

Примѣръ. Дано уравненіе второго порядка

$$y_2^2 - 2 \frac{y_1 y_2}{x} + 1 = 0,$$

которое мы уже разсматривали въ предыдущемъ номерѣ. Уравненіе (15) сведется теперь на

$$- \frac{2y_2 - 2 \frac{y_1}{x}}{2 \frac{y_2}{x}} = 0$$

и будетъ имѣть мѣсто, когда

$$y_2 = \frac{y_1}{x}$$

и когда

$$y_2 = \infty.$$

Последнее выраженіе оставляемъ въ сторонѣ, какъ неудовлетворяющее данному уравненію, а первое подставляемъ въ это уравненіе, послѣ чего находимъ

$$- \frac{y_1^2}{x^2} + 1 = 0,$$

т. е.

$$y_1^2 = x^2, \text{ или } y_1 = \pm x,$$

результатъ, который и представляетъ первое особенное рѣшеніе даннаго уравненія.

Критеріумы, служащіе для отличія особенныхъ рѣшеній отъ частныхъ интеграловъ.

136. Такъ-какъ особенныя рѣшенія дифференціальныхъ уравненій по вышнему своему виду совершенно сходны съ частными интегралами, отъ которыхъ отличаются только способомъ своего

полученія изъ общихъ первыхъ интеграловъ, то въ тѣхъ случаяхъ, когда общій первый интегралъ уравненія неизвѣстенъ, рѣшеніе вопроса о томъ—будетъ ли дѣйствительно рѣшеніе дифференціального уравненія, найденное приѣмомъ, изложеннымъ въ послѣднемъ номерѣ, особеннымъ его рѣшеніемъ или же первымъ частнымъ интеграломъ, представляется далеко не легкимъ. Между тѣмъ оставить этотъ вопросъ безъ отвѣта весьма не желательно, такъ-какъ нѣтъ сомнѣнія, что приѣмы, нами указанныя, часто приводятъ къ рѣшеніямъ, которыя только частные интегралы даннаго дифференціального уравненія. Какъ бы то ни было, однако Лагранжъ и Лапласъ оставили этотъ пунктъ теоріи особенныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій безъ разъясненія. Коши первый остановился на немъ и далъ три теоремы, позволяющія рѣшать въ каждомъ частномъ случаѣ—представляетъ ли найденное рѣшеніе дифференціального уравненія перваго порядка, не содержащее произвольнаго количества, особенное рѣшеніе или частный интегралъ этого уравненія. Правда, въ послѣдствіи времени англійскій ученый Буль высказался было противъ необходимости и даже вѣрности критеріумовъ Коши; но затѣмъ онъ самъ отказался отъ такого мнѣнія и призналъ даже, что ближайшимъ шагомъ къ пополненію теоріи особенныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій должно быть установленіе и для уравненій порядковъ выше перваго критеріумовъ, соответствующихъ тѣмъ, которые установлены Коши для уравненій 1-го порядка. Мы постараемся показать, впрочемъ, что теоремы Коши легко могутъ быть обобщены.

137. Начнемъ съ доказательства слѣдующаго предложенія:

Предложеніе I. *Отношеніе*

$Y_{n-1} = \varphi(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}),$
удовлетворяющее дифференціальному уравненію n -аго порядка

$$dy_{n-1} = F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) dx, \quad (1)$$

будетъ или частнымъ интеграломъ, или особеннымъ рѣшеніемъ этого уравненія смотря по тому, будетъ ли отношеніе $z=0$ частнымъ интеграломъ или особеннымъ рѣшеніемъ уравненія

$$F(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}, \Phi + z) - F(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}, \Phi) = 0. \quad (2)$$

Пусть общій первый интегралъ уравненія (1) представленъ формулою

$$\Phi(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}, c) = 0 \quad (3)$$

и пусть, рѣшивъ ее относительно y_{n-1} , мы нашли

$$y_{n-1} = \Phi(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}) + z, \quad (4)$$

что съ допущеніемъ $z=0$ мы получаемъ отношеніе

$$y_{n-1} = \Phi(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}), \quad (5)$$

представляющее первое рѣшеніе уравненія (1).

Всяка въ уравненіе (1) значеніе y_{n-1} изъ формулы (4), получимъ:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{dz}{dx} = F(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}, \Phi + z),$$

подставивъ въ то-же уравненіе значеніе y_{n-1} изъ формулы (5), также ему удовлетворяющее по положенію, найдемъ:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = F(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}, \Phi).$$

Вычтя послѣднія формулы одну изъ другой, непосредственно получимъ уравненіе (2), которое, слѣдовательно, существуетъ съ даннымъ. Ясно также, что уравненіе $z=0$ пред-

ставляетъ рѣшеніе уравненія (2); по допущенію $z=0$ сводитъ первый интеграль (4) на уравненіе (5), а потому какъ отношеніе $z=0$, такъ и отношеніе (5) получаются однимъ и тѣмъ же путемъ: или замѣною произвольнаго постояннаго формулы (3) функциональнымъ количествомъ, или сообщеніемъ этому постоянному частнаго численнаго значенія. Слѣдовательно, отношеніе (5) будетъ особеннымъ рѣшеніемъ уравненія (1), когда отношеніе $z=0$ особенное рѣшеніе уравненія (2) и, напротивъ, отношеніе (5) представляетъ частный интеграль уравненія (1), когда отношеніе $z=0$ есть частный интеграль уравненія (2). Предположеніе и оправдано.

Такъ-какъ, конечно, совершенно безразлично какою буквою ни обозначать ту неизвѣстную функцію, обладающую свойствомъ удовлетворять уравненію (2), которую мы обозначали черезъ z , то доказанную теорему можно еще высказать въ такой формѣ:

Для опредѣленія какого рода рѣшеніе, особенное или частное, представляетъ отношеніе

$$y_{n-1} = \Phi(x, y, y_1, \dots y_{n-2}),$$

удовлетворяющее дифференціальному уравненію

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = F(x, y, y_1, \dots y_{n-1}),$$

нужно только рѣшить будетъ ли отношеніе $y_{n-1}=0$ особеннымъ рѣшеніемъ или частнымъ интеграломъ уравненія

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = F[x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \Phi(x, y, \dots y_{n-2}) + y_{n-1}]$$

$$- F[x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \Phi(x, y, \dots y_{n-2})],$$

зависящаго отъ тѣхъ-же переменныхъ.

