$$\Phi(u_1,\ u_2,\ldots u_m)=0, \tag{1}$$

гдѣ $u_1, u_2,\ldots u_m$ суть функціи $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$ и z, причемъ $m<n$. Дифференцируя это уравненіе по x_i, получимъ n уравненій такого вида:

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\Phi}{\partial u_k}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{\partial u_k}{\partial z}p_i\right)=0; \qquad (i=1,2\ldots n) \tag{2}$$

отсюда нужно исключить $\frac{\partial \Phi}{\partial u_k}$ $(k=1,2\ldots m)$, имѣя $n>m$. Выберемъ $m-1$ первыхъ уравненій и которое-нибудь, напр. h-ое, изъ остальныхъ; получимъ такую систему:

$$(3)\qquad \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{\partial u_k}{\partial z}p_i\right)=0; \quad (i=1,2\ldots m-1) \\ \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h}+\frac{\partial u_k}{\partial z}p_h\right)=0; \end{cases}$$

исключая $\frac{\partial \Phi}{\partial u_k}$ $(k=1,2\ldots m)$, получимъ такой результантъ:

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial z}p_1 & \frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial z}p_1 & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_1}+\frac{\partial u_m}{\partial z}p_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_{m-1}}+\frac{\partial u_1}{\partial z}p_{m-1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_{m-1}}+\frac{\partial u_2}{\partial z}p_{m-1} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_{m-1}}+\frac{\partial u_m}{\partial z}p_{m-1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_h}+\frac{\partial u_1}{\partial z}p_h & \frac{\partial u_2}{\partial x_h}+\frac{\partial u_2}{\partial z}p_h & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n}+\frac{\partial u_m}{\partial z}p_h \end{vmatrix}=0,$$

который приведется къ такому:

$$(5)\qquad \sum_{j=1}^{m-1} X_j^{(h)}p_j+X_h^{(h)}p_h-Z^{(h)}=0.$$

Такъ какъ $h=m, m+1,\ldots n$, то мы имѣемъ $n-m+1$ такихъ уравненій. Эту первоначальную систему можно замѣнить какою-либо другою, если выбравъ систему функцій $M_g^{(h)}$, числомъ $n-m+1$, такую, чтобы опредѣлитель

$$(6)\qquad \left| M_g^{(h)} \right|_{g,h=1,2,\ldots n-m+1} \neq 0,$$

составимъ такія комбинаціи уравненій (5):

$$(7)\qquad \sum_{h=1}^{n-m+1} M_g^{(h)}\left(\sum_{j=1}^{m-1}X_j^{(h)}p_j+X_h^{(h)}p_h-Z^{(h)}\right)=0,\ (g=1,2\ldots n-m+1),$$

въ которое, вообще говоря, войдутъ всѣ $\overset{n}{\underset{1}{p_i}}$, такъ что оно будетъ вида:

$$(8)\qquad \sum_{i=1}^{n} A_i^{(g)}p_i-B^{(g)}=0. \qquad (g=1,2\ldots n-m+1)$$

Такое уравненіе можетъ быть обращено въ однородное, если положимъ, что z опредѣляется уравненіемъ:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n, z) = 0; \tag{9}$$

тогда отсюда будемъ имѣть

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial z} p_i = 0, \tag{10}$$

и, внося p_i отсюда въ (8), будемъ имѣть:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^{(g)} \frac{\partial f}{\partial x_i} + B^{(g)} \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{11}$$

Поэтому далѣе мы будемъ разсматривать такія уравненія:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0; \tag{12}$$

очень часто, короче, мы будемъ такъ ихъ писать:

$$A(f) = 0, \tag{13}$$

разумѣя подъ A такой операціонный символъ:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{14}$$

отдѣляя функціональный символъ отъ операціоннаго.

185. Совокупныя линейныя уравненія съ частными производными перваго порядка не могутъ быть задаваемы произвольно. Пусть

$$A(f) = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad \text{и} \quad B(f) = \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

будутъ два данныя уравненія. Разумѣя подъ f пока совершенно произвольную функцію, а не общее рѣшеніе системы, вставимъ лѣвую часть второго въ первое, а лѣвую часть перваго во второе вмѣсто f; будемъ имѣть:

$$A(B(f)) = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n} B_j \frac{\partial f}{d x_j} = \sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{j=1}^{n} B_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_i B_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

или

$$A(B(f)) = \sum_{j=1}^{n} A(B_j) \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_i B_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{2}$$

и точно такъ же:

$$B(A(f)) = \sum_{j=1}^{n} B(A_j) \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_i B_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}; \tag{3}$$

вычитая (3) изъ (2), получимъ такое тождество:

$$A(B(f))-B(A(f))=\sum_{i=1}^{n}[A(B_j)-B(A_j)]\frac{\partial f}{\partial x_j}. \tag{4}$$

Если теперь $f=f_1$ будетъ общее рѣшеніе совокупныхъ уравненій (1), то мы будемъ имѣть тождественно

$$A(f_1)=0 \quad \text{и} \quad B(f_1)=0, \tag{5}$$

и какъ 0 удовлетворяетъ всѣмъ однороднымъ уравненіямъ, какъ (1), то будетъ и

$$A(B(f_1))=A(0)=0 \quad \text{и} \quad B(A(f_1))=B(0)=0, \tag{6}$$

и потому (4) обратится отъ подстановки f_1 вмѣсто f въ такое:

$$\sum_{j=1}^{n}[A(B_j)-B(A_j)]\frac{\partial f_1}{\partial x_j}=0, \tag{7}$$

т. е. общее рѣшеніе уравненій (1) будетъ рѣшеніемъ и уравненія (7), выводимаго изъ нихъ посредствомъ операціи *взаимнаго дифференцированія*, какъ можно назвать тотъ процессъ, которымъ получено тождество (4) изъ $A(f)$ и $B(f)$, въ виду того, что по (14) пред. § эти операціи состоятъ изъ дифференцированій.

186. Пусть дана система уравненій:

$$X^{(h)}(f)=\sum_{j=1}^{n}X_j^{(h)}\frac{\partial f}{\partial x_j}=0; \qquad (h=1,2\ldots m<n) \tag{1}$$

всякое общее рѣшеніе всѣхъ этихъ m уравненій будетъ удовлетворять по только-что доказанному $\dfrac{m(m-1)}{2}$ такимъ уравненіямъ:

$$\sum_{j=1}^{n}[X^{(k)}(X_j^{(l)})-X^{(l)}(X_j^{(k)})]\frac{\partial f}{\partial x_j}=0; \tag{2}$$

замѣняя k и l всѣми возможными различными комбинаціями чиселъ изъ ряда $1, 2, 3\ldots n$. Нѣкоторые изъ этихъ результатовъ взаимнаго дифференцированія будутъ тождественно равны нулю (вслѣдствіе того, что всѣ ихъ коэффиціенты будутъ равны нулю) или на основаніи уравненій системы: другія нѣтъ; эти послѣднія уравненія присоединяемъ къ прежней системѣ и получаемъ новую систему въ $m'>m$ уравненій. Если $m'<n$, то съ ней поступаемъ точно такъ же и получаемъ новую систему въ $m''>m'$ уравненій, съ которой поступаемъ точно такъ же, пока не случится одного изъ слѣдующихъ случаевъ: 1) или который-нибудь результатъ взаимнаго дифференцированія приведется къ постоянной отличной отъ нуля, либо функціи однѣхъ независимыхъ перемѣнныхъ, въ какомъ случаѣ предложенная система несовмѣстима, ибо такой результатъ не можетъ быть приравненъ нулю, какъ того требуетъ (7) пред. §; или 2) дойдемъ до системы въ $m^{(g)}$ уравненій, причемъ будетъ $m^{(g)} > n$: тогда задача невозможна, и первоначально заданная система не имѣетъ общихъ рѣшеній; (въ случаѣ $m^{(g)} = n$ всѣ $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$); или 3) дойдемъ до такой системы, число уравненій которой $m^{(g)} < n$, но всѣ результаты взаимнаго дифференцированія обращаются въ нуль либо тождественно, либо на основаніи уравненій системы. Такая система называется *замкнутою* (по Коркину); если же всѣ результаты взаимнаго дифференцированія обращаются въ нуль тождественно, то тогда система называется *нормальною* (по Коркину) *). Интегрированіе данной системы приводится такимъ образомъ къ интегрированію замкнутой системы. Какъ увидимъ ниже, замкнутая въ свою очередь всегда можетъ быть преобразована въ нормальную, къ интегрированію которой такимъ образомъ всегда сведётся интегрированіе всякой данной системы совокупныхъ частныхъ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка, если только она имѣетъ рѣшеніе, т. е. если мы не приходимъ къ первымъ двумъ изъ возможныхъ случаевъ.

187. Мы покажемъ теперь, что замкнутая система, будучи подвергнута преобразованію, подобному тому, о которомъ говорилось въ § 184, останется замкнутою.

Пусть будутъ:

$$Z(f) = \sum_{i=1}^{n} Z_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{h=1}^{m} U_h X^{(h)}(f) = 0 \tag{1}$$

$$T(f) = \sum_{i=1}^{n} T_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{h=1}^{m} V_h X^{(h)}(f) = 0 \tag{2}$$

двѣ линейныя комбинаціи m уравненій (1) пред. §, коэффиціенты которыхъ U_h и V_h суть данныя функціи перемѣнныхъ независимыхъ $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$. Отсюда видно, что

$$Z_i = \sum_{h=1}^{m} U_h X_i^{(h)}, \tag{3}$$

$$T_i = \sum_{h=1}^{m} V_h X_i^{(h)}. \tag{4}$$

Подвергнемъ ихъ операціи взаимнаго дифференцированія; будемъ имѣть по (4) § 185, въ виду (3) и (4) настоящаго, такое уравненіе:

$$\begin{aligned} Z(T(f)) - T(Z(f)) = \sum_{i=1}^{n} \Bigg[\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{h=1}^{m} U_h X_j^{(h)} \Big) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\sum_{k=1}^{m} V_k X_i^{(k)} \Big) - \\ - \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{m} V_k X_j^{(k)} \Big) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\sum_{h=1}^{m} U_h X_i^{(h)} \Big) \Bigg] \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

*) Нѣкоторые авторы говорятъ: система въ инволюціи.

Коэффиціентъ общаго члена такъ преобразуется:

$$(6)\quad \begin{aligned}&\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}U_hV_k\sum_{j=1}^{n}\left(X_j^{(h)}\frac{\partial X_i^{(k)}}{\partial x_j}-X_j^{(k)}\frac{\partial X_i^{(h)}}{\partial x_j}\right)+\\&+\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left\{U_hX_i^{(k)}\sum_{j=1}^{n}X_j^{(h)}\frac{\partial V_k}{\partial x_j}-V_kX_i^{(h)}\sum_{j=1}^{n}X_j^{(k)}\frac{\partial U_h}{\partial x_j}\right\}=\\&=\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}U_hV_k\left[X^{(h)}\left(X_i^{(k)}\right)-X^{(k)}\left(X_i^{(h)}\right)\right]+\\&+\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left[U_hX_i^{(k)}X^{(h)}\left(V_k\right)-V_kX_i^{(h)}X^{(k)}\left(U_h\right)\right].\end{aligned}$$

Если внесемъ это въ (5), то оно приметъ такой видъ:

$$(7)\quad \begin{aligned}&\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}U_hV_k\sum_{i=1}^{n}\left[X^{(h)}\left(X_i^{(k)}\right)-X^{(k)}\left(X_i^{(h)}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial x_i}+\\&+\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left\{U_hX^{(h)}\left(V_k\right)\sum_{i=1}^{n}X_i^{(k)}\frac{\partial f}{\partial x_i}-V_kX^{(k)}\left(U_h\right)\sum_{i=1}^{n}X_i^{(h)}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}=0.\end{aligned}$$

Здѣсь вторая строчка, какъ это прямо видно, есть линейная комбинація уравненій (1) пред. §; но какъ они образуютъ замкнутую систему, то сумма по i, входящая въ первую строчку, будучи результатомъ взаимнаго дифференцированія двухъ уравненій системы (1) пред. §, тоже приведется къ линейной комбинаціи ихъ *); а потому и вся лѣвая часть (7) представитъ линейную комбинацію уравненій системы (1) пред. §. Но преобразованія уравненій этой системы, представители которыхъ суть (1) и (2) наст. §, алгебраически рѣшимы относительно $X^{(h)}(f)$, если коэффиціенты этой преобразованной системы такъ выбраны, что опредѣлитель, изъ нихъ составленный, не$=0$; а тогда $X^{(h)}(f)$ выразятся линейными функціями уравненій преобразованной системы; подставляя эти выраженія въ (7), мы будемъ имѣть въ лѣвой части его линейную функцію уравненій преобразованной системы. Итакъ, результатъ взаимнаго дифференцированія уравненій преобразованной системы будетъ линейная функція этихъ уравненій, и, слѣд., обращаться въ нуль на основаніи этихъ уравненій, а потому преобразованная система будетъ тоже замкнутая.

188. *Всякая замкнутая система всегда можетъ быть преобразована въ нормальную.* Для этого имѣются два способа: 1) способъ *Буля* или *Якоби* и 2) способъ *Клебша*. Въ этомъ § покажемъ первый способъ.

Пусть дана замкнутая система уравненій:

$$(1)\qquad X^{(h)}(f)=\sum_{i=1}^{n}X_i^{(h)}\frac{\partial f}{\partial x_i}=0;\qquad (h=1,2\ldots m)$$

*) Ибо $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ входятъ въ это выраженіе въ первыхъ степеняхъ.

рѣшивъ её по производнымъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}, \tag{2}$$

приведемъ её къ такой системѣ:

$$Y^{(k)}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^{n} Y_j^{(k)} \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0. \qquad (k=1,2\dots m) \tag{3}$$

Эта система будетъ тоже замкнутая по пред. §, такъ какъ ея уравненія будутъ линейныя комбинаціи уравненій (1), составляющихъ замкнутую систему; но мы сейчасъ покажемъ, что результаты взаимнаго дифференцированія уравненій системы (3) не могутъ быть линейными функціями уравненій (3). Въ самомъ дѣлѣ, по (4) § 185 будемъ имѣть:

$$Y^{(k)}\left(Y^{(l)}(f)\right) - Y^{(l)}\left(Y^{(k)}(f)\right) = \sum_{j=m+1}^{n} \left[Y^{(k)}\left(Y_j^{(l)}\right) - Y^{(l)}\left(Y_j^{(k)}\right)\right] \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, \tag{4}$$

такъ какъ члены отвѣчающіе производнымъ $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial f}{\partial x_l}$ будутъ $\equiv 0$, ибо

$$Y^{(k)}(1) - Y^{(l)}(0) \equiv 0, \qquad Y^{(k)}(0) - Y^{(l)}(1) \equiv 0, \tag{5}$$

такъ какъ

$$Y_k^{(k)} = 1, \quad Y_l^{(k)} = 0, \quad Y_k^{(l)} = 0, \quad Y_l^{(l)} = 1; \tag{6}$$

но выраженіе (4) не можетъ быть линейной комбинаціей выраженій (3), такъ какъ производныя (2), отсутствующія въ (4), не могутъ исчезнуть ни въ какой линейной комбинаціи уравненій (3), такъ какъ каждая изъ нихъ входитъ только въ одно изъ уравненій; слѣд., уравненіе (4) должно обращаться тождественно въ нуль, т. е. должно быть:

$$Y^{(k)}\left(Y_j^{l}\right) - Y^{(l)}\left(Y_j^{k}\right) \equiv 0, \qquad (j=m+1, \dots n) \tag{7}$$

а въ такомъ случаѣ система (4) будетъ нормальная.

189. Способъ Клебша представляетъ бо́льшую общность и не измѣняетъ, какъ предыдущій, нисколько вида уравненій. Выберемъ произвольно m функцій отъ $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$:

$$u_1, u_2, \dots u_m \tag{1}$$

такъ, чтобы, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ опредѣлителей:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{i_2}} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{i_m}} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial u_2}{\partial x_{i_2}} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_{i_m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial u_m}{\partial x_{i_2}} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial x_{i_m}} \end{vmatrix}, \tag{2}$$

гдѣ $i_1, i_2, \dots i_m$ какія-либо m различныхъ чиселъ изъ ряда $1, 2, 3, \dots n$, не былъ $=0$. Подставляя эти функціи въ лѣвыя части уравненій (1) пред. §, получимъ m рядовъ изъ m количествъ вида:

$$X^{(h)}(u_g), \qquad (h, g=1, 2 \dots m) \tag{3}$$

опредѣлитель изъ которыхъ

$$\left| X^{(h)}(u_g) \right|_{(h,g=1,2\dots m)} \tag{4}$$

не будетъ равенъ нулю. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ

$$X^{(h)}(u_g) = \sum_{j=1}^{n} X_j^{(h)} \frac{\partial u_g}{\partial x_j}, \tag{5}$$

то, по теоремѣ объ умноженіи опредѣлителей *), будетъ

$$\left| X^{(h)}(u_g) \right| = \sum \begin{vmatrix} X_{i_1}^{(1)} & X_{i_2}^{(1)} & \dots & X_{i_m}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{i_1}^{(m)} & X_{i_2}^{(m)} & \dots & X_{i_m}^{(m)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{i_2}} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{i_m}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial u_m}{\partial x_{i_2}} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial x_{i_m}} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

гдѣ $\sum$ распространяется на всѣ возможныя комбинаціи m значковъ изъ ряда $1, 2, \dots n$. Такъ какъ вторые множители не всѣ равны нулю, и, какъ составленные изъ произвольно выбранныхъ функцій, тоже произвольны, то эта сумма могла бы быть равна нулю, если бы были равны нулю отдѣльно всѣ первые опредѣлители каждаго члена суммы; но тогда система уравненій (1) пред. § содержала бы такія уравненія, которыя были бы слѣдствіемъ предыдущихъ: но такія уравненія обыкновенно предварительно выключаются изъ системы, какъ лишнія. Итакъ, опредѣлитель (4) не равенъ нулю. Составимъ теперь m такихъ уравненій:

$$X^{(h)}(f) = \sum_{g=1}^{m} X^{(h)}(u_g) Y^{(g)}(f), \qquad (h=1, 2 \dots m) \tag{7}$$

гдѣ $Y^{(g)}(f)$ пока неизвѣстныя функціи вида лѣвыхъ частей (1) пред. §. Рѣшая по нимъ эти уравненія, что возможно, ибо опредѣлитель (4) не $=0$, мы будемъ имѣть:

$$Y^{(g)}(f) = \sum_{h=1}^{m} A_h^{(g)} X^{(h)}(f), \tag{8}$$

гдѣ $A_h^{(g)}$ извѣстныя функціи отъ $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$. Слѣд., уравненія

$$Y^{(g)}(f) = 0 \tag{9}$$

*) См. мой „Краткій курсъ Высшей Алгебры". Изданіе 2-е. Харьковъ, 1892 г. §§ 179—180. Стр. 242—249.

будутъ преобразованіемъ системы (1) пред. §, а потому, по предложенію § 187, будутъ также, какъ и эти, образовать замкнутую систему. Покажемъ же, что эта система будетъ нормальная, т. е. что равенства

$$Y^{(g)}(Y^{(h)}(f)) - Y^{(h)}(Y^{(g)}(f)) = \sum_{k=1}^{m} B_k^{(g,h)} Y^{(k)}(l) \tag{10}$$

возможны не иначе, какъ при

$$B_k^{(g,h)} = 0. \tag{11}$$

Для доказательства этого замѣтимъ, что выраженія $Y^{(k)}(f)$ обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что

$$\left.\begin{aligned} &Y^{(k)}(u_k) = 1, \\ &Y^{(k)}(u_h) = 0. \qquad (h=1,2\ldots k-1, k+1,\ldots m). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $f = u_k$ въ (7); тогда его можно такъ написать, перенося всё въ одну часть:

$$\sum_{g=1}^{k-1} X^{(h)}(u_g) Y^{(g)}(u_k) + X^{(h)}(u_k)(Y^{(k)}(u_k) - 1) + \sum_{g=k+1}^{m} X^{(h)}(u_g) Y^{(g)}(u_k) = 0; \tag{13}$$
$$(h=1,2\ldots m)$$

такъ какъ опредѣлитель этой системы m однородныхъ уравненій есть (4), который не $=0$, то отсюда и слѣдуютъ такія равенства:

$$Y^{(k)}(u_k) - 1 = 0, \quad Y^{(g)}(u_k) = 0, \quad (g \neq k) \tag{14}$$

изъ которыхъ первое согласно съ первымъ изъ (12), а второе со вторымъ, ибо говоритъ, какъ и это послѣднее, что результатъ вставки въ $Y^{(k)}(f)$ вмѣсто f функціи со значкомъ, отличнымъ отъ значка $Y^{(k)}(f)$, будетъ нуль. Положимъ теперь въ (10) тождествѣ $f = u_k$; лѣвая часть его обратится въ нуль, а правая въ $B_k^{(g,h)}$, слѣд., будетъ имѣть:

$$0 = B_k^{(g,h)}; \tag{15}$$

здѣсь $k = 1,2,\ldots m$, ибо если $k = h$ или $k = g$, то всё таки лѣвая часть будетъ нуль по (14), какъ это уже мы видѣли раньше. Предложеніе, такимъ образомъ, доказано.

