ОТДѢЛЕНІЕ II.

О ТРОЙНЫХЪ ЗАДАЧАХЪ.

Общія правила.

§ 160.

Тройныя правила вообще выводятся изъ самаго хода рѣшеній тройныхъ задачь.

I. *Тройными задачами* называются тѣ, кои 1-е, содержатъ въ себѣ не менѣе *трехъ данныхъ чиселъ* и *одного искомаго*; 2-е, кои рѣшаются по правиламъ простого умноженія и дѣленія. Вопросы тройныхъ правилъ, немогутъ имѣть двухъ данныхъ и третьего искомаго, потому, что этими условіями, вообще выражаются задачи простого умноженія и дѣленія (§§ 54 — 60).

Вопросы умноженія и дѣленія, въ свою очередь, немогутъ имѣть менѣе двухъ данныхъ, потому что одно данное полагаетъ понятіе неопредѣленное, темное—понятіе величины, первый зародышь, изъ коего развивается Ариѳметика (§ 1).

II. Тройныя вопросы, какъ и вопросы умноженія и дѣленія, раздѣляются на *прямыя* и *обратныя* на одномъ основаніи (§§ 54 — 57). Если задача имѣетъ исключительно только прямый, или обратный смыслъ, то вообще называется *простою*, когда же содержитъ въ себѣ вмѣстѣ и то и другое, именуется *сложною*.

III. Ходъ рѣшеній тройныхъ задачь, исключительно основалъ на превращеніи условій (условіями разумѣемъ числа задачи) ея, въ величину *единичнаго требо-*

ванія, какъ обыкновенно дѣлаемъ, въ задачахъ обратныхъ на умноженіе (§ 55 прав. 1), и въ задачахъ прямыхъ на дѣленіе (§ 60 прав. 1 и 3), а тѣмъ и доходимъ до *уравненій* (§ 1, чл. VI, с), правилъ тройныхъ. Покажемъ самое основаніе этого хода.

Исключительное *свойство* тройныхъ задачь, по коему онѣ отличаются отъ всѣхъ другихъ, содержится въ слѣдующихъ аксіомахъ:

а.) *Двухъ равныхъ цѣнъ однородныя количества равны между собою;* и обратно: *двухъ равныхъ однородныхъ количествъ, цѣны равны.* Напримѣръ, если $\frac{3}{7}$ пуда купили за *одинъ* рубль (§ 60, 1), то за этотъ же рубль, при однѣхъ условіяхъ, можно опять купить $\frac{3}{7}$ пуд., той же вещи; посему, если $\frac{3}{7}$ пуд. и $\frac{x}{12}$ пуд. одной и той же вещи стоятъ по *одному* рублю, то непремѣнно должно быть $\frac{x}{12} = \frac{3}{7}$; т. е. $\frac{x}{12}$ все тоже что и $\frac{3}{7}$, у коихъ только видъ различенъ, величина же обѣихъ дробѣй совершенно равная (§ 92). Такимъ же образомъ, если за $\frac{720}{x}$ р. и $\frac{320}{12}$ р., купили по *одному* пуду, одной и той же вещи, то непремѣнно $\frac{720}{x} = \frac{320}{21}$ (§ 92 и 103).

ь.) *Если двѣ работы равно-велики и равно временны, то и количество рабочихъ одной, равно количеству рабочимъ другой.* И обратно: *если двѣ работы равны, также и количество рабочихъ для обѣихъ—равно, то и время совершенія первой* *работы непремѣнно равно времени совершенія — другой*, при условіи, для обѣихъ случаевъ, что *искуство и прилѣжаніе* работающихъ одинаково. На примѣръ, если нѣкоторую работу въ *одинъ* день совершаютъ 21×5 работниковъ (§ 55, 111, 6), и ту же работу, въ тотъ же день, могутъ окончить $7 \times x$ раб., то безъсомнѣнія $7 \times x = 21 \times 5$. Такимъ же образомъ если извѣстную работу *одинъ* рабочій совершаетъ въ 2. x дня, и ту же работу *другой* рабочій, при однѣхъ условіяхъ искуства и прилѣжанія, оканчиваетъ въ 7×8 дней, то также утверждаемъ, что $2 x = 7 \times 8$. Эти двѣ аксіомы (a) и (b) такъ ясны, что для убѣжденія въ нихъ, ненужно ни какихъ доказательствъ.

IV. ***Рѣшеніе уравненій тройныхъ правилъ.*** Вопросъ, разрѣшаемый по какой либо одной изъ предложенныхъ аксіомъ, вообще называется *простымъ* (11), а когда онъ имянно принадлежитъ къ аксіомѣ (a), тогда именуется *простымъ прямымъ*, когда же къ аксіомѣ (b), — тогда *простымъ обратнымъ*; посему вообще

$$\frac{x}{12} = \frac{3}{7}$$

$$7 x = 5 \times 21$$

представляютъ уравненія тройныхъ простыхъ задачь, изъ коихъ первое есть *переводъ* въ числа, какого либо *простаго прямаго* вопроса, а второе — *простого обратного*. При томъ сіи уравненія показываютъ, что 1-е, въ нихъ, дѣйствительно, согласно опредѣленія (1), содержится по *три данныхъ* и по одному *искомому* числу, а всего *четыре*, (хотя, впрочемъ можетъ имѣть и болѣе данныхъ, какъ увидимъ въ своемъ мѣстѣ

(§ 159), чемъ самимъ и отличаются отъ уравненій простаго умноженія и дѣленія, въ коихъ данныхъ всегда два, а третье искомое; и 2-е, что рѣшеніе ихъ основывается на правилахъ простаго *умноженія* и *дѣленія цѣлыхъ* чиселъ и *дробей*. Разберемъ послѣднее обстоятедьство, начавъ съ уравненія

$$7x = 5 . 21,$$

простаго обратнаго вопроса. Рѣшеніе его весьма легко, ибо, въ немъ, x есть искомый производитель, а потому

$$x = \frac{5.21}{7} = 15.$$

Рѣшеніе же уравненія

$$\frac{x}{12} = \frac{3}{7},$$

простаго прямаго вопроса, представляетъ нѣкоторое затрудненіе, поелику всегда должно обращать вниманіе на то, чемъ выражается искомое: дѣлимымъ или дѣлителемъ. Оно здѣсь означено дѣлимымъ, но дѣлимое равно частному, умноженному на дѣлителя, слѣд.

$$x = \frac{3}{7} . 12 = 5\frac{1}{7} \text{ (§ 92)},$$

принимая $\frac{3}{7}$ за частное, а 12 — за дѣлителя. Если же искомое будетъ дѣлителемъ, на примѣръ

$$\frac{5}{x} = \frac{6}{11},$$

тогда замѣчая, что дѣлитель равенъ дѣлимому, раздѣленному на частное, посему

$$x = 5 : \frac{6}{11} = \frac{55}{6} = 9\frac{1}{6} \text{ (§ 103)}.$$

I. *Правило тройное простое.*

§ 161.

Въ умноженіи и дѣленіи даются два члена и находится третье, ибо четвертое всегда равно единицѣ, въ тройномъ же простомъ правилѣ дается, какъ выше видѣли, три данныхъ числа и исчется четвертое. Другими словами: *тройная простая задача имѣетъ два отдѣленія, изъ коихъ въ одномъ содержится два данныхъ числа, а въ другомъ одно данное, другое — искомое.* Чтобъ убѣдится въ нашемъ опредѣленіи, то перейдемъ къ ходу самаго рѣшенія простыхъ задачъ: сначала — къ рѣшенію правила прямаго, а потомъ — и правила обратнаго.

а) *Простое прямое правило.*

Требуется узнать: сколько можно купить пудовъ за 720 *рублей, когда за* 12 *пудъ заплачено* 328 *рублей.*

Дабы числа стояли предъ глазами, то будемъ располагать оба отдѣленія въ такомъ видѣ, чтобъ *однородныя стояли подъ однородными,* точно какъ дѣлали въ умноженіи и дѣленіи; и имянно

12 пуд. — — 328 руб.
x — — 720

Разсматривая вопросъ, легко примѣтить, что каждое отдѣленіе его состоитъ изъ полной простой задачи на дѣленіе *прямаго смысла*, почему руководствуясь § 60, прав. 1 и 3, изъ перваго отдѣленія находимъ, что

за *одинъ* рубль куплено $\frac{12}{328}$ пуд.

Изъ втораго отдѣленія тоже, что

за *одинъ* рубль можно купить $\frac{x}{720}$ пуд.,

слѣд. на аксіомѣ (a) § 160, будетъ

$$\frac{x}{720} = \frac{12}{328}$$

ВООБЩЕ:

Если A *пудъ стоитъ* B *руб.*

то x — — c

изъ перваго отдѣленія

за *одинъ* рубль куплено $\frac{A}{B}$ п,

Изъ втораго — тоже

за *одинъ* рубль можно купить $\frac{x}{c}$ п.;

слѣд.

$$\frac{x}{c} = \frac{A}{B} \;\ldots\ldots\; (1)$$

Это уравненіе, какъ уже видѣли въ § 160, IV и теперь видимъ, правила простаго прямаго, показываетъ, что отдѣленія прямой задачи по взаимнымъ отношеніямъ совершенно, между собою, равны; и вообще выражаются, по переводѣ въ числа, двумя равными *дѣленіями*; притомъ x и c, также A и B соотвѣтственно *разнороды*; посему *чтобъ изъ прямой задачи получить два члена равныхъ*, — *составляющихъ* *уравненіе,* — *то должно разнородныя числа, каждаго отдѣленія раздѣлить соотвѣтственно*; т. е. когда A дѣлится на B, то x должно раздѣлить на c; если же B дѣлится на A, тогда c должно дѣлить на x; въ послѣднемъ убѣдится легко, разрѣшивъ общій вопросъ обратнымъ ходомъ.

Наконецъ въ рѣшеніи уравненія

$$\frac{x}{c} = \frac{A}{B},$$

за § 160, IV, уже не представляется ни какого труда; и имянно:

$$x = \frac{A}{B} \cdot c = \frac{12 \text{ п.}}{328 \text{ р.}} \cdot 720 \text{ р.} = 26\frac{2}{41} \text{ п. тд.}$$

Замѣчаніе. Если A, B и c будутъ сложныя именованныя числа, тогда во первыхъ должно раздробить ихъ въ мѣлкія мѣры, и потомъ, въ вычисленіи, поступить какъ съ простыми; полученный же выводъ опять превратить въ высшій разрядъ единицъ, какъ показано въ (§ 149).

Равные члены изъ задачи, — составляющіе уравненіе, — можно, опредѣлять еще другимъ образомъ. Взявъ для этого общій результатъ

$$x = \frac{Ac}{B} = \frac{c}{B} \cdot A,$$

примемъ $\frac{c}{B}$ за искомый производитель, отъ чего будетъ

$$\frac{x}{A} = \frac{c}{B};$$

и такъ, *чтобъ изъ прямой простой задачи, получить два члена равныхъ,* — *составляющихъ урав-*

ненie, — то также можно дѣлить, вмѣсто разнородныхъ, въ каждомъ отдѣленiи, *соотвѣтственно однородные — изъ обѣихъ отдѣленiй.*

Ѣ) *Простое обратное правило.*

Во сколько дней 18 *человѣкъ окончатъ извѣстную работу, которую* 15 *человѣкъ оканчиваютъ въ* 8 *дней.* Во первыхъ имѣемъ

15 чел. оканч. раб. въ 8 дн.
18 — — — — x.