И такъ, вопросъ сводится всегда на разсмотрѣнiе рѣшенiй вида $y_{n-1} = 0$.

138. Теперь можемъ доказать еще слѣдующую теорему:

Предложенiе II. Если отношенiе $y_{n-1} = 0$ представляетъ особенное рѣшенiе уравненiя

$$dy_{n-1} - F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) dx = 0, \quad (1)$$

то, взявъ два безконечно-малыхъ количества α, β , изъ которыхъ первое выбрано такъ, чтобы функція $F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$ сохраняла одинъ и тотъ-же знакъ при измѣненiи y_{n-1} внутри предѣловъ $y_{n-1} = \alpha, y_{n-1} = \beta$, получимъ, что интегралъ

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) dy_{n-1}$$

будетъ самъ величиною неизмѣримо-малою.

Предположивъ, что первый интеграль даннаго уравненiя (1) представленъ въ формѣ

$$\Phi(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) = c, \quad (2)$$

продифференцируемъ это отношенiе сполна относительно x ; получимъ:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} y_2 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{n-2}} y_{n-1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{n-1}} \frac{dy_{n-1}}{dx} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y_1 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{n-2}} y_{n-1}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y_{n-1}}},$$

или, положивъ для краткости

$$-\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} y_1 + \dots + \frac{\partial\Phi}{\partial y_{n-1}} y_{n-1}\right] = \Psi(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}), \quad (3)$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = \frac{\Psi(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})}{\frac{\partial\Phi}{\partial y_{n-1}}}. \quad (4)$$

Съ другой стороны, изъ уравненія (1) непосредственно находимъ:

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}). \quad (5)$$

Такъ-какъ, правая часть формулы (4) на содержитъ уже произвольнаго постояннаго, то выраженія, доставляемыя для $\frac{dy_{n-1}}{dx}$ формулами (4) и (5), должны быть тождественны между собою. Въ слѣдствіе этого будемъ имѣть вообще

$$F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) = \frac{\Psi(x, y, y_1, y_{n-1})}{\frac{\partial\Phi}{\partial y_{n-1}}},$$

или

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_{n-1}} = \frac{\Psi(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})}{F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})}.$$

Интегрированіе относительно y_{n-1} между предѣлами α, β составляетъ теперь:

$$\begin{aligned} & \Phi(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}, \beta) - \Phi(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}, \alpha) \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \Psi(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})}. \end{aligned}$$

Но $F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$ функція не мѣняющаяся, по положенію, знака при измѣненіи y_{n-1} отъ α до β , а потому, въ силу извѣстной теоремы интегральнаго исчисленія, будетъ:

$$\Phi(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}, \beta) - \Phi(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}, \alpha) = \Psi(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}, \alpha + \vartheta(\beta - \alpha)) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})};$$

слѣдовательно найдемъ, что вообще

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})} \\ &= \frac{\Phi(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}, \beta) - \Phi(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}, \alpha)}{\Psi(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}, \alpha + \vartheta(\beta - \alpha))}. \quad (6) \end{aligned}$$

Разсматривая правую часть этой формулы, видимъ, что, по мѣрѣ того какъ α и β стремятся къ нулю, числитель ея такъ-же стремится къ нулю. Что касается до знаменателя, то онъ въ предѣлѣ обращается въ

$$\Psi(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}, 0).$$

Но коль-скоро отношеніе $y_{n-1} = 0$ представляетъ особенное рѣшеніе уравненія (1), это отношеніе должно получаться замѣною въ формулѣ (2) произвольнаго постояннаго с опредѣленною функціею x , почему, въ этомъ случаѣ, и производная отъ Φ , взятая относительно x и всего, что съ нимъ измѣняется, такъ-же должна представлять опредѣленную функцію x . Эта производная, въ силу формулы (3), есть не что иное, какъ $\Psi(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}, y_{n-1})$, а потому это послѣднее выраженіе, въ случаѣ допущенія $y_{n-1} = 0$, должно обращаться въ опре-

дѣленную, конечную функцію x . Слѣдовательно знаменатель правой части формулы (6) имѣетъ предѣломъ конечную величину, а потому вся правая часть съ убываніемъ α, β неопредѣленно убываетъ и стремится къ нулю. Значитъ, коль-с скоро $y_{n-1} = 0$ представляетъ особенное рѣшеніе даннаго дифференціального уравненія, интеграль

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})},$$

при безконечно-малыхъ α, β , самъ, дѣйствительно, представляетъ неизмѣримо-малое количество.

Предложеніе оправдано.

439. Непосредственнымъ дополненіемъ только что доказанной теоремы служить предложеніе ему обратное, которое можно высказать въ слѣдующей формѣ.

Предложеніе III. Если при неизмѣримо-малыхъ предѣлахъ $y_{n-1} = \alpha, y_{n-1} = \beta$, внутри которыхъ функція $F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$ не мѣняетъ знака, интегралъ

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})}$$

представляетъ неизмѣримо-малую величину и если, въ то же время, отношеніе $y_{n-1} = 0$ удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$dy_{n-1} - F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) dx = 0, \quad (1)$$

то отношеніе $y_{n-1} = 0$ непремѣнно представляетъ частный интегралъ, а особенное рѣшеніе этого уравненія

Въ самомъ дѣлѣ, допущеніе, что интеграль $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})}$ представляет неизмѣримо-малую величину, влечетъ за собою допущеніе, что интеграль

$$\int_{\alpha}^{y_{n-1}} \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})}$$

представляет такую функцію, которая стремится къ нулю вмѣстѣ съ y_{n-1} , независимо отъ значенія x и прочихъ количествъ, въ нее входящихъ.