190. На основаніи этого мы можемъ ограничиться теперь разсмотрѣніемъ нормальныхъ системъ. Пусть даны два уравненія:

$$A(f) = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

и

$$B(f) = \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

такихъ, что

(3) $$A(B(f)) - B(A(f)) = 0.$$
слѣд.
(4) $$A(B_i) - B(A_i) = 0.$$

Пусть f_1 есть интегралъ уравненія (1), такъ что

(5) $$A(f_1) = 0;$$

полагая $f = f_1$ въ (3), на основаніи (5) будемъ имѣть:

(6) $$A(B(f_1)) = 0,$$

откуда заключаемъ, что 1) если $B(f_1) = 0$, то f_1 есть общій интегралъ уравненій (1) и (2); 2) если $B(f_1) = b$, гдѣ b какая-либо постоянная, отличная отъ нуля, что f_1 не будетъ общимъ интеграломъ; 3) если $B(f_1) = \varphi(f_1)$, то $B(f_1)$ будетъ тоже интеграломъ уравненія, однако несущественно новымъ, такъ какъ онъ зависитъ отъ f_1; наконецъ, 4) если $B(f_1) = f_2$, гдѣ f_2 независимая отъ f_1 функція $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$, то f_2 будетъ новымъ интеграломъ уравненія (1). Полагая $f = f_2$ въ (3), получимъ потому слѣдующее:

(7) $$A(B(f_2)) = 0.$$

Здѣсь опять возможны тѣ же 4 случая съ такими же заключеніями; остановимся на случаѣ, когда

(8) $$B(f_2) = f_3,$$

гдѣ f_3 функція, независящая отъ f_1 и f_2. Полагая въ 3) $f = f_3$, получимъ:

(9) $$A(B(f_3)) = 0,$$

откуда будетъ слѣдовать, что, если

(10) $$B(f_3) = f_4,$$

гдѣ f_4 независящая отъ предыдущихъ функція, она будетъ новымъ интеграломъ. Продолжая такъ, мы выведемъ изъ f_1 при помощи однихъ дифференцированій цѣлый рядъ новыхъ интеграловъ:

(11) $$f_1, \quad f_2 = B(f_1), \quad f_3 = B(f_2), \quad f_4 = B(f_3), \ldots$$

которыя можно и такъ изобразить:

(12) $$f_1, \quad f_2 = B(f_1), \quad f_3 = B(B(f_2)) = B^2(f_1),$$
$$f_4 = B(f_3) = B(B(B(f_2))) = B^3(f_1), \text{ и т. д.}$$

Но, поступая такъ, въ виду того, что однородное линейное уравненіе съ частными производными перваго порядка по n независимымъ перемѣннымъ не можетъ имѣть болѣе $n-1$ независимыхъ интеграловъ, мы непремѣнно дойдемъ до такой функціи

(13) $$f_m = B^{m-1}(f_1),$$

для которой будутъ возможны лишь первые три изъ вышеупомянутыхъ случаевъ, т. е. 1) или будетъ $B^{m-1}(f_1)=0$, слѣд., такъ какъ $B^{m-1}(f_1)= =B(B^{m-2}(f_1))=0$ выраженіе

$$f_{m-1}=B^{m-2}(f_1) \tag{14}$$

будетъ общимъ интеграломъ уравненій (1) и (2); 2) будетъ $B^{m-1}(f_1)=b$, гдѣ b постоянная, не равная нулю, и 3) будетъ

$$B^{m-1}(f_1)=\psi(f_1, f_2, \dots f_{m-1}); \tag{15}$$

въ послѣднихъ двухъ случаяхъ $B^{m-1}(f_1)$ не будетъ общимъ интеграломъ уравненій (1) и (2), однако съ его помощью онъ можетъ быть найденъ.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ мы знаемъ $m-1$ независимыхъ интеграловъ:

$$f_1, \quad f_2=B(f_1), \quad f_3=B(f_2), \dots f_{m-1}=B(f_{m-2}); \tag{16}$$

произвольная функція отъ нихъ:

$$\Phi(f_1, f_2, \dots f_{m-1}) \tag{17}$$

будетъ тоже интеграломъ уравненія (1); посмотримъ, нельзя ли опредѣлить Φ такъ, чтобы выраженіе (17) удовлетворяло также и уравненію (2). Полагая въ немъ

$$f=\Phi(f_1, f_2, \dots f_{m-1}), \tag{18}$$

будемъ имѣть:

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial\Phi}{\partial f_k}B(f_k)=0, \tag{19}$$

что по (16) и (15) можетъ быть такъ написано:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}f_2+\frac{\partial\Phi}{\partial f_2}f_3+\dots+\frac{\partial\Phi}{\partial f_{m-2}}f_{m-1}+\frac{\partial\Phi}{\partial f_{m-1}}\psi(f_1, f_2, \dots f_{m-1})=0. \tag{20}$$

Для нахожденія интеграла этого линейнаго уравненія съ частными производными перваго порядка функціи Φ по перемѣннымъ $f_1, f_2, \dots f_{m-1}$, мы должны, слѣдуя изложенному въ началѣ этой главы способу, проинтегрировать такую систему обыкновенныхъ уравненій:

$$\frac{df_1}{f_2}=\frac{df_2}{f_3}=\dots=\frac{df_{m-2}}{f_{m-1}}=\frac{df_{m-1}}{\psi(f_1, f_2, \dots f_{m-1})}(=dt). \tag{21}$$

Вводя вспомогательную перемѣнную t, — для чего мы положили $=dt$ знаменатель этихъ отношеній, мы можемъ эту систему такъ написать:

$$\frac{df_1}{dt}=f_2; \ \frac{df_2}{dt}=f_3; \dots \ \frac{df_{m-2}}{dt}=f_{m-1}; \ \frac{df_{m-1}}{dt}=\psi(f_1, f_2 \dots f_{m-1}), \tag{22}$$

откуда будемъ имѣть:

$$(23)\qquad f_2=\frac{df_1}{dt},\ f_3=\frac{d^2f_1}{dt^2},\ldots f_{m-1}=\frac{d^{m-2}f_1}{dt^{m-2}},\ \frac{df_{m-1}}{dt}=\frac{d^{m-1}f_1}{dt^{m-1}},$$

и слѣд. такое уравненіе $m-1$-аго порядка:

$$(24)\qquad \frac{d^{m-1}f_1}{dt^{m-1}}=\psi\left(f_1,\frac{df_1}{dt},\frac{d^2f_1}{dt^2},\ldots\frac{d^{m-2}f_1}{dt^{m-2}}\right).$$

Найдя первый интегралъ этого уравненія свободный отъ t и рѣшивъ его по произвольной постоянной C, будемъ имѣть:

$$(25)\qquad \varphi\left(f_1,\frac{df_1}{dt},\frac{d^2f_1}{dt^2},\ldots\frac{d^{m-2}f_1}{dt^{m-2}}\right)=C,$$

или по (23):

$$(26)\qquad \varphi(f_1,f_2,f_3,\ldots f_{m-1})=C;$$

полагая

$$(27)\qquad f=\varphi(f_1,f_2,f_3,\ldots f_{m-1}),$$

мы будемъ имѣть рѣшеніе уравненія (20), и слѣд. общее рѣшеніе уравненій (1) и (2).

Въ случаѣ, когда

$$(28)\qquad B^{m-1}(f_1)=b$$

—постоянной, мы находимъ общій интегралъ нашихъ уравненій еще скорѣе. Въ этомъ случаѣ пара послѣднихъ отношеній (21) будетъ такая:

$$(29)\qquad \frac{df_{m-2}}{f_{m-1}}=\frac{df_{m-1}}{b},$$

что можно такъ представить:

$$(30)\qquad f_{m-1}df_{m-1}-bdf_{m-2}=0,$$

откуда, интегрируя, получаемъ:

$$(31)\qquad \frac{1}{2}f_{m-1}^2-bf_{m-2}=C,$$

и слѣд. общимъ рѣшеніемъ уравненій (1) и (2) будетъ функція:

$$(32)\qquad f=\frac{1}{2}f_{m-1}^2-bf_{m-2}.$$

191. Этотъ способъ не годится, когда $m=1$, т. е. когда уже

$$(1)\qquad f_2=B(f_1)=\psi(f_1)\quad\text{или}\ =b.$$

Дѣйствительно, тогда уравненіе (20) пред. § обратится въ такое:

$$(2)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial f_1}\psi(f_1)=0\quad\text{или}\quad\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}b=0,$$

откуда слѣдуетъ:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f_1}=0, \quad \text{слѣд.} \quad \Phi=C,$$

— рѣшеніе ни къ чему негодное. Въ этомъ случаѣ надобно найти другой интегралъ уравненія (1), пусть φ_1, отличный отъ f_1, и съ нимъ поступать, какъ мы поступали съ f_1. Если окажется, что уже

$$\varphi_2=B(\varphi_1)=\chi(\varphi_1) \quad \text{или} \quad =C, \tag{3}$$

то, хотя новыхъ интеграловъ съ помощью функціи φ_1 одними дифференцированіями получить уже нельзя, тѣмъ не менѣе теперь, имѣя два интеграла уравненія (1) пред. §, именно f_1 и φ_1, мы можемъ найти общій интегралъ обоимъ уравненіямъ (1) и (2). Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ и $\Phi(f_1, \varphi_1)$, гдѣ Φ произвольная функція, будетъ интеграломъ уравненія (1), и можно постараться опредѣлить Φ такъ, чтобы она удовлетворяла и второму уравненію. Подставляя её туда, будемъ имѣть уравненіе:

$$B(\Phi)=\frac{\partial \Phi}{\partial f_1}B(f_1)+\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}B(\varphi_1)=0 \tag{4}$$

или

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f_1}f_2+\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\varphi_2=0, \tag{5}$$

интеграломъ котораго будетъ рѣшенный по произвольной постоянной интегралъ такого обыкновеннаго уравненія:

$$\frac{df_1}{f_2}=\frac{d\varphi_1}{\varphi_2}, \tag{6}$$

или, если $f_2=F(f_1)$, $\varphi_2=F_1(\varphi_1)$, такого:

$$\frac{df_1}{F(f_1)}-\frac{d\varphi_1}{F_1(\varphi_1)}=0, \tag{7}$$

съ отдѣленными перемѣнными, интегралъ котораго будетъ:

$$\int\frac{df_1}{F(f_1)}-\int\frac{d\varphi_1}{F_1(\varphi_1)}=C, \tag{8}$$

а когда $f_2=a$, $\varphi_2=b$, такой:

$$\frac{f_1}{a}-\frac{\varphi_1}{b}=C. \tag{9}$$

192. Если дана система трехъ уравненій

$$A(f)=0, \qquad B(f)=0, \qquad C(f)=0, \tag{1}$$

образующихъ нормальную систему, то, найдя общій интегралъ φ_1 первыхъ двухъ уравненій, мы подставляемъ его въ тождества:

(2) $$A(C(f))-C(A(f))=0 \quad \text{и} \quad B(C(f))-C(B(f))=0;$$

будемъ имѣть, такъ какъ $A(\varphi_1)=0$ и $B(\varphi_1)=0$, слѣдующее:

(3) $$A(C(\varphi_1))=0 \quad \text{и} \quad B(C(\varphi_1))=0,$$

откуда видимъ, что функція

(4) $$\varphi_2=C(\varphi_1)$$

будетъ общимъ рѣшеніемъ уравненій (1), если только этотъ результатъ не$=0$, когда уже φ_1 будетъ само общимъ рѣшеніемъ трехъ уравненій. Если φ_2 будетъ $=b$ или $F(\varphi_1)$, то надобно обратиться къ другому общему интегралу первыхъ двухъ уравненій (1); если же φ_2 будетъ новая, независимая отъ φ_1, функція, то, вставляя её вмѣсто f въ тождества (2), увидимъ, что и

(5) $$\varphi_3=C(\varphi_2)=C^2(\varphi_1)$$

будетъ общимъ рѣшеніемъ первыхъ двухъ изъ уравненій (1), и, продолжая это, получимъ такой рядъ общихъ рѣшеній первыхъ двухъ изъ уравненій (1):

(6) $$\varphi_1,\ \varphi_2=C(\varphi_1),\ \varphi_3=C(\varphi_2)=C^2(\varphi_1),\ \varphi_4=C^3(\varphi_1)\ \ldots.$$

пока не дойдемъ до

(7) $$\varphi_{m'}=C^{m'-1}(\varphi_1),$$

которое будетъ либо нуль, — тогда $\varphi_{m'-1}$ будетъ общимъ рѣшеніемъ всѣхъ трехъ уравненій (1); либо $=b$, постоянной, либо функціи прочихъ, что непремѣнно случится, такъ какъ число независимыхъ интеграловъ, общихъ двумъ уравненіямъ, есть $n-2$. Тогда произвольная функція ихъ $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{m'-1})$ будетъ тоже рѣшеніемъ общимъ первыхъ двухъ изъ уравненій (1), и мы ищемъ её опредѣлить такъ, чтобы $f=\Phi$ удовлетворяло и третьему уравненій (1), именно $C(f)=0$. Это рѣшеніе получится совершенно такъ же, какъ въ пред. § для двухъ уравненій.

193. Такимъ способомъ можно найти рѣшеніе, общее m уравненіямъ нормальной системы:

(1) $$X^{(h)}(f)=0, \qquad (h=1,2\ldots m)$$

ибо если $f=f_1$ есть интегралъ, общій первымъ $k-1$ изъ этихъ уравненій, то, подставляя его въ тождество

(2) $$X^{(i)}(X^{(k)}(f_1))-X^{(k)}(X^{(i)}(f_1))=0 \qquad (i=1,2\ldots(k-1))$$

получимъ

(3) $$X^{(i)}(X^{(k)}(f_1))=0, \qquad (i=1,2\ldots(k-1))$$

такъ какъ $X^{(i)}(f_1)=0$, откуда будетъ слѣдовать, что и

(4) $$f_2=X^{(k)}(f_1)$$

будетъ интеграломъ общимъ первымъ $k-1$ изъ уравненій (1). Отсюда мы получимъ, какъ въ пред. §, интегралъ, общій этимъ уравненіямъ и k-ому, слѣд. k первымъ уравненіямъ (1). Когда постепенно дойдемъ до $k=m$, то будемъ имѣть интегралъ, общій всѣмъ уравненіямъ (1).

Эти вычисленія упрощаются для системы уравненій, приведенной къ нормальной по способу Буля или Якоби; въ этомъ случаѣ уравненія будутъ имѣть видъ (3) § 188:

$$X^{(h)}(f)=\frac{\partial f}{\partial x_h}+\sum_{j=m+1}^{n} X_j^{(h)}\frac{\partial f}{\partial x_j}=0. \qquad (h=1,2\ldots m) \qquad (5)$$

Первое изъ этихъ уравненій, именно:

$$X^{(1)}(f)=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\sum_{j=m+1}^{n} X_j^{(1)}\frac{\partial f}{\partial x_j}=0, \qquad (6)$$

удовлетворяется положеніемъ:

$$f=x_2,\ x_3,\ldots x_m, \qquad (7)$$

такъ какъ въ него не входятъ производныя отъ f по этимъ перемѣннымъ; слѣд. $m-1$ частныхъ интеграловъ мы уже знаемъ; если будемъ знать интегралъ f_1, отъ нихъ не зависящій, то, подставляя его въ слѣдующее, полученный результатъ опять въ то же уравненіе, и т. д., мы получимъ рядъ интеграловъ уравненія (6):

$$f_1,\quad f_2=X^{(2)}(f_1),\quad f_3=X^{(2)}(f_2),\ \ldots\ f_\mu=X^{(2)}(f_{\mu-1}), \qquad (8)$$

и если окажется, что f_μ функція предыдущихъ:

$$f_\mu=\varphi(f_1, f_2,\ldots f_{\mu-1}, x_2, x_3,\ldots x_m), \qquad (9)$$

то и всякая $f=\Phi(f_1, f_2,\ldots f_{\mu-1}, x_2,\ldots x_m)$ будетъ тоже его интеграломъ, и мы постараемся опредѣлить Φ такъ, чтобы было удовлетворено второе изъ уравненій (5). Но

$$X^{(2)}(\Phi)=\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}+\sum_{g=1}^{\mu-1}\frac{\partial \Phi}{\partial f_g}f_{g+1}=0; \qquad (10)$$

интегрированіе этого уравненія сводится къ нахожденію интеграла такой системы обыкновенныхъ уравненій:

$$\frac{dx_2}{1}=\frac{df_1}{f_2}=\frac{df_2}{f_3}=\cdots=\frac{df_{\mu-1}}{\varphi(f_1, f_2,\ldots f_{\mu-1}, x_2\ldots x_m)}, \qquad (11)$$

а этой системы къ такому уравненію высшаго порядка:

$$\frac{d^{\mu-1}f_1}{dx_2^{\mu-1}}=\varphi\left(f_1, \frac{df_1}{dx_2}, \frac{d^2f_1}{dx_2^2},\ldots \frac{d^{\mu-2}f_1}{dx_2^{\mu-2}}, x_2, x_3\ldots x_m\right). \qquad (12)$$

Найдя первый интегралъ его: $\varphi_1=C$, подставляемъ его въ $X^{(3)}(f)$, выводимъ, какъ прежде, серію рѣшеній $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\mu$, и ищемъ такъ-же общее рѣшеніе 3-хъ уравненій, что совершится съ помощію уравненія похожаго на (12), только вмѣсто f_1 будетъ φ_1, вмѣсто x_2 будетъ x_3, и т. д. Вотъ въ чемъ состоитъ упрощеніе: не нужно вводить вспомогательную перемѣнную t: ея роль по очереди берутъ на себя $x_2, x_3, \dots x_m$.— Если послѣднее уравненіе будетъ содержать $n-m+1$ перемѣнныхъ, то, найдя его общій интегралъ, мы будемъ имѣть общій интегралъ всей нормальной системы (5). Въ самомъ дѣлѣ, всѣ интегралы уравненія съ частными производными функціи Φ удовлетворяютъ обоимъ первымъ уравненіямъ, слѣдующаго такого уравненія всѣмъ тремъ, и т. д.

194. Пояснимъ изложенное на слѣдующемъ примѣрѣ: дана система совокупныхъ уравненій:

$$(1)\qquad A(f)=\frac{\partial f}{\partial x_1}+(x_2+x_4-3x_1)\frac{\partial f}{\partial x_3}+(x_3+x_1x_2+x_1x_4)\frac{\partial f}{\partial x_4}=0,$$

$$(2)\qquad B(f)=\frac{\partial f}{\partial x_2}+(x_3x_4-x_2)\frac{\partial f}{\partial x_3}+(x_1x_3x_4+x_2-x_1x_2)\frac{\partial f}{\partial x_4}=0.$$

Составляемъ:

$$A(B(f))-B(A(f))=$$

$$(3)\ =[A(x_3x_4-x_2)-B(x_2+x_4-3x_1)]\frac{\partial f}{\partial x_3}+[A(x_1x_3x_4+x_2-x_1x_2)-$$

$$-B(x_3+x_1x_2+x_1x_4)]\frac{\partial f}{\partial x_4}=M\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}+x_1\frac{\partial f}{\partial x_4}\right),$$

гдѣ для краткости положено

$$(4)\qquad M=-1+x_2x_4+x_4^2-3x_1x_4+x_3^2+x_1x_2x_3-x_2+x_1x_2;$$

такъ какъ этотъ результатъ (3) долженъ быть равенъ нулю, то, отбрасывая множитель M, содержащій лишь однѣ независимыя перемѣнныя и потому не могущій быть положенъ $=0$, приравниваемъ нулю другой множитель, и получаемъ новое частное дифференціальное уравненіе:

$$(5)\qquad C(f)=\frac{\partial f}{\partial x_3}+x_1\frac{\partial f}{\partial x_4}=0,$$

которое присоединяемъ къ прежней системѣ (1) и (2). Исключая съ помощью этого уравненія $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ изъ (1) и (2), мы получимъ такую систему трехъ частныхъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}A_1(f)&=\frac{\partial f}{\partial x_1}+(3x_1^2+x_3)\frac{\partial f}{\partial x_4}=0,\\ B_1(f)&=\frac{\partial f}{\partial x_2}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_4}=0,\\ C_1(f)&=\frac{\partial f}{\partial x_3}+x_1\frac{\partial f}{\partial x_4}=0.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Составляемъ результаты взаимнаго дифференцированія ихъ:

$$\left.\begin{aligned}&[A_1(x_2)-B_1(3x_1^2+x_3)]\frac{\partial f}{\partial x_4}=[0-0]\frac{\partial f}{\partial x_4}\equiv 0;\\ &[A(x_1)-C_1(3x_1^2+x_3)]\frac{\partial f}{\partial x_4}=[1-1]\frac{\partial f}{\partial x_4}\equiv 0;\\ &[B(x_1)-C_1(x_2)]\frac{\partial f}{\partial x_4}=[0-0]\frac{\partial f}{\partial x_4}\equiv 0;\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

отсюда заключаемъ, что система (6) есть нормальная.

