Одна задача изъ теоріи упругости.

В. А. Стеклова.

§ 1.

Въ Journal de Mathématiques pures et appliquées за 1884 г. *) помѣщена статья Maurice Lévy, въ которой онъ указываетъ на новый случай рѣшенія одной задачи теоріи упругости, именно опредѣляетъ форму равновѣсія безконечно-тонкаго стержня подъ условіемъ, что на линію центровъ тяжести сѣченій дѣйствуетъ постоянное давленіе нормально къ этой линіи, причемъ разсматривается только плоская форма равновѣсія. Кривыя равновѣсія, получающіяся въ этомъ случаѣ, подробнѣе изучены Halphen'омъ въ Journal de l'Ecole Polytechnique за 1884 г. **) Мнѣ кажется не безъинтереснымъ разсмотрѣть нѣкоторые случаи, когда кривая не плоская, а двоякой кривизны, причемъ придется, конечно, ограничить форму сѣченія прута. Вопросъ о равновѣсіи стержня съ круговымъ сѣченіемъ, находящагося подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ только къ концамъ его, рѣшенъ Кирхгофомъ, причемъ указанъ и разобранъ имъ случай, когда стержень представляетъ форму винтовой линіи. ***) Въ настоящей замѣткѣ я постараюсь показать, что для стержня съ сѣченіемъ, два момента инерціи котораго для двухъ главныхъ осей равны между собою (кругъ, правильный многоугольникъ), вопросъ о равновѣсіи вполнѣ рѣшается и въ предположеніи, что кромѣ силъ данныхъ, дѣйствующихъ на концахъ стержня, на линію центровъ тяжести сѣченій дѣйствуетъ еще постоянное

*) Maurice Lévy. „Mémoire sur un nouveau cas intégrable du problème de l'élastique et l'une de ses applications". Journal de Mathématiques pures et appliquées. Tome dixième, 1884.

**) Halphen. „Sur une courbe élastique". Journal de l'Ecole Polytechnique. 1884, p. 54.

***) Kirchhoff. „Vorlesungen über Mathematische Physik".

давленіе, направленное по главной нормали къ этой кривой. Случай, подобный случаю Maurice Lévy, только не для плоской формы равновѣсія, а для какой угодно. Мы увидимъ при этомъ, что рѣшеніе вопроса приводитъ къ эллиптическимъ интеграламъ всѣхъ трехъ родовъ, т. е. къ эллиптическимъ трансцендентнымъ. При томъ не трудно будетъ замѣтить, что винтовая линія также будетъ представлять возможную форму равновѣсія, какъ и для случая равновѣсія безъ дѣйствія силы давленія.

§ 2.

И такъ, предположимъ, что стержень изотропенъ, моменты инерціи относительно двухъ главныхъ осей сѣченія равны между собою и на линію центровъ тяжести сѣченій дѣйствуетъ постоянное давленіе D по главной нормали къ этой линіи. Называя черезъ ξ, η, ζ оси неподвижныхъ въ пространствѣ координатъ, а черезъ x, y, z оси, начало координатъ которыхъ лежитъ въ центрѣ тяжести сѣченія, направимъ ось z'овъ по касательной къ кривой центровъ тяжести, ось x'овъ по касательной къ кривой, въ которую обращается одна изъ главныхъ осей инерціи послѣ деформаціи, ось y'овъ перпендикулярно къ послѣдней. Назовемъ черезъ A, B, C проекціи на оси x, y, z силы, дѣйствующей въ каждой точкѣ тѣла, черезъ A', B', C' проекціи момента этихъ силъ на тѣже оси. Пусть оси x, y, z составляютъ

$$\left.\begin{array}{l} \text{съ осью } \xi\text{, углы, косинусы которыхъ } \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \\ \text{съ осью } \eta\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \beta_1,\ \beta_2.\ \beta_3 \\ \text{съ } \ldots\ \zeta\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3 \end{array}\right\} \ldots (1)$$

Положимъ, далѣе, по Клебшу

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \alpha_2\frac{d\alpha_3}{ds}+\beta_2\frac{d\beta_3}{ds}+\gamma_2\frac{d\gamma_3}{ds} = -\alpha_3\frac{d\alpha_2}{ds}-\beta_3\frac{d\beta_2}{ds}-\gamma_3\frac{d\gamma_2}{ds}, \\ r_2 &= \alpha_3\frac{d\alpha_1}{ds}+\beta_3\frac{d\beta_1}{ds}+\gamma_3\frac{d\gamma_1}{ds} = -\alpha_1\frac{d\alpha_3}{ds}-\beta_1\frac{d\beta_3}{ds}-\gamma_1\frac{d\gamma_3}{ds}, \\ r_3 &= \alpha_1\frac{d\alpha_2}{ds}+\beta_1\frac{d\beta_2}{ds}+\gamma_1\frac{d\gamma_2}{ds} = -\alpha_2\frac{d\alpha_1}{ds}-\beta_2\frac{d\beta_1}{ds}-\gamma_2\frac{d\gamma_1}{ds}, \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

причемъ для изотропнаго тѣла, при сдѣланномъ выше условіи относительно моментовъ инерціи, имѣемъ

$$r_1 = -\frac{A'}{\lambda^2}, \quad r_2 = -\frac{B'}{\lambda^2}, \quad r_3 = -\frac{C'}{\mu^2}, \quad \ldots\ldots (3)$$

и

$$\lambda^2 = Eq\lambda_1{}^2\,, \qquad \mu^2 = Eq\mu_1{}^2\,,$$

гдѣ E модуль упругости, q площадь сѣченія, λ_1, μ_1 главные радіусы инерціи сѣченія.

Называя черезъ $X'ds$, $Y'ds$, $Z'ds$ проекціи на неподвижныя въ пространствѣ оси внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на элементъ ds (s обозначаетъ дугу), имѣемъ

$$X' = D\cos(R\xi)\,, \quad Y' = D\cos(R\eta)\,, \quad Z' = D\cos(R\zeta)\,,$$

гдѣ R означаетъ направленіе (перваго) радіуса кривизны кривой центровъ тяжести.

Какъ извѣстно

$$\frac{d\xi}{ds} = \alpha_3\,, \quad \frac{d\eta}{ds} = \beta_3\,, \quad \frac{d\zeta}{ds} = \gamma_3\,,$$

и

$$\cos(R\xi) = R\frac{d^2\xi}{ds^2}\,, \quad \cos(R\eta) = R\frac{d^2\eta}{ds^2}\,, \quad \cos(R\zeta) = R\frac{d^2\zeta}{ds^2}\,,$$

или

$$\cos(R\xi) = R\frac{d\alpha_3}{ds}\,, \quad \cos(R\eta) = R\frac{d\beta_3}{ds}\,, \quad \cos(R\zeta) = R\frac{d\gamma_3}{ds}\,,$$

и

$$\left.\begin{array}{l|l|l|}
\dfrac{d\alpha_1}{ds} = r_2\alpha_3 - r_3\alpha_2 & \dfrac{d\beta_1}{ds} = r_2\beta_3 - r_3\beta_2 & \dfrac{d\gamma_1}{ds} = r_2\gamma_3 - r_3\gamma_2 \\
\dfrac{d\alpha_2}{ds} = r_3\alpha_1 - r_1\alpha_3 \;(m)\,, & \dfrac{d\beta_2}{ds} = r_3\beta_1 - r_1\beta_3 \;(n), & \dfrac{d\gamma_2}{ds} = r_3\gamma_1 - r_1\gamma_3 \;(p) \\
\dfrac{d\alpha_3}{ds} = r_1\alpha_2 - r_2\alpha_1 & \dfrac{d\beta_3}{ds} = r_1\beta_2 - r_2\beta_1 & \dfrac{d\gamma_3}{ds} = r_1\gamma_2 - r_2\gamma_1
\end{array}\right\}. \quad (4)$$

Замѣтивъ, что

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2\xi}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d\alpha_3}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta_3}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_3}{ds}\right)^2},$$

изъ послѣднихъ уравненій (4) (m), (n), (p), возвысивъ ихъ въ квадратъ и сложивъ, имѣемъ

$$\frac{1}{R} = \sqrt{r_1{}^2 + r_2{}^2}\,,$$

и положивъ $\varrho = \sqrt{r_1{}^2 + r_2{}^2}$, находимъ $R = \dfrac{1}{\varrho}$ . . . . (5)

Такимъ образомъ

$$X' = \frac{D}{\varrho}\frac{d\alpha_3}{ds}, \quad Y' = \frac{D}{\varrho}\frac{d\beta_3}{ds}, \quad Z' = \frac{D}{\varrho}\frac{d\gamma_3}{ds}.$$

Если положимъ

$$U = \iint X'dxdy, \quad V = \iint Y'dxdy, \quad W = \iint Z'dxdy,$$

$$U_1 = \iint X'xdxdy, \quad U_2 = \iint X'ydxdy,$$

$$V_1 = \iint Y'xdxdy, \quad V_2 = \iint Y'ydxdy,$$

$$W_1 = \iint Z'xdxdy, \quad W_2 = \iint Z'ydxdy,$$

то, какъ извѣстно, шесть условій равновѣсія представятся въ видѣ *)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}(A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3) + U = 0, \\
&\frac{d}{ds}(A\beta_1 + B\beta_2 + C\beta_3) + V = 0, \\
&\frac{d}{ds}(A\gamma_1 + B\gamma_2 + C\gamma_3) + W = 0,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

и

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}(A'\alpha_1 + B'\alpha_2 + C'\alpha_3) + A\alpha_2 - B\alpha_1 + \beta_1 W_1 + \beta_2 W_2 - \gamma_1 V_1 - \gamma_2 V_2 = 0, \\
&\frac{d}{ds}(A'\beta_1 + B'\beta_2 + C'\beta_3) + A\beta_2 - B\beta_1 + \gamma_1 U_1 + \gamma_2 U_2 - \alpha_1 W_1 - \alpha_2 W_2 = 0, \\
&\frac{d}{ds}(A'\gamma_1 + B'\gamma_2 + C'\gamma_3) + A\gamma_2 - B\gamma_1 + \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 - \beta_1 U_1 - \beta_2 U_2 = 0,
\end{aligned}\right\} . (7)$$

или, по отношенію къ координатнымъ осямъ x, y, z, въ видѣ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dA}{ds} + (r_3 B - r_2 C) + \alpha_1 U + \beta_1 V + \gamma_1 W = 0, \\
&\frac{dB}{ds} + (r_1 C - r_3 A) + \alpha_2 U + \beta_2 V + \gamma_2 W = 0, \\
&\frac{dC}{ds} + (r_2 A - r_1 B) + \alpha_3 U + \beta_3 V + \gamma_3 W = 0,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots . (6_1)$$

