Sur le potentiel de la double couche.

Par A. M. LIAPOUNOFF.

Dans le № 19 des *Comptes rendus* (tome CXXV, 1897, second semestre) sont publiés deux théorèmes contenant les résultats de mes recherches sur le potentiel de la double couche.

En publiant ces résultats, je les ai regardés comme nouveaux, en croyant que la théorie du potentiel de la double couche demeure encore en état, où elle était à l'époque de la publication de l'Ouvrage bien connu de M. Neumann *Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential.*

Mais récemment j'ai fait connaissance d'une Note de M. Tauber publiée il y a quelques mois dans les *Monatshefte für Mathematik und Physik* (VIII. Jahrgang 1897; 1 Vierteljahr), ainsi que d'une Note de M. Neumann insérée encore dans le tome XVI des *Mathematische Annalen*, et à présent je vois qu'à l'égard de l'état actuel de la question je fus tombé en erreur.

Le résultat que j'énonce comme le théorème I se trouve déjà dans la Note de M. Tauber. Il est vrai qu'en ce qui concerne la démonstration M. Tauber se restreint au cas du plan, tandis que moi je considère le cas de l'espace; mais ces deux cas présentent des circonstances de la même nature, et d'ailleurs, dans l'énoncé de son théorème, M. Tauber les embrasse tous les deux.

Quant à mon théorème II, on trouve dans la Note citée de M. Neumann une proposition qui donne la solution de la même question, quoique dans des suppositions plus restrictives.

Donc, contrairement à ce que j'ai pensé, la question se trouve déjà assez bien explorée.

Toutefois je crois qu'il ne serait pas inutile de publier mon analyse, puisque d'une part elle se rapporte au cas de l'espace et n'en est pas moins simple que celle de M. Tauber, et que d'autre part mon deuxième théorème est plus général que celui de M. Neumann.

D'ailleurs, en entreprenant mes recherches sur le potentiel, j'avais eu en vue certaines applications au problème de Dirichlet, et bientôt je me propose de publier un Mémoire, où ces applications seront indiquées et où j'aurai à m'appuyer sur les théorèmes que j'ai énoncés dans les *Comptes rendus*.

C'est pourquoi je reprends la question et je publie la présente Note qui contiendra la démonstration de ces théorèmes.

---

1. Soit S une surface mesurable ayant un plan tangent déterminé en chacun de ses points et telle qu'on puisse distinguer sur elle les deux côtés pour pouvoir fixer le sens de la direction de la normale pour tous ses points.

Soit M un point de S appartenant à l'élément superficiel ds, P un point quelconque de l'espace, r la distance MP et φ l'angle que fait la direction MP avec celle de la normale à S au point M.

En désignant par μ une fonction continue définie pour tous les points de S, considérons l'intégrale

$$W = \int \frac{\mu \cos\varphi \, ds}{r^2},$$

étendue à S, qui représente ce qu'on appelle le potentiel d'une double couche répandue sur S.

Cette intégrale est une fonction des coordonnées rectangulaires x, y, z du point P, continue ainsi que toutes ses dérivées, tant que le point P ne se trouve pas sur S. On sait, d'ailleurs, comment varie cette fonction, lorsque le point P vient à traverser cette surface en un point quelconque: on sait qu'en tout point M_0 de S, outre la valeur propre de W, on a encore deux valeurs limites correspondant aux passages à M_0 de deux côtés différents par rapport à S, et que ces trois valeurs, différentes en général, sont parfaitement déterminées.

Quant aux valeurs sur S des dérivées de W, on ne peut les considérer que comme certaines valeurs limites, et elles ne sont déterminées que sous certaines restrictions.

Dans les applications, c'est la dérivée estimée suivant la normale à S qui se présente ordinairement, et c'est à cette dérivée que se rapportent les propositions constituant l'objet de cette Note.

En désignant par n la direction de la normale au point quelconque M_0 de S, concevons deux points P et P', *situés sur cette normale* de côtés différents par rapport à M_0, et considérons les valeurs, en ces points, de l'expression

$$\frac{\partial W}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial W}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial W}{\partial z}\cos(n, z).$$

Soient

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{P'}$$

ces valeurs.

On admet généralement que, les points P et P' se rapprochant indéfiniment du point M_0, on a

$$\lim\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P = \lim\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{P'}.$$

Mais il est facile de s'assurer que cette proposition n'est exacte que sous certaines restrictions, relatives à la surface S et à la fonction μ, puisque déjà dans le cas le plus simple, celui où S se réduit à une portion de plan, on peut prendre pour μ une fonction *continue* telle, que les limites

$$\lim\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P, \quad \lim\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{P'}$$

n'existent point.