Интегрируемъ первое изъ уравненій (6); для этого пишемъ такое обыкновенное уравненіе:

$$\frac{dx_1}{1}=\frac{dx_4}{3x_1^2+x_3},\tag{8}$$

или

$$(3x_1^2+x_3)dx_1-dx_4=0;\tag{8'}$$

интегралъ его будетъ:

$$x_1^3+x_1x_3-x_4=C;\tag{9}$$

слѣд.

$$f_1=x_1^3+x_1x_3-x_4\tag{10}$$

есть рѣшеніе уравненія $A_1(f)$. Подставляемъ его въ $B_1(f)$, будемъ имѣть:

$$B_1(x_1^3+x_1x_3-x_4)=0-x_2.1=f_2;\tag{11}$$

$$B_1(-x_2)=-1+x_2.0=-1\quad\text{(постоянному)},\tag{12}$$

слѣд., этимъ способомъ получили одинъ интегралъ $f_2=-x_2$ сверхъ прежняго f_1, (10); слѣд., выраженіе

$$\Phi(f_1,f_2)=\Phi(x_1^3+x_1x_3-x_4,-x_2),\tag{13}$$

гдѣ Φ какая угодно функція, будетъ тоже интеграломъ перваго изъ уравненій (6). Опредѣлимъ теперь Φ такъ, чтобы выраженіе (13) удовлетворяло и второму изъ уравненій (6); это приводитъ насъ, въ виду (11) и (12), къ уравненію:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}f_2+\frac{\partial\Phi}{\partial f_2}(-1)=0;\tag{14}$$

для интегрированія его составляемъ уравненіе:

(15)
$$\frac{df_1}{f_2}=\frac{df_2}{-1},$$

которое можно такъ представить:

(16)
$$df_1+f_2df_2=0;$$

интегралъ этого уравненія есть:

(17)
$$f_1+\frac{1}{2}f_2^2=C;$$

слѣд., рѣшеніе уравненія (14) будетъ функція

(18)
$$\varphi=f_1+\frac{1}{2}f_2^2,$$

или, вводя сюда вмѣсто f_1 и f_2 ихъ выраженія чрезъ независимыя перемѣнныя изъ (10) и (11):

(19)
$$\varphi=x_1^3+x_1x_3-x_4+\frac{1}{2}x_2^2.$$

Подставляемъ теперь эту функцію вмѣсто f въ третье изъ уравненій (6), получаемъ:

(20)
$$C_1(x_1^3+x_1x_3-x_4+\frac{1}{2}x_2^2)=x_1-x_1=0;$$

отсюда слѣдуетъ, такъ какъ φ удовлетворяетъ и третьему уравненію изъ (6), что эта функція (19) представляетъ общее рѣшеніе всѣхъ трехъ уравненій системы (6), и другихъ, кромѣ какъ вида $\Phi(x_1^3+x_1x_3-x_4+\frac{1}{2}x_2^2)$, гдѣ Φ произвольная функція, не будетъ, такъ какъ уравненіе (14) содержитъ только 2 перемѣнныя $(2=4-3+1)$.

195. Пусть дана система m уравненій

(1)
$$X^{(h)}(f)=\sum_{i=1}^{n}X_i^{(h)}\frac{\partial f}{\partial x_i}=0; \qquad (h=1,2,\ldots m)$$

введемъ въ неё новыя перемѣнныя y_j, полагая

(2)
$$y_j=\varphi_j(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}).$$

Такъ какъ

(3)
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i},$$

то мы будемъ имѣть:

$$X^{(h)}(f)=\sum_{i=1}^{n}X_i^{(h)}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^{(h)}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f}{\partial y_j}=0, \qquad (4')$$

или

$$X^{(h)}(f)=\sum_{j=1}^{n}X^{(h)}(y_j)\frac{\partial f}{\partial y_j}=0. \qquad (4)$$

Если система (1) была замкнутая, то она останется такою и по введеніи новыхъ перемѣнныхъ. Въ самомъ дѣлѣ:

$$\overline{X}^{(h)}\left(\overline{X}^{(g)}(f)\right)-\overline{X}^{(g)}\left(\overline{X}^{(h)}(f)\right)^{*)}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{j'=1}^{n}\left(X^{(h)}(y_{j'})\frac{\partial X^{(g)}(y_j)}{\partial y_{j'}}-X^{(g)}(y_{j'})\frac{\partial X^{(g)}(y_j)}{\partial y_{j'}}\right)\right\}\frac{\partial f}{\partial y_j}=$$

(по (4)) $$=\sum_{j=1}^{n}\left[X^{(h)}\left(X^{(g)}(y_j)\right)-X^{(g)}\left(X^{(h)}(y_j)\right)\right]\frac{\partial f}{\partial y_j}. \qquad (5)$$

Но какъ система (1) по предложенію замкнутая, то

$$X^{(h)}\left(X^{(g)}(f)\right)-X^{(g)}\left(X^{(h)}(f)\right)=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k X^{(k)}(f); \qquad (6)$$

а потому (5) такъ перепишется, мѣняя порядокъ суммированія послѣ вставки:

$$\overline{X}^{(h)}\left(\overline{X}^{(g)}(f)\right)-\overline{X}^{(g)}\left(\overline{X}^{(h)}(f)\right)=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\sum_{j=1}^{n}X^{(k)}(y_j)\frac{\partial f}{\partial y_j}=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\overline{X}^{(k)}(f), \qquad (7)$$

т. е. и послѣ преобразованія она остается замкнутою, ибо результатъ взаимнаго дифференцированія по новымъ перемѣннымъ есть такая же линейная функція преобразованныхъ уравненій, какъ результатъ взаимнаго дифференцированія по прежнимъ перемѣннымъ отъ заданныхъ уравненій.

Въ частности, если имѣемъ нормальную систему:

$$X^{(h)}(f)=\frac{\partial f}{\partial x_h}+\sum_{i=m+1}^{n}X_i^{(h)}\frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad (h=1,2,\dots m) \qquad (8)$$

то она преобразуется въ замкнутую:

$$X^{(h)}(f)=\sum_{j=1}^{n}X^{(h)}(y_j)\frac{\partial f}{\partial y_j}=0, \qquad (h=1,2,\dots m) \qquad (9)$$

ибо нормальная есть лишь частный случай замкнутой; если же мы рѣшимъ её по частнымъ производнымъ, взятымъ по новымъ перемѣннымъ $y_1, y_2, \dots y_m$, то получимъ нормальную систему:

*) Чертою надъ X мы хотимъ указать, что взаимное дифференцированіе производится по новымъ перемѣннымъ.

(10) $$Y^{(h)}(f)=\frac{\partial f}{\partial y_h}+\sum_{i=m+1}^{n} Y_i^{(h)}\frac{\partial f}{\partial y_i},$$

такъ что теперь будемъ имѣть:

(11) $$Y^{(h)}\left(Y^{(g)}(f)\right)-Y^{(g)}\left(Y^{(h)}(f)\right)=0.$$

196. Нормальная система, или *Якобіева*, какъ многіе её называютъ, [(8) пред. §], имѣетъ $n-m$ независимыхъ интеграловъ. Если допустить, что теорема справедлива для случая $m-1$ уравненій съ $n-1$ перемѣнными, то её можно такъ доказать. Уравненіе

(1) $$X^{(1)}(f)=0$$

имѣетъ, будучи разсматриваемо отдѣльно отъ прочихъ, $n-1$ независимыхъ интеграловъ, пусть:

(2) $$y_2, y_3, \ldots y_n;$$

присоединимъ къ нимъ произвольную функцію y_1 отъ $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$ и введемъ вмѣсто $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$ перемѣнныя независимыя $\overset{n}{\underset{1}{y_j}}$; уравненіе (1) превратится въ такое:

(3) $$X^{(1)}(f)=\sum_{j=1}^{n} X^{(1)}(y_j)\frac{\partial f}{\partial y_j}=X^{(1)}(y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1}=0,$$

такъ какъ $X^{(1)}(y_j)=0$ для $j=2,3\ldots n$;— остальныя уравненія системы (8) пред. §—въ такія:

(4) $$X^{(h)}(f)=\sum_{j=1}^{n} X^{(h)}(y_j)\frac{\partial f}{\partial y_j}=0, \qquad (h=2,3,\ldots m)$$

что приведется къ такой нормальной:

(5) $$\begin{cases} Y^{(1)}(f)=\dfrac{\partial f}{\partial y_1}=0. \\ Y^{(h)}(f)=\dfrac{\partial f}{\partial y_h}+\displaystyle\sum_{j=m+1}^{n} Y_j^{(h)}\frac{\partial f}{\partial y_j}=0. \qquad (h=2,3,\ldots m) \end{cases}$$

Результатъ взаимнаго дифференцированія перваго изъ этихъ уравненій съ каждымъ изъ остальныхъ будетъ такой:

(6) $$Y^{(1)}\left(Y^{(h)}(f)\right)-Y^{(h)}\left(Y^{(1)}(f)\right)=\sum_{j=m+1}^{n}\frac{\partial Y_j^{(h)}}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial y_j}=0;$$

это выраженіе должно быть тождественно $=0$, такъ какъ система (5) нормальная; а это возможно, лишь когда

(7) $$\frac{\partial Y_j^{(h)}}{\partial y_1}=0;$$

отсюда видимъ, что коэффиціенты уравненій (5) $(h=2,3\dots m)$ не зависятъ отъ y_1. Такимъ образомъ, эти уравненія, отдѣльно взятыя отъ перваго изъ нихъ, составляютъ нормальную систему уравненій, числомъ $m-1$, съ независимыми перемѣнными $y_2, y_3, \dots y_n$, числомъ $n-1$. Эта система, по допущенію, имѣетъ $n-1-(m-1)=n-m$ независимыхъ интеграловъ; всѣ они удовлетворяютъ и первому изъ этихъ уравненій, ибо не зависятъ отъ y_1. Отсюда заключаемъ, что и вся система (5) имѣетъ $n-m$ независимыхъ интеграловъ, а слѣд. и данная система (8) пред. §, которой эта есть преобразованіе къ новымъ перемѣннымъ, будетъ имѣть ихъ своими интегралами, когда ихъ выразимъ чрезъ прежнія перемѣнныя. Слѣд. нормальная система (8) пред. § имѣетъ $n-m$ независимыхъ перемѣнныхъ, что и требовалось доказать. Такъ какъ это есть система линейныхъ однородныхъ уравненій, то всякая произвольная функція ихъ тоже будетъ интеграломъ системы, именно, общимъ интеграломъ ея.

197. Пусть система независимыхъ интеграловъ системы уравненій (8) § 195 будетъ

$$f_k(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}); \qquad (k=1,2,\dots n-m) \tag{1}$$

они будутъ независимы и въ разсужденіи однихъ $n-m$ независимыхъ перемѣнныхъ $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n$, — иначе — рѣшимы по этимъ перемѣннымъ. Допустимъ, что, вопреки нашему утвержденію, между ними существуетъ такое соотношеніе:

$$\Phi(f_1, f_2, \dots f_{n-m}; \overset{m}{\underset{1}{x_h}})=0, \tag{2}$$

въ которое не входятъ $x_{m+1}, \dots x_n$; внося это въ уравненія (8) § 195, мы будемъ имѣть:

$$\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial\Phi}{\partial f_k}X^{(h)}(f_k)+\frac{\partial\Phi}{\partial x_h}=\frac{\partial\Phi}{\partial x_h}=0, \tag{3}$$

ибо $X^{(h)}(f_k)\equiv 0$, такъ какъ f_k интегралы системы; слѣд. $\overset{m}{\underset{1}{x_h}}$ явно не входятъ во (2); а въ такомъ случаѣ между $\overset{m}{\underset{1}{f_k}}$ было бы соотношеніе, свободное отъ всѣхъ перемѣнныхъ, что противно предположенію, что они составляютъ систему независимыхъ интеграловъ уравненій (8) § 195.

Замѣтивъ это, можно получить съ помощію функцій (1) новую особенно примѣчательную систему интеграловъ: $\psi_1(\overset{n}{\underset{1}{x_h}}), \psi_2(\overset{n}{\underset{1}{x_h}}), \dots \psi_{n-m}(\overset{n}{\underset{1}{x_h}})$, обращающихся соотвѣтственно въ $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n$ для $x_i \overset{m}{\underset{1}{=}} c_i$, гдѣ c_i произвольныя величины. Для этого положимъ:

$$f_k(x_1, x_2, \dots x_m; x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n)=f_k\left(c_1, c_2, \dots c_m; \psi_1(\overset{n}{\underset{1}{x_h}}), \psi_2(\overset{n}{\underset{1}{x_h}}) \dots \psi_{n-m}(\overset{n}{\underset{1}{x_h}})\right); \tag{4}$$

гдѣ $k=1,2,\ldots(n-m)$. Рѣшая эти уравненія по функціямъ $\psi_l(\overset{n}{\underset{1}{x_h}})$, $(l=1,2,\ldots n-m)$, мы выразимъ ихъ чрезъ функціи $f_k(\overset{n}{\underset{1}{x_i}})$, $(k=1,2,\ldots n-m)$; слѣд. по замѣчанію конца пред. § функціи ψ_l будутъ, какъ функціи отъ f_k, интегралами нашей системы уравненій, и при томъ независимыми по только-что сдѣланному замѣчанію; изъ формы же уравненій (4) ясно, что при $x_h \overset{m}{\underset{1}{=}} c_h$ будетъ $\psi_g(\overset{n}{\underset{1}{x_h}})=x_{m+g}$.

198. Майеръ указалъ подстановку, съ помощью которой достигается большое упрощеніе въ интегрированіи системы (8) § 195; для этого стоитъ только въ эти уравненія вмѣсто $\overset{n}{\underset{1}{x_h}}$ ввести перемѣнныя $\overset{n}{\underset{1}{y_j}}$, положивъ:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1=c_1+(y_1-c_1); & x_h=c_h+(y_1-c_1)y_h, \quad (h=2,3,\ldots m) \\ & x_g=y_g \qquad (g=m+1,\, m+2,\ldots n) \end{cases}$$

тогда функціи $\psi_k(\overset{n}{\underset{1}{x_i}})$ обратятся въ такія функціи отъ $\overset{n}{\underset{1}{y_l}}$, которыя при $y_1=c_1$ обратятся соотвѣтственно въ y_g $(g=m+1, m+2,\ldots n)$, каковы бы ни были $y_2, y_3, \ldots y_m$, или въ x_g $(g=m+1, m+2,\ldots n)$ по послѣднимъ изъ уравненій (1).

Введемъ эти перемѣнныя въ нашу систему уравненій (8) § 195. Мы имѣемъ:

$$(2)\qquad \frac{\partial f}{\partial y_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\sum_{h=2}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_h}y_h;\ \frac{\partial f}{\partial y_h}=\frac{\partial f}{\partial x_h}(y_1-c_1)\ \ (h=2,3,\ldots m);\ \ \frac{\partial f}{\partial y_g}=\frac{\partial f}{\partial x_g},$$

гдѣ $g=m+1, m+2,\ldots n$. Помножая первое уравненіе нашей системы на 1, второе на y_2, третье на $y_3,\ldots$ послѣднее на y_m, и складывая, получимъ слѣдующее:

$$(3)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}+\sum_{h=2}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_h}y_h+\sum_{i=m+1}^{n}\Big(X_i^{(1)}+\sum_{h=2}^{m}X_i^{(h)}y_h\Big)\frac{\partial f}{\partial x_i}=0,$$

а помножая каждое изъ нихъ, начиная со второго, на y_1-c_1, слѣдующія уравненія:

$$(4)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_h}(y_1-c_1)+\sum_{i=m+1}^{n}X_i^{(h)}(y_1-c_1)\frac{\partial f}{\partial x_i}=0.\quad (h=2,3,\ldots m)$$

На основаніи (2), и полагая еще:

$$(5)\qquad X_i^{(1)}+\sum_{h=2}^{m}X_i^{(h)}y_h=Y_i^{(1)};\quad X_i^{(h)}(y_1-c_1)=Y_i^{(h)},$$

мы дадимъ имъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned} Y^{(1)}(f)&=\frac{\partial f}{\partial y_1}+\sum_{i=m+1}^{n} Y_i^{(1)}\frac{\partial f}{\partial y_i}=0;\\ Y^{(h)}(f)&=\frac{\partial f}{\partial y_h}+\sum_{i=m+1}^{n} Y_i^{(h)}\frac{\partial f}{\partial y_i}=0. \qquad (h=2,3,\dots m)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Легко провѣрить, что это система нормальная:

$$Y^{(1)}\left(Y^{(h)}(f)\right)-Y^{(h)}\left(Y^{(1)}(f)\right)=\sum_{i=m+1}^{n}\left[Y^{(1)}(Y^{(h)}_i)-Y^{(h)}(Y_i^{(1)})\right]\frac{\partial f}{\partial y_i}; \tag{7}$$

имѣя въ виду (5), получимъ:

$$Y^{(1)}(Y_j^{(h)})= \tag{8}$$

$$=\left(\frac{\partial X_j^{(h)}}{\partial x_1}+\sum_{g=2}^{m}\frac{\partial X_j^{(h)}}{\partial x_g}y_g\right)(y_1-c_1)+X_j^{(h)}+\sum_{i=m+1}^{n}(X_i^{(1)}+\sum_{g=2}^{m}X_i^{(g)}y_g)\frac{\partial X_j^{(h)}}{\partial x_i}(y_1-c_1);$$

$$Y^{(h)}(Y_j^{(1)})= \tag{8'}$$

$$=\left(\frac{\partial X_j^{(1)}}{\partial x_h}+\sum_{g=2}^{m}\frac{\partial X_j^{(g)}}{\partial x_h}y_g\right)(y_1-c_1)+X_j^{(h)}+\sum_{i=m+1}^{n}X_i^{(h)}(y_1-c_1)\left(\frac{\partial X_j^{(1)}}{\partial x_i}+\sum_{g=2}^{m}\frac{\partial X_j^{(g)}}{\partial x_i}y_g\right);$$

вычитая нижнее изъ верхняго, будемъ имѣть:

$$Y^{(1)}(Y_j^{(h)})-Y^{(h)}(Y_j^{(1)})= \tag{9}$$

$$=\left\{\left(X^{(1)}(X_j^{(h)})-X^{(h)}(X_j^{(1)})\right)+\sum_{g=2}^{m}\left(X^{(g)}(X_j^{(h)})-X^{(h)}(X_j^{(g)})\right)y_g\right\}(y_1-c_1);$$

здѣсь же каждый членъ суммы въ $\{\ \}$ равенъ нулю, ибо предложенная система нормальна. Точно также

$$Y^{(k)}\left(Y^{(l)}(f)\right)-Y^{(l)}\left(Y^{(k)}(f)\right)=\sum_{i=m+1}^{n}\left(Y^{(k)}(Y_i^{(l)})-Y^{(l)}(Y_i^{(k)})\right)\frac{\partial f}{\partial y_i}, \tag{10}$$

гдѣ

$$Y^{(k)}(Y_i^{(l)})-Y^{(l)}(Y_i^{(k)})=\left(X^{(k)}(X_i^{(l)})-X^{(l)}(X_i^{(k)})\right)(y_1-c_1)^2, \tag{11}$$

что также тождественно равно нулю по той же причинѣ.