*) Clebsch. „Theorie der Elasticität fester Körper". Leipzig 1862. S. 207.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dA'}{ds}+B'r_3-C'r_2-B+\alpha_3 U_2+\beta_3 V_2+\gamma_3 W_2=0,\\
&\frac{dB'}{ds}+C'r_1-A'r_3+A-\alpha_3 U_2-\beta_3 V_2-\gamma_3 W_1=0,\\
&\frac{dC'}{ds}+A'r_2-B'r_1+\begin{Bmatrix}\alpha_2 U_1+\beta_2 V_1+\gamma_2 W_1\\ -\alpha_1 U_2-\beta_1 V_2-\gamma_1 W_2\end{Bmatrix}=0.
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;(7_1)$$

Не трудно убѣдиться, что въ разсматриваемомъ случаѣ

$$U=\frac{D}{\varrho}\frac{d\alpha_3}{ds},\quad V=\frac{D}{\varrho}\frac{d\beta_3}{ds},\quad W=\frac{D}{\varrho}\frac{d\gamma_3}{ds},\;.\;.\;.\;.\;.\;(8)$$

а

$$U_1=V_1=W_1=U_2=V_2=W_2=0\,,$$

вслѣдствіе чего уравненія (6), (7), (6_1) примутъ видъ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}(A\alpha_1+B\alpha_2+C\alpha_3)+\frac{D}{\varrho}\frac{d\alpha_3}{ds}=0\,,\\
&\frac{d}{ds}(A\beta_1+B\beta_2+C\beta_3)+\frac{D}{\varrho}\frac{d\beta_3}{ds}=0\,,\\
&\frac{d}{ds}(A\gamma_1+B\gamma_2+C\gamma_3)+\frac{D}{\varrho}\frac{d\gamma_3}{ds}=0\,,
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(9)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}(A'\alpha_1+B'\alpha_2+C'\alpha_3)+A\alpha_2-B\alpha_1=0\,,\\
&\frac{d}{ds}(A'\beta_1+B'\beta_2+C'\beta_3)+A\beta_2-B\beta_1=0\,,\\
&\frac{d}{ds}(A'\gamma_1+B'\gamma_2+C'\gamma_3)+A\gamma_2-B\gamma_1=0\,,
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;(10)$$

и

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dA}{ds}+r_3B-r_2C-\frac{D}{\varrho}r_2=0\,,\\
&\frac{dB}{ds}+r_1C-r_3A+\frac{D}{\varrho}r_1=0\,,\\
&\frac{dC}{ds}+r_2A-r_1B\qquad\quad=0\,,
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(11)$$

ибо

$$\alpha_1 U+\beta_1 V+\gamma_1 W=\frac{D}{\varrho}\left[\alpha_1\frac{d\alpha_3}{ds}+\beta_1\frac{d\beta_3}{ds}+\gamma_1\frac{d\gamma_3}{ds}\right]=-\frac{Dr_2}{\varrho}$$

$$\alpha_2 U+\beta_2 V+\gamma_2 W=\frac{D}{\varrho}\left[\alpha_2\frac{d\alpha_3}{ds}+\beta_2\frac{d\beta_3}{ds}+\gamma_2\frac{d\gamma_3}{ds}\right]=\frac{Dr_1}{\varrho}$$

въ силу перваго и второго изъ выраженій (2), и очевидно, что

$$\alpha_3 U + \beta_3 V + \gamma_3 W = \frac{D}{\varrho}\left[\alpha_3 \frac{d\alpha_3}{ds} + \beta_3 \frac{d\beta_3}{ds} + \gamma_3 \frac{d\gamma_3}{ds}\right] = 0\,.$$

Уравненія же (7_1) дадутъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dA'}{ds} + B'r_3 - C'r_2 - B = 0\,, \\ &\frac{dB'}{ds} + C'r_1 - A'r_3 + A = 0\,, \\ &\frac{dC'}{ds} + A'r_2 - B'r_1 \quad\;\; = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Воспользовавшись выраженіями (3), получимъ окончательно

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dr_1}{ds} = a_1 r_2 r_3 - \frac{B}{\lambda^2}\,, \\ &\frac{dr_2}{ds} = -a_1 r_1 r_3 + \frac{A}{\lambda^2}\,, \\ &\frac{dr_3}{ds} = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

причемъ для сокращенія положено $a_1 = \dfrac{\mu^2 - \lambda^2}{\lambda^2}$,

и кромѣ того

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dA}{ds} = r_2 C - r_3 B + \frac{D}{\varrho} r_2\,, \\ &\frac{dB}{ds} = r_3 A - r_1 C - \frac{D}{\varrho} r_1\,, \\ &\frac{dC}{ds} = r_1 B - r_2 A\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (11_1)$$

Интегрируя эту систему шести уравненій, найдемъ A, B, C, r_1, r_2, r_3 въ функціи s. Затѣмъ по уравненіямъ (4) опредѣлимъ α_i, β_i, γ_i ($i = 1$, 2, 3), и наконецъ найдемъ уравненіе кривой равновѣсія въ видѣ

$$\xi = \int \alpha_3 ds\,, \quad \eta = \int \beta_3 ds\,, \quad \zeta = \int \gamma_3 ds\,.$$

§ 3.

Интегрированіе системъ (13) и (11_1) выполняемъ слѣдующимъ образомъ.

Третье изъ уравненій (13) даетъ непосредственно

$$r_3 = \text{const} = c\,,$$

т. е. крученіе для всѣхъ точекъ стержня одно и то-же.

Помножая первыя два изъ уравненій (13) соотвѣтственно на r_1 и r_2 и складывая, имѣемъ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}({r^2}_1 + {r^2}_2) = \frac{1}{\lambda^2}(Ar_2 - Br_1),$$

а въ силу третьяго изъ уравненій (11_1), замѣтивъ, что $\varrho^2 = {r_1}^2 + {r_2}^2$, находимъ

$$\frac{1}{2}\frac{d\varrho^2}{ds} = -\frac{1}{\lambda^2}\frac{dC}{ds}\,.$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ

$$\varrho^2 + \frac{2}{\lambda^2}C = L_1\,, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

гдѣ L_1 произвольная постоянная.

Помноживъ затѣмъ первыя два изъ уравненій (13) соотвѣтственно на A, B, а первыя два (11_1) на r_1 и r_2 и сложивъ, получимъ

$$A\frac{dr_1}{ds} + B\frac{dr_2}{ds} + r_1\frac{dA}{ds} + r_2\frac{dB}{ds} = a_1 r_3(Ar_2 - Br_1) - r_3(Br_1 - Ar_2),$$

или

$$\frac{d}{ds}(Ar_1 + Br_2) = -(a_1+1)r_3\frac{dC}{ds}\,.$$

Отсюда, интегрируя, получаемъ

$$Ar_1 + Br_2 = -(a_1+1)r_3 C + L_2\,, \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

гдѣ L_2 произвольная постоянная.

Выраженіе (15) при помощи интеграла (14) можно также представить въ видѣ

$$Ar_1 + Br_2 = (a_1+1)\frac{r_3\lambda^2}{2}\varrho^2 - \frac{(a_1+1)\lambda^2 r_3}{2}L_1 + L_2\,,$$

а положивъ

$$\frac{(a_1+1)r_3\lambda^2}{2} = b_1\,, \qquad L_2 - \frac{(a_1+1)\lambda^2 r_3 L_1}{2} = b_2\,,$$

будемъ имѣть

$$Ar_1 + Br_2 = b_1\varrho^2 + b_2 \quad \ldots \ldots \ldots (15_1)$$

Помножая уравненія (11_1) послѣдовательно на A, B, C и сложивъ, найдемъ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(A^2 + B^2 + C^2) = \frac{D}{\varrho}(Ar_2 - Br_1),$$

или, при помощи третьяго изъ уравненій (11_1),

$$\frac{d}{ds}(A^2 + B^2 + C^2) = -\frac{2D}{\varrho}\frac{dC}{ds}.$$

Но уравненіе (14) даетъ

$$2\varrho\frac{d\varrho}{ds} + \frac{2}{\lambda^2}\frac{dC}{ds} = 0,$$

откуда

$$\frac{d}{ds}(A^2 + B^2 + C^2) = 2D\lambda^2\frac{d\varrho}{ds}.$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ

$$A^2 + B^2 + C^2 = 2D\lambda^2\varrho + L_3, \quad \ldots \ldots \ldots (16)$$

гдѣ L_3 новая произвольная постоянная.

Это-же уравненіе, въ силу (14), можетъ быть приведено къ виду

$$A^2 + B^2 = -\frac{\lambda^4}{4}\varrho^4 + \frac{\lambda^4 L_1}{2}\varrho^2 + 2D\lambda^2\varrho + L_3 - \frac{\lambda^4 L_1{}^2}{4},$$

а положивъ

$$-\frac{\lambda^4}{4} = c_1, \quad \frac{\lambda^4 L_1}{2} = c_2, \quad 2D\lambda^2 = c_3 \quad L_3 - \frac{\lambda^4 L_1{}^2}{4} = c_4,$$

будемъ имѣть

$$A^2 + B^2 = c_1\varrho^4 + c_2\varrho^2 + c_3\varrho + c_4 \quad \ldots \ldots (16_1)$$

Итакъ, имѣемъ между прочимъ,

$$\left.\begin{array}{l} Ar_1 + Br_2 = b_1\varrho^2 + b_2, \\ \text{и} \quad A^2 + B^2 = c_1\varrho^4 + c_2\varrho^2 + c_3\varrho + c_4. \end{array}\right\} \ldots \ldots (17)$$

Изъ этихъ уравненій получимъ

$$\left.\begin{array}{l} A = \dfrac{R_1(\varrho)B - r_2R(\varrho)}{r_1B - r_2A}, \\[2ex] B = \dfrac{r_1R(\varrho) - AR_1(\varrho)}{r_1B - r_2A}, \end{array}\right\} \ldots \ldots \ldots (18)$$

гдѣ положено для краткости

$$R_1(\varrho) = b_1\varrho^2 + b_2 , \quad R(\varrho) = c_1\varrho^4 + c_2\varrho^2 + c_3\varrho + c_4 .$$

Помноживъ второе изъ уравненій (18) на r_1, первое на r_2 и вычтя одно изъ другого, находимъ

$$Br_1 - Ar_2 = \frac{\varrho^2 R(\varrho) - R_1(\varrho)(Ar_1 + Br_2)}{r_1 B - r_2 A} ,$$

откуда

$$\left(\frac{dC}{ds}\right)^2 = \varrho^2 R(\varrho) - R_1(\varrho)(Ar_1 + Br_2) ,$$

и замѣтивъ, что

$$\frac{dC}{ds} = -\lambda^2 \varrho \frac{d\varrho}{as} ,$$

въ силу уравненій (15_1) находимъ

$$\lambda^4 \varrho^2 \left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 = \varrho^2 R(\varrho) - R_1{}^2(\varrho) = \varrho^2(c\ \varrho^4 + c_2\varrho^2 + c_3\varrho + c_4) - (b_1\varrho^2 + b_2)^2 .$$

Допустивъ-же, что $b_2 = 0$, получимъ

$$\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 = \frac{c_1}{\lambda^4}\varrho^4 + \frac{c_2}{\lambda^4}\varrho^2 + \frac{c_3}{\lambda^4}\varrho + \frac{c_4}{\lambda^4} - \frac{b_1{}^2}{\lambda^4}\varrho^2 ,$$

а положивъ для краткости

$$\frac{c_1}{\lambda^4} = h_1 , \quad \frac{c_2}{\lambda^4} - \frac{b_1{}^2}{\lambda^4} = h_2 , \quad \frac{c_3}{\lambda^4} = h_3 , \quad \frac{c_4}{\lambda^4} = h_4 ,$$

имѣемъ

$$\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 = h_1\varrho^4 + h_2\varrho^2 + h_3\varrho + h_4 ,$$

откуда

$$\frac{d\varrho}{\sqrt{h_4 + h_3\varrho + h_2\varrho^2 + h_1\varrho^4}} = ds \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

Интегрированіе этого выраженія опредѣляетъ ϱ въ эллиптическихъ функціяхъ отъ s.