Потомъ, разсматривая вопросъ, находимъ, что каждое отдѣленiе его, состоитъ изъ полной простой задачи на умноженiе *обратнаго смысла;* почему, руководствуясь § 54, 55 прави. Ѣ и с, изъ перваго отдѣленiя находимъ, что

въ *одинъ* день совершаютъ всю работу . 15 . 8 чел.
Изъ втораго отдѣленiя тоже,
въ *одинъ* день туже работу оканчиваютъ . 18 . x чел.
Слѣд., по аксiомѣ (Ѣ) § 160, будетъ

$$18 . = 15 . 8$$

ВООБЩЕ:

A′ *челов. оканчив. раб. въ* B′ *дней*
c′ — — — — x′

Изъ перваго отдѣленiя
въ *одинъ* день всю работу совершатъ . A′ . B′ чел.
Изъ втораго отдѣленiя тоже,
въ *одинъ* день всю работу окончатъ . c′ x′ чел.
слѣд.

$$c' . x' = A' . B' \ldots\ldots (2)$$

Откуда видишь, что уравненіе тройной *обратной* задачи выражается, по переводѣ въ числа, двумя совершенно равными *умноженіями*; при томъ x' и c', также A' и B' числа соотвѣтственно разнородныя; посему, *чтобъ изъ тройной обратной задачи получить два члена равныхъ, — составляющихъ уравненіе, — должно разнородныя числа, каждаго отдѣленія, соотвѣтственно перемножить.* Наконецъ x', изъ уравненія (2)

$$c'\,x' = A'\,.\,B'$$

вывести легко; и имянно

$$x' = \frac{A'\;B'}{c'} = \frac{15\text{ чл.} \times 8\text{ дн.}}{18\text{ чл.}} = 6\frac{2}{3}\text{дн.}$$

Замѣчаніе. Если A' и c', или B' и c' будутъ числа сложныя именованныя, тогда во первыхъ должно раздробить ихъ въ мѣлкія мѣры, и потомъ, въ исчисленіи, поступить какъ съ простыми; полученный же выводъ опять превратить въ высшій разрядъ единицъ, какъ показано въ (§ 149).

Согласованіе уравненія прямаго правила, съ уравненіемъ обратного. Оно имѣетъ ту цѣль, чтобъ двухъ разныхъ родовъ вопросы, рѣшать по уравненію одного вида, и имянно, — по виду обратного уравненія. Взявъ общее уравненіе (1).

$$\frac{x}{c} = \frac{A}{B}$$

прямаго правила, во первыхъ изъ него опредѣляемъ

$$x = \frac{A\,.\,c}{B},$$

потомъ, принявъ Ac за искомое дѣлимое, находимъ

$$B.x = A.c \ldots\ldots (3)$$

Вотъ и желаемое уравненіе. И такъ, *чтобъ* изъ тройной прямой простой задачи, *получить два члена равныхъ, — составляющихъ уравненіе* — по виду обратнаго правила, — *то должно разнородныя числа, изъ двухъ отдѣленій, перемножить навкрестъ.*

Составленіе задачъ изъ уравненій. Изъ каждаго уравненія тройнаго простаго правила можно составить, по желанію, вопросъ. Такъ изъ уравненія $\frac{27}{30} = \frac{x}{9}$, можетъ написать: когда за 27 руб. купили 30 аршинъ, то за сколько рублей можно купить 9 арш? Или: сколько вѣдеръ можно купить за 27 руб., когда за 9 вѣдеръ заплочено 30 рублей? Изъ уравненія же $2\,x = 7.\ 8$, когда оно правила прямаго, можемъ составить: сколько за 8 пудъ (или за 7 пуд.) заплочено, когда за 2 руб. заплатили 7 руб. (или 8 руб.)? Если же это уравненіе обратнаго правила, тогда напишемъ: когда 7 писцовъ переписываютъ извѣстное дѣло въ 8 дней, то восколько дней тотъ же трудъ окончатъ 2 писца?

Примѣч. Вопросы для упражненія, какъ на эти два правила, такъ и на всѣ послѣдующія, читай въ собраніи ариѳметическихъ задачъ, для руководства уѣздныхъ училищъ, составленномъ при Департаментѣ Народнаго Просвѣщенія.

Сводъ заключеній. Изъ сличенія общихъ уравненій (1) и (2)

$$\frac{x}{c} = \frac{A}{B}$$

$$c' \ x' = A' \ B'$$

тройныхъ простыхъ задачь, съ составленіемъ задачь изъ уравненій, слѣдуетъ вообще, что простый тройный вопросъ имѣетъ два отдѣленія позваимнымъ отношеніямъ совершенно равныя; каждое отдѣленіе состоитъ изъ *полной* задачи, или на *дѣленіе*, какъ $\frac{x}{c}$ и $\frac{A}{B}$, или *на умноженіе*, какъ $c' \ \kappa'$ и $A' \ B'$. Въ первомъ случаѣ *частныя*, а во второмъ *произведенія* равны между собою. Далѣе, одинъ членъ каждаго изъ уравненій (1) и (2) вообще представляетъ уже рѣшенную задачу, такъ $\frac{A}{B}$ и $A' \ B'$, а другой разрѣшаемую, какъ $\frac{x}{c}$ и $c' \ x'$; посему, если положимъ, $\frac{A}{B}$ = числу ∂, а $A' \ B' = \partial'$, тогда получимъ два уравненія

$$\frac{x}{c} = \partial, \text{ и}$$

$$c' x' = \partial'$$

простаго дѣленія, изъ коихъ первое прямаго смысла, а второе — обратнаго. Этимъ выводомъ оканчиваются нами доказательства, начатыя съ предисловія и § 1, что *предметъ Ариѳметики, дѣйствительно, состоитъ въ разрѣшиваніи четырехъ простыхъ уравненій*; ибо что сказано до сего мѣста, то отъ слова до слова можемъ приложить и ко всѣмъ послѣдующимъ правиламъ.

Изъ тѣхъ же уравненій (1) и (2) видна причина, почему простая задача неможетъ имѣть четырехъ данныхъ, ибо въ такомъ случаѣ, она выражаетъ вопросъ совершенно разрѣшеннымъ.

II. Правило тройное сложное.

§ 162.

I. *Тройная* сложная задача, какъ слѣдствіе тройныхъ простыхъ, также содержитъ *два отдѣленія, по взаимнымъ отношеніямъ равныя.*

II. Въ тройномъ простомъ правилѣ, каждый вопросъ, какъ видѣли, разрѣшается какою либо, изъ двухъ показанныхъ въ § 160, аксіомъ (a) или (b); и согласно съ этимъ, простая задача имѣетъ только три данныхъ числа, и одно искомое; тройное же сложное правило рѣшается двумя аксіомами (a) и (b) вмѣстѣ, ибо вопросы этого правила, должны содержать въ себѣ въ одно время, и смыслъ прямой задачи, и смыслъ обратной (§ 157, 11 § 158, a и b); значитъ, онѣ должны имѣть, и дѣйствительно имѣютъ *болѣе нежели три данныхъ,* хотя *искомое* при нихъ, какъ и въ простой задачѣ, всегда *одно.* Для опредѣленія числа данныхъ членовъ, воротимся къ общимъ уравненіямъ (1) и (2)

$$\frac{x}{c} = \frac{A}{B}$$

$$c'x' = A' B',$$

въ коихъ, какъ уже видѣли въ § 161, каждый членъ $\frac{x}{c}$, $\frac{A}{B}$, $c' x'$, $A' B'$ выражаетъ полную задачу, и при томъ первые два — на дѣленіе, а второе два — на умноженіе. И такъ каждая сложная задача 1-е, или содержитъ, на примѣръ, полную задачу на прямое простое правило, т. е. $\frac{x}{c}$, $\frac{A}{B}$, и еще одинъ членъ обратной, на примѣръ A' B', находящійся съ первыми въ связи; 2-е, или можетъ состоять изъ двухъ полныхъ: одной прямой, а другой обратной; 3-е, или изъ двухъ полныхъ, да еще одного новаго члена, и т. д., включая въ нихъ всегда *искомое* число, которое, несмотря на много данныхъ, бываетъ постоянно одно, такъ что въ первомъ случаѣ вопросъ долженъ содержать всѣхъ членовъ отъ $\frac{x}{c}$, $\frac{A}{B}$, A', B' *одинъ* искомый x, и *пять* данныхъ A, B, c, A', B'; во второмъ случаѣ, долженъ содержать членовъ отъ $\frac{x}{c}$, $\frac{A}{B}$, A'. B', c' x', опять *одинъ* искомый x, и *сѣмь* данныхъ A, B, c, A', B', c', x' и т. д. вообще

1. Въ тройной сложной задачѣ, *предѣлъ числа данныхъ членовъ, менѣе коего ихъ неможетъ быть, есть пять.* Ибо четыре данныхъ выражаютъ уже рѣшенный вопросъ, тройнаго простаго правила.

2. Въ тройной сложной задачѣ *содержится нечетное число данныхъ членовъ, и одинъ искомый, и попорядку всегда четный;* четное же число данныхъ, вообще, въ тройномъ правилѣ, выразить вопросъ совершенно разрѣшеннымъ.

3. *Каждое изъ двухъ отдѣленій,* тройнаго сложнаго вопроса, непремѣнно должно содержать *по равному числу членовъ* въ четномъ или не четномъ по-

рядкѣ. Ибо и печетъ, бывъ удвоинъ отдѣленіями задачи, даетъ четь, т. е. число всѣхъ членовъ.

4. Правило для рѣшенія сложныхъ задать, извлекается изъ правилъ для задачь тройныхъ простыхъ и состоитъ въ томъ, *чтобъ условія каждого отдѣленія превращать въ единичное требованіе* (§ 160,111), *для чего числа обратнаго смысла-соотвѣтственно перемножать, а прямаго — дѣлить* (§ 161, а и Ѣ); и такимъ образомъ *сложный вопросъ превратится въ простый*, какъ простый превращается въ уравненіе дѣленія, изъ коего неизвѣстное уже находится легко.

Положимъ, что требуется опредѣлить число кубическихъ саженъ, вырываемыхъ 8 работниками въ 2 дни, если 5 тѣхъ же работниковъ могутъ вырить 150 саж. въ 3 дни? По прежнему пишу

5 раб. — 3 *д.* — 150 саж.
8 — 2 — x

Если 5 работниковъ вырываютъ 150 саженъ, то въ 1 день 150 саж. выроютъ 5. 3 чел., а x саж., въ тотъ же день, выроютъ 8. 2 чел. И такъ понятно, что, въ этой части, *вопросъ обратнаго смысла*, и что два члена 150 са. и 5. 3 чел., по взаимнымъ отношеніямъ, равны другимъ двумъ x саж., и 8. 2 чел., ибо приводятся къ аксіомѣ (Ѣ); а потому опять составляютъ тройную, но только уже *простую* задачу, и именно

Когда 150 саж. роютъ 3. 5 чел·
то x — — 8. 2.