199. Для того, чтобы проинтегрировать систему уравненій (6) пред. §, достаточно, какъ показалъ Майеръ, проинтегрировать первое изъ уравненій этой системы. Въ самомъ дѣлѣ, интегрированіе этого уравненія приводится къ интегрированію такой системы обыкновенныхъ уравненій:

$$\frac{dy_1}{1}=\frac{dy_2}{0}=\dots=\frac{dy_m}{0}=\frac{dy_{m+1}}{Y_{m+1}^{(1)}}=\frac{dy_{m+2}}{Y_{m+2}^{(1)}}=\dots=\frac{dy_n}{Y_n^{(1)}}; \tag{1}$$

интегралами этой системы будутъ уравненія:

(2) $\quad y_2=C_2,\ y_3=C_3,\dots y_m=C_m;\ \psi_1=C_{m+1},\ \psi_2=C_{m+2},\dots\psi_{n-m}=C_n;$

слѣд. общій интегралъ перваго изъ уравненій (6) будетъ:

(3)
$$\Phi(y_2, y_3,\dots y_m;\ \psi_1, \psi_2,\dots \psi_{n-m}).$$

Если мы нашли какой-либо интегралъ его:

(4)
$$f(y_1, y_2, y_3,\dots y_n),$$

то легко получить его выраженіе чрезъ предыдущіе, другими словами найти Φ для него. Положимъ:

(5) $\quad f(y_1, y_2,\dots y_m;\ y_{m+1}, y_{m+2}\dots y_n)=\Phi(y_2, y_3,\dots y_m;\ \psi_1, \psi_2,\dots \psi_{n-m});$

если сдѣлаемъ здѣсь $y_1=c_1$, то будетъ $\psi_k=y_{m+k}$ $(k=1,2\dots n-m)$, и мы получимъ:

(6) $\quad f(c_1, y_2,\dots y_m;\ y_{m+1}, y_{m+2},\dots y_n)=\Phi(y_2, y_3,\dots y_m;\ y_{m+1}, y_{m+2},\dots y_n);$

отсюда видно, что искомое Φ получится, если мы положимъ въ найденномъ интегралѣ $y_1=c_1$. Если затѣмъ на мѣстахъ, занимаемыхъ $y_{m+1}, y_{m+2}\dots y_n$, соотвѣтственно подставимъ $\psi_1, \psi_2,\dots \psi_{n-m}$, то получимъ искомое выраженіе нашего интеграла чрезъ систему (2):

(7) $\quad f(y_1, y_2,\dots y_m;\ y_{m+1}, y_{m+2},\dots y_n)=f(c_1, y_2,\dots y_m, \psi_1, \psi_2,\dots \psi_{n-m}).$

Если мы будемъ имѣть $n-m$ такихъ интеграловъ какъ (4), при томъ и независимыхъ между собою, то будемъ имѣть систему въ $n-m$ уравненій, подобныхъ (7), рѣшивъ которую по $\psi_1, \psi_2,\dots \psi_{n-m}$, и найдемъ эти функціи. Рѣшеніе всегда возможно, ибо $y_2, y_3\dots y_m$ и эти функціи, пусть $f_1, f_2\dots f_{n-m}$, независимы по предположенію.—Функціи $f_1, f_2,\dots f_{n-m}$ можно найти, отбросивъ въ системѣ (1) тѣ члены, которые содержатъ 0 въ знаменателѣ, и найдя $n-m$ независимыхъ интеграловъ оставшейся системы:

(8)
$$\frac{dy_1}{1}=\frac{dy_{m+1}}{Y^{(1)}_{m+1}}=\frac{dy_{m+2}}{Y^{(1)}_{m+2}}=\dots=\frac{dy_n}{Y^{(1)}_n},$$

трактуя въ ней $y_2, y_3,\dots y_m$ какъ постоянные параметры.

200. Найдя только одинъ интегралъ этой системы, можно найти алгебраически другіе, если воспользоваться прочими уравненіями системы (6) § 198. Пусть (7) пред. § будетъ такой интегралъ; тогда, рѣшая его по ψ_1, будемъ имѣть:

(1)
$$\psi_1=\vartheta(\overset{n}{\underset{1}{y_i}};\ \psi_2, \psi_3,\dots \psi_{n-m});$$

подставляя его въ уравненія (6) § 198, будемъ имѣть:

$$Y^{(h)}(\vartheta)=0=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vartheta}{\partial y_i}Y^{(h)}(y_i)+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi_k}Y^{(h)}(\psi_k), \tag{2}$$

или, такъ какъ

$$Y^{(h)}(\psi_k)=0,$$

слѣдующее:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vartheta}{\partial y_i}Y^{(h)}(y_i)=0. \tag{3}$$

Если это не тождество, то это будетъ уравненіе, содержащее хотя одну изъ функцій ψ_1, напр. ψ_2, (ибо иначе была бы зависимость между независимыми перемѣнными); рѣшая его по ψ_2, получимъ:

$$\psi_2=\vartheta_1(\overset{n}{\underset{1}{y_i}};\ \psi_3,\ldots\psi_{n-m}); \tag{4}$$

продолжая поступать такимъ же образомъ и далѣе, какъ было поступлено съ ψ_1, мы будемъ имѣть нѣсколько новыхъ интеграловъ. Операція остановится, когда получится такая функція:

$$\psi_g=\vartheta_g(\overset{n}{\underset{1}{y_i}};\ \psi_{g+1},\ldots\psi_{n-m}), \tag{5}$$

что будетъ тождественно

$$Y^{(h)}(\vartheta_g)=0; \qquad (h=2,3,\ldots n-m) \tag{6}$$

тогда, замѣнивъ $\psi_{g+1},\ldots\psi_{n-m}$ постоянными, получимъ функцію

$$\varphi_g=\vartheta_g(\overset{n}{\underset{1}{y_i}},\ C_{g+1},\ldots C_{n-m}), \tag{7}$$

которая будетъ удовлетворять всѣмъ уравненіямъ системы (6) пред. §.

Когда эта система будетъ проинтегрирована, то останется вернуться при помощи (1) § 198 къ прежнимъ перемѣннымъ, чтобы имѣть интегралы предложенной системы (8) § 195.

201. Пояснимъ изложенное на слѣдующемъ примѣрѣ. Пусть дана такая система:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x_1}+(3x_1^2+x_3)\frac{\partial f}{\partial x_4}=0,\\&\frac{\partial f}{\partial x_2}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_4}=0,\\&\frac{\partial f}{\partial x_3}+x_1\frac{\partial f}{\partial x_4}=0;\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

она нормальная, какъ мы видѣли въ § 194. Введемъ въ неё независимыя перемѣнныя Майера, полагая:

$$\left.\begin{aligned}x_1=c_1+(y_1-c_1);\quad &x_2=c_2+(y_1-c_1)y_2,\\&x_3=c_3+(y_1-c_1)y_3;\quad x_4=y_4.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Помноживъ первое изъ уравненій (1) на 1, второе на y_2, третье на y_3, сложимъ ихъ; получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}y_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}y_3+[3x_1^2+x_3+x_2y_2+x_1y_3]\frac{\partial f}{\partial x_4}=0, \tag{3}$$

или, по (2) § 198 и (2) настоящаго:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}+[3y_1^2+c_3+(y_1-c_1)y_3+(c_2+(y_1-c_1)y_2)y_2+y_1y_3]\frac{\partial f}{\partial y_4}=0. \tag{4}$$

Такъ какъ другія уравненія намъ не понадобятся, то мы переходимъ прямо къ интегрированію этого уравненія. Съ этою цѣлью составимъ уравненіе:

$$\frac{dy_1}{1}=\frac{dy_4}{3y_1^2+c_3+(y_1-c_1)y_3+[c_2+(y_1-c_1)y_2]y_2+y_1y_3}; \tag{5}$$

представивъ его такъ:

$$-[3y_1^2+c_3+(y_1-c_1)y_3+[c_2+(y_1-c_1)y_2]y_2+y_1y_3]dy_1+dy_4=0, \tag{6}$$

прямо интегрируемъ его, такъ какъ перемѣнныя отдѣлены; получимъ:

$$\begin{aligned}-\Big\{y_1^3+c_3y_1+\Big(\frac{1}{2}y_1^2-c_1y_1\Big)y_3+\\+[c_2y_1+\Big(\frac{1}{2}y_1^2-c_1y_1\Big)y_2]y_2+\frac{1}{2}y_1^2y_3\Big\}+y_4=C;\end{aligned} \tag{7}$$

слѣд. рѣшеніе уравненія (4) будетъ:

$$\begin{aligned}f_1=-\Big\{y_1^3+c_3y_1+\Big(\frac{1}{2}y_1^2-c_1y_1\Big)y_3+\\+[c_2y_1+\Big(\frac{1}{2}y_1^2-c_1y_1\Big)y_2]y_2+\frac{1}{2}y_1^2y_3\Big\}+y_4.\end{aligned} \tag{8}$$

Согласно съ формулой (7) § 198 положимъ здѣсь $y_1=c_1$, перемѣнимъ y_4 на ψ_1 и приравняемъ, что получится, этому выраженію; получимъ такое уравненіе:

$$\begin{aligned}-\Big\{c_1^3+c_3c_1-\frac{1}{2}c_1^2y_3+[c_2c_1-\frac{1}{2}c_1^2y_2]y_2+\frac{1}{2}c_1^2y_3\Big\}+\psi_1=\\=-\Big\{y_1^3+c_3y_1+\Big(\frac{1}{2}y_1^2-c_1y_1\Big)y_3+[c_2y_1+\Big(\frac{1}{2}y_1^2-c_1y_1\Big)y_2]y_2+\frac{1}{2}y_1^2y_3\Big\}+y_4,\end{aligned} \tag{9}$$

откуда находимъ:

$$\begin{aligned}\psi_1=-\Big\{y_1^3-c_1^3+c_3(y_1-c_1)+\frac{1}{2}(y_1-c_1)^2y_3+[c_2(y_1-c_1)+\frac{1}{2}(y_1-c_1)^2y_2]y_2+\\+\frac{1}{2}(y_1^2-c_1^2)y_3\Big\}+y_4.\end{aligned} \tag{10}$$

Изъ этого выраженія прямо видно, что при $y_1=c_1$ будетъ $\psi_1=y_4$, каковы бы ни были значенія прочихъ перемѣнныхъ (конечныя, разумѣется). Это будетъ тѣмъ интеграломъ преобразованной системы, о которомъ была рѣчь въ § 197. Изъ него мы выведемъ интегралъ системы (1), вернувшись къ прежнимъ перемѣннымъ на основаніи уравненій (2). Изъ нихъ мы находимъ:

$$y_1=x_1,\ y_1-c_1=x_1-c_1,\ (y_1-c_1)y_3=x_3-c_3,\ (y_1-c_1)y_2=x_2-c_2; \quad (11)$$

внося это въ (10), будемъ имѣть:

$$\psi_1=-\left\{x_1^3-c_1^3+c_3(x_1-c_1)+\frac{1}{2}(x_1-c_1)(x_3-c_3)+c_2(x_2-c_2)+\frac{1}{2}(x_2-c_2)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(x_1+c_1)(x_3-c_3)\right\}+x_4,$$

и послѣ легкихъ упрощеній окончательно:

$$\psi_1=-\left\{x_1^3+x_1x_3+\frac{1}{2}x_2^2\right\}+x_4+c_1^3+c_1c_3+\frac{1}{2}c_2^2. \quad (12)$$

При $x_1=c_1$ эта функція обращается въ x_4, ибо по (2) тогда будетъ $x_2=c_2$, $x_3=c_3$. Эта функція отличается отъ прежде найденной въ § 194 придаточною постоянною $c_1^3+c_1c_3+\frac{1}{2}c_2^2$ и знакомъ перемѣнной части, который противенъ прежнему; это однако не составляетъ существенной разницы для однородныхъ уравненій, ибо придаточная постоянная отпадаетъ при дифференцированіи, а постоянный множитель -1 выходитъ за скобки.

202. Въ тѣсной связи съ Якобіевой системой совокупныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка (8) § 195, именно

$$X^{(h)}(f)=\frac{\partial f}{\partial x_h}+\sum_{i=m+1}^{n}X_i^{(h)}\frac{\partial f}{\partial x_i}=0, \qquad (h=1,2,\ldots m) \quad (1)$$

находится такая система совокупныхъ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ:

$$dx_k=\sum_{h=1}^{m}X_k^{(h)}dx_h. \qquad (k=m+1,m+2,\ldots n) \quad (2)$$

Эта послѣдняя система эквивалентна такой системѣ уравненій:

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_h}=X_k^{(h)}; \qquad \left(\begin{matrix}h=1,2,\ldots m;\\ k=m+1,m+2,\ldots n\end{matrix}\right) \quad (3)$$

продифференцируемъ это равенство по x_g; будемъ имѣть:

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial x_g\partial x_h}=\frac{\partial X_k^{(h)}}{\partial x_g}+\sum_{j=m+1}^{n}\frac{\partial X_k^{(h)}}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial x_g}=\frac{\partial X_k^{(h)}}{\partial x_g}+\sum_{j=m+1}^{n}\frac{\partial X_k^{(h)}}{\partial x_j}X_j^{(g)}=X^{(g)}(X_k^{(h)}), \quad (4)$$

— по обозначенію въ (1); точно такъ же найдемъ:

(5) $$\frac{\partial^2 x_k}{\partial x_g \partial x_h} = X^{(h)}(X_k^{(g)});$$

вычитая это изъ предыдущаго, мы будемъ имѣть:

(6) $$0 = X^{(g)}(X_k^{(h)}) - X^{(h)}(X_k^{(g)});$$

вотъ какому условію должны удовлетворять коэффиціенты системы (2), чтобы правыя части были полными дифференціалами; но это же самое есть условіе того, чтобы система (1) была нормальная.

Возьмемъ какую-нибудь функцію n независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \dots x_n$:

(7) $$f(x_1, x_2, \dots x_n) = f(\overset{n}{\underset{1}{x_i}});$$

полный дифференціалъ ея на основаніи (2) такъ преобразуется:

(8) $$\begin{aligned} df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \\ = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{h=1}^{m} X_i^{(h)} dx_h; \end{aligned}$$

перемѣняя въ первой суммѣ суммаціонную букву i на h, а въ двойной суммѣ мѣняя порядокъ суммированія, можно будетъ это такъ представить:

(9) $$df = \sum_{h=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{i=m+1}^{n} X_i^{(h)} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) dx_h,$$

а это по (1) короче такъ перепишется:

(10) $$df = \sum_{h=1}^{m} X^{(h)}(f)\, dx_h.$$

Изъ этой формулы вытекаютъ такія слѣдствія: если функція (7) есть рѣшеніе уравненія (1), то вторая часть (10) будетъ нуль:

(11) $$df = 0;$$

слѣд.

(12) $$f(x_1, x_2, \dots x_n) = C$$

будетъ интегралъ системы (2), такъ какъ df приведенъ нами въ (8) къ виду (10) при помощи системы (2). Наоборотъ, если (12) есть интегралъ системы (2), то лѣвая часть его будетъ интегралъ системы (1), ибо по (10) и по произвольности dx_h $(h=1, 2, \dots m)$ уравненіе (11) можетъ имѣть мѣсто лишь при условіи

(13) $$X^{(h)}(f) = 0. \qquad (h=1, 2, \dots m)$$

Здѣсь мы имѣемъ обобщеніе на системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ и системы совокупныхъ уравненій съ частными производными того, что въ §§ 181—182 было выведено относительно системы обыкновенныхъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій (т. е. съ одною независимой перемѣнной) и одного линейнаго уравненія съ частными производными перваго порядка.

Примѣры для упражненій.

а) линейныя уравненія съ частными производными.

1) $x^2p-xyq+y^2=0$; рѣшеніе: $\frac{1}{3}y^3-xyz=\varphi(xy)$.

2) $xzp+yzq=xy$; рѣшеніе: $z^2-xy=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

3) $(y^2+z^2-x^2)p-2xyq+2xz=0$; рѣшеніе: $x^2+y^2+z^2=y\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$.

4) $z-xp-yq=a(x^2+y^2+z^2)$; рѣшен.: $x^{a-1}[z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}]=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

5) $(y^3x-2x^4)p+(2y^4-x^3y)q=9z(x^3-y^3)$; $z=\frac{1}{x^3y^3}\varphi\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\right)$.

6) $\operatorname{tg}x.p+\operatorname{tg}y.q=\operatorname{tg}z$; рѣшеніе: $\varphi\left(\frac{\sin x}{\sin z},\frac{\sin y}{\sin z}\right)=0$.

7) $(11x-6y+2z)p-(6x-10y+4z)q=2x-4y+6z$; рѣшеніе:
$$\frac{(x+2y+2z)^6}{2x-2y+z}=\varphi\left(\frac{(2x+y-2z)^3}{2x-2y+z}\right).$$

8) $x_1p_1+(z+x_3)p_2+(z+x_2)p_3=x_2+x_3$; рѣшеніе:
$$x_1^2=(z+x_2+x_3)\varphi[x_1(x_2-x_3),\ x_1(z-x_2)].$$

9) $x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3=az+x_1x_2x_3^{-1}$; рѣшеніе:
$$(a-1)z+x_1x_2x_3^{-1}=x_1^a\varphi(x_2x_1^{-1},\ x_3x_1^{-1}).$$

10) $x_2x_3zp_1+x_3x_1zp_2+x_1x_2zp_3=x_1x_2x_3$; $\varphi(x_1^2-z^2, x_2^2-z^2, x_3^2-z^2)=0$.

F. M. = (Forsyth-Maser.)

11) $yzp+xzq-xy=0$; рѣшеніе: $\varphi(z^2-x^2, x^2-y^2)=0$.

12) $xz^4p+yz^4q-x^2y^2=0$; рѣшеніе: $5x^2y^2-4z^5=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

13) $xp+yq=z-x^2-y^2$; рѣшеніе: $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)-x^2-y^2$.

14) $(x+y)p-(x-y)q=z$; рѣшеніе: $z=\sqrt{x^2+y^2}\,\varphi\left(\log\sqrt{x^2+y^2}+\operatorname{artg}\frac{y}{x}\right)$.

(Рощинъ).

15) $x^2p+x^2zq=xz+3y.$

16) $yz^2p+(a^2x-y)q=0.$

17) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=xyz.$

18) $yp+yzq=xz^2.$

19) $xyp-y^2q+x(1+x^2)=0.$

20) $(x^2+y^2)p=y^2+z^2.$

21) $z(p+q)+(y-x)(p-q)=x+y+z.$ (Hoüel).

b) системы совокупныхъ уравненій.

1) $$\left.\begin{array}{l} x_1p_1-x_2p_2+x_3p_3-x_4p_4=0; \\ x_3p_1+x_4p_2-x_1p_3-x_2p_4=0. \end{array}\right\}$$

Полн. интегралъ: $z-c=a\log[(x_1^2+x_2^2)(x_3^2+x_4^2)+b\operatorname{arcctg}\left(\frac{x_1x_2+x_3x_4}{x_1x_4-x_2x_3}\right);$ (F. M. 401).

общ. $z=F\left[(x_1^2+x_3^2)(x_4^2+x_2^2),\ \frac{x_1x_2+x_3x_4}{x_2x_3-x_1x_4}\right].$ (Mansion) p. 205.

2) $$\left.\begin{array}{l} (x_4^2-x_3^2)p_1-(x_1x_3-x_2x_4)p_3+(x_2x_3-x_1x_4)p_4=0; \\ (x_4^2-x_3^2)p_2+(x_2x_3-x_1x_4)p_3+(x_1x_3-x_2x_4)p_4=0. \end{array}\right\}$$ (Collet).

Полный интегралъ:

$$z-c=(a+b)\log[(x_1+x_2)^2+(x_3+x_4)^2]+$$
$$+(a-b)\log[(x_1-x_2)^2+(x_3-x_4)^2];$$ (F. M. 401.)

общій интегралъ:

$$z=\Phi(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2,\ x_1x_2+x_3x_4).$$ (Mansion. 205).

3) $$\left\{\begin{array}{l} p_1+(x_3+x_1x_2+x_1x_4)p_4+(x_2+x_4-3x_1)p_3=0; \\ p_2+(x_1x_3x_4+x_2-x_1x_2)p_4+(x_3x_4-x_2)p_3=0. \end{array}\right.$$

$$z-\beta=\alpha(x_4-x_1^3-\frac{1}{2}x_2^2-x_1x_3).$$ (F. M. 398).

4) $$\left.\begin{array}{l} 2x_5p_4+x_1^2p_5=0; \\ x_1^2p_1-2x_5p_2+(x_1^2x_4-2x_5)p_3-2x_1x_4p_4=0. \end{array}\right\}$$ (Graindorge).

$$2z+ax_1^2x_4-ax_5^2+b=0.$$ (Mansion p. 205).

5) $$\left.\begin{array}{l} 2x_2x_4^2p_1+x_3^2x_4p_4-x_3^2=0; \\ 2x_2p_2-x_4p_4-1=0; \\ x_2x_4^2p_3+x_1x_3x_4p_4-x_1x_3=0. \end{array}\right\}$$ (Collet).

$$z-b=a(x_2x_4^2-x_1x_3)^2+\log(x_2x_4).$$ (F. M. 401).