Положимъ, такимъ образомъ,

$$\varrho = F(s)$$

и, не останавливаясь пока подробно на опредѣленіи вида этой функціи, покажемъ въ общемъ видѣ окончательное рѣшеніе вопроса. Прежде всего опредѣлимъ r_1 и r_2.

Помножая первое изъ уравненій (13) на r_2, второе на r_1 и вычитая одно изъ другого, получаемъ уравненіе

$$r_2 \frac{dr_1}{ds} - r_1 \frac{dr_2}{as} = a_1 r_3 \varrho^2 - \frac{1}{\lambda^2}(Ar_1 + Br_2) \,,$$

которое при помощи уравненія (15_1), при условіи $b_2 = 0$, *) представится въ видѣ

$$r_2{}^2 \frac{d}{ds} \frac{r_1}{r_2} = k\varrho^2 \,, \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

гдѣ положено $k = (a_1 r_3 - \frac{1}{\lambda^2} b_1)$.

Изъ уравненія (20) слѣдуетъ

$$\frac{du}{ds} = k(1+u^2) \,, \ldots\ldots\ldots\ldots (20_1)$$

гдѣ $u = \frac{r_1}{r_2}$.

Интегрируя уравненіе (20_1), находимъ

$$u = \mathrm{tg}(ks + \mathrm{arctg}\, u_0) \,,$$

гдѣ u_0 начальное значеніе u при $s = 0$.

Отсюда безъ труда находимъ

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\mathrm{tg}ks + u_0}{1 - \mathrm{tg}ks \cdot u_0} \,,$$

и такъ какъ

$$r_1{}^2 + r_2{}^2 = \varrho^2 = F^2(s) \,,$$

то

$$r_2{}^2 \left[1 + \left(\frac{\mathrm{tg}ks + u_0}{1 - \mathrm{tg}ks \cdot u_0}\right)^2\right] = \varrho^2 = F^2(s) \,.$$

и

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= \frac{\cos ks(1 - \mathrm{tg}ks \cdot u_0)}{\sqrt{1+u_0{}^2}} \varrho \,, \\ r_1 &= \frac{\cos ks(u_0 + \mathrm{tg}ks)}{\sqrt{1+u_0{}^2}} \varrho \; **). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (21)$$

---

*) При дальнѣйшемъ сужденіи всегда будемъ считать $b_2 = 0$.

**) Если $u_0 = 0$, то выраженіе r_1 и r_2, замѣтимъ между прочимъ, принимаютъ слѣдующій весьма простой видъ

$$r_1 = \sin ks \cdot \varrho \,, \quad r_2 = \cos ks \cdot \varrho \,.$$

Шесть интеграловъ системъ (13) и (11_1), такимъ образомъ, найдены. Выпишемъ ихъ для ясности.

1) $r_3 = \text{const} = c$

2) $C = (L_1 - \varrho^2)\dfrac{\lambda^2}{2}$

3) $Ar_1 + Br_2 = b_1\varrho^2 + b_2$, ($b_2 = 0$ въ нашемъ допущеніи)

4) $A^2 + B^2 = c_1\varrho^4 + c_2\varrho^2 + c_3\varrho + c_4$,

5) $\varrho = F(s)$,

6) $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{\operatorname{tg}ks + u_0}{1 - \operatorname{tg}ks \cdot u_0}$.

Эти уравненія и опредѣлятъ r_1, r_2 $r_3 \ldots C$ въ функціи дуги и шести произвольныхъ постоянныхъ, между которыми мы установили соотношеніе

$$b_2 = 0,$$

такъ что останется только пять произвольныхъ постоянныхъ.

§ 4.

Перейдемъ теперь къ опредѣленію косинусовъ α_i, β_i, γ_i ($i=1, 2, 3$). Величины $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, какъ извѣстно, удовлетворяютъ уравненіямъ (4) (p)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{ds} &= r_2\gamma_3 - r_3\gamma_2, \\ \frac{d\gamma_2}{ds} &= r_3\gamma_1 - r_1\gamma_3, \\ \frac{d\gamma_3}{ds} &= r_1\gamma_2 - r_2\gamma_1. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (4)\,(p)$$

По предыдущему имѣемъ

$$\frac{dC}{ds} = -\lambda^2\varrho\frac{d\varrho}{ds} = Br_1 - Ar_2,$$

откуда

$$\frac{d\varrho}{ds} = \frac{1}{\lambda^2}\,\frac{-Br_1 + Ar_2}{\varrho},$$

и слѣдовательно

$$\frac{d\varrho}{ds}(r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2) = \frac{1}{\lambda^2\varrho}\left[Ar_2r_1\gamma_1 - Br_1{}^2\gamma_1 + Ar_2{}^2\gamma_2 - Br_1r_2\gamma_2\right].$$

Замѣняя затѣмъ въ правой части предыдущаго уравненія $r_1{}^2$ черезъ $\varrho^2 - r_2{}^2$ и $r_2{}^2$ черезъ $\varrho^2 - r_1{}^2$, получимъ

$$Ar_2r_1\gamma_1 - Br_1{}^2\gamma_1 + Ar_2{}^2\gamma_2 - Br_1r_2\gamma_2 = (Ar_1 + Br_2)(r_2\gamma_1 - r_1\gamma_2) + \varrho^2(A\gamma_2 - B\gamma_1),$$

но

$$Ar_1 + Br_2 = b_1\varrho^2,$$

а потому

$$Ar_2r_1\gamma_1 - Br_1{}^2\gamma_1 + Ar_2{}^2\gamma_2 - Br_1r_2\gamma_2 = -b_1\varrho^2\frac{d\gamma_3}{ds} + \varrho^2(A\gamma_2 - B\gamma_1),$$

и наконецъ

$$(r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2)\frac{d\varrho}{ds} = \frac{\varrho}{\lambda^2}\left[(A\gamma_2 - B\gamma_1) - b_1\frac{d\gamma_3}{ds}\right] \quad . \; . \; . \; . \; (22)$$

Помножая, далѣе, первыя два изъ уравненій (13) на γ_1 и γ_2, имѣемъ

$$\gamma_1\frac{dr_1}{ds} + \gamma_2\frac{dr_2}{ds} = -a_1r_3(-r_2\gamma_1 + r_1\gamma_2) - \frac{1}{\lambda^2}(B\gamma_1 - A\gamma_2),$$

а помноживъ первыя два изъ уравненій (4)(p) на r_1 и r_2 и сложивъ, находимъ

$$r_1\frac{d\gamma_1}{ds} + r_2\frac{d\gamma_2}{ds} = -r_3(r_1\gamma_2 - r_2\gamma_1).$$

Сложивъ это уравненіе съ предыдущимъ, получимъ

$$\frac{d}{ds}(r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2) = -(a_1 + 1)r_3(r_1\gamma_2 - r_2\gamma_1) + \frac{1}{\lambda^2}(A\gamma_2 - B\gamma_1),$$

Помноживъ это равенство на ϱ и вычтя изъ него уравненіе (22), находимъ

$$\varrho\frac{d}{ds}(r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2) - \frac{d\varrho}{ds}(r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2) = \left[-(a_1 + 1)r_3 + \frac{b_1}{\lambda^2}\right]\varrho\frac{d\gamma_3}{ds},$$

откуда, положивъ для сокращенія

$$m = \frac{b_1}{\lambda^2} - (a_1 + 1)r_3,$$

получимъ

$$\varrho^2\frac{d}{ds}\left(\frac{r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2}{\varrho}\right) = m\varrho\frac{d\gamma_3}{ds}.$$

Но такъ какъ (третье изъ уравненій (9))

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\gamma_3}{ds} = -\frac{1}{D}\frac{d}{ds}(A\gamma_1 + B\gamma_2 + C\gamma_3),$$

то предыдущее уравненіе представится въ видѣ

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2}{\varrho} + \frac{m}{D}(A\gamma_1 + B\gamma_2 + C\gamma_3)\right] = 0,$$

и слѣдовательно

$$\frac{r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2}{\varrho} + \frac{m}{D}(A\gamma_1 + B\gamma_2 + C\gamma_3) = M_3, \quad \ldots\ldots (23)$$

гдѣ M_3 произвольная постоянная.

Замѣняя въ этомъ уравненіи γ_i послѣдовательно черезъ α_i, β_i $(i = 1, 2, 3)$, получимъ еще

$$\left.\begin{aligned} &\frac{r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2}{\varrho} + \frac{m}{D}(A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3) = M_1, \\ &\frac{r_1\beta_1 + r_2\beta_2}{\varrho} + \frac{m}{D}(A\beta_1 + B\beta_2 + C\beta_3) = M_2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (24)$$

гдѣ M_1 и M_2 новыя произвольныя постоянныя.

Величины r_1, r_2, r_3, A, B и C извѣстны въ функціи дуги s (см. предыдущій §), а потому уравненія (23) и (24) въ связи съ извѣстными соотношеніями между косинусами α_i, β_i, γ_i вида

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0, \qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \\ &\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 = 0, \qquad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \\ &\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \gamma_3\beta_3 = 0, \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (25)$$

и опредѣлятъ ихъ въ функціи этой перемѣнной.

§ 5.