Отсюда видимъ, что вопросъ *прямаго смысла*, а потому по аксіомѣ (а)

$$\frac{x}{2.8} = \frac{150}{3.5}, \text{ и}$$

$$x = \frac{150.2.8}{3.5} = 160$$

Замѣч. Надобно замѣтить, что должно не прежде производить окончательныя вычисленія, какъ уже уничтоживъ, въ числителѣ и знаменателѣ, общаго множителя. Въ практикѣ эти сокращенія производятся такъ:

$$x = \frac{150.2.8}{3.5} = \frac{3.5.10.2.8}{3.5} = 10.2.8 = 160.$$

Если, въ томъ же вопросѣ, искомое число будутъ дни, соотвѣтствующіе 160 саженямъ, то вопросъ приметъ такой видъ

$$\begin{array}{llll} & \text{дн.} \quad \text{с.} & & \\ 5 \text{ р.} & -3-150 & 5.\ 3-150 & \\ & & \text{или} & \text{откуда } \frac{8\ x}{160} = \frac{5.3}{150}, \text{ и} \\ 8 & -x-160 & 8\ x-160 & \end{array}$$

$$x = \frac{5.3.160}{150.8} = \frac{5.3.2.2.2.2.5.2}{3.5.5.2.2.2.2} = 2 \text{ дня.}$$

Общее замѣчаніе. Если вопросъ, тройнаго правила, составляютъ весьма сложныя *простыя* числа (§ 63), тогда вычисленіе его, гораздо проще чрезъ логариѳмы. Пусть на примѣръ, будетъ оконченный выводъ, какого-либо простаго вопроса

$$x = \frac{10578 \times 11132}{107783}.$$

Откуда имѣемъ

$$l.x = l.10578 + l.11132 - l.107783$$

Вычисляю:

$$\text{l}.10578 = 4{,}0244035$$
$$\text{l}.11132 = 4.0465732$$
$$\overline{\quad 8{,}0709767}$$
$$\text{l}.107783 = 5{,}0325502$$
$$\overline{\text{l}.x = 3{,}0384265}, \text{ слѣд.}$$
$$x = 10925 \text{ вѣрное до 1-цы.}$$

Если же выводъ тройнаго сложнаго правила, такъ

$$x = \frac{3457 \times 1789 \times 9987}{89749 \times 19377},$$

тогда будемъ имѣть

$$\text{l}.x = (\text{l}.3457 + \text{l}.1789 + \text{l}.9987) - (\text{l}.89749 + \text{l}.19377)$$

Вычисляю:

l.3457 = 3,5386944	l.89749 = 4,9520296
l.1789 = 3,2511513	l.19377 = 4,2872865
l.9987 = 3,9994350	9,2393161
10,7832357	

$$10{,}7832357$$
$$9{,}2393161$$
$$\overline{\text{l}.x = 1{,}5499196}; \text{ слѣд.}$$
$$x = 36{,}475 \text{ вѣрное до } 0{,}001.$$

ОТДѢЛЕНІЕ II.

Частные случаи тройныхъ правилъ.

§ 163.

Частныхъ случаевъ тройныхъ задачь, кои въ Ариѳметикахъ подводятся подъ опредѣленныя правила *шесть*: 1-е) правило соединенія или цепное; 2-е) правило смѣшанія сложное; 3-е) правило товарищества; 4-е) правило процентовъ простое; 5-е) правило векселѣй и ихъ учетъ; и 6-е) правило процентовъ сложное.

I. Правило соединенія или цепное.

Цѣль сего правила состоитъ въ томъ, *чтобъ опредѣлить отношенія монетъ двухъ государствъ, разъединенныхъ другими землями, зная отношеніе монетъ сихъ земель къ монетамъ первыхъ двухъ.*

Оно называется правиломъ соединенія или цепнымъ потому, что служитъ соединеніемъ разныхъ отношеній, состоящихъ въ непрерывной цепи, въ одно.

Слѣдующія два рѣшенія достаточны для объясненія его.

Первый примѣръ.

48 франковъ = 52 англійск. шилинга.
15 англ. шил. = 6 нѣмец. флорин.
50 нѣм. флор. = 7 дукат. гамбур.
14 дукат. гам. = 40 рублямъ россійск.

Спрашивается сколькимъ россійскимъ рублямъ равны 2500 франковъ?

Предъупреждаемъ читателей, что числа монетъ взяты почти произвольно.

Рѣшеніе. Слова, выражающія значеніе каждой монеты, будемъ сокращать буквами a, b, c, d, e, f...., чрезъ что получатся равенства

$$48\ a = 52\ b$$
$$15\ b = 6\ c$$
$$50\ c = 7\ d$$
$$14\ d = 40\ e$$
$$x\ e = 2500\ a$$

Откуда, перемноживъ по членно, и уничтоживъ общихъ множителей abcde и abcde, имѣемъ

$$48.\ 15.\ 50.\ 14.\ x = 52.\ 6.\ 7.\ 40.\ 2500, \text{ и}$$

$$x = \frac{52.6.7.40.2500}{48.15.50.14} = 433\frac{1}{3} \text{ руб.}$$

слѣд. 1 руб. россійской $= 2500 : 433\,\frac{1}{3} = 5{,}77$ франк.

Второй примѣръ. Одинъ французской Купецъ, желая переслать въ Лондонъ сумму 1200 футовъ стерлинговъ, проситъ одного парижскаго банкира, доставить отъ него сей капиталъ, при условіи заплатить ему по одному проценту со 100, изъ цѣлой суммы. Спрашивается въ франкахъ сумма, которую купецъ долженъ банкиру?

При этомъ извѣстно, что

26 фунт. стер. = 150 руб.
75 руб. = 30 дукат. гамб.
20 дукат. гамб = 42 піаст. испанск.
12 піаст. испан. = 65 франк.

Откуда

$$\begin{aligned} 26\ a &= 150\ b \\ 75\ b &= 30\ c \\ 20\ c &= 42\ d \\ 12\ d &= 65\ e \\ x.\ e &= 1200\ a \end{aligned}$$

перемножа и сократя, получимъ

$$26.\,75.\,20.\,12.\,x = 150.\,30.\,42.\,45.\,1200,\ \text{и}$$

$$x = \frac{150.30.42.45.1200}{26.75.20.12} = 31500\ \text{фран.};$$

посему, считая 1 процентъ со 100, на всю сумму ихъ будетъ $\frac{31500}{100} = 315$ франк. слѣд. купецъ долженъ дать банкиру сумму $31500+315=31815$ франк., чтобъ онъ согласился ему выплатить 1200 фунтовъ стерлинговъ въ Лондонѣ.

II. *Правило смѣшенія сложное.*

§ 164.

Вопросы, относящіяся къ сему правилу могутъ быть двухъ родовъ:

Или *должно найти среднее достоинство нѣсколькихъ родовъ вѣщей, зная величину и достоинство каждой вещи.*

Или *требуется опредѣлить количество каждого рода вещей, кои входитъ въ составъ или* *въ смѣшеніе, зная цѣну ихъ, и цѣну общей смѣси.*

Мы займемся только первымъ случаемъ, поелику второй—совершенно зависитъ отъ Алгебры.

Примѣръ. Одинъ виноторговецъ смѣшалъ нѣсколько сортовъ винъ разнаго достоинства, имянно: 250 литровъ цѣною 12 франк. за литръ, 18 литровъ по 15 франк. за литръ, 200 лит. по 16 франк. за литръ. Спрашивается чего будетъ стоить литръ смѣси?

Замѣтимъ, что когда 1 литръ стоитъ, въ первомъ данномъ, 12 франк., то цѣна 250 литр. получится, умножая . . . . $250 \times 12 = 3000$ ф.

Также 180 лит. по 15 ф. дадутъ $180 \times 15 = 2700$

Наконецъ 200 — — 16 — — — $200 \times 16 = 3200$

слѣд. общая цѣна, трехъ родовъ смѣси, будетъ 8900

Если теперь составимъ изъ 250, 180 и 200 сумму 630, тогда данный вопросъ переменится въ слѣдующій: *если* 630 *литровъ вина стоятъ* 8900 *фр., то чего будетъ стоить одинъ литръ?*

Очевидно должны раздѣлить 8900 на 630, и частное 14, 1 фран. изобразитъ искомую цѣну (§ 61).

Общее правило. *Чтобъ изъ вещей, разныхъ цѣнъ, получить по цѣнѣ среднюю, то должно перемножить величину каждой вещи на соотвѣтствующую ей цѣну; и сумму, этихъ произведеній, раздѣлить на величину всѣхъ вещей.* На основаніи чего, разрѣшенный нами вопросъ, вообще принимаетъ видъ

$$x = \frac{250 \times 12 + 180 \times 15 + 200 \times 16}{250 + 180 + 200} = 41,\ 1 \text{ франк.}$$

Второй примѣръ. Требуется смѣшать 23 килограма серебра 825 — тысячной пробы, 14 килограмовъ 0,910 пробы, 19 кило. 0,845 пробы. Спрашивается проба смѣси, изъ всѣхъ трехъ слитковъ?

Чтобъ понять этотъ вопросъ, то нужно знать, что въ ювелирной работѣ золото и серебро всегда мѣшаются съ другими металами, какова мѣдь и т. д. Когда говорятъ, что кусокъ золота, или серебра долженъ быть *такой-то пробы* или такой-то *степени*, то подъ этимъ разутѣютъ, что въ извѣстномъ вѣсѣ, принѣмаемомъ за единицу, на прим., въ *одномъ* килограмѣ, находится столько-то чистаго золота или серебра.

И такъ кусокъ имѣетъ $\frac{9}{10}$ или 0,9 чистаго метала, или онъ $\frac{9}{10}$ пробы, когда въ одномъ килограмѣ находится $\frac{9}{10}$ чистого золота или серебра, — эта проба нынѣ всѣхъ металовъ. — Также кусокъ есть 825 тысячной пробы, когда въ одномъ килограмѣ находится $\frac{825}{1000}$ чистого золота или серебра.

Теперь изъсказаннаго слѣдуетъ, что кусокъ смѣси, изъ трехъ слитковъ, будетъ

$$x = \frac{0{,}825 \times 23 + 0{,}91 \times 14 + 0{,}845 \times 19}{23 + 14 + 19}$$

По вычисленіи каждаго члена, и по раздѣленіи суммы ихъ на сумму всѣхъ вещей, найдемъ, что $x = 0{,}853$. И такъ кусокъ смѣси, величиною въ 56 килограмовъ, будетъ 853-тысячной пробы.

Третій примѣръ. На нѣкоторую работу употреблено 500 чел. изъ коихъ 160 получали въ день по 2 фран., 200 чел. по 1,75 фр., и 140 чел. по 1,5 фр. Спрашивается сколько круглымъ числомъ каждый работникъ получитъ въ день? Составляю:

$$x = \frac{160 \times 2 + 200 \times 1{,}75 + 140 \times 1{,}5}{160 + 200 + 140}$$

Отсюда получимъ, что 500 чел. стоили каждый день $x = 880$ фран.; слѣд. *одинъ* стоитъ $\frac{880}{500} = 1{,}76$ фран. И такъ каждый работникъ получалъ по 1,76 франковъ.

III. Правило товарищества.

§ 165.