6) $$\left.\begin{array}{l} 2x_2x_4^2p_1+x_3^2x_4p_4+x_3^2x_5p_5=0; \\ 2x_2p_2-x_4p_4+x_5p_5=0; \\ x_2x_4^2p_3-x_1x_3x_4p_4+x_1x_3x_5p_5=0. \end{array}\right\}$$ (Collet).

ГЛАВА XII.

Интегрированіе нелинейныхъ уравненій съ частными производными 1-го порядка.

203. Если имѣемъ систему $n+1$ такихъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &F(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z; \overset{n}{\underset{1}{p_i}})=0; \\ &F_h(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z, \overset{n}{\underset{1}{p_i}})=0, \qquad (h=1,2,\dots n) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

при чемъ эти уравненія независимы въ разсужденіи $z, \overset{n}{\underset{1}{p_i}}$, слѣд. опредѣлитель изъ частныхъ производныхъ лѣвыхъ частей ихъ по этимъ величинамъ не равенъ тождественно нулю, то они опредѣляютъ $n+1$ величинъ $z, \overset{n}{\underset{1}{p_i}}$ функціями остальныхъ перемѣнныхъ $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$. Для того, чтобы $\overset{n}{\underset{1}{p_i}}$ были частными производными z по $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$, должны имѣть мѣсто между получаемыми для этихъ величинъ выраженіями такія соотношенія:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}-p_i=0, \tag{2}$$

и такія для того, чтобы $\overset{n}{\underset{1}{p_i}}$ могли бы быть вообще частными производными одной и той же функціи:

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j}-\frac{\partial p_j}{\partial x_j}=0; \tag{3}$$

эти послѣднія будутъ выполнены, если выполнены (2); но если выполнены (3), то хотя они необходимы для выполненія (2), но недостаточны, ибо та функція, которой $\overset{n}{\underset{1}{p_i}}$ будутъ по (3) частными производными, и которая можетъ быть вычислена по правиламъ первой главы, можетъ быть отличною отъ той функціи z, которая получается вмѣстѣ съ $\overset{n}{\underset{1}{p_i}}$ чрезъ рѣшеніе системы (1). Слѣд. мы здѣсь имѣемъ всего n условій во (2) и $\frac{n(n-1)}{1.2}$ въ (3), такъ какъ таково число различныхъ соединеній изъ n указателей по два; слѣд. всего условій:

$$\nu=n+\frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{n(n+1)}{1.2}. \tag{4}$$

Эти ν условій налагаютъ условія и на уравненія (1), когда они должны давать для z и $\overset{n}{\underset{1}{p_i}}$ такія выраженія, чтобы послѣднія были частными производными первой. Эти условія такъ получатся.

Дифференцируя какія-либо два изъ уравненій (1), напр. со значками h и g (при этомъ $h=0$ и $g=0$ будутъ указывать на первое уравненіе этой системы.) по x_j, мы будемъ имѣть такія уравненія:

$$\frac{\partial F_h}{\partial x_j}+\frac{\partial F_h}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_h}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial x_j}=0, \tag{5}$$

— которое можно такъ переписать:

$$\frac{\partial F_h}{\partial x_j}+\frac{\partial F_h}{\partial z}p_j+\frac{\partial F_h}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x_j}-p_j\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_h}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial x_j}=0, \tag{6}$$

и точно такъ же:

$$\frac{\partial F_g}{\partial x_j}+\frac{\partial F_g}{\partial z}p_j+\frac{\partial F_g}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x_j}-p_j\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_g}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial x_j}=0. \tag{7}$$

Помножая первое на $\frac{\partial F_g}{\partial p_j}$, второе на $\frac{\partial F_h}{\partial p_j}$ и вычитая послѣдній результатъ изъ перваго, затѣмъ суммируя по j отъ 1 до n, мы будемъ имѣть, полагая для краткости:

$$[F_h, F_g]=\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial F_h}{\partial x_j}+\frac{\partial F_h}{\partial z}p_j\right)\frac{\partial F_g}{\partial p_j}-\left(\frac{\partial F_g}{\partial x_j}+\frac{\partial F_g}{\partial z}p_j\right)\frac{\partial F_h}{\partial p_j}\right\}, \tag{8}$$

такое равенство:

$$[F_h, F_g]+ \\ +\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_h}{\partial z}\frac{\partial F_g}{\partial p_j}-\frac{\partial F_g}{\partial z}\frac{\partial F_h}{\partial p_j}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x_j}-p_j\right)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_h}{\partial p_i}\frac{\partial F_g}{\partial p_j}-\frac{\partial F_g}{\partial p_i}\frac{\partial F_h}{\partial p_j}\right)\frac{\partial p_i}{\partial x_j}=0. \tag{9}$$

Если означимъ чрезъ $\sum_{i,j=1}^{n}{}'$ сумму, распространенную на всѣ различныя соединенія изъ n чиселъ $1, 2, \ldots n$ по два, и примемъ во вниманіе, что коэффиціентъ при $\frac{\partial p_i}{\partial x_j}$ въ этомъ уравненіи мѣняетъ свой знакъ при перестановкѣ значковъ i и j между собою, то это равенство приметъ такой видъ:

$$[F_h, F_g]+ \\ +\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_h}{\partial z}\frac{\partial F_g}{\partial p_j}-\frac{\partial F_g}{\partial z}\frac{\partial F_h}{\partial p_j}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x_j}-p_j\right)+\sum_{i,j=1}^{n}{}'\left(\frac{\partial F_h}{\partial p_i}\frac{\partial F_g}{\partial p_j}-\frac{\partial F_g}{\partial p_i}\frac{\partial F_h}{\partial p_j}\right)\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_j}-\frac{\partial p_j}{\partial x_i}\right)=0. \tag{10}$$

Въ этомъ видѣ его сейчасъ усматриваемъ, что при выполненіи условій (2) и (3) оно приводится къ такому:

$$[F_h, F_g]=0. \tag{11}$$

Точно также изъ него можно заключить, что если выполнено условіе (11), то будутъ выполнены и условія (2) и (3): для этого только нужно доказать, что опредѣлитель порядка ν изъ коэффиціентовъ при $\left(\frac{\partial z}{\partial x_j}-p_j\right)$ и $\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_j}-\frac{\partial p_j}{\partial x_i}\right)$ въ системѣ уравненій, которыхъ (10) есть представитель, и которыя получаются изъ него, замѣняя h и g всѣми различными комбинаціями по два изъ чиселъ $0, 1, 2, \ldots n$, будетъ отличенъ отъ нуля.

Перенумеруемъ всѣ различныя комбинаціи по два изъ чиселъ $0, 1, 2, \ldots n$, при чемъ пусть F_0 означаетъ F, а p_0 означаетъ z; и пусть тогда нумеръ $\varkappa$ указываетъ на опредѣленную комбинацію значковъ h и g, при чемъ $(h, g)=(g, h)$, а λ на комбинацію значковъ i и j, при чемъ $(i, j)=(j, i)$. Означимъ послѣ этого элементъ опредѣлителя системы уравненій (10) такимъ образомъ:

$$a_{\varkappa\lambda}=\frac{\partial F_h}{\partial p_i}\frac{\partial F_g}{\partial p_j}-\frac{\partial F_g}{\partial p_i}\frac{\partial F_h}{\partial p_j}, \tag{12}$$

а самый опредѣлитель такъ:

$$\Theta=\left|a_{\varkappa\lambda}\right|. \tag{13}$$
$$(\varkappa, \lambda=0, 1, 2, \ldots n)$$

Очевидно, что $a_{\varkappa\lambda}$ (8) есть миноръ 2-го порядка такого опредѣлителя:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial p_1} & \frac{\partial F}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial p_n} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial p_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial z} & \frac{\partial F_n}{\partial p_1} & \frac{\partial F_n}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}; \tag{14}$$

означимъ чрезъ $b_{\varkappa\lambda}$ дополнительный миноръ $a_{\varkappa\lambda}$, т. е. опредѣлитель, составленный изъ элементовъ всѣхъ остальныхъ строкъ и столбцевъ опредѣлителя Δ; опредѣлитель изъ элементовъ $b_{\varkappa\lambda}$ такъ означимъ:

$$\Theta'=\left|\, b_{\varkappa\lambda}\,\right|. \tag{15}$$
$$(\varkappa, \lambda=0, 1, 2, \ldots n)$$

Составляя теперь произведеніе Θ на Θ' по правиламъ теоріи опредѣлителей, получимъ на основаніи теоремы Лапласа:

$$\Theta\Theta'=\Delta^{\nu}, \tag{16}$$

ибо по этой теоремѣ каждый элементъ главной діагонали обратится въ Δ, а всѣ прочіе въ нули, ибо будутъ ничѣмъ инымъ, какъ разложеніемъ по теоремѣ Лапласа опредѣлителя, имѣющаго два ряда одинакихъ.

Но Δ не $=0$, ибо иначе система (1), вопреки предположенію, не была бы рѣшима по z и $\overset{n}{\underset{1}{p_i}}$; а потому Θ могло бы быть $=0$, лишь когда $\Theta'=\infty$, чего вообще на самомъ дѣлѣ нѣтъ.

Итакъ, эквивалентность условій [(2), (3)] и (11) доказана.

204. Пусть дано уравненіе

(1) $$F(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z, \overset{n}{\underset{1}{p_i}})=0;$$

требуется найти функцію z отъ $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$, разсматривая $\overset{n}{\underset{1}{p_i}}$ какъ ея частныя производныя по этимъ перемѣннымъ, которая удовлетворяла бы этому уравненію. Въ этомъ заключается задача интегрированія уравненія съ частными производными перваго порядка.

Изъ изслѣдованій предыдущаго § ясно, что эта задача будетъ рѣшена, если мы найдемъ такія n уравненій,

(2) $$F_h(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z, \overset{n}{\underset{1}{p_i}})=0, \qquad (h=1,2,\dots n)$$

которыя будутъ удовлетворять такимъ условіямъ:

(3) $$[F, F_h]=0, \qquad (h=1,2,\dots n)$$

(4) $$[F_h, F_g]=0. \qquad (h, g=1,2,\dots n)$$

Изъ перваго уравненія видно, что F_h будутъ рѣшеніями такого частнаго линейнаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка:

(5) $$[F, f]=0,$$

или, раскрывая его лѣвую часть по (8) и располагая по частнымъ производнымъ функціи f:

(5′) $$\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}+\frac{\partial F}{\partial z}p_j\right)\frac{\partial f}{\partial p_j}-\frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_j}p_j.\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

которыя при томъ удовлетворяли бы условіямъ (4). Какъ найти общее рѣшеніе уравненія (5′) — было показано въ пред. главѣ: для этого нужно найти полную систему независимыхъ другъ отъ друга интеграловъ такой системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій:

(6) $$\frac{dp_j}{\dfrac{\partial F}{\partial x_j}+\dfrac{\partial F}{\partial z}p_j}=\frac{dx_j}{-\dfrac{\partial F}{\partial p_j}}=\frac{dz}{-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial F}{\partial p_i}p_i}, \qquad (j=1,2,\dots n)$$

и рѣшить ихъ по произвольнымъ постояннымъ; тогда произвольная функція отъ полученныхъ такимъ образомъ выраженій ихъ чрезъ перемѣнныя будетъ общимъ рѣшеніемъ системы (5′); но это общее рѣшеніе не будетъ удовлетворять тѣмъ спеціальнымъ требованіямъ (4), которымъ должны удовлетворять искомыя частныя рѣшенія; въ этомъ удовлетвореніи условіямъ (4) и заключается вся трудность настоящаго вопроса.

Этотъ вопросъ впервые былъ рѣшенъ для случая двухъ независимыхъ перемѣнныхъ въ 1772 г. *Лагранжемъ* [1]); способъ его былъ усовершенствованъ въ 1784 *Шарпи* (Charpit) [2]); *Пфафъ* (Pfaff) въ Берлинѣ въ 1814 году рѣшилъ её для какого угодно числа перемѣнныхъ съ помощью приведенія этой задачи къ другой, носящей его имя; этотъ способъ былъ усовершенствованъ потомъ *Якоби* [3]); въ 1819 г. *Коши* далъ другой способъ, болѣе простой, поставивъ вопросъ нѣсколько иначе, именно такъ, какъ онъ часто ставится въ приложеніяхъ Анализа къ Математической Физикѣ [4]); *Якоби*, разрабатывая изслѣдованія Hammilton'а относительно уравненій механики, пришелъ къ способу, не разнящемуся существенно отъ способа Коши; позднѣе (въ 1836 г.) *Якоби* далъ другой способъ въ мемуарѣ: «Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordini inter numerum variabilium quemcumque integrandi», который однако былъ опубликованъ послѣ его смерти *Клебшемъ* [5]). Изъ русскихъ ученыхъ работали надъ новымъ способомъ Якоби *В. Г. Имшенецкій* [6])

---

[1]) Mémoire de l'Academie de Berlin, 1772; oeuvres complètes, t. III.

[2]) Мемуаръ представленъ Парижской Академіи, но не былъ опубликованъ. См. *Lacroix*, Calcul differentiel et intégral. 4°. t. II, 2 éd., p. 548.

[3]) О способѣ Пфафа на русскомъ языкѣ читатель найдетъ въ магистерской диссертаціи *В. Жирухина:* „Интегрированіе диф. уравненій въ частныхъ производныхъ перваго порядка". С.-Пб., 1849 (тамъ и литературныя указанія), а также въ актовой рѣчи проф. *Е. И. Бейера:* „Объ интегрированіи линейныхъ уравненій съ какимъ угодно числомъ измѣняемыхъ величинъ". Харьковъ, 1858. Новѣйшія сочиненія съ указаніями литературы: *A. R. Forsyth.* „Theorie der Differentialgleichungen. I. Theil: Exacte Gleichungen und das Pfaff'sche Problem". Deutsche Ausgabe von N. Maser. Leipzig, 1893 г. и *Weber, E.* „Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1-er Ordnung". Leipzig, 1900. Изслѣдованія Якоби въ C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke, Bd. 4. (послѣднее изданіе).

[4]) *Cauchy, A. L.* въ Bulletin de la Société philomatique, p. 10—21.

[5]) См. C. G. J. Jacobi's Werke, 5. Bd., также въ „Vorlesungen über Dynamik". Berlin 1866 г.

[6]) „Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка". Казань, 1865. (См. также „Учен. Записки Казан. Ун-та" за 1864 г, вып. 2-й, стр. 1—172.) или „Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre". Traduit du russe par J. Houël. Paris, 1869. (См. также Archiv für Mathematik und Physik, v. Grunert. Bd. 50, 1869 г.)

и *Ермаковъ* [7]); надъ первымъ способомъ—*Салтыковъ* [8]). Мы не можемъ привести здѣсь обширную литературу этого вопроса; наиболѣе полныя сочиненія по этому суть *Mansion*'а [9]) и *Goursat* [10]), *Граве* [11]), также *Шапошникова* [12]), къ которымъ мы и отсылаемъ читателя, интересующагося этимъ вопросомъ; мы же переходимъ послѣ этого отступленія къ способу Коши, придерживаясь *Буля*.

205. Задача Коши состоитъ въ слѣдующемъ: найти такое рѣшеніе уравненія (1) пред. §, которое при частномъ значеніи одной перемѣнной, напр. при $x_n = x_n^{(0)}$ обращалось бы въ произвольно заданную функцію остальныхъ:

(1) $$z = f(\overset{n-1}{\underset{1}{x_i}}).$$

Буль замѣчаетъ, что если условія (4) пред. § выполнены для всякихъ значеній перемѣнныхъ, то они будутъ выполнены и при $x_n = x_n^{(0)}$. Вводя эту величину въ (1) пред. § вмѣсто x_n, вмѣсто z заданную функцію изъ уравненія (1) настоящаго, а вмѣсто $\overset{n-1}{\underset{1}{p_i}}$ ихъ значенія, получаемыя чрезъ дифференцированіе (1):

(2) $$p_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}, \qquad (j = 1, 2, \ldots n-1),$$

мы получимъ уравненіе, изъ котораго выразимъ p_n въ функціи тѣхъ же величинъ; означимъ это выраженіе (когда это окажется нужнымъ) чрезъ $\bar{p}_n$. Внося тѣ же величины въ уравненія $F_h = 0$, $F_g = 0$ и проч., мы можемъ составить изъ нихъ выраженія

(3) $$[F_h, F_g]_{n-1}$$

для теперешняго случая $n-1$ независимыхъ перемѣнныхъ, которыя будутъ $= 0$, по § 203, такъ какъ (2) и (3) того § теперь будутъ выполнены. Итакъ, будемъ имѣть:

---

[7]) *Ермаковъ, В. П.* Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій механики. Кіевъ, 1877. *Его же.* Нелинейныя дифференціальныя уравненія съ частными производными перваго порядка. Кіевъ, 1884.

[8]) *Салтыковъ, Н. Н.* Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи". Въ Запискахъ Имп. Харьков. Ун-та за 1899 г. Кн. 3-я.

[9]) *Mansion, P.* „Théorie des équation aux dérivées partielles du premier ordre". Paris, 1875.

[10]) *Goursat, E.* „Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre". Paris, 1891.

[11]) *Граве, Д. А.* „Объ интегрированіи частныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка". Диссертація. С.-Пб. 1889.

[12]) *Шапошниковъ, Н. А.* „Интегрированіе уравненій съ полными дифференціалами и частными производными перваго порядка". Москва, 1880.

$$[F_h, F_g]_{n-1} = 0. \tag{4}$$

Раскрывая это выраженіе, нужно помнить, что p_n теперь выражено чрезъ остальныя перемѣнныя изъ уравненія (1) пред. §, а потому будемъ имѣть:

$$[F_h, F_g]_{n-1} = \tag{5}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \Big\{ \Big[\frac{\partial F_h}{\partial x_j} + \frac{\partial F_h}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial x_j} + \Big(\frac{\partial F_h}{\partial z} + \frac{\partial F_h}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial z}\Big) p_j \Big] \Big(\frac{\partial F_g}{\partial p_j} + \frac{\partial F_g}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial p_j} \Big) -$$

$$- \Big[\frac{\partial F_g}{\partial x_j} + \frac{\partial F_g}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial x_j} + \Big(\frac{\partial F_g}{\partial z} + \frac{\partial F_g}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial z}\Big) p_j \Big] \Big(\frac{\partial F_h}{\partial p_j} + \frac{\partial F_h}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial p_j} \Big) \Big\} = 0,$$

или, упрощая при помощи нашего символа:

$$[F_h, F_g]'_{n-1} + \frac{\partial F_h}{\partial p_n}[p_n, F_g]'_{n-1} - \frac{\partial F_g}{\partial p_n}[p_n, F_h]'_{n-1} = 0, \tag{6}$$

гдѣ значкомъ $(')$ хотимъ отличить эти суммы, получающіяся простымъ отбрасываніемъ члена съ $j = n$, отъ лѣвой части (5). Здѣсь производныя p_n опредѣляются изъ такихъ уравненій:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p_j} + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial p_j} = 0; \ (j = 1, 2, \ldots n-1) \tag{7}$$

а потому будемъ имѣть:

$$\frac{\partial p_n}{\partial x_j} + \frac{\partial p_n}{\partial z} p_j = -\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial p_n}} \Big(\frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial z} p_j \Big); \quad \frac{\partial p_n}{\partial p_j} = -\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial p_n}} \frac{\partial F}{\partial p_j}; \ (j = 1, 2, \ldots n-1) \tag{8}$$

и слѣд.

$$[p_n, F_g]'_{n-1} = -\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial p_n}}[F, F_g]'_{n-1}; \quad [p_n, F_h]'_{n-1} = -\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial p_n}}[F, F_h]'. \tag{9}$$

Но изъ уравненій

$$[F, F_g]_n = 0 \qquad \text{и} \qquad [F, F_h]_n = 0, \tag{10}$$

имѣющихъ мѣсто въ силу того, что F_h и F_g суть интегралы уравненія (5) пред. §, мы имѣемъ:

$$-[F, F_g]'_{n-1} = \Big(\frac{\partial F}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial z} p_n \Big) \frac{\partial F_g}{\partial p_n} - \Big(\frac{\partial F_g}{\partial x_n} + \frac{\partial F_g}{\partial z} p_n \Big) \frac{\partial F}{\partial p_n}; \tag{11}$$

$$-[F, F_h]'_{n-1} = \Big(\frac{\partial F}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial z} p_n \Big) \frac{\partial F_h}{\partial p_n} - \Big(\frac{\partial F_h}{\partial x_n} + \frac{\partial F_h}{\partial z} p_n \Big) \frac{\partial F}{\partial p_n}; \tag{12}$$

а потому будетъ

$$\frac{\partial F_h}{\partial p_n}[p_n, F_g]'_{n-1} - \frac{\partial F_g}{\partial p_n}[p_n, F_h]'_{n-1} = \Big(\frac{\partial F_h}{\partial x_n} + \frac{\partial F_h}{\partial z} p_n \Big) \frac{\partial F_g}{\partial p_n} - \Big(\frac{\partial F_g}{\partial x_n} + \frac{\partial F_g}{\partial z} p_n \Big) \frac{\partial F_h}{\partial p_n}; \tag{13}$$

вносия это въ (6), будемъ имѣть:

$$[F_h, F_g] = 0, \tag{14}$$

т. е. условія (4) § 204 будутъ тогда сами собою выполнены.