Положивъ для сокращенія

$$\frac{r_1}{\varrho} + \frac{m}{D}A = d_1, \quad \frac{r_2}{\varrho} + \frac{m}{D}B = d_2, \quad \frac{m}{D}C = d_3, \quad \ldots (26)$$

приведемъ уравненія (23) и (24) къ виду

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \alpha_3 d_3 &= M_1\,, \\ \beta_1 d_1 + \beta_2 d_2 + \beta_3 d_3 &= M_2\,, \\ \gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_2 + \gamma_3 d_3 &= M_3\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (27)$$

Разсматривая d_1, d_2, d_3 какъ проекціи на оси x, y, z нѣкотораго вектора d, заключаемъ, на основаніи уравненій (27), что этотъ векторъ сохраняетъ неизмѣнное направленіе въ пространствѣ (и величину).

Такъ какъ положеніе координатной системы ξ, η, ζ вполнѣ произвольно, то нисколько не уменьшая общности вопроса, можемъ положить

$$M_1 = 0\,, \quad M_2 = 0\,, \quad M_3 = M\,,$$

такъ что

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \alpha_3 d_3 &= 0\,, \\ \beta_1 d_1 + \beta_2 d_2 + \beta_3 d_3 &= 0\,, \\ \gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_2 + \gamma_3 d_3 &= M\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (28)$$

Помножая эти уравненія соотвѣтственно на

$$\alpha_1\,,\ \beta_1\,,\ \gamma_1\,; \quad \alpha_2\,,\ \beta_2\,,\ \gamma_2\,; \quad \alpha_3\,,\ \beta_3\,,\ \gamma_3\,,$$

и складывая каждый разъ, получаемъ

$$\gamma_1 = \frac{1}{M} d_1\,, \quad \gamma_2 = \frac{1}{M} d_2\,, \quad \gamma_3 = \frac{1}{M} d_3 \ldots\ldots (28_1)$$

Вводя углы ϑ, φ и f *) и замѣчая, что

$$\gamma_1 = \cos f \sin\vartheta\,, \quad \gamma_2 = \sin f \sin\vartheta\,, \quad \gamma_3 = \cos\vartheta\,, \quad \ldots\ldots (28_2)$$

опредѣлимъ при помощи уравненій (28_1) f и ϑ въ функціи s, а уголъ φ найдемъ интегрированіемъ уравненія

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2}{1 - \gamma_3{}^2}\,,$$

которое въ силу выраженій (26) и (28) приметъ видъ

$$\frac{d\varphi}{ds} = M\varrho\,\frac{1 + \dfrac{m}{D} b_1 \varrho}{1 - \dfrac{m^2 C^2}{M^2 D^2}}\,.$$

---

*) См. Kirchhoff. „Vorlesungen über Mathemat. Physik.“ S. 44.

Зная ϱ и C въ функціи s, опредѣлимъ и φ.

Косинусы α_3 и β_3 опредѣлятся затѣмъ по формуламъ

$$\alpha_3 = \cos\varphi\sin\vartheta\,, \quad \beta_3 = \sin\varphi\sin\vartheta\,,$$

а уравненіе кривой равновѣсія при помощи авадратуръ

$$\xi = \int \alpha_3 ds\,, \quad \eta = \int \beta_3 ds\,, \quad \zeta = \int \gamma_3 ds\,, \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

какъ указано и раньше.

§ 6.

Показавъ въ общихъ чертахъ рѣшеніе вопроса, прежде чѣмъ приступить къ дальнѣйшимъ изслѣдованіямъ, замѣтимъ, что винтовая линія, какъ и въ случаѣ Кирхгофа, есть также одна изъ возможныхъ формъ равновѣсія стержня при разсматриваемыхъ условіяхъ. Допуская, что давленіе, направленное по главной нормали къ кривой линіи центровъ тяжести, обратно пропорціонально радіусу кривизны этой кривой, т. е. равно $\dfrac{D}{R}$, гдѣ R радіусъ кривизны, приводимъ уравненія (9) къ виду

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{ds}(A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3) + D\frac{d\alpha_3}{ds} = 0\,, \\ &\frac{d}{ds}(A\beta_1 + B\beta_2 + C\beta_3) + D\frac{d\beta_3}{ds} = 0\,, \\ &\frac{d}{ds}(A\gamma_1 + B\gamma_2 + C\gamma_3) + D\frac{d\gamma_3}{ds} = 0\,, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (30)$$

непосредственная интеграція которыхъ даетъ

$$\left.\begin{aligned} &A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 + D\alpha_3 = L_1\,, \\ &A\beta_1 + B\beta_2 + C\beta_3 + D\beta_3 = L_2\,, \\ &A\gamma_1 + B\gamma_2 + C\beta_3 + D\gamma_3 = L_3\,, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (31)$$

гдѣ L_1, L_2, L_3 произвольныя постоянныя.

Не нарушая общности вопроса, можемъ, подобно предыдущему, положить $L_1 = L_2 = 0$, и тогда

$$\left.\begin{aligned} &A\alpha_1 + B\alpha_2 + (C + D)\alpha_3 = 0\,, \\ &A\beta_1 + B\beta_2 + (C + D)\beta_3 = 0\,, \\ &A\gamma_1 + B\gamma_2 + (C + D)\gamma_3 = L_3\,, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (31_1)$$

откуда

$$A = L_3\gamma_1\,,\quad B = L_3\gamma_2\,,\quad C = L_3\gamma_3\,.$$

Приэтомъ уравненія (7_1) примутъ видъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dA'}{ds} + B'r_3 - C'r_2 - L_3\gamma_2 = 0\,,\\ &\frac{dB'}{ds} + C'r_1 - A'r_3 + L_3\gamma_1 = 0\,,\\ &\frac{dC'}{ds} + A'r_2 - B'r_1 \qquad\quad = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (32)$$

Уравненія тѣ же самыя, что и въ случаѣ Кирхгофа и, очевидно, допускаютъ рѣшеніе, дающее для кривой равновѣсія стержня винтовую линію. Но для винтовой линіи $R = \text{const.}$, а потому давленіе въ разсматриваемомъ случаѣ будетъ постояннымъ и, слѣдовательно, стержень подъ дѣйствіемъ постояннаго давленія, направленнаго по главной нормали къ линіи центровъ тяжести сѣченій, можетъ принимать форму винтовой линіи, какъ и въ случаѣ, когда онъ находится подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ только къ концамъ его.

§ 7.

Что касается координатъ кривой равновѣсія ξ, η, ζ, то для полученія ихъ въ функціи s придется выполнить три квадратуры $\int\alpha_3 ds$, $\int\beta_3 ds$, $\int\gamma_3 ds$, какъ указано въ концѣ § 5.

Можно показать однако, что, вмѣсто непосредственнаго интегрированія выраженій $\int\alpha_3 ds$ и $\int\beta_3 ds$, легко найти ξ и η прямо въ функціи величинъ A, $B \ldots r_i$, α_i, ($i = 1,\ 2,\ 3$).

Въ самомъ дѣлѣ, какъ извѣстно

$$\frac{d\xi}{ds} = \alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1\,,$$

но, въ силу уравненій (28_1), имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} M\gamma_1 &= \frac{m}{D}A + \frac{r_1}{\varrho}\,,\\ M\gamma_2 &= \frac{m}{D}B + \frac{r_2}{\varrho}\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (26_1)$$

и слѣдовательно

$$M(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) = M\alpha_3 = \frac{m}{D}(\beta_1 B - \beta_2 A) + \frac{r_2\beta_1 - r_1\beta_2}{\varrho} \quad \ldots (33)$$

Правая часть этого уравненія, при помощи третьяго изъ уравненій (4)(n) и второго изъ уравненій (10), можетъ быть представлена въ видѣ

$$\frac{m}{D}\frac{d}{ds}(A'\beta_1+B'\beta_2+C'\beta_3)-\frac{1}{\varrho}\frac{d\beta_3}{ds}\,.$$

Но такъ какъ (уравненія (9))

$$\frac{D}{\varrho}\frac{d\beta_3}{ds}=-\frac{d}{ds}(A\beta_1+B\beta_2+C\beta_3)\,,$$

то

$$DM\alpha_3=\frac{d}{ds}\Big[m(A'\beta_1+B'\beta_2+C'\beta_3)+(A\beta_1+B\beta_2+C\beta_3)\Big]=DM\frac{d\xi}{ds}\,,$$

откуда, непосредственно интегрируя, получаемъ

$$\xi-\xi_0=\frac{m}{DM}(A'\beta_1+B'\beta_2+C'\beta_3)+\frac{1}{DM}(A\beta_1+B\beta_2+C\beta_3),$$

а такъ какъ начало координатъ (ξ, η, ζ) вполнѣ произвольно, то, не нарушая общности вопроса, можемъ положить $\xi_0=0$ (а также и $\eta_0=0$).

Замѣнивъ далѣе A', B', C' ихъ выраженіями черезъ r_i ($i=1$, 2, 3) по формуламъ (3) и замѣтивъ, что (на основаніи уравненій (28))

$$A\beta_1+B\beta_2+C\beta_3=-\frac{D}{m}\frac{(r_1\beta_1+r_2\beta_2)}{\varrho}\,,$$

получимъ

$$\xi=-k(r_1\beta_1+r_2\beta_2)-k_1\beta_3\,,$$

и точно такимъ же образомъ найдемъ, что . . . . (34)

$$\eta=k(r_1\alpha_1+r_2\alpha_2)+k_1\alpha_3\,,$$

гдѣ для сокращенія положено

$$k=\frac{1}{mM\varrho}+\frac{m\lambda^2}{MD}\,,\quad k_1=\frac{m\mu^2 r_3}{MD}\quad\ldots\ldots\ (34_1)$$

Зная r_i, β_i, α_i ($i=1$, 2, 3) и ϱ въ функціи s, по формуламъ (34) получимъ выраженія координатъ ξ и η въ функціи той же перемѣнной, а ζ найдемъ квадратурой.

Формулы (34) дадутъ возможность опредѣлить проекцію кривой равновѣсія на плоскость $\xi o\eta$ и по ней, конечно, составить болѣе опредѣленное понятіе о самой кривой.

Можно выразить радіусъ векторъ r и полярный уголъ ω этой проекціи въ функціи ϱ,—первый непосредственно черезъ ϱ, второй въ эллиптическихъ интегралахъ отъ ϱ.

Опредѣливъ затѣмъ такимъ же образомъ ζ, обращеніемъ эллиптическихъ интеграловъ, получимъ уравненіе кривой въ цилиндрическихъ координатахъ

$$r = \psi_1(s)\,,\quad \omega = \psi_2(s)\,,\quad \zeta = \psi_3(s)\,,$$

гдѣ ψ_1, ψ_2, ψ_3 нѣкоторыя функціи s. Постараемся опредѣлить въ общихъ чертахъ характеръ этихъ функцій.