Члены комерціи, для выгоднѣйшаго торга, на условленное время соединяютъ капиталы въ общую сумму, по истеченіи коего — обратно разбираютъ по рукамъ, съ пріобрѣтенными уже на ихъ *барышами*, а въ случаѣ убытка, — съ *учетомъ*, сообразно величины каждаго капитала. Такое общество называется *товариществомъ* или *компаніею*; а способъ, по коему опредѣляется ихъ барышъ или учетъ именуется правиломъ *товарищества*. Впрочемъ по этому правилу разрѣшаются и другія вопросы, не относящіеся къ торговли, но имѣющія съ ними равно-значительный смыслъ.

Положимъ, что изъ трехъ купцовъ, далъ первый для торга 150 руб., вторый 250 р., третій 350 р., и получили барыша 200 руб. Спрашивается сколько каждый долженъ принять изъ общаго барыша?

Для удобнѣйшаго обозрѣнія вопроса, расположимъ его въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{array}{llll} 1 \text{ куп.} & \text{полож.} & 150 & \text{руб.} \\ 2 \text{ —} & \text{—} & 250 & \\ 3 \text{ —} & \text{—} & \underline{350} & \\ & & 750 & \end{array}\right\} 200 \text{ р.}$$

Поелику общество на всю сумму 750 р. получаетъ чрезъ обороты 200 р., то на *одинъ* рубль получитъ

$$x = \frac{200}{750}$$

Если вообще барышь (или убытокъ) 200 изобразимъ чрезъ b, а сумму всѣхъ капиталовъ 750 чрезъ s, то будетъ

$$x = \frac{b}{s}$$

Отсюда для вопросовъ товарищества, — и однородныхъ съ ними, — выводимъ общее правило: *величина барыша или учета на одинъ рубль, равна общему барышу или учету, раздѣленному на сумму всѣхъ капиталовъ.*

Послѣ чего барышь или учетъ каждаго купца найти легко; стоитъ только $\frac{b}{s}$, а въ нашемъ примѣрѣ $\frac{200}{750}$ *умножить* порозвь на 150, 250, 350 . . . ., *вообще на капиталъ каждаго.* И такъ

Первый купецъ получилъ $\frac{20}{75} \cdot 150 = 40$ р.

Вторый — — $\frac{20}{75} \cdot 250 = 66\frac{2}{3}$

Третій — — $\frac{20}{75} \cdot 350 = 93\frac{1}{3}$

Повѣрка . . 200.

Второй примѣръ. Одинъ товарищъ положилъ въ торгъ 75 руб. на 3 мѣсяца, другой 25 руб. на 5 мѣс., третій 15 руб. на 10 мѣс., и получили убытка 8 руб. Спрашив. сколько каждый долженъ принять изъ общей убыли?

Если каждый капиталъ помножимъ, на соотвѣтствующіе мѣсяцы, то въ произведеніяхъ выйдутъ тѣ капиталы, которые надлежало бы положить на 1 мѣсяцъ (§ 54 и 55), чтобъ получить убыли 8 руб. И такъ первый товарищъ положилъ . . . $75 \cdot 3 = 225$ р.
второй . . . . $25 \cdot 5 = 125$
третій . . . . $15 \cdot 10 = 150$ } 8 р.
500

Откуда, учетъ съ одного рубля, будетъ

$$x = \frac{b}{s} = \frac{8}{500} = \frac{2}{125}$$

слѣдовательно

1 Куп. долженъ принять учета $\frac{2}{125} \cdot 225 = 3\frac{15}{25}$ р.

2 — — — — $\frac{2}{125} \cdot 125 = 2$

3 — — — — $\frac{2}{125} \cdot 150 = 2\frac{10}{25}$

Повѣрка . 8 руб.

И такъ капиталъ 1го купца, по окончаніи торга, долженъ состоять только изъ $72\frac{10}{25}$ руб.; втораго изъ 23 руб.; третьего изъ $12\frac{15}{25}$ руб.

IV. Правило процентовъ.

§ 166.

Процентомъ называется барышъ, получаемый изъ извѣстной суммы, отдаваемой въ ростъ, на условленное время. Эта сумма называется *капиталомъ*.

Общій барышъ, зависитъ отъ величины самаго капитала, отъ времени, на которое онъ положенъ, и отъ величины процента, считаемаго съ единицы капитала, въ единицу времени.

Правиломъ процентовъ называется способъ вычисленія барыша на весь капиталъ. Оно раздѣляется на *простое и сложное*. Въ простомъ, проценты считаются съ одного капитала; въ сложномъ, и изъ капитала, и изъ пріобретаемыхъ на капиталъ процентовъ.

Ходъ простого правила. Если 100 руб., (принимаемыя за единицу), чрезъ *годъ* обращаются въ 100 + 6 р. (гдѣ 6 руб. есть процентъ со 100), то *одинъ* рубль обратится въ $\frac{100+6}{100} = \frac{100}{100} + \frac{6}{100} = 1 + \frac{6}{100}$ (здѣсь $\frac{6}{100}$, очевидно, выражаетъ процентъ съ одного рубля); слѣд. чрезъ *два* года, тотъ же рубль возрастаетъ

до . . . . . $1 + \frac{6}{100} + \frac{6}{100} = 1 + \frac{6}{100} . 2$

чрезъ *три* года $1 + \frac{6}{100} + \frac{6}{100} + \frac{6}{100} = 1 + \frac{6}{100} . 3$

чрезъ четыре . $1 + \frac{6}{100} + \frac{6}{100} + \frac{6}{100} + \frac{6}{100} = 1 + \frac{6}{100} . 4$

и т. д.

Отсюда *чистый* процентъ на рубль, будетъ

$$\text{чрезъ } \textit{годъ} \ldots = \frac{6}{100}$$

$$- \ \textit{два} \ldots = \frac{6}{100}.2$$

$$- \ \textit{три} \ldots = \frac{6}{100}.3$$

$$- \ \textit{четыре} . = \frac{6}{100}.4$$

и т. д.

такъ что если вообще искомый процентъ съ одного рубля, чрезъ v время, считая по p. процентовъ со $\frac{0}{0}$ (подъ знакомъ $\frac{0}{0}$ въ торговлѣ разумѣется процентъ со 100 въ годъ или въ мѣсяцъ), изобразимъ чрезъ x', то будетъ

$$x' = \frac{p}{100}.v = \frac{pv}{100}.$$

И такъ, въ простомъ правилѣ, *процентъ съ единицы капитала равенъ произведенію времени на процентъ со* $\frac{0}{0}$ *въ годъ* (или въ мѣсяцъ), *раздѣленному на* 100. Притомъ $\frac{p}{100}$ означаетъ процентъ съ одного рубля въ годъ. Наконецъ, если единица капитала или *одинъ* рубль, чрезъ v время даетъ процентовъ $x' = \frac{pv}{100}$, то капиталъ, состоящій изъ k единицъ рублей, очевидно, дастъ процентовъ

$$u = \frac{kpv}{100}.$$

Эта формула называется *правиломъ процентовъ простыхъ*, и для памяти весьма удобна, имянно: *величина процента со всего капитала ровняется произведенію капитала на время и на процентъ со* $\frac{0}{0}$, *раздѣленному на* 100.

Изъ сего слѣдуетъ, что правило процентовъ простое есть частный случай правила товарищества; правило же сложное, какъ увидимъ въ § 171, составляетъ особенный родъ вычисленія.

§ 167

Въ формулѣ $u = \frac{kpv}{100} \ldots . (1)$

содержится *одинъ постоянный членъ* и есть 100, и *четыре* изменяющихся u, k, p и v, изъ коихъ по тремъ данныхъ, легко опредѣлить четвертый. Такъ

1. Если требуется опредѣлить процентъ со всего капитала, то формула удерживаетъ прежній видъ, если же отыскивается капиталъ к, тогда онъ, изъ формулы (1)

$$x = \frac{kpv}{100},$$

опредѣляется какъ искомый производитель, и потому будетъ

$$k = \frac{100\,u}{pv} \ldots . (2)$$

II. Если требуется опредѣлить процентъ p, со $\frac{0}{0}$, тогда изъ той же формулы

$$u = \frac{kpv}{100},$$

и такимъ же образомъ, найдемъ

$$p = \frac{100\,u}{kv} \ldots\ldots (3)$$

III. Наконецъ, если неизвѣстно v, то опять изъ

$$u = \frac{kpv}{100},$$

будетъ

$$v = \frac{100\,u}{kp} \ldots\ldots (4.)$$

§ 168.

Общее правило. Изъ рышенія четырехъ, показанныхъ въ предыдущихъ двухъ §§, случаевъ, слѣдуетъ что какой бы членъ, въ силу вопроса, въ правилѣ простыхъ процентовъ неопредѣлялся, мы должны, предварительно, составить изъ буквъ (1) формулу процентовъ, и потомъ по изложенному въ 1, 11 и 111 членахъ, вывести искомый членъ, и наконецъ общій результатъ его, приложить къ самому вопросу. Это правило для того установливается, чтобъ незаучивать всѣ четыре формулы, достаточно же знать изъ нихъ первую, какъ *основную.* Вотъ примѣры.

I. Примененіе формулы (1)

$$u = \frac{kpv}{100}.$$

Спрашиваются проценты съ 5000 *франковъ за* 315 *дней или за* 10 *мѣсяцовъ* 15 *дней, считая по* $\frac{3}{4}$ со $\frac{0}{0}$ *съ мѣсяцъ.*

Здѣсь данны: $k = 5000$, $v = 10\frac{1}{2}$, $p = \frac{3}{4}$, слѣд. вопросъ рѣшается, непосредственно, формулою (1), и имянно:

$$u = \frac{5000 \cdot 10\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{100} = 50 \cdot \frac{21}{2} \cdot \frac{3}{4} = 393,\ 75 \text{ франк.}$$

II. Приложеніе формулы (2)

$$k = \frac{100\,u}{pv}.$$

Узнать капиталъ, который по истеченіи 27 *мѣсяцовъ даетъ величину процентовъ* 1312, 65 *франк., по* $\frac{1}{2}$ фр. со $\frac{0}{0}$ *въ мѣсяцъ.*

Найдется $k = 9723$, 33 франка.

III. Приложеніе формулы (3).

$$p = \frac{100\,u}{kv}.$$

Сумма, равная 3750 *фр., по истеченіи* 2 *лѣтъ* 6 *мѣс:, принесла процентовъ* 719, 25 *фр. спраш. величину процентовъ со* $\frac{0}{0}$ *въ годъ?*

Найдется $p = 7{,}672$ фр. $=$ почти 7,7 фр.

IV. Приложеніе формулы (4)

$$v = \frac{100\,u}{kp}.$$

Сумма, равная 3750 *руб., по истеченіи нѣкотораго времени, принесла процентовъ* 719,25 *р. спраш. время приращенія?*

Найдется $v = 2\frac{1}{2}$ года.

V. Правило векселей и ихъ учетъ.

§ 169.

Векселемъ называется письмо, коимъ обязывается должникъ уплатить, отъ написанія, чрезъ условленное время, занятую сумму. Письмо это, какъ актъ, обезпечивающій право, выдается отъ самаго должника заимодавцу, или иначе *кредитору*.

При написаніи *купеческихъ* векселей, вносятся въ нихъ, вмѣстѣ съ занятымъ капиталомъ, и простые проценты, которые можетъ дать капиталъ въ то время, на какое написанъ вексель. Самый же капиталъ называется *первоначальнымъ*, для отличія отъ величины векселя.