206. Отсюда вытекаетъ такой способъ нахожденія интеграла уравненія съ частными производными 1-го порядка, данный Коши, но выведенный имъ иначе *).

Въ системѣ (6) § 204 имѣемъ $2n$ уравненій: эта система имѣетъ $2n$ независимыхъ интеграловъ, въ числѣ которыхъ находится и само предложенное уравненіе:

$$F(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z, \overset{n}{\underset{1}{p_i}}) = 0, \tag{1}$$

какъ легко видѣть. Поэтому система интеграловъ будетъ содержать только $2n-1$ произвольныхъ постоянныхъ вмѣсто $2n$; рѣшивъ остальныя интегралы по произвольнымъ постояннымъ, будемъ имѣть $2n-1$ такихъ уравненій:

$$\varphi_k(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z, \overset{n}{\underset{1}{p_j}}) = C_k. \quad (k=1,2,\ldots 2n-1) \tag{2}$$

Лѣвыя части ихъ будутъ интегралами уравненія (5) § 204, равно какъ и произвольная функція отъ нихъ; надобно эту функцію такъ подобрать, чтобы удовлетворялось условіе (1) пред. § и вытекающія изъ него условія (2) того же §, т. е. чтобы при $x_n = x_n^{(0)}$ было

$$z = f(\overset{n-1}{\underset{1}{x_i}}), \qquad p_j = \frac{\partial f(\overset{n-1}{\underset{1}{x_i}})}{\partial x_j}. \quad (j=1,2,\ldots n-1) \tag{3}$$

Для полученія такой функціи, присоединяемъ эти уравненія къ системѣ интеграловъ (2), положивъ тамъ предварительно $x_n = x_n^{(0)}$ и исключивъ изъ нихъ p_n при помощи уравненія (1), такъ какъ по условію тогда z и $\overset{n-1}{\underset{1}{p_i}}$ должны соотвѣтственно обратиться во вторыя части уравненій (3), слѣд., всѣ эти $2n-1+1+n-1=3n-1$ уравненій будутъ удовлетворяться одними и тѣми же значеніями перемѣнныхъ. Исключимъ теперь z и $\overset{n-1}{\underset{1}{p_j}}$ изъ уравненій, получающихся изъ (2) чрезъ исключеніе p_n изъ нихъ при помощи (1), подставивъ вмѣсто нихъ въ эти уравненія вторыя части (3); будемъ имѣть $2n-1$ уравненій такого вида:

$$\psi_k(\overset{n-1}{\underset{1}{x_i}}) = C_k; \quad (k=1,2,\ldots 2n-1) \tag{4}$$

исключивъ изъ этихъ уравненій $n-1$ величинъ $\overset{n-1}{\underset{1}{x_i}}$, мы получимъ n уравненій такого вида:

*) См. *Serret, J. A.* Cours de calcul différentiel et intégral. Paris, 1868. T. 2., p. 624.

$$\chi_l(\overset{2n-1}{\underset{1}{C_k}})=0; \qquad (l=1,2,\dots n) \qquad (5)$$

подставляя сюда вмѣсто C_k ихъ выраженія изъ (2), будемъ имѣть по пред. § искомыя уравненія [(4) § 204]:

$$F_h(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z, \overset{n}{\underset{1}{p_i}})=0. \qquad (h=1,2,\dots n) \qquad (6)$$

Исключая изъ (1) и (6) величины $\overset{n}{\underset{1}{p_i}}$, получимъ интегралъ уравненія (1):

$$\Phi(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z)=0, \qquad (7)$$

опредѣляющій функцію z такъ, что при $x_n=x_n^{(0)}$ она обратится въ требуемую условіемъ (3) функцію $f(\overset{n-1}{\underset{1}{x_i}})$.

На практикѣ удобнѣе ввести вмѣсто C_k начальныя значенія величинъ $\overset{n-1}{\underset{1}{x_i}}, z, \overset{n}{\underset{1}{p_j}}$ при $x_n=x_n^{(0)}$, которыя мы тоже отмѣтимъ нулемъ наверху, такъ что при $x_n=x_n^{(0)}$ будемъ имѣть такую систему величинъ:

$$\overset{n-1}{\underset{1}{x_i^{(0)}}}, z^{(0)}, \overset{n-1}{\underset{1}{p_j^{(0)}}}. \qquad (8)$$

Тогда будемъ имѣть

$$C_k=\varphi_k(\overset{n-1}{\underset{1}{x_i^{(0)}}}, x_n^{(0)}, z^{(0)}, \overset{n}{\underset{1}{p_j^{(0)}}}), \qquad (9)$$

и изъ (1)

$$F(\overset{n-1}{\underset{1}{x_i}}, x_n^{(0)}, z^{(0)}, \overset{n}{\underset{1}{p_j^{(0)}}})=0. \qquad (10)$$

Изъ этихъ уравненій величины (8), по исключеніи $p_n^{(0)}$ съ помощью (10) изъ (9), выразятся въ функціяхъ отъ C_k; слѣд., произвольная функція отъ величинъ (8) будетъ произвольною функціей отъ C_k; а потому наши выводы остаются въ силѣ, если мы введемъ новыя постоянныя вмѣсто C_k. Тогда уравненія (2) перепишутся такимъ образомъ:

$$\varphi_k(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z, \overset{n}{\underset{1}{p_i}})=\varphi_k(\overset{n-1}{\underset{1}{x_i^{(0)}}}, x_n^{(0)}, z^{(0)}, \overset{n-1}{\underset{1}{p_j^{(0)}}}, \overline{p}_n^{0}) \quad (k=1,2,\dots 2n-1) \ (11)$$

гдѣ $\overline{p}_n^{(0)}$ обозначаетъ его выраженіе изъ (10) чрезъ остальныя.

Чтобы найти соотношенія (5) между C_k, теперь нужно исключить значенія съ $^{(0)}$ наверху изъ (9) и уравненій:

$$z^{(0)}=f(\overset{n-1}{\underset{1}{x_j^{(0)}}}), \ p_j^{(0)}=\frac{\partial f(\overset{n-1}{x_i^{(0)}})}{\partial x_j^{(0)}}, \qquad (j=1,2,\dots n) \qquad (12)$$

въ которыя обратятся (3) при $x_h=x_n^{(0)}$ (что возможно будетъ, когда дана будетъ функція f), и, получивъ эти соотношенія между C_k, затѣмъ подставить туда ихъ значенія изъ (2). А это все равно, что исключить значенія съ $^{(0)}$ на верху изъ (11) и (12); тогда получатся $F_h=0$, изъ которыхъ нужно будетъ исключить $\overset{n}{\underset{1}{p_j}}$. Вмѣсто этого можно, измѣняя порядокъ вычисленій, при помощи (1), исключить изъ (11) величины $\overset{n}{\underset{1}{p_i}}$, а затѣмъ изъ полученной системы, числомъ въ n уравненій, при помощи n уравненій (12) $2n-1$ величинъ съ $^{(0)}$, именно $\overset{n-1}{\underset{1}{x_j^{(0)}}}$, $z^{(0)}$, $\overset{n-1}{p_j^{(0)}}$: тогда получится интегралъ уравненія (1), удовлетворяющій дополнительному требованію Коши—обращаться въ $f(\overset{n-1}{\underset{1}{x_i}})$ при $x_n=x_n^{(0)}$.

207. Поясним изложенное сейчасъ на примѣрѣ Serret:

(1) $$F=z-apq=0.$$

Здѣсь будетъ:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0;\quad \frac{\partial F}{\partial z}=1;\quad \frac{\partial F}{\partial p}=-aq;\quad \frac{\partial F}{\partial q}=-ap,$$

и слѣд.

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p=p,\ \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q=q;\ \frac{\partial F}{\partial p}p+\frac{\partial F}{\partial q}q=-2aqp=-2z;$$

а потому система (6) § 204 для нашего примѣра будетъ такая:

(2) $$\frac{dp}{p}=\frac{dq}{q}=\frac{dz}{2z}=\frac{dx}{aq}=\frac{dy}{ap}.$$

Четыре независимыхъ интеграла этой системы легко найдутся: первые два непосредственно, вторые два съ помощью ихъ, и будутъ, согласно съ (11) пред. §, такіе:

(3) $$\frac{p}{p_0}=\frac{q}{q_0}=\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z_0}};\quad \frac{x-x_0}{aq_0}=\frac{y-y_0}{ap_0}=\frac{\sqrt{z}-\sqrt{z_0}}{\sqrt{z_0}}.$$

Изъ этихъ уравненій и дополнительныхъ условій при $x=x^{(0)}$:

(4) $$z_0=f(y_0)\quad \text{и}\quad q_0=f'(y_0)$$

послѣ исключенія p_0 съ помощью (1) для $x=x_0$:

(5) $$z_0-ap_0q_0=0$$

нужно исключить величины z_0, q_0, y_0, а потомъ p и q, съ помощью (1), или исключить, съ помощью (1), (4) и (5), величины p, q, p_0, q_0, z_0, y_0: всего уравненій имѣемъ семь, а именно (1), четыре (3), два (4) ((5) слѣдствіе перваго). Вслѣдствіе спеціальнаго вида уравненій (3), изъ которыхъ въ послѣднихъ двухъ p и q не встрѣчаются, мы прямо исключаемъ p_0 и q_0 изъ послѣднихъ двухъ, перемножая ихъ и пользуясь (5); будемъ имѣть:

$$\left(\frac{\sqrt{z}-\sqrt{z_0}}{\sqrt{z_0}}\right)^2=\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{a^2p_0q_0}=\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{az_0}, \tag{6}$$

и упрощая:

$$a(\sqrt{z}-\sqrt{z_0})^2-(x-x_0)(y-y_0)=0. \tag{7}$$

Вводя вмѣсто z_0 его значеніе изъ (4), будемъ имѣть:

$$V=\left(a\sqrt{z}-\sqrt{f(y_0)}\right)^2-(x-x_0)(y-y_0)=0, \tag{8}$$

откуда остается исключить y_0, для чего нужно воспользоваться третьимъ *) уравненіемъ изъ (3), которое можетъ быть такъ представлено:

$$-a\left(\sqrt{z}-\sqrt{z_0}\right)\frac{q_0}{\sqrt{z_0}}+(x-x_0)=0. \tag{9}$$

и 2-го уравненія изъ (4). Послѣднее на основаніи (4) такъ перепишется:

$$-a\left(\sqrt{z}-\sqrt{f(y_0)}\right)\frac{f'(y_0)}{\sqrt{f(y_0)}}+(x-x_0)=0; \tag{10}$$

въ этомъ видѣ оно есть не что иное, какъ частное производное отъ V (8) по y_0, слѣд. можно написать:

$$\frac{\partial V}{\partial y_0}=-a\left(\sqrt{z}-\sqrt{f(y_0)}\right)\frac{f'(y_0)}{\sqrt{f(y_0)}}+(x-x_0)=0, \tag{11}$$

такъ что искомый интегралъ уравненія (1) представится совокупностью уравненій

$$V=0,\quad \frac{\partial V}{\partial y_0}=0. \tag{12}$$

Серре показываетъ, что это всегда можно сдѣлать.

При рѣшеніи задачи Коши на успѣхъ можетъ влiять форма функціи $f(\overset{n-1}{\underset{1}{x_j}})$. (См. объ этомъ Serret; Mansion; Goursat.)

208. Переходя къ изложенію новаго способа Якоби, мы покажемъ сперва, слѣдуя ему, что можно ограничиться разсмотрѣніемъ болѣе простого случая, когда z само не входитъ въ уравненіе, а только ея производныя **).

Въ самомъ дѣлѣ, если дано уравненіе:

$$F(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z, \overset{n}{\underset{1}{p_j}})=0, \tag{1}$$

*) Изъ перваго и третьяго отношеній.

**) Способъ Якоби примѣнимъ и къ общему случаю, но дѣло усложняется. См. диссертацію Д. А. Граве, выше указанную, также Goursat.

то предполагая, что искомое рѣшеніе есть:

(2) $$f(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z,) = 0,$$

мы, дифференцируя его по x_j, получимъ:

(3) $$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial z} p_j = 0,$$

откуда найдемъ

(4) $$p_j = -\frac{\partial f}{\partial x_j} : \frac{\partial f}{\partial z},$$

и, подставляя въ (1), будемъ имѣть такое уравненіе:

(5) $$F\left(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z, -\frac{\partial f}{\partial x_j} \overset{n}{\underset{1}{:}} \frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0,$$

въ которомъ число независимыхъ перемѣнныхъ увеличилось, правда, на единицу, ибо z перешла въ разрядъ таковыхъ, но зато сама искомая функція f уже не входитъ.

Такъ какъ уравненіе получилось однородное относительно частныхъ производныхъ функціи f, а нѣкоторые методы къ такимъ уравненіямъ непосредственно не примѣняются (Mansion), то полезно знать и другой способъ, предложенный для этой цѣли Якоби. Онъ состоитъ въ томъ, что полагаютъ

(6) $$y = zt,$$

гдѣ y новая функція, а t новая независимая перемѣнная, которая не должна однако входить въ z, такъ что будетъ

(7) $$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Изъ (6) имѣемъ въ силу этого:

(8) $$\frac{\partial y}{\partial t} = z, \quad \frac{\partial y}{\partial x_j} = \frac{\partial z}{\partial x_j} t = p_j t, \quad \text{откуда} \quad p_j = \frac{1}{t} \frac{\partial y}{\partial x_j};$$

внося это въ (1), будемъ имѣть уравненіе:

(9) $$F\left(\overset{n}{\underset{1}{x_j}}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{1}{t} \overset{n}{\underset{1}{\frac{\partial y}{\partial x_j}}}\right) = 0,$$

въ которое новая функція y не входитъ, но зато прибавилась новая независимая перемѣнная t.

Найдя интегралъ этого уравненія:

(10) $$\varphi(\overset{n}{\underset{1}{x_j}}, t, y) = 0,$$

для полученія интеграла уравненія (1), нужно исключить отсюда y съ помощью (6) и затѣмъ t съ помощью уравненія

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}z+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right):\frac{\partial\varphi}{\partial y}t=0, \tag{11}$$

эквивалентнаго (7), такъ какъ, дифференцируя (10) по t, въ виду (6) будемъ имѣть:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}z+\frac{\partial\varphi}{\partial y}t\frac{dz}{dt}=0, \tag{12}$$

откуда для $\dfrac{dz}{dt}$ получается выраженіе (11) *).

На основаніи этого въ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать z не входящимъ въ уравненіе (1).

209. Итакъ, пусть дано уравненіе:

$$F(\overset{n}{\underset{1}{x_i}};\overset{n}{\underset{1}{p_j}})=0; \tag{1}$$

по § 204 для его интегрированія надобно найти $n-1$ функцій $F_h(\underset{1}{x_i};p_j)$ **) такихъ, чтобы были выполнены слѣдующія условія:

$$(F,F_h)=0, \text{***)} \qquad (h=1,2,\dots n) \tag{2}$$

$$(F_h,F_g)=0, \qquad (h,g=1,2,\dots n), \tag{3}$$

гдѣ въ примѣненіи къ нашему случаю будетъ по (8) § 203:

$$(F,F_h)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial F_h}{\partial p_j}-\frac{\partial F_h}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial p_j}\right), \tag{4}$$

$$(F_h,F_g)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_h}{\partial x_j}\frac{\partial F_g}{\partial p_j}-\frac{\partial F_g}{\partial x_j}\frac{\partial F_h}{\partial p_j}\right). \tag{5}$$

Эти выраженія называются *скобками Пуассона*. Найдя изъ уравненій (1) и слѣдующихъ:

$$F_h(\overset{n}{\underset{1}{x_j}};\overset{n}{\underset{1}{p_j}})=0, \tag{6}$$

выраженія $\overset{n}{\underset{1}{p_j}}$ чрезъ $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$, которыя выраженія, какъ мы знаемъ, будутъ таковы, что будутъ имѣть мѣсто условія:

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j}-\frac{\partial p_j}{\partial x_i}=0, \tag{7}$$

---

*) См. *Mansion*, p. 5.

**) Не n, какъ прежде, ибо теперь z не входитъ въ уравненія.

***) Когда z не входитъ въ уравненія, то употребляютъ круглыя скобки.

мы найдёмъ z по правиламъ первой главы съ помощью квадратуръ:

(8) $$z=\int\sum_{i=1}^{n}\overline{p}_i dx_i+C$$

гдѣ подъ $\overset{n}{\underset{1}{\overline{p}}}_i$ мы разумѣемъ сейчасъ упомянутыя выраженія $\overset{n}{\underset{1}{p}}_i$ чрезъ $\overset{n}{\underset{1}{x}}_i$.

210. Уравненіе (2) пред. § говоритъ, что функціи F_h суть рѣшенія такого уравненія въ частныхъ производныхъ перваго порядка:

(1) $$(F,f)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial p_j}\right)=0;$$

слѣд. мы ихъ найдемъ, интегрируя такую систему обыкновенныхъ уравненій:

(2) $$\frac{dp_j}{\dfrac{\partial F}{\partial x_j}}=\frac{dx_j}{-\dfrac{\partial F}{\partial p_j}}=-dt, \qquad (j=1,2\dots n)$$

гдѣ мы прибавили знаменателя отношенія $-dt$, для того чтобы имѣть возможность написать эти уравненія въ такой формѣ:

(3) $$\frac{dx_j}{dt}=\frac{\partial F}{\partial p_j},\ \frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_j}. \qquad (j=1,2,\dots n)$$

Эта форма называется *канонической;* дифференціальныя уравненія въ этой формѣ—*каноническими*. Здѣсь мы видимъ связь вопроса объ ихъ интегрированіи съ интересующимъ насъ теперь вопросомъ объ интегрированіи уравненія съ частными производными.

Каноническія уравненія очень часто встрѣчаются въ Аналитической Механикѣ, къ курсамъ которой мы и можемъ отослать читателя *), чтобы перейти теперь къ изложенію новаго способа Якоби.

211. Этотъ способъ состоитъ въ томъ, что сперва опредѣляютъ F_1 изъ уравненія:

(2) $$(F,f)=0:$$

затѣмъ F_2 изъ двухъ уравненій:

(3) $$(F,f)=0 \quad и \quad (F_1,f)=0;$$

послѣ F_3 изъ трехъ слѣдующихъ:

(4) $$(F_1f)=0,\quad (F_1,f)=0,\quad (F_2,f)=0,$$

и т. д., наконецъ F_{n-1} изъ $n-1$ такихъ уравненій:

---

*) На русскомъ языкѣ см. *Соколовъ, И.* „Динамика. Отдѣлъ II“. Харьковъ, 1860. *Ермаковъ, В. П.* Интегрированіе диффер. уравненій Механики. Кіевъ, 1877 г. и *Его же.* Нелинейныя диффер. уравненія съ частными производными 1-го порядка и каноническія уравненія. Кіевъ, 1884. Особенно рекомендуется: *C. G. J. Jacobi.* „Vorlesungen über Dynamik“. Berlin, 1866.

$$(F,f)=0,\quad (F_1,f)=0,\quad (F_2,f)=0,\ \ldots\ (F_{n-2},f)=0; \tag{5}$$

каждое слѣдующее F_h опредѣляется изъ системы, получающейся изъ предыдущей чрезъ прибавленіе къ ней новаго уравненія, сформированнаго по тому же образцу при помощи послѣдней найденной изъ этихъ функцій. Якоби такимъ образомъ сводитъ задачу къ интегрированію системъ линейныхъ совокупныхъ уравненій съ частными производными. Интегрируются же эти системы по способу, изложенному въ § 193, такъ какъ эти системы не только замкнутыя, но и нормальныя.