§ 8.

Помножая выраженія (26_1) соотвѣтственно на r_1 и r_2 и складывая, получаемъ при помощи равенства (15_1) (при $b_2 = 0$)

$$\frac{m}{D} b_1 \varrho^2 = M(r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2) - \varrho\,. \quad \ldots\ldots\ldots (35)$$

Обозначивъ выраженіе $r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2$ черезъ ϱ_1, имѣемъ

$$M\varrho_1 = \varrho + \frac{mb_1}{D}\varrho^2\,. \quad \ldots\ldots\ldots (35_1)$$

Возводя затѣмъ выраженія (34) въ квадратъ и складывая, получаемъ

$$r^2 = k^2[r_1{}^2(1-\gamma_1{}^2) + r_2{}^2(1-\gamma_2{}^2) - 2r_1r_2\gamma_1\gamma_2] +$$
$$+ k_1{}^2(1-\gamma_3{}^2) - 2kk_1\gamma_3(r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2)\,,$$

откуда, принимая во вниманіе предыдущее обозначеніе, находимъ

$$r^2 - k_1{}^2 = [k\varrho - k\varrho_1 - k_1\gamma_3]\,[k\varrho + k\varrho_1 + k_1\gamma_3]\,. \quad \ldots\ldots (36)$$

На основаніи обозначеній (34_1) и уравненій (28), (26) и (14) имѣемъ равенство

$$(k\varrho - k\varrho_1 - k_1\gamma_3) = \frac{1}{mM} + \frac{m\lambda^2}{MD}\varrho - \frac{m\lambda^2}{MD}\varrho_1 - \frac{m^2\mu^2\lambda^2 r_3}{2M^2D^2}(L_1 - \varrho^2) - \frac{1}{mM}\frac{\varrho_1}{\varrho}\,,$$

которое при помощи выраженія (35_1) приведется къ виду

$$(k\varrho - k\varrho_1 - k_1\gamma_3) = \frac{1}{mM} - \frac{1}{mM^2} - \frac{m^2\mu^2 r_3\lambda^2}{2M^2D^2}L_1 + \frac{m\lambda^2}{MD}\varrho - \frac{m\lambda^2}{MD}\varrho_1 + \frac{m^2\mu^2 r_3\lambda^2}{2M^2D^2}\varrho^2 - \frac{b_1}{DM^2}\varrho\,.$$

Въ силу предыдущихъ обозначеній

$$a_1 = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\lambda^2}\,,\quad b_1 = \frac{(a_1+1)r_3\lambda^2}{2}\,,\quad m = -\frac{(a_1+1)r_3}{2}\,,$$

и слѣдовательно

$$b_1 = \frac{\mu^2 r_3}{2} \text{ и } b_1 = -m\lambda^2,$$

а потому, на основаніи выраженія (35_1), замѣчаемъ, что

$$\frac{m^2\mu^2 r_3 \lambda^2}{2M^2D^2}\varrho^2 - \frac{b_1}{DM^2}\varrho - \frac{m\lambda^2}{MD}\varrho_1 = 0.$$

Положивъ

$$\frac{1}{mM} - \frac{1}{mM^2} + \frac{b_1{}^2 m}{M^2D^2}L_1 = l,$$

получимъ окончательно

$$(k\varrho - k\varrho_1 - k_1\gamma_3) = (l - \frac{b_1}{DM}\varrho).$$

Точно также легко убѣдиться, что

$$(k\varrho + k\varrho_1 + k_1\gamma_3) = (l_1 - \frac{b_1}{DM}\varrho),$$

гдѣ

$$l_1 = -\frac{1}{mM} + \frac{1}{mM^2} - \frac{b_1{}^2 m}{M^2D^2}L_1.$$

Такимъ образомъ

$$r^2 = k_1{}^2 + (l - \frac{b_1}{DM}\varrho)\,(l_1 - \frac{b_1}{DM}\varrho)\ ^{*)}. \;.\;.\;.\;.\;. \quad (37)$$

Это уравненіе и выражаетъ r въ эллиптическихъ функціяхъ s, ибо ϱ опредѣляется изъ уравненія $\int \frac{d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}} = s - s_0$, гдѣ $R(\varrho)$ имѣетъ прежнее обозначеніе (см. § 3).

---

*) Замѣтимъ, что этой формулой можно воспользоваться для опредѣленія r и ω въ функціи дуги. Найдя ϱ въ функціи радіуса кривизны проекціи кривой равновѣсія на плоскость $\xi o \eta$, получимъ $r = \varphi(\varrho')$, гдѣ ϱ' упомянутый радіусъ кривизны или $\varrho' = \varphi_1(r)$. Если p уголъ между r и нормалью къ кривой, а s_1 дуга, то

$$\sin p = \frac{dr}{ds_1}, \quad \cos p = \frac{rd\omega}{ds_1}, \quad \varrho' = \frac{d(r\cos p)}{rdr}$$

и

$$r\cos p = \int \varphi_1(r) r dr = F(r), \quad r\sin p = \sqrt{r^2 - F^2(r)}, \quad d\omega = \frac{F(r)}{r^2}ds_1 \text{ и } ds_1 = \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - F^2(r)}}$$

Послѣдними формулами и опредѣляются r и ω въ функціи дуги s_1.

§ 9.

Покажемъ теперь, что уголъ ω можетъ быть выраженъ въ эллиптическихъ интегралахъ отъ ϱ, а черезъ нихъ и въ функціи s.

По предыдущему

$$\left.\begin{aligned} r\cos(r,\xi) &= -k(r_1\beta_1 + r_2\beta_2) - k_1\beta_3\,, \\ r\cos(r,\eta) &= k(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2) + k_1\alpha_3\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (38)$$

Называя черезъ N направленіе нормали къ кривой (проекціи кривой равновѣсія на плоскость $\xi o \eta$) въ какой-либо ея точкѣ ξ, η и черезъ s ея дугу, имѣемъ

$$\cos(N,\xi) = -\frac{d\eta}{ds_1}\,, \quad \cos(N,\eta) = \frac{d\xi}{ds_1}\,.$$

Такъ какъ далѣе

$$ds_1 = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = \sqrt{1-\gamma_3^{\,2}}\,ds\,,$$

то

$$\cos(N,\xi) = -\frac{\beta_3}{\sqrt{1-\gamma_3^{\,2}}}\,, \quad \cos(N,\eta) = \frac{\alpha_3}{\sqrt{1-\gamma_3^{\,2}}} \quad \ldots (39)$$

Помножая уравненія (38) соотвѣтственно на выраженія (39) и складывая результаты, имѣемъ на основаніи соотношеній (25)

$$r\cos(r,N) = \frac{k_1(1-\gamma_3^{\,2}) - k\gamma_3\varrho_1}{\sqrt{1-\gamma_3^{\,2}}} \quad \ldots\ldots (40)$$

гдѣ ϱ_1 имѣетъ прежнее значеніе.

Такъ какъ

$$r\cos(r,N) = \frac{r^2 d\omega}{ds_1} = \frac{r^2 d\omega}{\sqrt{1-\gamma_3^{\,2}}\,ds}\,,$$

то, принявъ во вниманіе предыдущее равенство (40), получаемъ

$$d\omega = \frac{k_1 - \gamma_3(k_1\gamma_3 + k\varrho_1)}{r^2}\,ds \quad \ldots\ldots\ldots (40_1)$$

Замѣтивъ же, что по предыдущему (см. § 8)

$$k_1\gamma_3 + k\varrho_1 = \frac{1}{mM^2} - \frac{mb_1^{\,2}L_1}{M^2D^2} = \text{const} = n\,,$$

а также принявъ во вниманіе уравненія (37), (28_1), (26) и (14) и замѣнивъ ds черезъ $\frac{d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}$, приведемъ предыдущее уравненіе (40_1) къ виду

$$d\omega = \frac{f_1 + f_2\varrho^2}{k_1{}^2 + (l - \frac{b_1}{DM}\varrho)(l_1 - \frac{b_1}{DM}\varrho)} \cdot \frac{d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}},$$

гдѣ

$$f_1 = k_1 + \frac{nb_1}{2MD} L_1, \quad f_2 = -\frac{nb_1}{2MD}.$$

Называя черезъ ϱ_1 и ϱ_2 корни уравненія

$$k_1{}^2 + (l - \frac{b_1}{DM}\varrho)(l_1 - \frac{b_1}{DM}\varrho) = 0, \quad \ldots\ldots \quad (40_2)$$

имѣемъ по теоремѣ разложенія дробей на простыя

$$\frac{f_1 + f_2\varrho^2}{k_1{}^2 + (l - \frac{b_1}{DM}\varrho)(l_1 - \frac{b_1}{DM}\varrho)} = \frac{A_1}{\varrho - \varrho_1} + \frac{A_2}{\varrho - \varrho_2},$$

гдѣ A_1 и A_2 постоянныя, и слѣдовательно

$$d\omega = \sum_{k=1}^{k=2} \frac{A_k d\varrho}{(\varrho - \varrho_k)\sqrt{R(\varrho)}},$$

откуда

$$\omega = \sum_{k=1}^{k=2} \int \frac{A_k d\varrho}{(\varrho - \varrho_k)\sqrt{R(\varrho)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

Уголъ ω, такимъ образомъ, выражается суммою эллиптическихъ интеграловъ черезъ ϱ. Выразивъ эти интегралы въ функціи s, найдемъ и уголъ ω въ функціи той же перемѣнной.

§ 10.

Остается опредѣлить координату ζ. По предыдущему

$$\zeta = \int \gamma_3 ds = -\frac{b_1}{2MD}\int (L_1 - \varrho^2) ds =$$

$$= -\frac{b_1}{2MD} L_1 s + \frac{b_1}{2MD}\int \varrho^2 ds,$$

откуда, замѣняя ds черезъ $\dfrac{d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}$, находимъ

$$\zeta = -\frac{b_1}{2MD} L_1 s + \frac{b_1}{2MD} \int \frac{\varrho^2 d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}} \quad \ldots \ldots \ldots (42)$$

Выразивъ $\displaystyle\int \frac{\varrho^2 d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}$ въ функціи s, по этой формулѣ опредѣлимъ и ζ.

§ 11.

И такъ, полное рѣшеніе вопроса приводится къ опредѣленію интеграловъ (эллиптическихъ)

$$\int \frac{d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}, \quad \int \frac{\varrho^2 d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}, \quad \int \frac{d\varrho}{(\varrho - \varrho_k)\sqrt{R(\varrho)}}$$

въ функціи дуги s, послѣ чего ζ, r и ω опредѣлятся по формуламъ (37), (41) и (42).