Допустимъ, что вообще

$$\int_0^{y_{n-1}} \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})} = \psi(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) \quad (2)$$

и сверхъ того предположимъ, что первый интеграль уравненія (1) приведенъ къ формѣ

$$y_{n-1} = \vartheta(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}, c); \quad (3)$$

въ такомъ случаѣ будетъ тождественно

$$\frac{d\vartheta(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}, c)}{dx} = F(x, y, y_1, \dots, y_{n-2}, \vartheta).$$

Съ другой стороны, продифференцировавъ формулу (2) относительно одного y_{n-1} , получимъ:

$$D_{y_{n-1}} \psi(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) = \frac{1}{F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})}$$

и это — каковы бы ни были значения x и количествъ $y, y_1, \dots y_{n-2}$, отъ него зависящихъ; поэтому, если означить черезъ $\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}$ такую бы то ни было систему значенийъ этихъ количествъ, можно будетъ написать

$$D_{y_{n-1}} \psi (\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, y_{n-1}) = \frac{1}{F(\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, y_{n-1})},$$

или же, въ силу (3),

$$D_{\vartheta} \psi (\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, \vartheta). d\vartheta = \frac{d\vartheta}{F(\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, \vartheta)}.$$

Но $d\vartheta = F(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \vartheta) dx$, а потому

$$D_{\vartheta} \psi (\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, \vartheta) d\vartheta = \frac{F(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \vartheta)}{F(\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, \vartheta)} dx. (4)$$

Измѣнивъ теперь x въ $x+h$ и означая черезъ $\Delta y, \Delta y_1, \dots \Delta \vartheta$ соотвѣствующія измѣненія количествъ $y, y_1, \dots \vartheta$, получимъ:

$$\begin{aligned} & D_{\vartheta} \psi (\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, \vartheta + \Delta \vartheta). d\vartheta \\ &= \frac{F(x+h, y+\Delta y, \dots y+\Delta y_{n-2}, \vartheta+\Delta \vartheta)}{F(\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, \vartheta+\Delta \vartheta)} dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Вытя формулу (4) изъ (5), получимъ:

$$\begin{aligned} & [D_{\vartheta} \psi (\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, \vartheta + \Delta \vartheta) - D_{\vartheta} \psi (\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, \vartheta)] d\vartheta \\ &= h. \frac{d}{dx} \left\{ \frac{F(x, y, y_1, \dots \vartheta)}{F(\xi, \eta, \eta_1, \dots \vartheta)} \right\} dx. \\ & \qquad \qquad \qquad x = x + \theta h \end{aligned}$$

Обѣ части этой формулы представляютъ однако точные дифференціалы, а потому интегрированіе дастъ:

$$\psi (\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}, \vartheta + \Delta \vartheta) - \psi (\xi, \eta, \eta_1, \eta_{n-2}, \vartheta)$$

$$= h \frac{F(x, y, \dots \vartheta)}{F(\xi, \eta, \dots \vartheta)} + \text{произвольная функция количеств } \xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}.$$

Равенство, нами полученное, должно однако существовать каковы бы ни были значения $\xi, \eta, \eta_1, \dots \eta_{n-2}$, а потому можно положить их соответственно равными $x, y, y_1, \dots y_{n-2}$, такъ что будетъ:

$$\psi(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \vartheta + \Delta\vartheta) - \psi(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, \vartheta) = h + \text{произвольная функция.} \quad (6)$$

Получивъ это послѣднее равенство, легко уже доказать, что отношеніе $y_{n-1} = 0$ должно представлять особенное рѣшеніе, а не частный интегралъ уравненія (1). Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ противное, именно, что $y_{n-1} = \vartheta$ обращается въ нуль, когда произвольному постоянному c въ формулѣ (3) приписываемъ нѣкоторое опредѣленное численное значеніе, получили бы, что независимо отъ значеній $x, y, y_1, \dots y_{n-2}$ выраженіе $\vartheta(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, c)$ равно было бы нулю и равенство (5) перешло бы въ слѣдующее:

$$\psi(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, 0) - \psi(x, y, y_1, \dots y_{n-2}, 0) = h + \text{произвольная функция,}$$

которое однако нелѣпо, такъ-какъ въ немъ вторая часть произвольная величина, а первая часть равна нулю, если только $\psi(x, y, y_1, \dots y_{n-1})$ представляетъ опредѣленную функцію переменныхъ, какъ это непремѣнно и должно быть, когда

$$\int_0^\beta \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, \dots y_{n-1})}$$

величина неизмѣримо-малая. Послѣднее равенство возможно поэтому только при допущеніи, что ψ , т. е.

$$\int_0^{y_{n-1}} \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, \dots y_{n-1})}$$

величина неопредѣленная или безконечная.

Слѣдовательно условіе

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^{\beta} \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, \dots y_{n-1})} = 0$$

устраняетъ возможность того, чтобы отношеніе $y_{n-1}=0$, удовлетворяя уравненію (1), представляло его частный интегралъ. Предложеніе наше такимъ образомъ и представляется доказаннымъ.

140. Чтобы показать какимъ образомъ слѣдуетъ пользоваться доказанными предложеніями въ каждомъ частномъ случаѣ, приведемъ нѣсколько примѣровъ.

1) Пусть дано дифференціальное уравненіе перваго порядка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cdot \log y}{x},$$

удовлетворяющее отношеніемъ $y=0$.

Въ виду предыдущихъ предложеній намъ нужно въ интегралѣ

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy_{n-1}}{F(x, y, \dots y_{n-1})}$$

положить $n=1$, $F(x, y, \dots) = \frac{y \cdot \log y}{x}$, отъ чего онъ обратится въ

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x dy}{y \log y},$$

и затѣмъ разсмотримъ — будетъ ли этотъ послѣдній интеграль величиною безконечно-малою, когда α, β безконечно-малы.