I. На основаніи этого, положимъ, что первоначальный капиталъ k, отдалъ въ ростъ, на v время, по p процентовъ со $\frac{0}{0}$, съ одного только капитала, тогда, по § 166, съ него проценты будутъ $\frac{kpv}{100}$, слѣд. сумма, въ которую долженъ писатся вексель, выразится чрезъ

$$x = k + \frac{kpv}{100};$$

привидя здѣсь цѣлое число съ дробью въ неправильную дробь, будетъ

$$x = \frac{100\,k + kpv}{100},\ \text{или}$$

$$x = \frac{(100 + pv)\,k}{100} \quad . \quad . \quad (1)$$

Вотъ въ этой формулѣ заключается правило, для составленія векселей, имянно, *сумма* (или величина) *векселя равняется произведенію первоначальнаго капитала на* 100, *увеличинныхъ временемъ и процентамъ со* $\frac{0}{0}$, *раздѣленному на* 100. Если $к = 480000$ р. $v = 3$, $p = 5$, то $x = \frac{100+3.5}{100} \times 48000$ $= 552000$ р.

II. Изъ показаннаго рѣшенія видно, что кредиторъ имѣетъ полное право на присвоеніе, вписанныхъ въ вексель, процентовъ лишь только по истеченіи условленнаго времени, такъ что если должникъ пожелаетъ уплатить долгъ прежде срока, для того и явится въ *началѣ перваго мѣсяца*, тогда кредиторъ обязанъ требовать въ уплату себѣ не ту сумму, которая написана въ векселѣ, но ту только, какая имъ дѣйствительно была выдана, что называется *учетомъ векселя*. И такъ учетъ есть обратное отсчитываніе, въ пользу должника, процентовъ съ величины векселя, за то, что онъ возвращаетъ, занятый капиталъ прежде срока.

Чтобъ этотъ учетъ выразить формулою, то вопервыхъ должно, изъ формулы (1), опредѣлить капиталъ к, дѣйствительно данный кредиторомъ въ долгъ, и по томъ изъ всей суммы векселя вычесть к: *тогда разность и покажетъ требуемый учетъ*. И такъ, вопервыхъ изъ

$$x = \frac{(100+pv)\ к}{100}, \text{ опредѣляю}$$

$$к = \frac{100\ x}{100+pv} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Въ этой формулѣ содержится правило, для опредѣленія первоначальнаго капитала k или того, изъ котораго образовалась сумма x, векселя; и имянно: *первоначальный капиталъ равняется произведенію величины векселя на* 100, *раздѣленному на* 100, *увеличинныхъ временемъ и процентомъ со* $\frac{0}{0}$.

Если $x = 20000$ р. $v = 10$, $p = 7$, то $k = \frac{100.20000}{100 + 10.7} =$ 11764 р 11 к.

III. Послѣ чего учетъ y, векселя, какъ выше вывели, будетъ

$$y = x - k.$$

Или на мѣсто k, вставивъ ему равное $\frac{100x}{100 + pv}$, получимъ

$$y = x - \frac{100\,x}{100 + pv}.$$

Привидя здѣсь цѣлое число съ дробью, въ неправильную дробь, найдемъ

$$y = \frac{100\,x + x\,pv - 100\,x}{100 + pv}, \text{ откуда}$$

$$y = \frac{xpv}{100 + pv} \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

И такъ *учетъ векселя равняется произведенію величины векселя на время и процентъ со* $\frac{0}{0}$, *раздѣленному на* 100, *увеличенныхъ временъ и тѣмъ же процентомъ.* Если $x = 1200$ р., $v = 10$, $p = 7$, то $y = \frac{1200.10.7}{100 + 10.7} = 494$ р. 12 к.; слѣд. первоначальный капиталъ былъ $1200 - 494{,}12 = 705$ 88 к.

При сравненіи формулы простыхъ процентовъ $z = \frac{kvp}{100}$ съ формулою учетовъ $y = \frac{xvp}{100+vp}$, не должно считать, чтобы

$$z = \frac{kpv}{100} > \frac{xvp}{100+pv} = y,$$

основываясь на наружномъ видѣ обѣихъ формулъ, по коему знаменатель первой < знаменателя второй (§ 91,2), на противъ онѣ совершенно равны; ибо, хотя $p = p$, $v = v$, но k первой дроби < x второй дроби, потому что k есть первоначальный капиталъ, а x — величина векселя; слѣд. во сколько $100 < 100 + pv$, то востолько же на оборотъ $x > k$, такъ что z не $> y$, но $= y$, словомъ, $\frac{kvp}{100} = \frac{xpv}{100+pv}$. Въ этомъ нетрудно убѣдится повѣркою, въ числахъ; положивъ: $k = 100$ $p = 3$, $v = 10$, найдемъ: величину процентовъ $\frac{100.30}{100} = 30$, величину векселя $\frac{100+30}{100} \times 100 = 130$; откуда опять, обратно, учетъ получится $\frac{130.30}{130} = 30$ слѣд. учетъ съ процентомъ равенъ.

IV. Но разсматривая тѣ же формулы, какъ зависимость кредитора *къ банкиру*, мы находимъ въ нихъ, дѣйствительное неравенство, и имянно: $z = \frac{kpv}{100} > \frac{xpv}{100+pv} = y$; и вотъ на какомъ основаніи. Положимъ, что кредиторъ, по встрѣвшимся нуждамъ, въ свою очередь, вздумалъ размѣнять, полученный вексель, прежде срока, для чего и явился къ банкиру, въ началѣ перваго мѣсяца, то сей, учитывая проценты, по формулѣ $z = \frac{kpv}{100}$, принимаетъ за первопачальный капиталъ k, не ту сумму, какая была кредиторомъ выдана въ долгъ, но сумму векселя x, такъ что формула $z = \frac{kpv}{100}$, относительно пользъ банкира, обращается въ

$$z = \frac{xvp}{100} \ldots\ldots (4)$$

(повторяю еще разъ, что здѣсь x выражаетъ величину векселя). Въ этомъ случаѣ дѣйствительно

$$z = \frac{xvp}{100} > \frac{xvp}{100+pv} = y,$$

потому, что при совершенно равныхъ числителяхъ знаменатель первой формулы < знаменителя второй; значитъ, выдаваемый банкиромъ кредитору капиталъ, обратно < того, какой кредиторомъ былъ выданъ должнику. Въ этомъ состоитъ убытокъ для владѣтеля билета, и польза для банкира, за то, что онъ выплачиваетъ впередъ. Какъ бы нибыло, а такой ходъ дѣйствія вообще всѣми принятъ въ торговлѣ, какъ добровольное условіе между кредиторомъ, размѣнивающимъ билетъ, и банкиромъ, выплачивающимъ оный.

Учетъ *банкира* $\left(z = \frac{xpv}{100}\right)$ называется еще *внѣшнимъ*, потому, что по оному, принимается вексель и выдается капиталъ (для приращеній), прежде срока; учетъ кредитора $\left(y = \frac{xpv}{100+pv}\right)$ называется *внутрен-*

нимъ потому, что по оному принимается обратно капиталъ, и возвращается вексель прежде срока.

V. Изъ формулы внутренняго учета

$$y = \frac{xpv}{100 + pv},$$

по § 158, получимъ

$$xvp - yvp = 100\,y \ldots\ldots (5)$$

Изъ этого уравненія можно опредѣлить и процентъ p, и время v, — во первыхъ процентъ, для коего, имѣемъ

$$p = \frac{100\,y}{xv - yv} = \frac{100\,y}{(x - y)v} \ldots\ldots (6)$$

Опредѣляя же время, получимъ

$$v = \frac{100\,y}{xp - yp} = \frac{100\,y}{(x - y)p} \ldots\ldots (7)$$

Не должно заучивать этихъ формулъ; гораздо полѣзнѣе сдѣлаемъ, если будемъ знать какъ онѣ имянно выводятся изъ учета; а по тому, если потребуется, въ силу вопроса, опредѣлить процентъ со $\frac{0}{0}$, или время v, то должно предварительно, составить, въ буквахъ, формулу учета, и потомъ, по изложенному, вывести искомое, и наконецъ общій результатъ его, приложить къ самому вопросу.

§ 170.

I. Приложеніе формулы векселя

$$x = \frac{(100 + vp)\,k.}{100}$$

Въ какую сумму должно писать вексель, на 16 мѣсяц., по $\frac{5}{8}$ р. со $\frac{0}{0}$, если дается въ кредитъ 3300 р?

$$x = \frac{100 + \frac{5}{8} \cdot 16}{100} \times 3300 = 3630 \text{ р.}$$

II, Сравнительное приложенiе формулъ первоначальнаго капитала, учета банкира и учета кредитора

$$k = \frac{100\,x}{100 + vp},\ z = \frac{xpv}{100},\ y = \frac{xpv}{100 + pv}.$$

Какую сумму, въ началѣ перваго мѣсяца, должно возвратить кредитору, коему вексель выданъ въ 3600 р., на 16 мѣс. по $\frac{5}{8}$ р. со $\frac{0}{0}$ въ мѣсяцъ?

По первой формулѣ найдется $k = 3272$ руб. 72 коп.; а по учету банкира будетъ $z = 360$, слѣд. $k = 3600 - 360 = 3240$ р.; и такъ владѣтель билета изъ собственнаго капитала теряетъ $3272,\ 72 - 3240 = 32$ р. 72 к.

По учету же кредитора, получимъ $y = 327$ р. 28 к.; слѣд. $k = 3600 - 327,\ 28 = 3272$ р. 72 к. — одинакое съ первымъ.

III. Сравнительное приложенiе формулъ

$$p = \frac{100\,y}{(x - y)v},\ \text{и}\ p = \frac{100\,z}{xv}$$

Послѣдняя формула, выведена изъ формулы банкира, по § 167, 11.

Банкиръ за билетъ, въ 5600 фр., выплачиваемый чрезъ 14 мѣсяц. возвратилъ кредитору

5129, 45 фр., спрашив, какими процентами въ мѣсяцъ сей билетъ былъ учитанъ?

Здѣсь учетъ, для обѣихъ вычисленій, будетъ одинъ и тотъ же, имянно 5600 — 5129, 45 = 470, 55 ф.р.; и такъ, по формулѣ кредитора найдемъ $p = 0{,}721447$ ф.р.; значитъ проценты со $\frac{0}{0}$ въ мѣсяцъ, учитались по 0,721447 ф., а во всѣ 14 мѣсяц. по $0{,}721447 \times 14 = 10{,}1$ ф.р.

По формулѣ же банкира, учетъ въ мѣсяцъ будетъ $p = 0{,}65525$ ф.р., а во всѣ 14 мѣсяцовъ по 9,1735 ф.р.

Этотъ учетъ, какъ видно, меньше учета перваго способа, что и немогло быть иначе. Ибо въ § 169 видѣли, что $y = \frac{xvp}{100 + pv} < \frac{xvp}{100} = z$, а какъ въ настоящемъ рѣшеніи принято y не $< z$ но $= z$, или все тоже $\frac{xvp}{100 + pv} = \frac{xvp}{100}$, то очевидно, что какой-либо соотвѣтствующій членъ первой части, непремѣнно долженъ быть *меньше* соотвѣтствующаго члена — второй, но по условію задачи $x = x$, $v = v$, слѣд. долженъ быть процентъ p второй части $< p$ первой, что и дѣйствительно получилось изъ вычисленія.