Or j'ai reconnu que, si l'on modifie convenablement l'énoncé de la proposition, et si l'on fait certaines restrictions à l'égard de la surface au voisinage du point M_0, on peut se dispenser de toute supposition particulière à l'égard de la fonction μ, et voici le résultat que j'ai obtenu:

Théorème I.— *La fonction μ étant une fonction continue quelconque, supposons que, au point M_0, les sections normales de la surface ont toutes des courbures finies et déterminées et que le rapport de l'angle de contingence à l'arc, lorsqu'on fait tendre l'arc vers zéro, tend vers sa limite, courbure, uniformément pour toutes ces sections normales. Alors, si les points P et P' tendent vers M_0 de manière qu'on ait toujours*

$$PM_0 = M_0P',$$

on aura

$$\lim\left[\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P - \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{P'}\right] = 0.$$

C'est ce résultat qui constitue le premier théorème que j'ai énoncé dans les *Comptes rendus* (sous une forme un peu moins exacte) et qui, au fond, n'est autre chose que le théorème de M. Tauber.

Ce théorème ne suppose pas l'existence des limites

$$\lim\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P, \quad \lim\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{P'}.$$

Il fait seulement voir que, si l'une des deux limites existe, l'autre existera aussi et lui sera égale.

Mais dans certains cas il est indispensable de savoir reconnaître, par la nature même de la fonction μ, si les limites dont il s'agit existent.

Alors pourra être utile le théorème suivant:

Théorème II.—*La condition précédente relative à la surface au voisinage du point M_0 étant remplie, prenons ce point pour pôle des coordonnées polaires, le rayon vecteur ϱ et l'angle polaire ψ, dans le plan tangent à la surface, et posons*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu\, d\psi = \bar{\mu}.$$

Alors, toutes les fois que l'on pourra trouver un nombre positif α, tel qu'on ait

$$\lim_{\rho=0}\left(\frac{\bar{\mu}-\mu_0}{\varrho^{1+\alpha}}\right) = 0,$$

μ_0 étant la valeur de μ au point M_0, on aura des limites déterminées pour

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{P'}$$

et ces limites seront égales *).

C'est ces théorèmes que je veux établir dans cette Note.

2. En prenant le point M_0 pour origine des coordonnées et la normale en ce point pour axe des z, considérons le potentiel W pour un point P situé sur cet axe. Ce potentiel deviendra alors une fonction de z que nous désignerons par $W(z)$.

Concevons un cylindre de révolution C ayant pour axe l'axe des z et pour la plus courte distance de ses génératrices à l'axe une quantité suffisamment petite R.

---

*) Si S est une portion de surface limitée par une courbe, le point M_0 ne doit pas se trouver sur cette courbe; c'est ce que l'on supposera toujours dans la suite.

Soit S_0 la portion de S découpée par C et contenant le point M_0 et S_1 le reste de S.

En désignant les potentiels dûs à S_0 et à S_1 respectivement par $W_0(z)$ et par $W_1(z)$, on aura

$$W(z) = W_0(z) + W_1(z).$$

Cela posé, formons l'expression de $W_0(z)$, en supposant R assez petit pour que toute parallèle à l'axe des z située à l'intérieur de C rencontre S_0 en un seul point.

Les coordonnées du point M de l'élément ds étant désignées par ξ, η, ζ, soit

$$\xi = \varrho \cos\psi, \qquad \eta = \varrho \sin\psi.$$

Alors, en considérant ζ comme fonction de ϱ et de ψ et en désignant par ϑ l'angle que fait la normale au point M avec l'axe des z, on aura

$$\cos\varphi = \left(z - \zeta + \varrho \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho}\right) \frac{\cos\vartheta}{r}.$$

D'ailleurs on pourra prendre

$$ds = \frac{\varrho\, d\psi\, d\varrho}{\cos\vartheta}.$$

On aura donc

$$W_0(z) = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \mu \left(z - \zeta + \varrho \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho}\right) \frac{\varrho\, d\varrho}{r^3},$$

avec cette expression pour r:

$$r = \sqrt{\varrho^2 + (z - \zeta)^2}.$$

De là, en différentiant par rapport à z, on déduit

$$W_0'(z) = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \mu \frac{\varrho\, d\varrho}{r^3} - 3 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \mu \left(z - \zeta + \varrho \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho}\right) (z - \zeta) \frac{\varrho\, d\varrho}{r^5},$$

ce que l'on peut présenter sous la forme

$$W_0'(z) = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \mu (\varrho^2 - 2z^2) \frac{\varrho\, d\varrho}{r^5} - 2z \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \mu \zeta \frac{\varrho\, d\varrho}{r^5}$$

$$+ 4 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \mu \zeta^2 \frac{\varrho\, d\varrho}{r^5} - 3 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \mu \left(\varrho \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho} - 2\zeta\right) (z - \zeta) \frac{\varrho\, d\varrho}{r^5}.$$

Maintenant, en partant de cette formule, nous allons chercher une expression asymptotique de $W_0'(z)$, en entendant par là toute expression $\Theta(z, R)$, telle qu'en attribuant à R une valeur assez petite et *indépendante de* z on puisse rendre la différence

$$W_0'(z) - \Theta(z, R)$$

aussi voisine de zéro que l'on veut, *et cela pour toutes les valeurs de* z.