Мы имѣемъ

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x dy}{y \cdot \log y} = x \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{y \cdot \log y} = x \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d \log y}{\log y};$$

$$\int \frac{d \log y}{\log y} = \log (\log y),$$

и потому

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x dy}{y \log y} = x \{ \log (\log \beta) - \log (\log \alpha) \},$$

или

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x dy}{y \log y} = x \log \left(\frac{\log \beta}{\log \alpha} \right),$$

такъ что, перейдя къ предѣлу, найдемъ:

$$\lim \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x dy}{y \cdot \log y} = x \cdot \log \left(\frac{\infty}{\infty} \right),$$

т. е. что предѣлъ нашего интеграла величина неопредѣленная.

Значитъ, $y = 0$ есть частный интеграль данного уравненія.

2) Возьмемъ еще уравненіе втораго порядка

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 \frac{dy}{dx}, \quad (a)$$

которое удовлетворяется отношеніемъ

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad (b)$$

требуется рѣшить, представляет ли это послѣднее первое особенное рѣшеніе или первый частный интеграль.

Полагая

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = y_2,$$

уравненіе (a) и отношеніе (b) представляемъ въ формѣ

$$y_2 = \alpha^2 y_1, \quad y_1 = 0.$$

Согласно выведеннымъ нами критеріямъ намъ нужно изслѣдовать значеніе интеграла

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy_1}{\alpha y_1^2}$$

при α и β безконечно-малыхъ.

Мы имѣемъ

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy_1}{\alpha y_1^2} = \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right\} = \frac{1}{\alpha} \left\{ \infty - \infty \right\}.$$

Интеграль нашъ, слѣдовательно, неопредѣленная величина, а потому $y_1 = 0$, т. е. $\frac{dy_1}{dx} = 0$, не можетъ быть особеннымъ рѣшеніемъ даннаго дифференціального уравненія, а представляетъ одинъ изъ его первыхъ частныхъ интеграловъ.

3) Возьмемъ еще уравненіе

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 - \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} + 1 = 0,$$

удовлетворяющееся допущениемъ

$$\frac{dy}{dx} = x.$$

Требуется рѣшить, будетъ ли послѣднее отношеніе первымъ особеннымъ рѣшеніемъ, или первымъ частнымъ интеграломъ даннаго уравненія.

Рѣшивъ данное уравненіе относительно $\frac{d^2y}{dx^2}$ и полагая

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y_2, \quad \frac{dy}{dx} = y_1, \text{ получаемъ:}$$

$$y_2 = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - x^2}}{x}. \quad (a)$$

Преобразовывая это уравненіе согласно теоремѣ 1-й (нум. 137), получаемъ:

$$y_2 = \frac{y_1}{x} \pm \frac{\sqrt{2xy_1 + y_1^2}}{x}.$$

Остается рѣшить, будетъ ли уравненіе $y_1 = 0$ первымъ частнымъ интеграломъ или первымъ особеннымъ рѣшеніемъ послѣдняго уравненія. Для этого, согласно теоремѣ 2-й (нум. 138), составляемъ интегралъ

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x dy_1}{y_1 + \sqrt{2xy_1 + y_1^2}} = x \left[\log(x + y_1 + \sqrt{2xy_1 + y_1^2}) - \frac{x}{x + y_1 + \sqrt{2xy_1 + y_1^2}} \right]_{\alpha}^{\beta}.$$

Такъ-какъ интегралъ этотъ при безконечно-малыхъ α, β самъ безконечно-малая величина, то заключаемъ, что $y_1 = x$ есть первое особенное рѣшеніе даннаго уравненія (a).

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Геометрическія приложенія теоріи обыкновенных дифференціальных уравненій.

Общая замѣчанія.

141. Теорія дифференціальных уравненій находитъ обширныя приложенія въ области какъ геометріи, такъ и прикладныхъ математическихъ наукъ — механики, физики и астрономіи; можно даже сказать, что отъ успѣшнаго развитія этой теоріи зависитъ непосредственно будущность и этихъ наукъ. Не касаясь здѣсь приложеній теоріи дифференціальных уравненій къ рѣшенію задачъ прикладныхъ наукъ, мы остановимся на геометрическихъ вопросахъ, рѣшеніе которыхъ зависитъ отъ интеграціи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Не трудно уяснить себѣ а priori, какого именно рода геометрическія задачи естественно приводятъ къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій. Для этого достаточно припомнить, что, при обозначеніи чрезъ x, y прямоугольныхъ координатъ точки въ плоскости, дифференціальный коэффициентъ $\frac{dy}{dx}$ выражаетъ тангенсъ угла, составляемаго касательною плоской кривою съ осью абсциссъ, и что этотъ дифференціальный коэффициентъ

входить въ уравненія касательной и нормальной и въ выраженія длины касательной, нормальной, подкасательной и поднормальной, а также въ выраженіе дифференціала дуги плоской кривой. Въ виду этого каждое дифференціальное уравненіе перваго порядка представляетъ извѣстное отношеніе между опредѣленными геометрическими элементами плоскихъ кривыхъ и полный интеграль его долженъ, поѣтому, выражать тѣ кривыя, для которыхъ такое отношеніе имѣетъ мѣсто.

Выраженія радіуса кривизны, координатъ центра кривизны и уравненіе эволюты содержатъ въ себѣ не только $\frac{dy}{dx}$, но и $\frac{d^2y}{dx^2}$

а потому всякое данное отношеніе между этими элементами плоскихъ кривыхъ будетъ выражаться въ формѣ дифференціального уравненія втораго порядка, интеграль котораго будетъ опредѣлять всѣ плоскія кривыя, для которыхъ данное отношеніе имѣетъ мѣсто.

Замѣтивъ это, переходимъ уже къ рассмотрѣнію отдѣльныхъ задачъ.

Частныя задачи.

142. На первый разъ пусть *требуется опредѣлить тѣ плоскія кривыя, для которыхъ длина поднормальной остается равною определенной функціи абсциссы x .*

Такъ-какъ длина поднормальной выражается, какъ извѣстно, чрезъ $y \frac{dy}{dx}$, то условія задачи устанавливаютъ слѣдующее дифференціальное уравненіе перваго порядка:

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = f(x), \quad (1)$$

гдѣ $f(x)$ данная функція.