VI. Правило процентовъ сложное.

§ 171.

Правиломъ процентовъ сложнымъ называется способъ вычисленія барыша, считаемаго изъ капитала и съ процентовъ, (пріобрѣтаемыхъ на капиталахъ), въ условленное время, принѣмаемое за *единицу*.

Ходъ самаго правила. Изъ § 166 видѣли, что процентъ, на единицу капитала, во время v, (считая по p процентовъ со $\frac{0}{0}$) выражается чрезъ

$$\frac{p \cdot v}{100}.$$

Если положимъ здѣсь $v = 1$, напримѣръ, — *одному* году, тогда годовый процентъ на рубль будетъ

$$\frac{p}{100},$$

который, если продадимъ къ 1-цѣ, то получимъ сумму

$$1 + \frac{p}{100},$$

вырастающую чрезъ годъ, изъ *одного* рубля. Приведя, въ ней, цѣлое число съ дробью въ неправильную дробь, получимъ

$$1 + \frac{p}{100} = \frac{100 + p}{100}.$$

Эту сумму, состоящую изъ капитала одного рубля и его годоваго процента $\frac{p}{100}$, въ продолженіе слѣдующаго и по порядку *втораго* года, можемъ разсматривать какъ новый капиталъ, отдаваемый въ ростъ; и такъ, означивъ ее чрезъ a, т. е., положивъ $1 + \frac{p}{100} = a$, будемъ разсуждать такъ: когда 1 рубль въ годъ даетъ a, то a, по § 55, дастъ

$$a \cdot a = a^2,$$

или замѣнивъ a, ему равною величиною, получимъ

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=\left(1+\frac{p}{100}\right)^2.$$

Означивъ опять этотъ выводъ капитала съ процентами чрезъ a^2, и опять предложивъ вопросъ: когда 1 рубль даетъ въ годъ a, то a^2 что дастъ? увидимъ, что въ концѣ года, и по порядку *третьяго*, онъ возрастетъ въ

$$a^2 \cdot a = a^3,$$

или на мѣсто a^2 и a, вставивъ имъ равныя $\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ и $1+\frac{p}{100}$, найдемъ

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=\left(1+\frac{p}{100}\right)^3.$$

Продолжая такимъ образомъ далѣе, откроемъ, что капиталъ, состоящій изъ *одного* рубля съ его годовымъ процентомъ $\frac{p}{100}$, послѣ n лѣтъ, дойдетъ до

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)=\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$$

И такъ *величина единицы капитала съ его процентомъ* $\frac{p}{100}$, (смотри на первую часть), считаемымъ въ годъ, въ оборотахъ сложныхъ процентовъ, чрезъ n лѣтъ, возрастетъ или получится, *когда* (смотри на вторую часть), *процентъ со* $\frac{0}{0}$ *приложится ко* 100 *и сумма, раздѣленная на* 100 *возвысится до числа лѣтъ.*

Наконецъ, если единица капитала или 1 рубль, чрезъ n лѣтъ, обращается въ сумму $\left(\frac{100 + p}{100}\right)^n$, то капиталъ, состоящій изъ A единицъ рублей, очевидно, возрастаетъ до

$$\left(\frac{100 + p}{100}\right)^n \cdot A = B$$

Здѣсь B означаетъ возросшій капиталъ изъ *первоначальнаго* A, чрезъ n лѣтъ, по оборотамъ сложныхъ процентовъ, полагая въ годъ по p со $\frac{0}{0}$ и называется *сложнымъ.* И такъ *величина сложнаго капитала* B, *въ* n *лѣтъ, равняется единицѣ капитала съ его годовымъ процентомъ, возвышенныхъ до* n *лѣтъ и умноженныхъ на первоначальный* A.

Вычисливъ такимъ образомъ B, барышъ легко опредѣлить; ибо онъ выражается разностію

$$B - A.$$

Замѣчаніе. Въ выраженіи $\frac{100 + p}{100}$, число p вообще означаетъ *простыя единицы,* и можетъ быть только равно какому либо изъ чиселъ: 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Увеличивающій p выше числа 7, въ силу Государственныхъ Законовъ, какъ преступникъ, называется *ро-*

стовщикомъ. И такъ $\frac{100+p}{100}$ вообще имѣемъ право выразить такъ

$$\frac{1\overline{0}p}{100} \text{ или } 1{,}0p;$$

т. е. $\frac{1\overline{0}p}{100}$ равно единицѣ цѣлыхъ, нулю десятыхъ и р сотыхъ; такъ что

$$\frac{100+p}{100} = \frac{1\overline{0}p}{100} = 1{,}0p,$$

и формула $\left(\frac{100+p}{100}\right)^n \cdot A = B$, чрезъ это упрощается въ

$$(1{,}0p)^n \cdot A = B.$$

§ 172.

Въ выраженіи

$$(1{,}0p)^n \cdot A = B \text{ или } \left(\frac{100+p}{100}\right)^n \cdot A = B$$

содержится *одинъ постоянный членъ* и есть 100 и *четыре* измѣняющихся: p, n, A и B, изъ коихъ по тремъ даннымъ, легко опредѣлить *четвертый.* Такъ

I. Если $B = x$, тогда формула удержитъ прежній видъ, и притомъ *общій* для всѣхъ рѣшеній; имянно

$$x = (1{,}0p)^n \cdot A \ldots\ldots (1)$$

II. Ежели $A = x$, тогда получимъ

$$(1{,}0p)^n \cdot x = B, \text{ откуда}$$

$$x = \frac{B}{(1{,}0p)^n} \ldots\ldots (2)$$

Поелику здѣсь x означаетъ первоначальный капиталъ A, или ту сумму, которая, если съ настоящаго времени отдается въ ростъ, на n лѣтъ, по p процентовъ со $\frac{0}{0}$, то въ концѣ срока, обратится въ сумму B, въ которой посему содержится и капиталъ A, и его проценты, и сихъ процентовъ — проценты; слѣд. величина x есть *сложный учетъ* билета (§ 169), выплачиваемаго отъ настоящаго времени, чрезъ n лѣтъ.

III. Если $p = x$, тогда изъ формулы (1) будемъ имѣть

$$(1{,}0x)^n \,.\, A = B, \text{ откуда}$$

$$(1{,}0x)^n = \frac{B}{A} \text{ и}$$

$$1{,}0x = \sqrt[n]{\frac{B}{A}}.$$

А какъ $1{,}0x = \frac{10x}{100} = \frac{100+x}{100}$, то, вставивъ $\frac{100+p}{100}$ на мѣсто $1{,}0x$, получимъ

$$\frac{100+x}{100} = \sqrt[n]{\frac{B}{A}}; \text{ откуда}$$

$$100 + x = 100 \sqrt[n]{\frac{B}{A}} \text{ и}$$

$$x = 100 \sqrt[n]{\frac{B}{A}} - 100 \ldots\ldots (3)$$

Когда положимъ, что $B = k\,.\,A$, тогда $\frac{A}{B} = \frac{k\,.\,A}{A} = k$, слѣдственно будемъ имѣть

$$x = 100 \sqrt[n]{k} - 100 \ldots\ldots (4)$$

IV. Если $n = x$, то найдемъ, что

$$(1{,}0p)^x \,.\, A = B \text{ и}$$

$$(1{,}0p)^x = \frac{B}{A};$$

чего, взявъ логариѳмы, получимъ

$$x \cdot l \cdot (1,0p) = lB - lA$$

откуда

$$x = \frac{lB - lA}{l(1,0p)} \ldots\ldots (5)$$

V. Если бы B было въ *двое*, *въ трое*, *въ четверо* ..... болѣе первоначальнаго капитала A, тогда формула (1)

$$(1, 0p)^x . A = B,$$

будетъ гораздо проще. Ибо, положивъ $B = k. A$, получимъ

$$(1, 0p)^x . A = k. A, \text{ откуда}$$

$$(1, 0p)^x = \frac{k.A}{A} = k; \text{ слѣд.}$$

$$x = \frac{lk}{l.(1,op.)} \ldots\ldots (6)$$

§ 173.

Общія правила. 1. Изъ рѣшенія сихъ шести случаевъ слѣдуетъ, что какой бы членъ, въ силу вопроса, въ правилѣ сложныхъ процентовъ, неопредѣлялся, мы, всегда должны, предварительно, изъ буквъ составить формулу (1) сложныхъ процентовъ; потомъ, поизложенному въ § 166 I, II, III, IV и V, вывести искомый членъ, и наконецъ общей результатъ его приложить къ самому вопросу. Правило это для того устанавливается, чтобъ незаучивать всѣ шесть формулъ, достаточно же знать изъ нихъ *первую*, какъ основную.

2. Послѣднія двѣ формулы IV и V, не посредственно вычисляются чрезъ логариѳмы, а первые четыре, чрезъ ло-

гариөмы же, — для сокращенія выкладокъ, когда они прилагаются къ частнымъ вопросамъ. Вотъ примѣры.

I. Приложеніе формулы (1)

$$x = (1,0p)^x . A.$$

Вочто обратятся 12000 *р., отдавая ихъ на* 6 *лѣтъ, по* 5 *процентовъ со* $\frac{0}{0}$ *въ годъ?*

Здѣсь данны: $A = 12000$, $p = 5$, $n = 6$, $B = x$; слѣд. вопросъ рѣшается непосредственно формолою (1), и имянно

$$x = \left(\frac{100+5}{100}\right)^6 . 1\,2000 = (1,05)^6 . 12000.$$

Если бы вычисленіе сего результата произвели по общимъ правиламъ возвышенія и умноженія, тогда бы оно слишкомъ было продолжительно, — слѣдствіемъ чего *утомленіе и ошибки*, между тѣмъ, приложивъ логариөмы, получимъ

$$l\,x = l.\,12000 + 6.\,l.\,1,0\,5$$

Вычисляю:

$$l.\,1,05 = 0,02119$$

$$6.\,l.\,1,05 = 0,12714$$

$$l.\,12000 = 4,07918$$

$$lx = 4,20632; \text{ слѣд.}$$

$$x = 16981 \text{ рубль.}$$

Малыя таблицы непозволяютъ большой точности. И такъ барышъ будетъ

$$16081 - 12000 = 4081 \text{ рубль.}$$

Замѣчаніе. Въ этомъ примѣрѣ, сумма накопленныхъ процентовъ съ капитала и съ его процентовъ доходитъ до 4081., между тѣмъ, если этотъ вопросъ вычислимъ по правилу простыхъ процентовъ ($\S$ 166, формула $x = \frac{k \cdot v \cdot p}{100}$), то найдемъ 3600 р.; слѣд. разность 481 р., выражаетъ ту сумму, которая на ростаетъ съ процентовъ.

Если время, на которое отдается капиталъ, будетъ состоять изъ нѣсколькихъ цѣлыхъ годовъ (или мѣсяцовъ), и еще части его, тогда рѣшеніе становится нѣсколько сложнѣе. Пояснимъ это примѣромъ.