Какъ извѣстно, при помощи линейной подстановки вида

$$\varrho = \frac{p + qy}{1 + y}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (43)$$

гдѣ p и q нѣкоторыя вещественныя постоянныя, а y новая перемѣнная, $\displaystyle\int \frac{d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}$ можетъ быть приведенъ къ виду

$$\int \frac{d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}} = A \int \frac{dy}{\sqrt{R_1}},$$

гдѣ $R_1 = c(y^2 \pm a)(y^2 \pm b)$ и A, a, b, c нѣкоторыя другія вещественныя постоянныя.

Интегралъ же $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{R_1}}$ можетъ быть, какъ извѣстно, приведенъ къ виду $\displaystyle\frac{1}{G} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$ при помощи подстановки $y = fx$ и одной изъ слѣдующихъ семи подстановокъ

$$\left.\begin{array}{ll}
1)\ x = tg\varphi\,, & \\
2)\ x = \cos\varphi\,, & 5)\ x = \dfrac{1}{c\cos\varphi}\,, \\
3)\ x = \dfrac{1}{\cos\varphi}\,, & 6)\ x = \sin\varphi\,, \\
4)\ x = \dfrac{\cos\varphi}{c}\,, & 7)\ x^2 = \sin^2\varphi + \dfrac{1}{c^2}\cos^2\varphi\,,
\end{array}\right\} \quad \ldots (44)$$

гдѣ G, f и c нѣкоторыя постоянныя.

При помощи этихъ преобразованій и выраженія (43) и опредѣлимъ ϱ въ эллиптическихъ функціяхъ дуги s, такъ какъ вообще

$$\int\frac{d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}=\frac{1}{G}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=s,$$

и слѣдовательно

$$\varphi=am(Gs)\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(45)$$

Воспользовавшись затѣмъ подстановкою (43), находимъ

$$\int\frac{\varrho^2 d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}=Aq^2\int\frac{dy}{\sqrt{R_1}}+2A(p-q)\int\frac{dy}{(1+y)\sqrt{R_1}}+A(p-q)^2\int\frac{dy}{(1+y)^2\sqrt{R_1}}\,.$$

Такъ какъ приэтомъ

$$\int\frac{dy}{(1+y)^2\sqrt{R_1}}=B_1\frac{\sqrt{R_1}}{1+y}+B_2\int\frac{ydy}{\sqrt{R_1}}+B_3\int\frac{dy}{\sqrt{R_1}}+B_4\int\frac{y^2dy}{\sqrt{R_1}}+B_5\int\frac{dy}{(y+1)\sqrt{R_1}}$$

и

$$\int\frac{dy}{(y+1)\sqrt{R_1}}=\int\frac{ydy}{(y^2-1)\sqrt{R_1}}+\int\frac{dy}{(y^2-1)\sqrt{R_1}}\,,$$

то

$$\int\frac{\varrho^2 d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}=C_1\frac{\sqrt{R_1}}{1+y}+C_2\int\frac{ydy}{\sqrt{R_1}}+C_3\int\frac{ydy}{(y^2-1)\sqrt{R_1}}+C_4\int\frac{dy}{\sqrt{R_1}}+C_5\int\frac{y^2dy}{\sqrt{R_1}}+C_6\int\frac{dy}{(y^2-1)\sqrt{R_1}}\,.\;(46)$$

Первый и второй изъ интеграловъ, входящихъ въ правую часть этого равенства, выражаются въ логариѳмической или круговой функціи y'а (а слѣдовательно и ϱ), остальные три легко приводятся къ нормальной формѣ эллиптическихъ интеграловъ перваго, второго и третьяго рода. Во всѣхъ этихъ формулахъ величины A, B_i, C_i суть нѣкоторыя постоянныя, на опредѣленіи которыхъ я останавливаться не буду.

Принимая во вниманіе подстановки (44) и вводя обычное сокращенное обозначеніе $\triangle\varphi$ вмѣсто $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$, приводимъ $\int\frac{y^2dy}{\sqrt{R_1}}$ къ одному изъ слѣдующихъ пяти видовъ:

$$\left.\begin{array}{ll}
1)\; K_1\int\frac{tg^2\varphi d\varphi}{\triangle\varphi}, & 4)\; K_4\int\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\triangle\varphi},\\[2ex]
2)\; K_2\int\frac{\cos^2\varphi d\varphi}{\triangle\varphi}, & 5)\; K_5\int\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\triangle\varphi}+K_6\int\frac{\cos^2\varphi d\varphi}{\triangle\varphi}.\\[2ex]
3)\; K_3\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\triangle\varphi}, &
\end{array}\right\}\;(47)$$

Второму и четвертому изъ преобразованій (44) соотвѣтствуетъ второй видъ разсматриваемаго интеграла (выраж. 47), а третьему и пятому— третій интегралъ выраженій (47).

Обращаемся къ послѣднему изъ интеграловъ выраженія (46). Каждой изъ подстановокъ (44) будетъ соотвѣтствовать опредѣленный видъ этого интеграла въ перемѣнной φ. Вообще же онъ приведется къ одному изъ слѣдующихъ двухъ

$$\left.\begin{aligned} &1)\ M_1\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\triangle\varphi}+M_2\int\frac{d\varphi}{\triangle\varphi}, \\ &\text{или} \\ &2)\ N\int\frac{d\varphi}{(1+n_1\sin^2\varphi)\triangle\varphi}. \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(48)$$

Первой, третьей и пятой изъ подстановокъ (44) соотвѣтствуетъ первый изъ нихъ, остальнымъ же второй. M_1, M_2, N, n и n_1 нѣкоторыя положительныя или отрицательныя постоянныя.

Назовемъ черезъ $F_i(\varphi)$ интегралъ $\frac{1}{G}\int\frac{d\varphi}{\triangle\varphi}$ и черезъ $E_i(\varphi)$ одинъ изъ интеграловъ выраженій (47), гдѣ i указываетъ на нумеръ преобразованія въ рядѣ (44), приводящаго къ этому интегралу; и пусть $\Pi_1(\varphi, n)=\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\triangle\varphi}$. Введемъ, далѣе, для краткости слѣдующія обозначенія:

$$H^{(i)}=C_1\frac{\sqrt{R_1}}{1+y},\quad C_2\int\frac{ydy}{\sqrt{R_1}}+C_3\int\frac{ydy}{(y^2-1)\sqrt{R_1}}=J^{(i)},$$

гдѣ $J^{(i)}$, слѣдовательно, представляетъ логариѳмическую или круговую функцію y'а. На основаніи выраженій (47), (48) и сдѣланныхъ обозначеній равенство (46) приметъ видъ

$$\int\frac{\varrho^2 d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}=H^{(i)}+J^{(i)}+L_1^{(i)}F_i(\varphi)+L_2^{(i)}E_i(\varphi)+L_3^{(i)}\Pi_1(\varphi, n),\quad .(49)$$

гдѣ $L_k^{(i)}$ $(k=1,\ 2,\ 3)$ постоянныя; значекъ i у L_k соотвѣтствуетъ значку i у интеграловъ $F_i(\varphi)$ и $E_i(\varphi)$.

Полагая

$$u=F_i(\varphi)=Gs,\ \ldots\ldots\ldots\ldots(45_1)$$

и замѣтивъ, что

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{\operatorname{tg}^2\varphi d\varphi}{\triangle\varphi}=\frac{\operatorname{tg}\varphi\triangle\varphi-E_1(\varphi)}{k'^2}\,,\\
&\int\frac{\cos^2\varphi d\varphi}{\triangle\varphi}=\frac{-k'^2F_i(\varphi)+E_1(\varphi)}{k^2}\,,\\
&\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\cdot\triangle\varphi}=\frac{\operatorname{tg}\varphi\triangle\varphi-E_1(\varphi)}{k'^2}+F_i(\varphi)\,,\\
&\int\frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\triangle\varphi}=\frac{F_i(\varphi)-E_1(\varphi)}{k^2}\,,
\end{aligned}\right\}\quad\ldots(50)$$

гдѣ k' дополнительный модуль, а $E_1(\varphi)$ эллиптическій интегралъ второго рода въ нормальной формѣ Legendre'a *), получаемъ изъ равенства (49) вообще

$$\int\frac{\varrho^2 d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}}=H_1^{(i)}+J_1^{(i)}+N_1^{(i)}u+N_2^{(i)}E_1(\varphi)+L_3^{(i)}\Pi_1(\varphi,n)\,{}^{**})\quad .(51)$$

Но

$$E_1(\varphi)=E(u)\ \text{и}\ \Pi_1(\varphi,n)=u+P\cdot\Pi(u,\alpha)\,,$$

гдѣ P и α постоянныя, зависящія отъ постоянной n.

Такъ какъ далѣе

$$E(u)=Z(u)+\frac{E}{K}u\,,$$

гдѣ $E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\triangle\varphi d\varphi$ и $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\triangle\varphi}$ полные эллиптическіе интегралы второго и перваго рода и

$$Z(u)=\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\,,$$

гдѣ $\Theta(u)$ Якобіевская трансцендентная, опредѣляемая (по Якоби) изъ уравненія

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}=\prod_1^{\infty}\frac{1-2q^{2n-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4n-2}}{(1-q^{2n-1})^2}\,,$$

---

*) См. Durège. Theorie der elliptischen Functionen. § 18 etc.

**) H_1 и J_1 части, содержащія алгебраическія, логариѳмическія и круговыя функціи y'а и круговыя функціи φ.

а q Якобіевская величина ($q = e^{-\frac{\pi K'}{k}} < 1$) и K' полный дополнительный эллиптическій интегралъ перваго рода, то

$$E_1(\varphi) = \frac{E}{K} u + \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

Какъ извѣстно

$$\Pi(u, \alpha) = uZ(\alpha) + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u-\alpha)}{\Theta(u+\alpha)},$$

и слѣдовательно

$$\Pi_1(\varphi, n) = R_1 u + P \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u-\alpha)}{\Theta(u+\alpha)}.$$

Пользуясь этими формулами, приводимъ равенство (51) къ виду

$$\int \frac{\varrho^2 d\varrho}{\sqrt{R(\varrho)}} = H_1^{(i)} + J_1^{(i)} + R_1^{(i)} u + R_2^{(i)} \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + R_3^{(i)} \log \frac{\Theta(u-\alpha_i)}{\Theta(u+\alpha_i)}, \quad (52)$$

гдѣ, по прежнему, значекъ i у постоянныхъ R_1, R_2, R_3 и α соотвѣтствуетъ нумеру преобразованія въ рядѣ (44).