По умноженіи на dx уравненіе это перейдетъ въ

$$y \cdot dy = f(x) dx,$$

гдѣ переменныя уже раздѣлены. Интеграція дастъ теперь

$$\frac{y^2}{2} = \int f(x) dx + C,$$

откуда

$$y = \sqrt{2 \int f(x) dx + C'}. \quad (2)$$

Это и есть искомое уравненіе всѣхъ плоскихъ кривыхъ, длина поднормальной которыхъ равна $f(x)$.

Понятно, что для того, чтобы уравненіе это выражало систему кривыхъ опредѣленнаго вида, необходимо, чтобы $f(x)$ представляла совершенно опредѣленную функцію. Сдѣлаемъ поэтому нѣсколько частныхъ допущеній относительно $f(x)$.

1) Допустимъ сперва, что $f(x)$ сводится на постоянную величину A . Въ этомъ случаѣ уравненіе (2) обращается въ

$$y = \sqrt{2 \int A dx + C'},$$

откуда

$$y = \sqrt{2 A \cdot x + C'}$$

Это есть уравненіе семейства параболъ, у которыхъ ось совпадаетъ съ осью x -овъ, параметръ равенъ $2A$, а разстояніе вершины отъ начала координатъ измѣняется отъ одной кривой къ другой. Слѣдовательно можемъ сказать: кривыя, поднормальная которыхъ должна быть постоянно равна данной величинѣ A , представляютъ параболы, имющія параметръ равный $2A$ и оси которыхъ совпадаютъ съ осью x -овъ.

2) Допустимъ, далѣе, что $f(x) = x$. Уравненіе (2) приметь теперь видъ

$$y = \sqrt{2 \int x \cdot dx + C'}$$

и мы найдемъ изъ него

$$y = \sqrt{x^2 + C'}$$

или

$$y^2 - x^2 = C',$$

т. е.

$$(y+x)(y-x) = C'.$$

Этотъ результатъ выражаетъ двѣ системы параллельныхъ прямыхъ, въ которыхъ каждая прямая образуетъ равныя между собою, но произвольные отрезки на осяхъ x -овъ и y -овъ.

3) Положивъ $f(x) = \frac{1}{x}$, получимъ:

$$y = \sqrt{2 \log x + C'}$$

откуда

$$(3) \quad y^2 - 2 \log x = C'.$$

Это и есть уравненіе семейства кривыхъ, въ которыхъ длина поднормальной выражается чрезъ $\frac{1}{x}$.

143. Пусть теперь требуется опредѣлить кривыя, длина подкасательной которыхъ равнялась бы данной функции $f(x)$.

Такъ-какъ длина подкасательной выражается вообще чрезъ $y \frac{dx}{dy}$, то въ настоящемъ случаѣ условія задачи выразятся уравненіемъ

$$y \cdot \frac{dx}{dy} = f(x), \quad (1)$$

которое сводится на слѣдующее:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{f(x)}.$$

Принтегрировавъ его, находимъ:

$$\log y = \int \frac{dx}{f(x)} + C,$$

или

$$y = C \cdot e^{\int \frac{dx}{f(x)}} \quad (2)$$

Это и есть уравненіе семейства кривыхъ, отвѣчающихъ требованіямъ задачи.

Допустимъ, въ частности, $f(x) = A$, гдѣ A постоянное: въ такомъ случаѣ уравненіе (2) приметъ видъ

$$y = C \cdot e^{\frac{x}{A}} \quad (3)$$

Таково уравненіе семейства кривыхъ, длина подкасательной которыхъ сохраняетъ постоянное значеніе A .

Если сдѣлать $f(x) = x$, то уравненіе (2) обратится въ слѣдующее:

$$\log x \quad y = C \cdot e^{\log x},$$

или

$$y = C \cdot x,$$

откуда

$$\left\{ 0 + \frac{xy}{(x)^2} \right\} + \frac{y}{x} = C.$$

Это уравнение выражает систему прямых, проходящих через начало координат, но составляющих различные углы с осью x -овъ.

144. Пусть требуется определить семейство кривыхъ, радиусъ кривизны которыхъ равнялся бы данной функции $f(x)$.

Условія задачи доставляютъ дифференціальное уравнение второго порядка

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \mp \frac{1}{f(x)}, \quad (1)$$

на интеграцію котораго и сводится все дѣло.

Если уравнение (1) помножить на dx , то первая часть его сдѣлается точнымъ дифференціаломъ выраженія

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}},$$

а потому интеграція дастъ

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}} = \mp \int \frac{dx}{f(x)} + C,$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mp \int \frac{dx}{f(x)} + C}{\sqrt{1 + \left\{ \mp \int \frac{dx}{f(x)} + C \right\}^2}}$$

и слѣдовательно

$$y = \int \frac{\left[\mp \int \frac{dx}{f(x)} + C \right] dx}{\sqrt{1 - \left(\mp \int \frac{dx}{f(x)} + C \right)^2}} + C_1. \quad (2)$$

Это и есть общее уравненіе семейства кривыхъ, отвѣчающихъ условіямъ задачи.

Допустимъ, въ частности, $f(x) = A$, т. е. постоянному количеству. Въ этомъ случаѣ уравненіе (2) принимаетъ видъ

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{\left[\mp \frac{1}{A} x + C \right] dx}{\sqrt{1 - \left[\mp \frac{x}{A} + C \right]^2}} + C_1, \\ &= \int \frac{[x + AC] dx}{\sqrt{A^2 - (x + AC)^2}} + C_1, \\ &= -\sqrt{A^2 - (x + AC)^2} + C_1, \end{aligned}$$

такъ-что окончательно получимъ:

$$(y - C_1)^2 + (x + AC)^2 = A^2.$$

Этотъ результатъ показываетъ, что условіямъ задачи отвѣчаютъ всѣ круги, описанные радіусомъ равнымъ A , каково бы ни было положеніе центра.

145. Найти кривыя, радіус кривизны которых равенся бы длине нормальной.