Требуется знать величину капитала 5628 р., *чрезъ* 9 *мѣсяцовъ и* 15 *дней, по* $\frac{3}{4}$ *рубли или по* 0,75 р. *со* $\frac{0}{0}$ *въ мѣсяцъ?*

Данны: $A = 5628$, $p = 0{,}75$, $n = 9\frac{1}{2}$, $B = x$; слѣд.

$$x = \left(\frac{100 + 0{,}75}{100}\right)^{9\frac{1}{2}} \cdot 5628 = (1{,}0075)^{9\frac{1}{2}} \cdot 5628.$$

Посей формулѣ нельзя прямо опредѣлить x на $9\frac{1}{2}$ мѣсяцовъ, но во первыхъ должно его вычислить ровно на 9 м., а потомъ по формулѣ $u = \frac{k \cdot v \cdot p}{100}$, найдя, сколько на изысканный девяти—мѣсячный капиталъ, принѣмая его за первоначальный k, причтется процентовъ въ $\frac{1}{2}$ мѣсяца, оба вывода сложить. Такъ

$$x = (1{,}0075)^9 \cdot 5628$$

Вычисляю:

$$\begin{aligned} l.\ 1{,}0075 &= 0{,}00324 \\ 9 \cdot l.\ 1{,}0075 &= 0{,}02916 \\ l.\ 5628 &= 3{,}75931 \\ \hline l\ x &= 3{,}77951;\ \text{слѣд.} \\ x &= 6019\ \text{р.} \end{aligned}$$

Потомъ

$$u = \frac{6019 \times 0{,}75 \times \frac{1}{2}}{100} = 23 \text{ вѣрно до 1-цы.}$$

И такъ дѣйствительная сумма въ $9\frac{1}{2}$ мѣсяц., будетъ

$$x + u = 6019 + 23 = 6042 \text{ р.}$$

§ 174.

II. Приложеніе формулы (2)

$$x = \frac{B}{(1{,}0p)^n}.$$

Какую сумму надлежало бы отдать въ ростъ, чтобъ чрезъ 7 *лѣтъ получить* 30000 р., *считая по* 6 *процентовъ со* $\frac{0}{0}$ *въ годъ?*

Данны: $B = 30000$, $n = 7$, $p = 6$, $A = x$; слѣд.

$$(1{,}06)^7 . x = 30000; \text{ откуда}$$

$$x = \frac{30000}{(1{,}06)^7}.$$

Вычисляю:

$$1 . 30000 = 4{,} 47712 \quad 1 . 106 = 0{,}02531$$

$$7 . 1 . 1{,}06 = 0{,}17717$$

$$1\, x = 4{,}29995, \text{ слѣд.}$$

$$x = 19950 \text{ р.}$$

Отыскивая эту же величину, по правилу простаго учета (учетъ внутреній, формула $x = \frac{100.k}{100 + pv}$), нашли бы $x = 21126$ р. 76 к., что противъ 19950 р. больше на 1176 р. 83 k.; слѣд., *для уравненія*, должны увеличить процентъ со $\frac{0}{0}$, который опредѣляется по той же формулѣ.

Есть случаи, въ которыхъ вопросы разрѣшаются суммою сложныхъ учетовъ, идущею по уменьшающимся степенямъ, и имянно формулою

$$x = \frac{B}{1{,}0p} + \frac{B}{(1{,}0p)^2} + \frac{B}{(1{,}0p)^3} + \ldots + \frac{B}{(1{,}0p)^n}.$$

Въ такомъ разѣ должно вычислять каждый членъ особо, и потомъ, полученныя выводы сложить. Вотъ примѣръ.

Нѣкто, изъ именія, получая въ годъ доходу 500 р., *желаетъ заложить его Банку на* 4 *года. Спраш. какую сумму Банкъ долженъ выдать хозяину именія въ передъ,* (если онъ пожелаетъ за всѣ 4 года), *полагая учету по* 6 *процентовъ со* $\frac{0}{0}$?

По силѣ вопроса, Банкъ за первый годъ долженъ выдать только . . . . $\frac{500}{1{,}06}$

За *вторый* . . . . $\frac{500}{(1{,}06)^2}$

третій . . . . $\frac{500}{(1{,}06)^3}$

четвертый . . . . $\frac{500}{(1{,}06)^4}$

Слѣд., за всѣ 4 года, Банкъ въ передъ выдаетъ

$$x = \frac{500}{1{,}06} + \frac{500}{(1{,}06)^2} + \frac{500}{(1{,}06)^3} + \frac{500}{(1{,}00)^4}$$

Вычисливъ каждый членъ особо, и сложивъ выводы, найдемъ, что за 4 года должны дать впередъ 1733 р. 33 к., вѣрное до 1-го рубля.

Одинъ обязался дать другому 3000 р. *съ условіемъ, чтобъ* 1000 р. *возвратить послѣ перваго года, а* 2000 р. *послѣ двухъ лѣтъ. Спрашив. какъ великъ долженъ быть настоящій платежъ кредитора, съ учетомъ* 5 *процентовъ со* $\frac{0}{0}$ *на капиталъ и проценты?*

По вычисленіи перваго члена найдемъ 952 р. 39 к., а по вычисленіи втораго будетъ 1815 р. 20 к.; слѣд. кредиторъ долженъ дать 2767 р. 59 коп.

§ 175.

III. Приложеніе формулы . . . (3)

$$x = 100 \sqrt[n]{\frac{B}{A}} - 100.$$

Опредѣлить процентъ, который должно взымать со $\frac{0}{0}$ *въ годъ, чтобъ, отдаваемая въ ростъ сумма* 19950 р., *чрезъ* 7 *лѣтъ, обратилась въ* 30000 *р.?*

Данны $B = 30000$, $A = 19950$, $n = 7$, $p = x$, слѣд.

$$30000 = \left(\frac{100 + x}{100}\right)^7 . \, 19950, \text{ и}$$

$$x = 100 . \sqrt[7]{\frac{3000}{1900}} - 100.$$

Отсюда вопервыхъ должно вычислить величину $\sqrt[7]{\frac{3000}{1995}}$ послѣ чего x найти легко; а именно, вводя логариѳмы, будемъ имѣть

$$l.\sqrt[7]{\frac{3000}{1995}}=\frac{l.3000-l.1995}{7}$$

Вычисляю:

$$l.3000=3{,}47712$$
$$l.1995=3{,}29995$$
$$0{,}17717$$

$$l.\sqrt[7]{\frac{3000}{1995}}=\frac{0{,}17717}{7}=0{,}02531;\text{ слѣд.}$$

$$\sqrt[7]{\frac{3000}{1995}}=1{,}06;\text{ и такъ}$$

$$x=100\times1{,}06-100=6\text{ р.}$$

IV. Приложеніе формулы . . . (4)

$$x=100.\sqrt[n]{k}-100,$$

какъ частнаго случая формулы (3).

Если бы требовался опредѣлить процентъ со $\frac{0}{0}$ въ годъ, при которомъ извѣстный капиталъ, чрезъ 21 годъ, могъ *удесятерится,* тогда вычисленіе было бы слишкомъ просто. Ибо, вставивъ въ формулу данныя числа, получимъ

$$x=100\sqrt[21]{10}-100$$

Вычисляя, здѣсь членъ $\sqrt[21]{10}$, будемъ имѣть

$$l.\sqrt[21]{10}=\frac{l.10}{21}=\frac{1}{21}=0{,}0476180$$

слѣд.

$$\sqrt[21]{10}=1{,}115;\text{ и такъ}$$
$$x=100\times1{,}115-100=11{,}5$$

Значитъ, должно полагать $11\frac{1}{2}$ процентовъ со $\frac{0}{0}$ въ годъ, чтобъ удовлетворить вопросу, но этакой ростъ будетъ незаконный.

§ 176.

V. Приложеніе формулы (5)

$$x = \frac{l.B - l.A}{l(1,0p)}$$

Восколько лѣтъ капиталъ 12678 р. *возрастетъ до* 25043 р. 83 к., *считая ростъ по* 5 *со* $\frac{0}{0}$ *въ годъ.*

Данны: $B = 25043, 83$, $A = 12678$, $p = 5$, $n = x$, слѣд.

$$25043,83 = (1,05)^x . 12678$$

Откуда

$$x = \frac{l.5043,33 - l.12678}{l.1,05}$$

Вычисляю:

$$l.\ 25043,83 = 4,39870 \quad l.1,05 = 0,02119$$
$$l.\ 12678 = 4,10305$$
$$0,29565; \text{ и}$$

$$x = \frac{0,29565}{0,02119} = 13,48 \text{ почти} = 13\tfrac{1}{2} \text{ лѣтъ.}$$

VI. Приложаніи формулы (6)

$$x = \frac{lk}{l.1,0p},$$

какъ частнаго случая формулы (5)

Какой капиталъ, чрезъ 10 *лѣтъ даетъ сумму въ двое большую, полагая по* 5 *со* $\frac{0}{0}$ *въ годъ?*

Данны: $p = 5$, $n = 10$, $A = x$, $B = 2x$, и потому

$$2x = (1{,}05)^{10}.\ x;\ \text{откуда}$$

$$2 = (1{,}05)^{10}$$

Повидимому капиталъ, состоящій изъ 2 руб. долженъ удовлетворить вопросу, но вычисливъ вторую часть $(1{,}05)$,^{10} найдемъ 1,32; и такъ $2 = 1{,}32$, что *нелѣпо;* а потому и заключаемъ, что принастоящемъ взыманіи процентовъ $\left(\text{по } 5 \text{ со } \frac{0}{0}\right)$, вопросъ невозможенъ, а должно изменить его на такой: *восколько лѣтъ извѣстный капиталъ удвоится, полагая ростъ, по 5 процентовъ со* $\frac{0}{0}$ *въ годъ?*

На основаніи чего составляемъ

$$2A = A.\ (1{,}05)^{x};\ \text{откуда}$$

$$x = \frac{1.2}{1.1{,}05},\ \text{и}$$

$$x = 14\tfrac{1}{6}\ \text{года.}$$

Или тотъ же вопросъ изменивъ на слѣдующій: *сколько процентовъ должно брать со* $\frac{0}{0}$ *въ годъ, чтобъ, отдаваемый въ ростъ, капиталъ, чрезъ* 10 *лѣтъ удвоился?* посмыслу вопроса составимъ.

$$2 = (1{,}0x)^{10};\ \text{и отсюда}$$

$$x = 7\ \text{р.}$$

Пояснимъ изъ этого рѣшенія причину примѣчанія къ § 171, по коему запрещается брать проценты выше 7 на $\frac{0}{0}$. Закономъ постановлено, чтобъ *удвоеніе* суммы, отдаваемой для приращенія, частнымъ лицемъ — въ частныя руки, — ни въ какомъ случаѣ немогло быть прежде 10 лѣтъ; а это можетъ быть только приодномъ условіи, и какъ показываетъ рѣшеніе, когда со $\frac{0}{0}$ будетъ взыматся 7 процентовъ. Преступающій этотъ законъ — *ростовщикъ*, и подлежитъ суду.

§ 177.

Для сравненія, любопытно знать процентъ со $\frac{0}{0}$ въ годъ, въ простомъ правилѣ процентовъ, при которомъ, отдаваемая сумма, чрезъ 10 лѣтъ, могла бы удвоится. Возмемъ для этого, формулу сего правила

$$x = \frac{k \cdot v \cdot p}{100},$$

гдѣ x выражаетъ тотъ процентъ, который получается изъ капитала k, отдаваемаго по p процентовъ со $\frac{0}{0}$ въ годъ, отъ настоящаго дня на v время, при условіи, чтобъ x, а слѣд. и p до истеченія срока не были взымаемы.