212. Мы докажемъ это важное предложеніе, выведя его изъ формулы (4) § 185, которая примѣнима и къ такимъ уравненіямъ, какъ теперь разсматриваемыя, ибо послѣднія суть частный случай первыхъ; именно, на основаніи формулы:

$$A(B(f))-B(A(f))=\sum_{j=1}^{n}[A(B_j)-B(A_j)]\frac{\partial f}{\partial x_j}. \tag{1}$$

Пусть будутъ:

$$A(f)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)=(F,f)=0 \tag{2}$$

и

$$B(f)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}-\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)=(\varphi,f)=0, \tag{3}$$

такъ, что коэффиціенты A_j будутъ:

$$A_j=\frac{\partial F}{\partial x_j},\quad A_{n+j}=-\frac{\partial F}{\partial p_j};\qquad (j=1,2\ldots n) \tag{4}$$

и коэффиціенты B_j:

$$B_j=\frac{\partial \varphi}{\partial x_i},\quad B_{n+j}=-\frac{\partial \varphi}{\partial p_j}.\qquad (j=1,2\ldots n) \tag{5}$$

Примѣняя къ уравненіямъ (2) и (3) формулу (1), мы будемъ имѣть:

$$A(B(f))-B(A(f))=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left\{\left[A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)-B\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial p_j}-\left[A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}\right)-B\left(\frac{\partial F}{\partial p_j}\right)\right]\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\}. \tag{6}$$

Но

$$\left.\begin{aligned}A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i\partial x_j}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\right),\\ B\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial^2 F}{\partial p_i\partial x_j}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\right);\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

вычитая нижнее изъ верхняго, будемъ имѣть, какъ легко видѣть:

$$(8)\quad A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)-B\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right),$$

т. е. (по (2))

$$(9)\qquad A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)-B\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial(F,\varphi)}{\partial x_j}.$$

Точно такъ же найдемъ, что

$$(10)\qquad A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}\right)-B\left(\frac{\partial F}{\partial p_j}\right)=\frac{\partial(F,\varphi)}{\partial p_j}.$$

Внося въ (6) изъ (9) и (10) вмѣсто лѣвыхъ частей ихъ правыя, мы будемъ имѣть:

$$(11)\quad A(B(f))-B(A(f))=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial(F,\varphi)}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial p_j}-\frac{\partial(F,\varphi)}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)=((F,\varphi),f).$$

Если введемъ и въ лѣвую часть изъ (2) и (3) обозначенie при помощи скобокъ, то будемъ имѣть:

$$(12)\qquad (F,(\varphi,f))-(\varphi,(F,f))=((F,\varphi),f).$$

Это тождество Якоби (также Donkin'a) можно написать въ болѣе симметричной формѣ, перенося всё въ лѣвую часть и пользуясь свойствомъ скобокъ Пуассона мѣнять знакъ отъ перестановки функцiй между собою, именно:

$$(13)\qquad (F,(\varphi,f))+(\varphi,(f,F))+(f,(F,\varphi))=0,$$

въ какой его легко запомнить, такъ какъ каждый членъ выводится изъ предыдущаго чрезъ круговую перестановку буквъ, оставляя скобки на своихъ мѣстахъ.

Съ помощью (11) сейчасъ докажется нормальность системъ (3), (4) и (5) пред. §: если подъ φ будемъ разумѣть интегралъ уравненiя

$$(14)\qquad A(f)=(F,f)=0,$$

то будетъ

$$(15)\qquad (F,\varphi)=0,$$

и слѣд. результатъ взаимнаго дифференцированiя $A(f)=0$ и

$$(16)\qquad B(f)=(\varphi,f)=0$$

будетъ тождественно нуль, такъ какъ въ (11) коэффицiенты при частныхъ производныхъ f по p_j и x_j будутъ тождественно равны нулю по (15). Но въ упомянутыхъ сейчасъ системахъ уравненiя такъ составлены, какъ $B(f)$, т. е. при помощи интеграла предшествующей системы.

Замѣтимъ, что вычисленiя значительно упрощаются, если мы будемъ, какъ то дѣлалъ Якоби, рѣшать каждое полученное уравненiе по новой производной, чрезъ что система, какъ мы уже знаемъ, преобразуется въ нормальную. Можно также интегрировать системы и по способу Майера. Для болѣе подробнаго изученія этого способа Якоби, рекомендуются *C. G. J. Jacobi*. Nova methodus.... и диссертація Импенецкаго, также работы Graindorge'a и Collet.

213. Изъ (13) сейчасъ вытекаетъ *теорема Пуассона*, что по двумъ интеграламъ канонической системы уравненій можно найти третій интегралъ при помощи однихъ дифференцированій. Въ самомъ дѣлѣ, если $f_1 = c_1$ и $\varphi = c_2$ будутъ интегралы канонической системы уравненій, то по § 210 функціи f_1 и φ будутъ удовлетворять линейному уравненію съ частными производными:

$$(F, f) = 0; \tag{1}$$

слѣд. будемъ имѣть тождественно:

$$(F, f_1) = 0 \quad \text{и} \quad (F, \varphi) = 0; \tag{2}$$

полагая въ (13) пред. § $f = f_1$, мы будемъ имѣть на основаніи этихъ тождествъ:

$$(F, (\varphi, f_1)) \equiv 0, \tag{3}$$

откуда слѣдуетъ, что $f = (\varphi, f_1)$ есть тоже интегралъ уравненія (1); потому

$$(\varphi, f_1) = c_3 \tag{4}$$

будетъ новымъ интеграломъ канонической системы,—разумѣется, если (φ, f_1) есть функція тѣхъ же перемѣнныхъ.

214. Проинтегрируемъ по методу Якоби уравненіе:

$$F = (x_2 p_1 + x_1 p_2) x_3 + a p_3 (p_1 - p_2) - 1 = 0. \tag{1}$$

Здѣсь будутъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x_1} = p_2 x_3; \quad &&\frac{\partial F}{\partial x_2} = p_1 x_3; \quad &&\frac{\partial F}{\partial x_3} = x_2 p_1 + x_1 p_2; \\ &\frac{\partial F}{\partial p_1} = x_2 x_3 + a p_3; \quad &&\frac{\partial F}{\partial p_2} = x_1 x_3 - a p_3; \quad &&\frac{\partial F}{\partial p_3} = a(p_1 - p_2); \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

а потому уравненіе $(F, f) = 0$ будетъ такое:

$$\begin{aligned} (F, f) = p_2 x_3 \frac{\partial f}{\partial p_1} - (x_2 x_3 + a p_3) \frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 x_3 \frac{\partial f}{\partial p_2} - (x_1 x_3 - a p_3) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \\ + (x_2 p_1 + x_1 p_2) \frac{\partial f}{\partial p_3} - a(p_1 - p_2) \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0; \end{aligned} \tag{3}$$

для интегрированія его составляемъ такую систему обыкновенныхъ уравненій:

$$\frac{dp_1}{p_2 x_3} = \frac{-dx_1}{x_2 x_3 + a p_3} = \frac{dp_2}{p_1 x_3} = \frac{-dx_2}{x_1 x_3 - a p_3} = \frac{dp_3}{x_2 p_1 + x_1 p_2} = \frac{-dx_3}{a(p_1 - p_2)}; \tag{4}$$

изъ этой системы по свойству пропорцій легко выводимъ такое уравненіе:

(5) $$\frac{dp_1 - dp_2}{x_3(p_2 - p_1)} = \frac{-dx_3}{a(p_1 - p_2)},$$

которое приводится къ такому виду:

(6) $$a(dp_1 - dp_2) - x_3 dx_3 = 0;$$

интегралъ его будетъ:

(7) $$F_1 = a(p_1 - p_2) - \frac{1}{2}x_3^2 = C_1.$$

Частныя производныя F_1 будутъ:

(8) $$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0, & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0, & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = -x_3, \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_1} = a, & \frac{\partial F_1}{\partial p_2} = -a, & \frac{\partial F_1}{\partial p_3} = 0; \end{cases}$$

слѣд. уравненіе $(F_1, f) = 0$ будетъ такое:

(9) $$(F_1, f) = -a\frac{\partial f}{\partial x_1} + a\frac{\partial f}{\partial x_2} - x_3\frac{\partial f}{\partial p_3} = 0.$$

Для того, чтобы найти общій интегралъ уравненій (3) и (9), мы должны имѣть еще одинъ интегралъ уравненія (3), отличный отъ найденнаго *). Соединяя первое и третье изъ отношеній въ (4), мы получимъ уравненіе:

(10) $$\frac{dp_1}{p_2 x_3} = \frac{dp_2}{p_1 x_3},$$

которое легко приводится къ такому:

(11) $$p_1 dp_1 - p_2 dp_2 = 0,$$

интегралъ котораго будетъ:

(12) $$\frac{1}{2}p_1^2 - \frac{1}{2}p_2^2 = C';$$

функцію

(13) $$\vartheta = \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{1}{2}p_2^2$$

подставляемъ въ (9); ея частныя производныя суть:

(14) $$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1,2,3); \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial p_1} = p_1, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial p_2} = -p_2; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial p_3} = 0;$$

внося ихъ въ (9), получимъ:

(15) $$(F_1, \vartheta) = 0.$$

*) Ибо, подставляя въ (F_1, f) вмѣсто f функцію F_1 получимъ нуль.

Отсюда заключаемъ, что функція ϑ удовлетворяетъ обоимъ уравненіямъ (3) и (9), а потому можетъ быть принята за F_2; слѣд.

$$F_2 = \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{1}{2}p_2^2 = c_2. \tag{16}$$

Рѣшая уравненія (1), (7) и (16) по p_1, p_2 и p_3, а затѣмъ интегрируя имѣющій получиться полный дифференціалъ

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3, \tag{17}$$

мы найдемъ полный интегралъ нашего уравненія:

$$\left.\begin{aligned} z = \frac{c_2}{2}\log(x_1+x_2) + \frac{1}{2a}(x_1-x_2)\left(c_2+\frac{x_3^2}{2}\right) + \\ + \sqrt{\frac{2}{c_2}}\operatorname{arctg}\frac{x_3}{\sqrt{2c_2}} - \frac{c_1}{2}\log(2c_2+x_3^2) + c_3. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Въ этомъ примѣрѣ вычисленія сократились вслѣдствіе того, что случайно ϑ оказалась удовлетворяющею обоимъ уравненіямъ; но это понятно не всегда бываетъ. Для болѣе сложныхъ примѣровъ читатель можетъ обратиться къ сочиненіямъ Имшенецкаго, Graindorge'a, Collet, Mansion, Goursat. Многіе изъ примѣровъ повторяются въ различныхъ сочиненіяхъ.

215. Еще до опубликованія новаго способа Якоби, французскій ученый *Буръ* (Ed. Bour) въ 1855 г. *) интегрировалъ такимъ же образомъ линейныя совокупныя уравненія съ частными производными перваго порядка; а въ 1862 г. распространилъ способъ Якоби и на системы совокупныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка какія угодно. И въ самомъ дѣлѣ, если дана система уравненій:

$$F_h(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z, \overset{n}{\underset{1}{p_i}}) = 0, \qquad (h=1,2,\dots m) \tag{1}$$

то часть работы необходимой для отысканія полнаго комплекта такихъ уравненій, уже сдѣлана; вотъ и вся разница съ случаемъ, нами уже разсмотрѣннымъ, когда дано одно уравненіе, предполагая, разумѣется, что условія совмѣстности уравненій выполнены.

Когда дана система (1), то нужно убѣдиться въ томъ, совмѣстны ли ея уравненія, или нѣтъ. Для этого составляемъ скобки

$$[F_h, F_g] = 0 \tag{2}$$

всѣми возможными способами. Если окажется, что нѣкоторыя изъ скобокъ приведутся къ постоянной, отличной отъ нуля, или къ функціи однѣхъ независимыхъ перемѣнныхъ, то система несовмѣстна. Если этого

*) Sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier et du second ordre. Journal de l'École polytéchnique, 39 Cahier, 1862.

не случится, а будутъ получаться либо нули, либо функціи, содержащія производныя, то послѣднія мы присоединяемъ къ данной системѣ и съ новой системой поступаемъ точно такъ же, продолжая это до тѣхъ поръ, пока не придёмъ къ одному изъ трехъ результатовъ: 1) или къ случаямъ, когда которыя-нибудь скобки приведутся къ постоянной, отличной отъ нуля, либо функціи однѣхъ независимыхъ перемѣнныхъ; 2) или число такихъ скобокъ будетъ больше числа независимыхъ перемѣнныхъ; въ обоихъ этихъ случаяхъ данныя уравненія несовмѣстны; 3) всѣ скобки, число которыхъ меньше n,—числа независимыхъ перемѣнныхъ, обращаются въ нуль или тождественно, или на основаніи самихъ уравненій. Въ этомъ случаѣ данныя уравненія совмѣстны, а выведенная изъ нихъ указаннымъ способомъ система будетъ *замкнутая*, если хотя нѣкоторыя изъ скобокъ обращаются въ нуль на основаніи уравненій системы, и *нормальная*,—когда всѣ скобки обращаются тождественно въ нуль. Если данная система, а слѣд. и выведенная изъ нея, не содержатъ z, то она проинтегрируется по способу Якоби; если же она содержитъ z, то надобно предварительно её подвергнуть тому или другому преобразованію, указаннымъ въ § 208. Впрочемъ, проф. Д. А. Граве распространилъ методу Якоби и Бура и на тотъ случай, когда z входитъ въ уравненіе.

216. Примѣнимъ этотъ способъ къ такой системѣ уравненій:

$$(1)\qquad \left.\begin{aligned} F_1 &= p_1p_4 - x_2x_3 = 0; \text{*)} \\ F_2 &= p_2p_3 - x_1x_4 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Составляемъ скобки:

$$(2)\qquad (F_1, F_2) = -p_4x_4 + p_3x_3 + p_2x_2 - p_1x_1 = 0;$$

это новое уравненіе отлично отъ предыдущихъ, потому мы его присоединяемъ къ системѣ. Надо составить скобки между F_1, F_2 съ одной стороны и $F_3 = (F_1, F_2)$ — съ другой; но это можно сдѣлать и послѣ приведенія ихъ къ Якобіеву виду, рѣшая ихъ, напр., по p_1, p_2 и p_4, такъ какъ система отъ такого преобразованія не перестаетъ быть замкнутою, если была такою, а можетъ сдѣлаться нормальною. Рѣшая по сказаннымъ величинамъ (и удерживая лишь знакъ — вмѣсто $\pm$ въ выраженіи p_4), будемъ имѣть такую систему:

$$(3)\qquad p_1 - \frac{x_2x_3}{p_4} = 0, \qquad p_2 - \frac{x_4p_1}{x_2} = 0, \qquad p_3 - \frac{x_1x_2}{p_4} = 0. \text{ **)}$$

Эта система оказывается нормальною; слѣд. данная совмѣстна, и интегрированіе ея сведено къ интегрированію системы (3). Составляемъ уравненія:

---

*) Примѣръ Goursat, p. 156—157.

**) Непосредственно получается $p_2 = \frac{x_1x_4}{p_3}$, $p_4 = \frac{x_1x_2}{p_3}$, а это, очевидно, приводится къ данному въ текстѣ.

$$\left.\begin{aligned}
&\left(p_1-\frac{x_2x_3}{p_4}, f\right)=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{x_2x_3}{p_4^2}\frac{\partial f}{\partial x_4}=0;\\
&\left(p_2-\frac{x_1p_4}{x_2}, f\right)=\frac{\partial f}{\partial x_2}-\frac{x_4}{x_2}\frac{\partial f}{\partial x_4}+\frac{p_4}{x_2}\frac{\partial f}{\partial p_4}=0;\\
&\left(p_3-\frac{x_1x_2}{p_4}, f\right)=\frac{\partial f}{\partial x_3}+\frac{x_1x_2}{p_4^2}\frac{\partial f}{\partial x_4}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Слѣдуя методу Якоби для линейныхъ уравненій этого вида (рѣшенныхъ по одной изъ частныхъ производныхъ), нормальной, ибо, какъ сказано, скобки между (3) тождественно $=0$, нужно было бы найти интегралъ одного уравненія, съ помощью его интегралъ двухъ, затѣмъ, всѣхъ трехъ уравненій; но здѣсь дѣло упрощается, ибо первое и третье уравненія имѣютъ, очевидно, общій интегралъ: $f=p_4$; подставляя его во второе уравненіе, будемъ имѣть въ результатѣ: $\frac{p_4}{x_2}$. Потому общій всѣмъ тремъ уравненіямъ интегралъ будетъ вида $\vartheta\left(\frac{p_4}{x_2}, x_2\right)$. Функція ϑ должна удовлетворять такому уравненію:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x_2}+\frac{\partial\vartheta}{\partial p_4}\frac{p_4}{x_2}=0, \tag{5}$$

или, освобождая отъ знаменателя:

$$x_2\frac{\partial\vartheta}{\partial x_2}+p_4\frac{\partial\vartheta}{\partial p_4}=0. \tag{5'}$$

Отвѣчающая ему система обыкновенныхъ уравненій состоитъ изъ одного уравненія:

$$\frac{dx_2}{x_2}=\frac{dp_4}{x_4}, \tag{6}$$

интегралъ котораго есть

$$\frac{p_4}{x_2}=C. \tag{7}$$

Слѣд. наша функція

$$\vartheta=\frac{p_4}{x_2}, \tag{8}$$

и интегралъ, общій всѣмъ тремъ уравненіямъ, будетъ $\frac{p_4}{x_2}$. (Это F_4 общаго случая, если назовемъ F_1, F_2, F_3 первыя части уравненій (3) по порядку.) Приравнивая его постоянной произвольной a, будемъ имѣть въ уравненіи

$$\frac{p_4}{x_2}=a \tag{9}$$

четвертое уравненіе, изъ котораго вмѣстѣ съ (3) функціи $\overset{4}{\underset{1}{p_i}}$ должны опредѣлиться такъ, чтобы было $\sum_1^4 p_i dx_i = dz$. Изъ (3) и (9) находимъ:

$$p_1 = \frac{x_3}{a}, \quad p_2 = ax_4, \quad p_3 = \frac{x_1}{a}, \quad p_4 = ax_2, \tag{10}$$

и слѣд. послѣ интегрированія получаемъ полный интегралъ системы:

$$z = \frac{x_1 x_3}{a} + ax_2 x_4 + b, \tag{11}$$

гдѣ a и b произвольныя постоянныя, изъ коихъ одна придаточная; прочихъ $4-3=1$, согласно съ формулою $n-m$.

217. Положимъ, что данная система совокупныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка приведена къ нормальной (или Якобіевой, точнѣе), т. е. къ виду:

$$p_h - F_h(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, \overset{n}{\underset{m+1}{p_j}}) = 0. \qquad (h=1,2,\ldots m) \tag{1}$$

Недостающія до полнаго комплекта уравненія найдутся, когда мы найдемъ рѣшенія, общія такой системѣ линейныхъ совокупныхъ уравненій съ частными производными функціи f по $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$ и $\overset{n}{\underset{1}{p_j}}$:

$$(p_h - F_h, f) = 0, \qquad (h=1,2,\ldots m) \tag{2}$$

какъ то слѣдуетъ изъ § 211, такъ какъ часть уравненій изъ этого комплекта, именно m уравненій (1) уже дана. Если къ системѣ (2) будемъ примѣнять очерченный въ этомъ § методъ, то мы будемъ дѣлать не что иное, какъ интегрировать эту систему по способу *Бура*. Но можно интегрировать эту систему по способу Майера, и тогда мы получимъ методъ *Ли* для интегрированія системъ подобныхъ (1).

Полагая, какъ въ § 198:

$$x_1 = c_1 + (y_1 - c_1); \quad x_h = c_h + (\overset{m}{\underset{1}{y_1}} - c_1) y_h; \quad x_g = y_g, \quad (g=m+1,\ldots n) \tag{3}$$

мы приведемъ, какъ тамъ, интегрированіе системы (2), т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{j=m+1}^{n} \left(\frac{\partial F_h}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial F_h}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (h=1,2,\ldots m) \tag{4}$$

къ такой:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial y_1} + \sum_{j=m+1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = 0; \\ &\frac{\partial f}{\partial y_k} + (y_1 - c_1) \sum_{j=m+1}^{n} \left(\frac{\partial H_k}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial H_k}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = 0; \quad (k=2,3,\ldots m) \end{aligned} \right. \tag{5}$$

гдѣ H_k есть то, во что обратится F_k, а

$$H = H_1 + \sum_{k=2}^{m} H_k y_k; \tag{6}$$

но для полнаго интегрированія этой послѣдней системы достаточно проинтегрировать первое уравненіе ея, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} + \sum_{j=m+1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = 0. \tag{7}$$

Теперь систему (5) можно получить также, вводя перемѣнныя (3) прямо въ (1), а не во (2), и образуя потомъ скобки ихъ съ f, какъ это не трудно видѣть. Отсюда мы заключаемъ, что полное интегрированіе системы (1) сводится на полное интегрированіе одного уравненія:

$$p_1 - H = 0, \tag{8}$$

гдѣ $p_1 = \frac{\partial z}{\partial y_1} = \frac{\partial z}{\partial x_1}$, а H—то, во что обращается послѣ введенія новыхъ перемѣнныхъ (3) функція

$$F = F_1 + \sum_{k=2}^{m} F_k y_k. \tag{9}$$

Это *теорема Ли,* выведенная имъ изъ ученія о n-ыхъ многообразіяхъ и доказанная съ помощью обыкновеннаго Анализа *Майеромъ* *).