Такъ-какъ радіусъ кривизны и длина нормальной опредѣляются, какъ извѣстно, формулами

$$\rho = \mp \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad N = \pm y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

то, предполагая, что направленія обѣихъ линій этихъ должны совпадать, изъ условій задачи получимъ уравненіе

$$-\frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad (1)$$

приводящееся къ виду

$$y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0, \quad (2)$$

которое нужно проинтегрировать.

Первая часть этого уравненія отъ умноженія на dx дѣлается точнымъ дифференціаломъ выраженія $y \frac{dy}{dx} + x$, а потому, проинтегрировавъ, получаемъ:

$$y \frac{dy}{dx} + x = C.$$

Вторичная интеграція доставляетъ, далѣе,

$$y^2 + x^2 = 2Cx + C'. \quad (3)$$

Это уравненіе круга, центръ котораго на оси x -овъ; слѣдовательно всѣ окружности, описанныя произвольными радіусами изъ какихъ бы то ни было точекъ оси x -овъ, отвѣчаютъ условіямъ задачи.

Если-бы мы допустили, что направленія радіуса кривизны и нормальной должны быть противоположны, то уравненіе (1) измѣнилось бы въ слѣдующее:

$$\frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Положивъ въ немъ $\frac{dy}{dx} = p$, мы нашли бы

$$py \frac{dp}{dy} - p^2 - 1 = 0,$$

откуда

$$\frac{p \cdot dp}{p^2 + 1} = \frac{dy}{y}$$

и слѣдовательно

$$y = C \sqrt{1 + p^2}.$$

Послѣ этого, замѣнивъ p его выраженіемъ $\frac{dy}{dx}$, получили бы

$$dx = \frac{C dy}{\sqrt{y^2 - C^2}},$$

откуда, проинтегрировавъ еще разъ, нашли бы

$$x = C' + C \log [y + \sqrt{y^2 - C^2}], \quad (4)$$

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x-b}{a}} + e^{-\frac{x-b}{a}} \right). \quad (5)$$

Это уравнение, въ которомъ a и b произвольныя постоянныя, опредѣляетъ семейство *цѣпныхъ* линій.

Геометрическое значеніе особенныхъ рѣшеній.

146. Во многихъ изъ геометрическихъ задачъ, въ которыхъ самыя условія задачи формулируются дифференціальнымъ уравненіемъ, главную роль въ рѣшеніи, какъ это замѣтилъ вообще еще Лагранжъ, играетъ не полный интегралъ дифференціального уравненія, а его особенное рѣшеніе. Въ виду этого необходимо указать, вообще, на самое геометрическое значеніе особенныхъ рѣшеній.

Пусть

$$y = F(x, c) \quad (1)$$

представляетъ полный интегралъ дифференціального уравненія перваго порядка. Онъ опредѣляетъ семейство кривыхъ, изъ которыхъ каждая отвѣчаетъ опредѣленному значенію произвольнаго постояннаго c . Въ то-же время кривая, *обертывающая* всѣ кривыя даннаго семейства, должна имѣть общую точку съ каждою изъ этихъ линій, а потому у нея будутъ тѣ-же координаты x, y и то-же уравненіе между этими координатами, но съ тою только разницею, что параметръ c въ уравненіи (1) будетъ переменною величиною до тѣхъ поръ пока оно будетъ принадлежать кривой, обертывающей всѣ прочія. Кромѣ того нужно будетъ, чтобы положеніе касательной было одно и то-же какъ въ кривой, гдѣ c постоянное количество, такъ и въ той, гдѣ оно переменное количество. Извѣстно, однако, что положеніе касательной опредѣляется значеніемъ производной ординаты, по-

лучаемымъ чрезъ дифференцированіе уравненія кривой, а потому въ настоящемъ случаѣ нужно, чтобы выраженіе $\frac{dy}{dx}$, выводимое изъ уравненія (1) трактуя въ немъ с переменнымъ, не отличалось отъ выраженія $\frac{dy}{dx}$, получаемого изъ уравненія (1) рассматривая с постояннымъ. Последнее требованіе приводитъ (какъ мы уже видѣли въ предыдущей главѣ) къ условію $\frac{dy}{dc} = 0$, при существованіи котораго уравненіе (1) обращается въ особенное рѣшеніе дифференціальнаго уравненія, если только изъ уравненія $\frac{dy}{dc} = 0$ с выражается функціею x . Слѣдовательно особенное рѣшеніе дифференціальнаго уравненія перваго порядка всегда выражаетъ обертку семейства кривыхъ, опредѣляемыхъ полнымъ интеграломъ.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда условное уравненіе $\frac{dy}{dc} = 0$ доставляетъ для c постоянное значеніе и поэтому дифференціальное уравненіе не имѣетъ особеннаго рѣшенія, кривая, обертывающая всѣ прочія, оказывается сама принадлежащею къ семейству линей, опредѣляемыхъ полнымъ интеграломъ.

147. Разсмотримъ теперь нѣсколько частныхъ геометрическихъ задачъ, рѣшеніе которыхъ сводится на разысканіе особеннаго рѣшенія дифференціальнаго уравненія.

Пусть требуется опредѣлить кривую, въ которой перпендикуляры, проводимые изъ начала координатъ къ касательнымъ, имѣли бы одну постоянную длину A .

Условіе задачи выражается въ настоящемъ случаѣ уравненіемъ

$$y - x \frac{dy}{dx} = A \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad (1)$$

имѣющимъ форму уравненія Клеро. Разыскивая извѣстнымъ намъ приемомъ его полный интеграль, найдемъ:

$$y = Cx + A\sqrt{1 + C^2}, \quad (2)$$

уравненіе, которое вмѣсто кривой линіи, требуемой задачею, изображаетъ систему прямыхъ, кратчайшее разстояніе которыхъ отъ начала координатъ равно A .