3. Soit ω_0 la courbure, au point M_0, de la section normale définie par l'angle ψ.

Comme on a

$$\omega_0 = \lim_{\rho=0} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right),$$

on trouve

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = \rho (\omega_0 + \varepsilon),$$

ε étant une fonction de ρ et de ψ tendant vers zéro pour $\rho = 0$.

Par suite on aura

$$\zeta = \frac{1}{2} (\omega_0 + \varepsilon_1) \rho^2, \qquad \rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} - 2\zeta = \varepsilon' \rho^2,$$

en désignant par ε_1, ε' des fonctions de la même espèce que ε.

D'ailleurs, en vertu de la supposition exprimée dans l'énoncé du théorème I, la fonction ε et par suite aussi ε_1 et ε' tendront vers zéro avec ρ *uniformément* pour toutes les valeurs de ψ.

D'autre part, en posant

$$\frac{2z\zeta - \zeta^2}{\rho^2 + z^2} = t,$$

on aura

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \sqrt{1 - t}.$$

Par suite, en remarquant que l'on a

$$|t| < \left| \frac{\zeta}{\rho} \right| + \frac{\zeta^2}{\rho^2},$$

quel que soit z, on voit qu'on pourra prendre R suffisamment petit pour que le rapport

$$\frac{r}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

soit aussi voisin de 1 que l'on veut pour toutes les valeurs de z et de ψ et pour toutes les valeurs de ϱ qui ne surpassent pas R.

De tout cela il est facile de conclure que, quel que soit z, les valeurs absolues des deux intégrales qui figurent à la seconde ligne de l'expression de $W_0'(z)$, que nous avons obtenue au n^0 précédent, ne pourront surpasser une certaine limite, *indépendante de* z *et tendant vers zéro pour* $R=0$.

Donc, dans notre recherche, il n'y aura à considérer que les deux intégrales

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \mu(\varrho^2-2z^2)\frac{\varrho\, d\varrho}{r^5}, \qquad \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \mu z \zeta \frac{\varrho\, d\varrho}{r^5}$$

qui figurent à la première ligne.

Or, en développant

$$\frac{1}{r^5}=\frac{(1-t)^{-\frac{5}{2}}}{(\varrho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

suivant les puissances croissantes de t, on trouve, pour l'expression asymptotique de la première intégrale,

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \frac{\mu(\varrho^2-2z^2)\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + 5z\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \frac{\mu(\varrho^2-2z^2)\zeta\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2+z^2)^{\frac{7}{2}}}$$

et, pour celle de la seconde,

$$z\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \frac{\mu\zeta\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Par suite, pour l'expression asymptotique de $W_0'(z)$, on aura

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \frac{\mu(\varrho^2-2z^2)\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + 3z\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \frac{\mu(\varrho^2-4z^2)\zeta\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2+z^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

D'ailleurs, dans la seconde intégrale, on pourra évidemment remplacer $\mu\zeta$ par $\frac{1}{2}\mu_0\omega_0\varrho^2$, μ_0 étant la valeur de μ au point M_0.

Alors, en posant

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu\, d\psi=\bar{\mu}, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega_0\, d\psi=\tilde{\omega}_0,$$

et en remarquant que

$$\int_0^R \frac{(\varrho^2 - 4z^2)\varrho^3 d\varrho}{(\varrho^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}} = -\frac{R^4}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

on aura simplement

$$W_0'(z) = 2\pi \int_0^R \frac{\overline{\mu}\,(\varrho^2 - 2z^2)\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\pi\mu_0\tilde{\omega}_0 R^4 z}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \ldots$$

et les termes mis en évidence constitueront l'expression asymptotique cherchée.

4. Maintenant, pour démontrer le théorème I, nous remarquons que la formule que nous venons d'obtenir donne

$$W_0'(z) - W_0'(-z) = -\frac{6\pi\mu_0\tilde{\omega}_0 R^4 z}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + F(z, R),$$

$F(z, R)$ étant une fonction qu'on peut faire, en attribuant à R une valeur suffisamment petite et indépendante de z, aussi voisine de zéro qu'on veut pour toutes les valeurs de z.