Остается разсмотрѣть интегралъ $\int \frac{d\varrho}{(\varrho - \varrho_k)\sqrt{R(\varrho)}}$.

При помощи подстановки (43) получаемъ

$$\int \frac{d\varrho}{(\varrho - \varrho_k)\sqrt{R}} = Q_1 \int \frac{dy}{\sqrt{R_1}} + Q_2 \int \frac{y\,dy}{(y^2 - \lambda^2)\sqrt{R_1}} + Q_3 \int \frac{dy}{(y^2 - \lambda^2)\sqrt{R_1}}. \quad (53)$$

Второй изъ интеграловъ правой части выражается логариѳмической или круговой функціей, которую обозначимъ черезъ $S_k^{(i)}$, а первый и третій выразятся суммою интеграловъ $F_i(\varphi)$ и $\Pi_1(\varphi, n_i)$ (значекъ i имѣетъ прежнее значеніе). Принявъ во вниманіе данныя раньше выраженія $F_i(\varphi)$ и $\Pi_1(\varphi, n_i)$ въ функціи $u = Gs$, получаемъ

$$\int \frac{d\varrho}{(\varrho - \varrho_k)\sqrt{R}} = S_k^{(i)} + Q_{1k}^{(i)} u + Q_{2k}^{(i)} \log \frac{\Theta(u - \alpha_{ik})}{\Theta(u - \alpha_{ik})}, \quad . \; . \; . \; (54)$$

гдѣ $Q_{1k}^{(i)}$, $Q_{2k}^{(i)}$, α_{ik} постоянныя, соотвѣтствующія i'ой изъ подстановокъ (44) и корню ϱ_k уравненія (40_2), $S_k^{(i)}$ логариѳмическая или круговая функція для той же подстановки и того же корня.

§ 12.

Принявъ теперь во вниманіе выраженія (45), (45_1), (52) и (53) предыдущаго параграфа, выразимъ ϱ, r, ω и ζ въ функціи s.

Всѣ подстановки (44) содержатся въ общей формѣ

$$x^2 = \frac{A_i + B_i \sin^2\varphi}{C_i + D_i \sin^2\varphi},$$

гдѣ A_i, B_i, C_i, D_i постоянныя, соотвѣтствующія i'той изъ подстановокъ (44), а слѣдовательно (на основаніи равенствъ (43) и (45))

$$\varrho = \frac{p_1 + q_1 \sqrt{\dfrac{A_i + B_i \sin^2 \mathrm{am}\, Gs}{C_i + D_i \sin^2 \mathrm{am}\, Gs}}}{1 + f\sqrt{\dfrac{A_i + B_i \sin^2 \mathrm{am}\, Gs}{C_i + D_i \sin^2 \mathrm{am}\, Gs}}}, \qquad \text{I}$$

$$r^2 = k_1{}^2 + (l - \frac{b_1}{DM}\varrho)\,(l_1 - \frac{b_1}{DM}\varrho), \qquad \text{II}$$

$$\omega = S^{(i)} + Q_1^{(i)} s + \sum_{k=1}^{k=2} R_k^{(i)} \log \frac{\Theta(u - \alpha_{ik})}{\Theta(u + \alpha_{ik})}, \qquad \text{III}$$

$$\zeta = P_1^{(i)} s + H^{(i)} + J^{(i)} + P_2^{(i)} \frac{\Theta'(Gs)}{\Theta(Gs)} + P_3^{(i)} \log \frac{\Theta(Gs - \alpha_i)}{\Theta(Gs + \alpha_i)} {}^{*)}. \qquad \text{IV}$$

Эти формулы вмѣстѣ съ интегралами § 3 и рѣшаютъ вполнѣ разсматриваемый вопросъ. Не останавливаясь на подробномъ изслѣдованіи, можемъ составить нѣкоторое понятіе объ общемъ характерѣ кривой равновѣсія.

Формулы I и II показываютъ, что разстояніе точекъ кривой (по перпендикуляру) отъ оси ζ'овъ измѣняется періодически между нѣкоторыми предѣлами r' и r'' при непрерывномъ измѣненіи дуги s, а уголъ ω, кромѣ непрерывнаго возрастанія (или убыванія) съ возрастаніемъ дуги совершаетъ еще рядъ періодическихъ колебаній, зависящихъ отъ перваго и третьяго членовъ правой части выраженія III; подобнымъ же образомъ измѣняется и ζ, разстояніе точекъ кривой отъ плоскости $\xi o \eta$. Кривая равновѣсія есть, слѣдовательно, нѣкоторая волнообразная линія, подобная спирали двоякой кривизны, то суживающаяся, то расширяющаяся, и въ частности, какъ показано раньше (§ 6), можетъ об-

*) Смыслъ обозначеній $J^{(i)} \ldots P_l^{(i)}$ ($l = 1, 2, 3$) понятенъ самъ собою изъ предыдущаго.

ращаться въ обыкновенную винтовую линію. Въ этомъ случаѣ $\varrho = \text{const}$, $\omega = Q_1^{(i)} s + \text{const}$ и $\zeta = P_1^{(i)} s + \text{const}$, причемъ

$$R_k^{(i)} = 0\,, \quad P_2^{(i)} = 0\,, \quad P_3^{(i)} = 0\,.$$

Проекціи кривыхъ равновѣсія на плоскость $\xi o \eta$ аналогичны кривымъ, изученнымъ Halphen'омъ въ вышеупомянутомъ мемуарѣ „Sur une courbe elastique". Сама кривая принадлежитъ къ классу кривыхъ постояннаго радіуса крученія, который мы обозначимъ черезъ T и равнаго $\pm\frac{1}{m}$. Такъ какъ

$$T = \pm \frac{\left(\frac{d\eta}{ds}\cdot\frac{d^2\zeta}{ds^2} - \frac{d\zeta}{ds}\cdot\frac{d^2\eta}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{ds}\cdot\frac{d^2\xi}{ds^2} - \frac{d\xi}{ds}\cdot\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{ds}\cdot\frac{d^2\eta}{ds^2} - \frac{d\eta}{ds}\cdot\frac{d^2\xi}{ds^2}\right)^2}{\left(\frac{d\eta}{ds}\cdot\frac{d^3\zeta}{ds^3} - \frac{d\zeta}{ds}\cdot\frac{d^3\eta}{ds^3}\right)\frac{d^2\xi}{ds^2} + \left(\frac{d\zeta}{ds}\cdot\frac{d^3\xi}{ds^3} - \frac{d\xi}{ds}\cdot\frac{d^3\zeta}{ds^3}\right)\frac{d^2\eta}{ds^2} + \left(\frac{d\xi}{ds}\cdot\frac{d^3\eta}{ds^3} - \frac{d\eta}{ds}\cdot\frac{d^3\xi}{ds^3}\right)\frac{d^2\zeta}{ds^2}},$$

или

$$T = \pm \frac{N_1{}^2 + N_2{}^2 + N_3{}^2 \;{}^{*)}}{M_1 + M_2 + M_3},$$

то, замѣнивъ въ этомъ выраженіи производныя по s отъ ξ, η и ζ черезъ α_3, β_3, γ_3 и пользуясь формулами (4) и (2), найдемъ

$$N_1{}^2 = (\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2)^2, \qquad M_1 = \left[r_3 \frac{d\alpha_3}{ds} - \left(\alpha_1 \frac{dr_1}{ds} + \alpha_2 \frac{dr_2}{ds}\right)\right]\frac{d\alpha_3}{ds},$$

$$N_2{}^2 = (\beta_1 r_1 + \beta_2 r_2)^2, \qquad M_2 = \left[r_3 \frac{d\beta_3}{ds} - \left(\beta_1 \frac{dr_1}{ds} + \beta_2 \frac{dr_2}{ds}\right)\right]\frac{d\beta_3}{ds},$$

$$N_3{}^2 = (\gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2), \qquad M_3 = \left[r_3 \frac{d\gamma_3}{ds} - \left(\gamma_1 \frac{dr_1}{ds} + \gamma_2 \frac{dr_2}{ds}\right)\right]\frac{d\gamma_3}{ds}.$$

Отсюда

$$N_1{}^2 + N_2{}^2 + N_3{}^2 = \varrho^2, \quad M_1 + M_2 + M_3 = r_3\varrho^2 + r_2\frac{dr_1}{ds} - r_1\frac{dr_2}{ds}.$$

По предыдущему (см. § 3)

$$r_2\frac{dr_1}{ds} - r_1\frac{dr_2}{ds} = \left(\alpha_1 r_3 - \frac{b_1}{\lambda^2}\right)\varrho^2,$$

и слѣдовательно

$$M_1 + M_2 + M_3 = \left[(\alpha_1 + 1) r_3 - \frac{b_1}{\lambda^2}\right]\varrho^2,$$

---

*) Обозначенія $M_1 \ldots . N_3$ очевидны.

такъ что

$$T = \pm \frac{1}{(\alpha_1 + 1) r_3 - \frac{b_1}{\lambda^2}} = \pm \frac{1}{m}.$$

§ 13.

Въ заключеніе сдѣлаю еще одно замѣчаніе относительно упругой силы, дѣйствующей въ каждой точкѣ кривой. Величина ея F опредѣлится изъ уравненія (16), именно

$$F^2 = A^2 + B^2 + C^2 = 2D\lambda^2\varrho + L_3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

которая, такимъ образомъ, измѣняется пропорціонально кривизнѣ кривой (ибо $\frac{1}{\varrho} = R$), направленіе же ея въ каждой точкѣ кривой опредѣлится кинематически на основаніи слѣдующихъ соображеній. Проектируемъ на плоскость $\xi o \eta$ кривую равновѣсія вмѣстѣ съ геометрическими длинами, изображающими величину и направленіе силы F и проведемъ изъ точекъ этой проекціи непрерывный рядъ перпендикуляровъ къ направленію проекціи силы F. Геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія послѣдовательныхъ перпендикуляровъ даетъ нѣкоторую кривую, которую назовемъ кривою центровъ упругихъ силъ на плоскости $\xi o \eta$.

Составимъ уравненіе этой кривой. Назвавъ черезъ F_1 проекцію силы F на вышеупомянутую плоскость, черезъ N направленіе перпендикуляра къ F и замѣтивъ, что

$$\cos(N, \xi) = -\cos(F_1, \eta),$$
$$\cos(N, \eta) = \cos(F_1, \xi),$$

имѣемъ уравненіе прямой N, проходящей черезъ точку ξ, η,

$$\frac{x - \xi}{-\cos(F_1, \eta)} = \frac{y - \eta}{\cos(F_1, \xi)},$$

гдѣ x, y текущія координаты разсматриваемой прямой.