Если теперь, продифференцировавъ уравненіе (2), найдемъ выраженіе $\frac{dy}{dc}$, приравняемъ это выраженіе нулю, изъ полученнаго уравненія опредѣлимъ C , какъ функцію x , и затѣмъ найденное такимъ образомъ значеніе C внесемъ въ полный интеграль (2), то въ результатѣ получится особенное рѣшеніе уравненія (1), именно:

$$x^2 + y^2 = A^2.$$

Это послѣднее уравненіе опредѣляетъ кругъ, описанный изъ начала координатъ радіусомъ равнымъ A . Кругъ этотъ, очевидно, представляетъ кривую, вполне отвѣчающую условіямъ задачи.

148. Пусть требуется опредѣлить кривыя, въ которыхъ длина нормальной выражалась бы данною функціею разстоянія ея основанія отъ начала координатъ.

Такъ-какъ длина нормальной выражается, вообще, чрезъ $y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, а разстояніе ея основанія отъ начала координатъ чрезъ $x + y\frac{dy}{dx}$, то задача сводится на опредѣленіе кривыхъ, для которыхъ удовлетворялось бы дифференціальное уравненіе вида

$$y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = f\left(x + y \frac{dy}{dx}\right), \quad (1)$$

гдѣ f та или другая данная функція.

Чтобы проинтегрировать это уравненіе, начнемъ съ того, что продифференцируемъ его: получимъ дифференціальное уравненіе втораго порядка

$$\left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} - f' \left(x + y \frac{dy}{dx} \right) \right) \times \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y \frac{d^2y}{dx^2} \right] = 0,$$

представляющееся слѣдствіемъ даннаго и разбивающееся на два слѣдующія:

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} - f' \left(x + y \frac{dy}{dx} \right) = 0, \quad (2)$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y \frac{d^2y}{dx^2} = 0. \quad (3)$$

Интеграція послѣдняго изъ этихъ уравненій, въ которомъ первая часть есть точный дифференціалъ выраженія $x + y \frac{dy}{dx}$, доставляетъ:

$$x + y \frac{dy}{dx} = a, \quad (4)$$

уравненіе, въ виду котораго уравненіе (1) переходитъ въ

$$y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = f(a). \quad (5)$$

Исключивъ $\frac{dy}{dx}$ между уравненіями (4) и (5), мы получимъ:

$$y^2 + (x - a)^2 = [f(a)]^2, \quad (6)$$

уравненіе, содержащее произвольное постоянное a и удовлетворяющее данному уравненію (1), а потому и представляющее полный интегралъ этого уравненія.

Уравненіе (6) опредѣляетъ систему окружностей, центры которыхъ находятся на оси x -овъ, а радіусы представляютъ данную функцію разстоянія центра отъ начала координатъ. Окружности эти, очевидно, удовлетворяютъ условіямъ задачи.

Мы до сихъ поръ не касались уравненія (2), которое также имѣетъ мѣсто совмѣстно съ даннымъ. Если обратиться къ

нему и между нимъ и даннымъ уравненіемъ исключить $\frac{dy}{dx}$, то въ результатѣ получится особенное рѣшеніе уравненія (1), выражающее обертку семейства окружностей, опредѣляемыхъ уравненіемъ (6). Эта обертка также будетъ отвѣчать требованіямъ задачи.

Особенное рѣшеніе, о которомъ идетъ рѣчь, въ настоящемъ случаѣ, когда полный интегралъ уравненія (1) уже найденъ, можно получить изъ этого послѣдняго.

Допустивъ, на примѣръ, что $f(a) = \sqrt{na}$ и продифференцировавъ уравненіе (6) относительно a , получимъ:

$$2(x - a) + n = 0,$$

и исключивъ a между этимъ уравненіемъ и уравненіемъ (6), которое теперь сводится на

$$y^2 + (x - a)^2 = na,$$

и придемъ къ особенному рѣшенію уравненія (1):

$$y^2 = nx + \frac{n^2}{4},$$

выражающему параболу. При иномъ допущеніи относительно формы функции $f(a)$ получили бы уравненіе другой кривой.

Здѣсь нельзя не обратить вниманія на то обстоятельство, что полный интеграль (6) при всякомъ составѣ функции $f(a)$, всегда выражаетъ окружности, между тѣмъ какъ особенное рѣшеніе обнаруживаетъ, что условіямъ задачи отвѣчаетъ и множество различныхъ кривыхъ, видъ которыхъ обуславливается составомъ функции f .

Задача траекторій.

149. Траекторію даннаго семейства кривыхъ называютъ, вообще, линію, пересекающую всѣ кривыя этого семейства подъ однимъ и тѣмъ-же угломъ. Если этотъ уголъ прямой, то и траекторія получаетъ названіе *ортогональной*.

Разсмотримъ какимъ образомъ, зная уравненіе семейства кривыхъ, опредѣлить ихъ ортогональную траекторію.

Пусть

$$\Phi(x, y, c) = 0 \quad (1)$$

уравненіе даннаго семейства кривыхъ. Дифференцированіе его доставить:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0;$$

слѣдовательно для всѣхъ кривыхъ семейства

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}.$$

Таково общее выражение тангенса угла, составляемого касательною къ различнымъ линіямъ семейства съ осью абсциссъ. Означимъ его черезъ m . Замѣтивъ теперь, что, въ виду самаго опредѣленія траекторіи, касательная къ траекторіи должна постоянно пересѣкать касательныя къ различнымъ линіямъ семейства подъ прямымъ угломъ, мы заключимъ, что выраженіе $\frac{dy}{dx}$ изъ уравненія траекторіи должно быть вообще равно $-\frac{1}{m}$, т.е. что изъ уравненія траекторіи

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}},$$

откуда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy = 0, \quad (2)$$

уравненіе, которое должно оправдываться при всякомъ значеніи x . Отсюда слѣдуетъ, что дифференціальное уравненіе ортогональной траекторіи найдется чрезъ исключеніе x между уравненіями (1) и (2).

Если-бы уравненіе семейства кривыхъ дано было въ формѣ

$$\Phi(x, y, a, b) = 0,$$

гдѣ произвольныя постоянныя a, b удовлетворяютъ уравненію

$$\psi(a, b) = 0,$$

то нужно было бы исключить a и b между послѣдними двумя уравненіями и уравненіемъ

$$\frac{\partial \Phi(x, y, a, b)}{\partial y} dx - \frac{\partial \Phi(x, y, a, b)}{\partial x} dy = 0.$$

150. Пояснимъ только-что высказанное примѣрами.