Посилѣ вопроса, x въ 10 лѣтъ долженъ сравнятся съ k; а потому здѣсь дается $x = k$ $v = 10$, что подставивъ въ формулу, получимъ

$$k = \frac{k \cdot 10 \cdot p}{100} = \frac{k}{10}\, p, \text{ т. е.}$$

$$k = \frac{k}{10} \cdot p, \text{ откуда}$$

$$p = k : \frac{k}{10} = 10.$$

И такъ ежегодно должно *считать* по 10 процентовъ со $\frac{0}{0}$, или все тоже $\frac{1}{10}$ частъ всего капитала; и *взымать* — только 7 процентовъ.

Но кредиторы, по большой части, поступаютъ иначе: они, при самой выдачѣ капитала, вычитаютъ 10 процентовъ со $\frac{0}{0}$, которыя опять отдаютъ другому, вычтя у сего также десятый процентъ и т. *д*; и въ такомъ порядкѣ раздаютъ до послѣдней копѣйки; слѣд. капиталъ ихъ даетъ сложные проценты, считаемые изъ капитала, и изъ его процентовъ, и тѣмъ обогащаютъ себя непозволительнымъ, ростомъ. Дабы, въ самой формулѣ, видѣть этотъ ростъ, то разрѣшимъ общій вопросъ. Если 100 — р, по истеченіи года, дастъ 100, то *одинъ* рубль дастъ $\frac{100}{100-p}$; а эта сумма, т. е. капиталъ, состоящій изъ одного рубля и его прецента, дастъ въ годъ, и по порядку во *вторый* величину $\left(\frac{100}{100-p}\right)^2$. Такимъ же образомъ $\frac{100}{100-p}$ въ концѣ третьяго года дойдетъ до $\left(\frac{100}{100-p}\right)^3$ и т. *д*.; вообще чрезъ n лѣтъ онъ будетъ $\left(\frac{100}{100-p}\right)^n$; слѣд. капиталъ, состоящій изъ A единицъ рублей, въ тѣ же n лѣтъ, возрастетъ до

$$\left(\frac{100}{100-p}\right)^n . A = B.$$

Если теперь положимъ, что $B = 2A$, $p = 10$, $n = x$, то получимъ

$$\left(\frac{100}{90}\right)^x . A = 2A, \text{ или}$$
$$\left(\frac{10}{9}\right)^x = 2.$$

Откуда найдемъ, что $x = 6\frac{7}{12}$ лѣтъ, т. е. капиталъ удвоится чрезъ 6 лѣтъ и 7 мѣсяцовъ. А подставивъ въ формулу вмѣсто 2, числа 3, 4..... 10..... отыщемъ, что утроится чрезъ $10\frac{1}{2}$ лѣтъ, учетверится чрезъ $13\frac{1}{8}$ лѣтъ,..... удесятерится чрезъ $21\frac{5}{6}$ годъ и т. д.

§ 178.

Разрѣшимъ еще нѣсколько, весьма любопытныхъ и вмѣстѣ замысловатыхъ, вопросовъ.

I. Въ одномъ округѣ считается 40000 жителей, и каждый годъ народонаселеніе увеличивается $\frac{1}{100}$ долею. Спрашивается сколько будетъ жителей чрезъ 25 лѣтъ?

Поелику на 100, каждый годъ прибавляется по 1-му человѣку; т. е. каждые 100 обращаются въ 101, то одинъ житель въ годъ даетъ $\frac{101}{100}$, а въ 25 лѣтъ $\left(\frac{101}{100}\right)^{25}$; слѣд. всѣ 40000 душъ дадутъ

$$x = \left(\frac{101}{100}\right)^{25} 40000$$

Откуда, употребивъ логариѳмы, найдемъ,

$$x = 51297 \text{ чел.}$$

2. Въ одномъ городѣ считалось 10000 чел., отъ которыхъ ежегодное приращеніе было постоянное, а по-

слѣ 15 лѣтъ нашлось 20000 душъ. Спрашивается какая часть отъ наличнаго числа раждалась?

Изобразивъ искомую часть людей чрезъ x, послѣ перваго года отъ всѣхъ будетъ $10000 + x$, а отъ одного $\frac{10000 + x}{10000}$. Послѣ втораго, народонаселеніе отъ всѣхъ выйдетъ $\frac{10000 + x}{10000} \cdot 10000 + x = \frac{(10000 + x)^2}{10000}$; послѣ третьяго года возвысится до $\frac{(10000 + x)^2}{10000} \cdot \frac{10000 + x}{10000} = \frac{(10000 + x)^3}{10000^2}$ и т. д. такъ что въ концѣ послѣдняго года народонаселеніе дойдетъ до

$$\frac{(10000 + x)^{15}}{10000^{14}} = 20000$$

Откуда, употребивъ логариѳмы, найдемъ $x = 472$ чел.; слѣдственно ежегодно раждалось $\frac{472}{10000} = \frac{59}{1250}$ или почти $\frac{1}{21}$ часть наличныхъ людей.

3. Въ первый годъ послѣ всемірнаго потопа, земля населена только 6 человѣками т. е. тремя Ноевыми сыновьями и ихъ женами, отъ коихъ чрезъ 200 лѣтъ насчиталось 1,000,000 человѣкъ. Спраш. какая часть отъ наличнаго числа людей ежегодно раждалось?

Изобразивъ искомую часть чрезъ x, послѣ перваго года (кромѣ Ноя) ихъ будетъ $6 + \frac{6}{x} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot 6$. Изъ чего видно, что отъ одного человѣка, въ концѣ перваго года народонаселеніе есть $1 + \frac{1}{x}$. Послѣ чего нетрудно вывести, по извѣстнымъ намъ уже правиламъ, что въ концѣ 200 года, отъ всѣхъ 6 человѣкъ, народонаселеніе возрастетъ до

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{200}.\ 6=1000000$$

Откуда, употребивъ логариѳмы, найдемъ что $1+\frac{1}{x}=1+\frac{61962}{1000000}$, слѣдст. $\frac{1}{x}=\frac{61962}{1000000}=$ почти $\frac{1}{16}$. И такъ родъ человѣческій ежегодно умножался $\frac{1}{16}$ частію наличнаго числа людей.

4. Изъ 100 ведерной бочки вина ежедневно выцѣживаютъ по одному ведру, и тотчасъ дополняютъ бочку вѣдромъ воды: опредѣлить a) чрезъ какое время въ бочкѣ останется 50 вѣдеръ вина; b) сколько въ 50-мъ вынутомъ вѣдрѣ, будетъ вина и c) сколько послѣ 50-го вынутаго вѣдра, въ бочкѣ останется цѣльнаго вина?

a и b) Первыя двѣ части вопроса рѣшаются за однимъ разомъ. Изобразивъ искомое число выцѣженныхъ вѣдеръ чрезъ x, а количество вина въ 50-мъ вынутомъ вѣдрѣ чрезъ y, разсуждаю такъ: поелику послѣ *перваго* раза останется въ 100 ведерной бочкѣ цѣльнаго вина $100-1=99$, а въ одномъ вѣдрѣ его будетъ въ 100 разъ меньше 99 или $\frac{99}{100}$; и поелику это количество $\frac{99}{100}$ выражаетъ и *мѣру* вина, во *второмъ* вынутомъ ведрѣ, то въ бочкѣ, послѣ втораго раза, его останется

$$99-\frac{99}{100}=\frac{100.99-99}{100}=\frac{(100-1).99}{100}=\frac{99^2}{100}=\frac{1}{100}.\ 99^2.$$

Далѣе, въ *третьемъ* взятомъ вѣдрѣ будетъ вина

$$\frac{1}{100}.99^2.\frac{1}{100}=\frac{99^2}{100^2};$$

слѣд. въ бочкѣ, послѣ *третьяго* раза, его останется только

$$\frac{99^2}{100} - \frac{99^2}{100^2} = \frac{(100-1).99^2}{100^2} = \frac{99^3}{100^2};$$

и т. д.

такъ что послѣ взятія x разъ по вѣдру, въ бочкѣ будетъ вина

$$\left(\frac{99}{100}\right)^{x-1}. \; 99 = 50 \text{ или}$$

$$\frac{99^x}{100^{x-1}} = 50 \, \ldots\ldots \, (a)$$

А въ 50-мъ вынутомъ ведрѣ, его будетъ

$$\left(\frac{99}{100}\right)^{50-1} = y \, \ldots\ldots\ldots \, (b)$$

Вычисленіе уравненія (a). Употребивъ логариѳмы, будемъ имѣть

$$l. \frac{99^x}{100^{x-1}} = l. \; 50 \text{ и}$$

$$x \, . \, l. \, 99 - (x-1) \, . \, l. \, 100 = l. \; 50.$$

Откуда по § 158, найдется

$$x = \frac{2 - l.50}{2 - l.99}.$$

Вычисляя, находимъ

$$x = \frac{2 - 1{,}6988700}{2 - 9956325} = \frac{0{,}3010300}{0{,}0043675} = \text{почти } 69$$

И такъ изъ 100 ведерной бочки должно 69 разъ вынуть по ведру, дополняя тѣмъ же количествомъ воды, чтобъ цѣльнаго вина въ ней оставалось 50 ведеръ.

Вычисленія уравненія. (Ђ). Чтобъ уравненіе (Ђ) здѣлать удобнымъ къ выкладкѣ, умножаю обѣ части его на 10, чрезъ что имѣю

$$\left(\frac{99}{100}\right)^{49} . \ 10 = 10 \,.\, y$$

Откуда, употребивъ логариѳмы, найдется, что $10y = 6{,}1093 =$ почти 6,11, и $y = 0{,}611$ вѣдра. Слѣд., въ 50-мъ вынутомъ вѣдрѣ цѣльнаго, вина будетъ . . . . $\frac{611}{1000}$ вѣдра, или 6,11 кварты.

Если бы требовалось опредѣлить, въ какомъ по порядку вынутомъ вѣдрѣ будетъ чистаго вина, количествомъ 0,611 вѣдра, тогда должны были бы въ уравненіи (Ђ), показателя 50 - 1 измѣнить на $y - 1$, а на мѣсто y подставить 0,611, и чрезъ то имѣли бы

$$\left(\frac{99}{100}\right)^{y-1} = 0{,}611.$$

c). Для рѣшенія *третьей* части вопроса, можно поступить двоякимъ образомъ: или вычисленное, по уравненію (Ђ), количество 0,611 увеличить въ 99 разъ: $0{,}611 \times 99 = 60{,}489 =$ почти $60\frac{1}{2}$ вѣдеръ. Или, въ уравненіи (a), измѣнивъ x на 50, а 50 на x, выведемъ

$$\frac{99^{50}}{100^{49}} = x.$$

Откуда, употребивъ логариѳмы, также найдемъ, что $x = 60{,}482 =$ почти $60\frac{1}{2}$ вѣдеръ. И такъ въ бочкѣ, послѣ 50-го вынутія, останется водки $60\frac{1}{2}$ вѣдеръ, а воды будетъ $39\frac{1}{2}$ вѣдеръ.