Но

$$\cos(F_1, \eta) = \frac{F_\eta}{F_1}, \quad \cos(F_1, \xi) = \frac{F_\xi}{F_1},$$

гдѣ F_η и F_ξ проекціи на оси x и y прямой F_1, и слѣдовательно

$$\frac{x - \xi}{-F_\eta} = \frac{y - \eta}{F_\xi}.$$

Отсюда

$$X = xF_\xi + yF_\eta - (\xi F_\xi + \eta F_\eta) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (55)$$

Геометрическое мѣсто пересѣченій непрерывнаго ряда этихъ прямыхъ получится исключеніемъ перемѣнной s изъ уравненій

$$X = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dX}{ds} = 0.$$

Замѣтивъ, что

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{km}{D}\varrho F_\eta - k_1\beta_3, \\ \eta &= \frac{km}{D}\varrho F_\xi + k_1\alpha_3, \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (24)$$

имѣемъ, помноживъ эти равенства на F_ξ и F_η и сложивъ,

$$\xi F_\xi + \eta F_\eta = k_1(\alpha_3 F_\eta - \beta_3 F_\xi),$$

такъ что

$$\left.\begin{aligned} &X = xF_\xi + yF_\eta - k_1(\alpha_3 F_\eta - \beta_3 F_\xi) = 0, \\ &\text{и} \\ &\frac{dX}{ds} = x\frac{dF_\xi}{ds} + y\frac{dF_\eta}{ds} - k_1\left(\frac{d\alpha_3}{ds}F_\eta - \frac{d\beta_3}{ds}F_\xi + \alpha_3\frac{dF_\eta}{ds} - \beta_3\frac{dF_\xi}{ds}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

Но по предыдущему

$$\frac{d\alpha_3}{ds} = -\frac{\varrho}{D}\frac{dF_\xi}{ds},$$

$$\frac{d\beta_3}{ds} = -\frac{\varrho}{D}\frac{dF_\eta}{ds},$$

вслѣдствіе чего

$$\frac{d\alpha_3}{ds}F_\eta - \frac{d\beta_3}{ds}F_\xi + \alpha_3\frac{dF_\eta}{ds} - \beta_3\frac{dF_\xi}{ds} = u_1\frac{dF_\eta}{ds} - u_2\frac{dF_\xi}{ds},$$

гдѣ для сокращенія положено

$$u_1 = \frac{F_\xi}{D}\varrho + \alpha_3, \qquad u_2 = \frac{F_\eta}{D}\varrho + \beta_3.$$

Уравненія (56) теперь могутъ быть представлены въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} xF_\xi + yF_\eta &= k_1(\alpha_3 F_\eta - \beta_3 F_\xi), \\ x\frac{dF_\xi}{ds} + y\frac{dF_\eta}{ds} &= k_1\left(u_1\frac{dF_\eta}{ds} - u_2\frac{dF_\xi}{ds}\right). \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \qquad (56_1)$$

Рѣшая ихъ относительно x и y, находимъ

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{k_1\varrho}{D}F_\eta - k_1\beta_3\,, \\ y &= \frac{k_1\varrho}{D}F_\xi + k_1\alpha_3\,. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

Уравненія (57) и представляютъ уравненіе кривой центровъ проекціи упругой силы на плоскость $\xi o\eta$. Подобно предыдущему не трудно было бы выразить x и y въ функціи дуги s и составить (исключая s) уравненіе кривой въ полярныхъ координатахъ, но я не буду останавливаться на этомъ.

Возьмемъ непрерывный рядъ точекъ, координаты которыхъ ξ_1, η_1 связаны съ точками кривой (34) такъ, что

$$\xi_1 = 2\xi\,, \quad \eta_1 = 2\eta\,,$$

т. е. построимъ кривую, радіусы векторы которой вдвое болѣе радіусовъ векторовъ кривой (34). Получимъ кривую подобную этой кривой, причемъ

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{2mk\varrho}{D}F_\eta - 2k_1\beta_3\,, \\ \eta_1 &= -\frac{2mk\varrho}{D}F_\xi + 2k_1\alpha_3\,. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (58)$$

Вычитая эти уравненія изъ соотвѣтствующихъ уравненій (57), имѣемъ

$$x - \xi_1 = -\frac{(k_1 + 2km)}{D}\varrho F_\eta + k_1\beta_3\,,$$

$$y - \eta_1 = \frac{(k_1 + 2km)}{D}\varrho F_\xi - k_1\alpha_3\,.$$

Но, принимая во вниманіе предыдущія обозначенія (см. § 7),

$$k_1 + 2km = \frac{2mb_1}{MD} + \frac{2}{M\varrho} - \frac{2mb_1}{MD} = \frac{2}{M\varrho}\,,$$

а потому

$$x - \xi_1 = -\frac{2}{MD}F_\eta + k_1\beta_3\,,$$

$$y - \eta_1 = \frac{2}{MD}F_\xi - k_1\alpha_3\,.$$

Изъ этихъ уравненій получаемъ непосредственно

$$\left. \begin{aligned} qF_\xi &= \frac{d\xi_1}{ds} + p(y-\eta_1), \\ qF_\eta &= \frac{d\eta_1}{ds} - p(x-\xi_1), \end{aligned} \right\} \ldots\ldots\ldots (59)$$

гдѣ $p = \frac{1}{k_1}$ и $q = \frac{2}{MDk_1}$.

Перпендикуляръ къ прямой F_1 (проекціи силы F на плоскость $\xi o \eta$) въ нѣкоторой точкѣ M кривой (34) пересѣчетъ кривую (57) въ нѣкоторой точкѣ M_1. Условимся называть точки M и M_1 соотвѣтственными. Разсматривая перемѣнную s (дугу) какъ время, и сравнивая выраженія (59) съ выраженіями проекцій на координатныя оси скорости движенія неизмѣняемой плоской фигуры въ ея плоскости, приходимъ къ слѣдующему заключенію.

Если заставимъ двигаться плоскую фигуру въ плоскости $\xi o \eta$ съ постоянною угловою скоростью p (равномѣрно вокругъ оси паралельной оси ζ'овъ), такъ чтобы точка пересѣченія мгновенной оси двигалась по кривой (58) со скоростью, проекціи которой на координатныя оси суть $\frac{d\xi_1}{ds} = 2\alpha_3$, $\frac{d\eta_1}{ds} = 2\beta_3$ то скорость точки кривой (57), соотвѣтственной (ξ_1, η_1) по величинѣ и направленію пропорціональна проекціи упругой силы на плоскость $\xi o \eta$ (величинѣ F_1). Такимъ образомъ въ каждый моментъ времени опредѣлится (кинематически) F_1, т. е. величина и направленіе F_1 въ данной точкѣ кривой равновѣсія, соотвѣтствующей дугѣ s. Отложивъ на прямой параллельной оси ζ'овъ въ этой точкѣ отрѣзокъ

$$C_1 = A\gamma_1 + B\gamma_2 + C\gamma_3,$$

легко выражаемый въ функціи дуги s, найдемъ и F, равную геометрической суммѣ величинъ F_1 и C_1.

Во всѣхъ предыдущихъ сужденіяхъ мы полагали $b_2 = 0$.

Вопросъ значительно усложняется, если b_2 не равно нулю. Не останавливаясь на этомъ сложномъ случаѣ, замѣчу только между прочимъ, что при этомъ ϱ уже выразится не въ эллиптическихъ функціяхъ, какъ при допущеніи $b_2 = 0$, а въ ультра-эллиптическихъ, что легко видѣть изъ выраженій (15_1) и (19).

§ 14.

Само собою понятно, что случай плоской формы равновѣсія, указанный Maurice Lévy, можетъ быть безъ труда непосредственно полученъ изъ общихъ уравненій (9) и (12). Принявъ плоскость, въ которой находится стержень, за плоскость $\xi o \zeta$, имѣемъ

$$\alpha_2=0,\ \gamma_2=0,\ \beta_1=0,\ \beta_3=0,\ \beta_2=1,\ r_3=0,\ r_1=0,\ \alpha_1=\gamma_3,\ \alpha_3=-\gamma_1,$$

а уравненія (9), если положимъ

$$F_\xi=A\alpha_1+C\alpha_3,\quad F_\zeta=A\gamma_1+C\gamma_3,$$

примутъ видъ

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{dF_\xi}{ds}+\dfrac{D}{\varrho}\dfrac{d\alpha_3}{ds}=0,\quad \dfrac{dE_\zeta}{ds}+\dfrac{D}{\varrho}\dfrac{d\gamma_3}{ds}=0, \\ \dfrac{dr_2}{ds}=\dfrac{A}{\lambda^2}. \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots (60)$$

Но $\varrho=r_2$; $\dfrac{d\alpha_3}{ds}=-r_2\alpha_1=-r_2\gamma_3$; $\dfrac{d\gamma_3}{ds}=-r_2\gamma_1=r_2\alpha_3$,

а потому

$$\frac{dF_\xi}{ds}-D\frac{d\zeta}{ds}=0,\quad \frac{dF_\zeta}{ds}+D\frac{d\xi}{ds}=0,$$

откуда

$$F_\xi=D\zeta,\quad F_\zeta=-D\xi \quad \ldots \ldots \ldots (61)$$

Эти равенства и выражаютъ теорему Lévy о центрѣ упругихъ силъ. Отсюда

$$F=Dr,$$

гдѣ F сила, r радіусъ векторъ полярныхъ координатъ съ началомъ въ центрѣ упругихъ силъ. Изъ уравненій же (60) слѣдуетъ

$$F^2=2D\lambda^2\varrho+L_3,$$

гдѣ L_3 произвольная постоянная. Слѣдовательно

$$\frac{1}{R}=Ar^2+B,$$

гдѣ R радіусъ кривизны, A и B постоянныя. Отсюда на основаніи соображеній, указанныхъ въ примѣчаніи къ § 7, опредѣляемъ радіусъ векторъ r и полярный уголъ ω. (См. также упомянутый мемуаръ Halphen'а).

§ 15.

Изъ уравненій (32) § 6 слѣдуетъ далѣе, что вопросъ о равновѣсіи можетъ быть вполнѣ рѣшенъ для стержня съ круговымъ сѣченіемъ и въ случаѣ, когда давленіе, направленное по главной нормали къ кривой, обратно пропорціонально радіусу ея кривизны. Формы равновѣсія будутъ вполнѣ схожи съ формами равновѣсія стержня подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ только къ концамъ его. Точно также вопросъ о равновѣсіи можетъ быть рѣшенъ въ предположеніи D равнымъ цѣлой функціи второй степени отъ кривизны и при нѣкоторыхъ болѣе сложныхъ допущеніяхъ, но, въ виду искуственности допущеній относительно силы давленія, я не буду останавливаться на рѣшеніи этихъ вопросовъ.