218. Въ 1867 г. проф. *А. Н. Коркинъ* далъ другую методу для интегрированія системъ совокупныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка, опирающуюся, съ одной стороны, на способъ Коши, съ другой стороны—представляющей распространеніе на нелинейныя уравненія идеи, легшей въ основаніе Якобіевскаго способа интегрированія системъ линейныхъ совокупныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка, именно опредѣлять произвольную функцію, входящую въ общій интегралъ перваго уравненія, такъ, чтобы эта функція удовлетворяла второму уравненію, при чемъ аргументы произвольной функціи вводятся какъ новыя независимыя перемѣнныя. Профессоръ Коркинъ находитъ сперва по способу Коши общій интегралъ перваго уравненія нормальной системы, которая выводится ранѣе указаннымъ способомъ изъ данной; этотъ интегралъ будетъ содержать произвольную функцію отъ $n-1$ аргументовъ, которые такъ опредѣляются:

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial V}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial \alpha_j} = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots n-1) \tag{1}$$

гдѣ

$$V = \varphi(\overset{n}{\underset{1}{x_i}}, z, \overset{n-1}{\underset{1}{\alpha_j}}, A(\overset{n-1}{\underset{1}{\alpha_j}})), \tag{2}$$

*) См. *Goursat*, p. 170 и слѣдующія.

и A произвольная функція; эту произвольную функцію $\dot{A}$ отъ α_j $(j=1,2\ldots n-1)$ онъ опредѣляетъ далѣе такъ, чтобы удовлетворилось и второе уравненіе, и съ этою цѣлью вводитъ ${}_1\alpha_j^{n-1}$ за новыя независимыя перемѣнныя, а $A({}_1\alpha_j^{n-1})$ за новую функцію. Каждое такое преобразованіе, повторяемое при переходѣ къ третьему, четвертому ... изъ уравненій нормальной системы понижаетъ число перемѣнныхъ на 2 единицы. Если этотъ способъ на практикѣ ведётъ къ большимъ вычисленіямъ и потому труднѣе другихъ, то взамѣнъ того имѣетъ то теоретическое преимущество предъ ними, что позволяетъ выводить заключенія о формѣ интеграловъ, что важно во многихъ приложеніяхъ. Желающіе ближе ознакомиться съ этимъ способомъ лучше всего могутъ сдѣлать это, обратясь къ докторской диссертаціи автора этого способа *).

Примѣры для упражненія.

1) $xy=pyq$; полный интегралъ: $(z-z_0)^2=(x^2-x_0^2)(y^2-y_0^2)$; общій интегралъ представится совокупностью этого и уравненія: $(z-z_0)q_0=(x^2-x_0^2)y_0$. (Mansion, p. 229.)

2) $2xz-px^2+qxy+q^2x=0$. (Mansion, p. 230.)

3) $p_2(p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)+p_1p_3=0$; пол. инт.: $z=c_1+\dfrac{c_2x_2+c_2c_3x_3}{x_1+c_3}$.

(Ермаковъ, Лекціи стр. 13).

4) $p^2+q^2=f(x)+\varphi(y)$; общій интегралъ:

$$\left.\begin{aligned} z&=\int\sqrt{f(x)+a}\,dx+\int\sqrt{\varphi(y)-a}\,dy+\beta(a),\\ 2\frac{\partial z}{\partial a}&=\int\frac{dx}{\sqrt{f(x)+a}}-\int\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)-a}}+2\beta'(a)=0.\end{aligned}\right\}$$

(Шапошниковъ стр. 105.)

5) $px-qy-q^2-2z=0$; полн. инт.: $z=ax^3y+\dfrac{a^2x^6}{4}+bx^2$. (ibid.)

6) $z=pq$; полн. инт.: $z=(x+a)(y+b)$; вывести общій. (Serret. T. II. p. 634.)

7) $p_1p_2p_3=x_1x_2x_3$; полн. интегралъ:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3(z-\zeta)^3=(x_1^2-\xi_1^2)(x_2^2-\xi_2^2)(x_3^2-\xi_3^2)$$ (Шапошниковъ, 125.)

8) $p_1p_2x_3+p_3p_1x_2+p_2p_3x_1=0$; $z=\beta x_2^2+\gamma x_3^2-\dfrac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}x_1^2+\delta$.

(ibid., стр. 125—127.)

---

*) *А. Н. Коркинъ.* О совокупныхъ уравненіяхъ съ частными производными перваго порядка и нѣкоторыхъ вопросахъ механики. С.-Пб. 1867.

9) $p^2+q^2-2px-2qy+2xy=0$; полный интегралъ:

$$2z-b=x^2+ax+y^2+ay+\frac{x-y}{2^{3/2}}[2(x-y)^2-a^2]^{\frac{1}{2}}-$$

$$-\frac{a^2}{2^{3/2}}\log[2^{1/2}(x-y)+\{2(x-y)^2-a^2\}^{1/2}].$$ (Forsyth-Maser, 362.)

10) $z=f(p_1, p_2, \dots p_n)$; полн. инт. $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=\int\chi(z)dz$, гдѣ χ опредѣляется уравненіемъ: $z=f\left(\frac{\alpha_1}{\chi}, \frac{\alpha_2}{\chi}, \dots \frac{\alpha_4}{\chi}\right)$;

а если $f(\overset{n}{\underset{1}{p_i}})$ однородная функція измѣренія μ, то

$$z=\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}}\cdot\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i x_i+c)\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}}}{[f(\overset{n}{\underset{1}{a_i}})]^{\frac{1}{\mu-1}}}.$$ (F. M., 388.)

11) $p_1p_2p_3=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3$; $z=\frac{2}{3}\left[\frac{(x_1+a_1x_2+a_2x_3)^3}{a_1a_2}\right]^{\frac{1}{2}}+C.$ (F.M., 391.)

12) $x_2p_1+x_1p_2+(p_1-p_2)(p_3+x_4)(p_4+x_3)=1$; полн. интегралъ:

$$z+x_3x_4=Ax_3+\frac{\alpha}{A}x_4+A_1\log[(x_1-\alpha)^2-(x_2+\alpha)^2]+$$

$$+B+\frac{1}{2}\log\left\{\frac{(x_1-\alpha)+(x_2+\alpha)}{(x_1-\alpha)-(x_2+\alpha)}\right\}.$$ (A, B, C, α произв. пост. F. M., 392.)

13) $p_1+(3x_2+2x_3)p_2+(4x_2+5x_3)p_3+[x_4+x_5(p_2-p_3)]p_5+\frac{x_3}{p_4}p_5^2=0$;

(прим. Имшенецкаго.) $z=a+\frac{a_1}{3}(2x_2-x_3)e^{-x_1}+a_2(x_2+x_3)e^{-7x_1}-$

$$-a_3a_4\int e^{a_1e^{-x_1}}dx_1+a_3\log\left[x_4+a_4x_5e^{a_1e^{-x_1}}\right].$$ (F. M., 401.)

$$+a_5\left(a_4x_4+x_5e^{a_1e^{-x_1}}\right)e^{-\frac{1}{a_4}}\int e^{a_1e^{-x_1}}dx_1.$$ (Mansion, 172.)

14) $x_1^2p_1+x_2^2p_2-2x_1z-b\log p_2+2b\log x_1=\alpha$.

$$z=a_1x^2y-a_1x^3-\frac{\alpha+b\log a_1}{3x}+a_2x^2.$$ (F. M., 401.)

КОНЕЦЪ.

Замѣченныя погрѣшности.

Стр.	Строка	Напечатано:	Должно быть:
3	5 св.	взятой	взятому
8	10 »	$X = X_0$	$x = x_0$
16	9 сн.	$dz = \rho i e^{\theta i}$	$dz = \rho i e^{\theta i} d\theta$
23	1 св.	$\int_x^X$	$\int_{x_0}^X$
25	11 сн.	(4)	(3)
28	8 »	$\frac{\partial^2 x_i}{\partial x \partial t}$	$\frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha \partial t}$
29	10 »	$\int_{t_0}^t$	$\int_{t_0}^{t_1}$
30	4 св.	$\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha} -\right.$	$\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_j}{\partial \alpha} -\right.$
31	14 сн.	порядка	порядка,
39	7 »	$\overline{x_0 x'}$	$\overline{xx'}$
42	3 »	$dx < 0$	$dx > 0$
45	11 св.	модуля	модулей
53	8 и 10 сн.	$\frac{dy}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$
54	7 св.	$\frac{y'}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}}$
55	12 »	(19)	(16)
59	3 сн.	$\sin(u+v)$	$\sin am(u+v)$
62	12 »	;	,
63	8 св.	§ 7	§ 49
63	12 »	опредѣляется	опредѣляется по (6)
68	5 »	$\sqrt{}S_2$	$\sqrt{S_2}$
68	4 сн.	$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{s_1}\right)$	$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{s_1^{\frac{1}{2}}}\right)$
68	3 »	$\frac{1}{s_1}$	$\frac{1}{s_1^{\frac{1}{2}}}$

Стр.	Строка	Напечатано:	Должно быть:
68	5 и 1 сн.	$\frac{1}{s_1^{2}}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{s_1}\right)$	$\frac{1}{s_1^{\frac{3}{2}}}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{s_1^{\frac{1}{2}}}\right)$
69	2 св.	$\frac{1}{s_1^{2}}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{s_1}\right)$	$\frac{1}{s_1^{\frac{3}{2}}}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{s_1^{\frac{1}{2}}}\right)$
69	3 »	$\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{s_1}\right)$	$\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{s_1^{\frac{1}{2}}}\right)$
69	5 »	$\frac{1}{s_1}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{s_1}\right)$	$\frac{1}{s_1^{\frac{1}{2}}}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{s_1^{\frac{1}{2}}}\right)$
74	13 сн.	$(ay_1-bx_1)\,dx_1=0;$	$(ay_1-bx_1)\,dy_1=0;$
85	10 св.	,	;
88	10 сн.	такому	такому:
89	6 св.	$\frac{q-1}{2}$	$-\frac{q-1}{2}$
89	8 »	$-\frac{1}{q+2k-3}u^{\frac{q+2k-3}{2}}$	$-\frac{1}{-q+2k-1}u^{\frac{-q+2k-1}{2}}$
89	10 »	$-\frac{1}{q+2k-3}u^{q+k-2}$	$-\frac{1}{-q+2k-1}u^{k-1}$
89	12 »	$-\frac{1}{q+2k-3}\left(\frac{y}{x}\right)^{q+k-2}$	$-\frac{1}{-q+2k-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{k-1}$
89	14 »	$-\frac{1}{n-m+2k-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{n-m+k}$	$-\frac{1}{-n+m+2k-3}\left(\frac{y}{x}\right)^{k-1}$
90	7 сн.	цросты	просты
94	11 св.	функціями,	функціями
104	16 »	$M\frac{\partial\log\frac{\mu}{\lambda}}{\partial x}-$	$M\frac{\partial\log\frac{\mu}{\lambda}}{\partial y}-$
111	10 и 4 сн.	dx	$d(x+y)$
114	2 и 1 »	нулевого измѣренія	(нулевого измѣренія)
118	7 св.	$n+m-1$	$n+m+1$
119	7 св.	$\int_1^y\frac{dy}{3(1+y)}$	$\int_0^y\frac{dy}{3(1+y)}$
119	11 »	$\int_1^x\frac{3x+2y}{3(x^2+xy)}dx=$	$\int_1^x\frac{3x+2y}{3(x^2+xy)}dx+\int_0^y\frac{dy}{3(1+y)}=$
119	11 »	$\frac{1}{3}\int_1^y\frac{dy}{1+y}=$	$\frac{1}{3}\int_0^y\frac{dy}{1+y}=$
119	16 »	$\log(3C')$	$e^{3C'}$

Стр.	Строка	Напечатано:	Должно быть:
121	10 сн.	$\int_1^x \frac{y+xy^2}{2x^2y^2} =$	$\int_1^x \frac{y+xy^2}{2x^2y^2}\,dx =$
126	1 св.	Отсюда	Отсюда,
126	2 сн.	$(x-\sqrt{y^2+1})$	$(x-\sqrt{y^2+1})^2$
130	9 »	*фукція*	*функція*
135	2 св.	ось которыхъ параллельна	оси которыхъ параллельны
145	6 сн.	u	и
151	14 св.	$e^{\frac{1}{2}}x^2$	$e^{\frac{1}{2}x^2}$
152	17 сн.	**особыхъ**	**особенныхъ**
156	8 св.	2) кратныя точки	2) въ кратныхъ точкахъ
156	8 »	3) точки	3) въ точкахъ
156	14 »	y'	въ нихъ y'
157	3 »	оси y	оси x
159	6 »	приводясь	приводящіяся
164	11 »	(7) пред. §	(7)
166	1 »	$\frac{\partial f}{\partial x'}$	$\frac{\partial f_1}{\partial x'}$
166	2 сн.	будемъ	можетъ
168	1 и 2 св.	(3)	(2) § 103
169	1 сн.	AY	OY
170	6 св.	Oy	OY
176	13 сн.	этихъ	ихъ
178	11 »	$\Big]_{z=x} =$	$\Big]_{z=x}\Big] =$
185	11 св.	вое, изъ	вое изъ
185	10 сн.	$\int$	$\int_{t_0}^{t}$
187	10 св.	$=\sqrt{a^2y^2+C}$	$=\pm\sqrt{a^2y^2+C}$
188	5 »	большихъ	бóльшихъ
189	9 »	$dy^{(n)} =$	$dy^{(n-2)} =$
191	5 сн.	$\int_{z_0}^{z} z\,dx$	$\int_{x_0}^{x} z\,dx$
202	12 св.	§ 74	§ 121
203	6 »	$X_n = V$	$X_n y = V,$
204	2 »	производныхъ	произвольныхъ
205	8 »	производныя	произвольныя
206	5 »	выразится чрезъ	выведется изъ
206	14 »	$+\alpha_n y = 0,$	$+\alpha_n y_n = 0,$

Стр.	Строка	Напечатано:	Должно быть:
206	5 сн.	что $y_n^{(i)}$	что y_n
207	10 »	результатъ	результантъ
208	3 »	$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} y_j =$	$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} y_i =$
209	6 св.	$=0$ нулю	$=0$
212	8 »	$v^{(n-1-k'')}$	$v^{(n-2-k'')}$
214	17 сн.	$\Delta^{(1)}(y) =$	$\Delta^{(1)}(u) =$
214	5 и 6 сн.	y	y_1
215	10 сн.	C'	C'_j
215	7 »	dx	dx^m
215	7 »	x^{l-1}	x^{m-l}
215	4 »	dx	dx^m
216	1 »	dx_j	dx^m
216	10 сн.	$y'' = y(z^2 + z')$	$y'' = y(z^2 + z')$,
216	4 »	производнаго	производной
218	5 св.	$e^{r_i(x-x)_0}$	$e^{r_i(x-x_0)}$
220	10 »	§ 128	§ 130
221	13 »	:	.
227	13 »	(5)	(1)
228	5 сн.	формулахъ:	формулахъ, именно:
229	5 св.	$\int_0^x$	$\int_{x_0}^x$
229	10 »	(2) ихъ	(2) вмѣсто $C_2(\alpha)$ ихъ
230	7 »	$+C_1$;	$+c_1$;
230	7 »	$+C_2$;	$+c_2$;
230	13 »	во (2)	въ (3)
236	9 »	$\frac{d^{p_i^k-1} y_i}{dx^{p_i^k-1}} = y_{i,p_i^k-1}$;	$\frac{d^{\overline{p_i^k}-1} y_i}{dx^{\overline{p_i^k}-1}} = y_{i,\overline{p_i^k}-1}$;
236	10 »	тогда	гдѣ $\overline{p_i^k}$ означаетъ наибóльшее изъ $p_i^1, p_i^2, \ldots p_i^n$; тогда
236	11 »	$\frac{d^{p_i^k} y_i}{dx^{p_i^k}} = \frac{dy_{i,p_i^k-1}}{dx}$,	$\frac{d^{\overline{p_i^k}} y_i}{dx^{\overline{p_i^k}}} = \frac{dy_{i,\overline{p_i^k}-1}}{dx}$,
236	13 »	$\frac{dy_{i,p_i^k-2}}{dx} = y_{i,p_i^k-1}$;	$\frac{dy_{i,\overline{p_i^k}-1}}{dx} = y_{i,\overline{p_i^k}-1}$; $(i=1, 2, \ldots, n)$

Стр.	Строка	Напечатано:	Должно быть:
236	14 св.	$\ldots y_{i,p_i^k-1}, \dfrac{dy_{i,p_i-1}}{dx}\Big)=0,$	$\ldots y_{i,\overline{p_i^k}-1}, \dfrac{dy_{i,\overline{p_i^k}-1}}{dx}\Big)=0,$ $(k=1, 2 \ldots n)$
236	17 »	$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} p_i^k.$	$\sum_{i=1}^{n} \overline{p_i^k}.$
238	10 »	$\ldots y^{(m)})=0,$	$\ldots y_1^{(m)})=0,$
238	12 »	$\ldots y^{(m-1)}.$	$\ldots y_1^{(m-1)}.$
238	1 сн.	$\sum_{m_i=1}^{p_i^k}$	$\sum_{m_i^k=1}^{p_i^k}$
238	1 »	$\dfrac{\partial y_i}{\partial C_i}$	$\dfrac{\partial y_i}{\partial C_j}$
239	4 св.	представится функціями	представится (§ 149) функціями
240	7 сн.	$A^k_{ip_i^k}=$	$A^k_{i,p_i^k}=$
243	11 »	величинъ,	величинъ;
245	13 св.	уравненія (5)	уравненій (1)
245	14 »	его	ихъ
245	19 »	отностительно	относительно
249	1 сн.	$(y'_{g,l}-y'_{g,i})$	$(y'_{g,l}-y_{g,i})$
251	4 св.	$p-1$	p
251	12 сн.	$Y'_g-y'_g$	$\lvert Y'_g-y'_g\rvert$
254	2 св.	$y_{g,k+1}-y_{g,k}\rvert$	$\lvert y_{g,k+1}-y_{g,k}\rvert$
254	11 »	$\sum_{k=1}^{n}$	$\sum_{k=1}^{m}$
254	3 сн.	).	),
254	2 »	Мы	мы
255	14 »	полагая $x=0$,	полагая въ (1) $x=0$,
256	13 »	каждая,	каждая;
257	6 »	$b^{\mu_1+\cdot\cdot\mu_n}$	$b^{\mu_1+\cdots+\mu_n}$
257	въ формулахъ (16), (17) и (18), а также въ строчкахъ 3 и 2 сн. перемѣнить y на Y.		
269	6 св.	имѣть:	имѣть (перемѣняя опять маленькія c на обычныя большія C):
276	10 сн.	системы	системѣ
277	11 »	удается	удастся
279	14 »	$\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_n}$	$\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}$
279	9 »	$=d\varphi=0.$	$=d\varphi_i=0.$

Стр.	Строка	Напечатано:	Должно быть:
279	6 сн.	X_n	X_k
280	9 св.	(3)	(4)
280	13 »	$\Phi(\varphi_i)$,	$\Phi(\overset{n}{\underset{1}{\varphi_i}})$,
282	4 »	$\frac{\partial D_k}{\partial x_n}$	$\frac{\partial D_k}{\partial x_k}$
284	1 сн.	дополненнаго	дополненное
292	4 »	И	И-
299	12 св.	$+q$	$-q$
303	3 сн.	$\sum\limits_{k=1}^{n}$	$\sum\limits_{h=1}^{n}$
323	6 св.	x_m^n	x_n^m
331	4 »	$Y^{(k)}(l)$	$Y^{(k)}(f)$
333	13 »	произвольная	уравненія (1); произвольная
336	6 сн.	тождество	тождества
336	5 и 3 »	$\equiv 0$	$\equiv 0$,
337	6 сн.	f_{g+}	f_{g+1}
339	6 св.	$[A x_1)$	$[A(x_1)$
342	15 »	n_j;	n;
344	11 »	$x_g = y_g$	$x_g = y_g$;
345	4 »	$[Y^{(1)}(Y^{(h)})-$	$[Y^{(1)}(Y_i^{(h)})-$
355	16 св.	(8)	(12)
356	8 сн.	по (8)	по (8) пред. §

I. 641

Вид. г. 10 41 Боровий Іно-

6/XII 26

повер. — 24/XII 26

731

Вид 1/III 27 р / III 27 р Ковалевська з І

поверн. 17/III 27 ІНО

Вид.