1) Пусть требуется определить ортогональную траекторию системы кривыхъ, выражаемыхъ уравненіемъ

$$y = cx^n.$$

Здѣсь $\Phi = y - cx^n$, а потому уравненіе (2) представится въ формѣ

$$dx + ncx^{n-1} dy = 0.$$

Исключеніе c доставитъ поэтому

$$x dx + n y dy = 0,$$

уравненіе, проинтегрировавъ которое, получимъ:

$$x^2 + ny^2 + c'.$$

Найденное уравненіе показываетъ, что траекторія представляетъ эллипсъ, когда n положительное число, отличное отъ 1, т. е. когда кривыя даннаго семейства представляютъ параболы. Траекторія сводится на кругъ при $n = 1$, когда данное семейство линій состоитъ изъ прямыхъ, проходящихъ черезъ начало координатъ. Наконецъ, при n отрицательномъ, траекторія представляетъ гиперболу.

2) Пусть требуется найти ортогональную траекторію семейства конфокальныхъ эллипсовъ.

Уравненіе такого семейства кривыхъ представится чрезъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

гдѣ произвольныя количества a, b связаны между собою условнымъ уравненіемъ

$$a^2 - b^2 = k^2, \quad (2)$$

въ которомъ h , т. е. половина разстоянія между фокусами, остается однимъ и тѣмъ-же для всѣхъ кривыхъ семейства. Здѣсь намъ нужно исключить a и b между двумя послѣдними уравненіями и слѣдующимъ:

$$\frac{y}{b^2} dx - \frac{x}{a^2} dy = 0;$$

въ результатѣ получимъ:

$$xy \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (x^2 - y^2 - h^2) \frac{dy}{dx} - xy = 0. \quad (3)$$

Это дифференціальное уравненіе траекторіи, которое нужно еще проинтегрировать. Начнемъ съ того, что допустимъ $x = x_1^{\frac{1}{2}}$, $y = y_1^{\frac{1}{2}}$. Отъ этой замѣны переменныхъ уравненіе (3) приметъ видъ:

$$y_1 = x_1 \frac{dy_1}{dx_1} - h^2 \frac{\frac{dy_1}{dx_1}}{\frac{dy_1}{dx_1} + 1}. \quad (4)$$

Это послѣднее уравненіе имѣетъ форму уравненія Клерд, почему интеграція его не представляетъ затрудненій. Продифференцировавъ его, найдемъ:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_1}{dx_1} - x_1 \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} - \frac{h^2}{\left[\frac{dy_1}{dx_1} + 1 \right]^2} \cdot \frac{d^2 y_1}{dx_1^2},$$

т. е.

$$0 = \left(x_1 + \frac{h^2}{\left(\frac{dy_1}{dx_1} + 1 \right)^2} \right) \cdot \frac{d^2 y_1}{dx_1^2},$$

уравненіе, разбивающееся на два слѣдующихъ:

*

$$x_1 + \frac{h^2}{\left[\frac{dy_1}{dx_1} + 1 \right]^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = 0,$$

изъ которыхъ последнее доставляетъ

$$\frac{dy_1}{dx_1} = c^2.$$

Внеся это выраженіе $\frac{dy_1}{dx_1}$ въ формулу (4), получимъ:

$$y_1 = x_1 c^2 - \frac{h^2 c^2}{c^2 + 1},$$

или, введя прежнія переменныя x, y ,

$$y^2 - x^2 c^2 = - \frac{h^2 c^2}{c^2 + 1}.$$

Это и есть полный интегралъ уравненія (3), опредѣляющій искомую траекторію. Такъ-какъ онъ непосредственно приводитъся къ формѣ:

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1,$$

гдѣ

$$a_1^2 = \frac{h^2}{c^2 + 1}, \quad b_1^2 = \frac{h^2 c^2}{c^2 + 1}$$

и слѣдовательно

$$a_1^2 + b_1^2 = h^2,$$

то ясно, что траекторія представляетъ гиперболу, конфокальную съ даннымъ семействомъ эллипсовъ.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стр.	Строка.	Напечатано.	Слѣдуетъ.
4	10 снизу	$-5ye^{2x}$	$-5ye^{4x}$
17	19 —	$F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}\right)$	$F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right)$
25	9 —	дифференціальныхъ.	дифференціалахъ.
35	1 —	для y_1	для y_0
54	4 —	$-\frac{ny}{x-1}$	$-\frac{ny}{x+1}$
74	5 сверху	формулою (δ)	формулою (8)
79	5 снизу	$y \int e^{\frac{y}{x}} dx +$	$y \int e^{\frac{x}{y}} dx +$
89	6 —	$+ N_2 dy_1 = 0,$	$+ N_2 dy_2 = 0,$
89	2 —	$\frac{N_1 d(y-y_1)}{\Psi'(y)(y-y_1)} + \frac{N_2 d(y-y_2)}{\Psi'(y)(y-y_2)}$	$\frac{N_1 d(y-y_1)}{\Psi'(y_1)(y-y_1)} + \frac{N_2 d(y-y_2)}{\Psi'(y_2)(y-y_2)}$
115	1 сверху	$= \chi\left(\frac{d}{dx}\right)$	$= \chi\left(\frac{dy}{dx}\right)$
123	11 —	$+ U \frac{dV}{dx},$	$+ U \frac{d^m V}{dx^m},$
152	2 снизу	$\int \frac{dx}{x^{2m+2} \int_0^1 (z^2 - 1)^m \cos xz dz} + c'.$	$\int \frac{dx}{x^{2m+2} \int_0^1 (z^2 - 1)^m \cos xz dz} + c'.$
191	3 снизу	$C = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{1.2(-m+3)(-m+5)}$	$C = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{1.2(-m+3)(-m+5)} A,$
191	2 снизу	$A, D =$	$D =$