Or, en passant au potentiel $W(z)$ de la surface entière, on en déduit

$$\begin{aligned} W'(z) - W'(-z) = {} & F(z, R) \\ & + W_1'(z) - W_1'(-z) - \frac{6\pi\mu_0\tilde{\omega}_0 R^4 z}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \end{aligned}$$

où la fonction figurant à la seconde ligne tend vers zéro pour $z = 0$, quelle que soit la valeur attribuée à R, pourvu qu'elle ne soit pas nulle.

On voit donc qu'en donnant à R une valeur assez petite, puis, en fixant R et en faisant $|z|$ suffisamment petit, on pourra rendre la différence

$$W'(z) - W'(-z)$$

aussi voisine de zéro qu'on voudra.

Par suite on doit conclure que l'on a

$$\lim_{z=0} \Big(W'(z) - W'(-z) \Big) = 0,$$

et c'est bien le théorème I.

5. Supposons maintenant que les conditions du second théorème se trouvent remplies.

Comme, dans ces conditions, l'intégrale

$$\int_0^R \frac{|\overline{\mu}-\mu_0|}{\varrho^2}\,d\varrho$$

aura une valeur déterminée, tendant vers zéro pour $R=0$, on pourra, si l'on n'a à obtenir qu'une expression asymptotique, remplacer dans l'intégrale

$$\int_0^R \frac{\overline{\mu}(\varrho^2-2z^2)\varrho\,d\varrho}{(\varrho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$\overline{\mu}$ par μ_0, ce qui la réduira à

$$-\frac{\mu_0 R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

De là on voit que la formule obtenue au n⁰ 3 pourra être écrite ainsi

$$W_0'(z)=-\frac{2\pi\mu_0 R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3\pi\mu_0\tilde{\omega}_0 R^4 z}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}+\Phi(z,R),$$

en désignant par $\Phi(z, R)$ une fonction de la même espèce que la fonction $F(z, R)$ considérée tout à l'heure.

Or, en considérant la dérivée $W_1'(z)$ du potentiel $W_1(z)$, on s'assure facilement que, dans les conditions où nous nous sommes placé, la quantité

$$W_1'(0)-\frac{2\pi\mu_0}{R}$$

tend, pour $R=0$, vers une limite déterminée.

Soit L cette limite.

En vertu de l'expression ci-dessus de $W_0'(z)$ on pourra écrire

$$\begin{aligned} W'(z)-L= \; & \Phi(z,R)+W_1'(0)-\frac{2\pi\mu_0}{R}-L \\ & +W_1'(z)-W_1'(0)+2\pi\mu_0\left\{\frac{1}{R}-\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}-\frac{3\pi\mu_0\tilde{\omega}_0 R^4 z}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned}$$

Donc, en raisonnant comme au n⁰ précédent, on arrive à la conclusion que

$$\lim_{z=0} W'(z) = L\,,$$

ce qui prouve le théorème II.

6. Nous nous sommes appuyé sur ce que l'expression

$$W_1'(0) - \frac{2\pi\mu_0}{R}\,,$$

dans les conditions du théorème II, tend vers une limite pour $R = 0$.

Il est facile de l'établir.

A cet effet on partira de la formule

$$W_1'(0) = 3\int\limits_{(R)} \frac{\mu\cos\varphi\,\zeta\,ds}{(\varrho^2+\zeta^2)^2} + \int\limits_{(R)} \frac{\mu\cos\vartheta\,ds}{(\varrho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\,,$$

où l'indice (R) placé sous les signes des intégrales sert à indiquer que celles-ci doivent être étendues à S_1.

De là, en entendant par A une valeur fixe de R, on déduit

$$W_1'(0) - \frac{2\pi\mu_0}{R} = \quad 3\int\limits_{(R)} \frac{\mu\cos\varphi\,\zeta\,ds}{(\varrho^2+\zeta^2)^2} + \int\limits_{(A)} \frac{\mu\cos\vartheta\,ds}{(\varrho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\pi\mu_0}{A}$$

$$+\int_0^{2\pi} d\psi \int_R^A \left[\frac{1}{(\varrho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\varrho^3}\right]\mu\varrho\,d\varrho + 2\pi\int_R^A \frac{\bar{\mu}-\mu_0}{\varrho^2}\,d\varrho\,,$$

et cette expression tend évidemment, pour $R = 0$, vers une limite déterminée.

On trouve d'ailleurs, pour cette limite,

$$L = \quad 3\int \frac{\mu\cos\varphi\,\zeta\,ds}{(\varrho^2+\zeta^2)^2} + \int\limits_{(A)} \frac{\mu\cos\vartheta\,ds}{(\varrho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\pi\mu_0}{A}$$

$$+\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^A \left[\frac{1}{(\varrho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\varrho^3}\right]\mu\varrho\,d\varrho + 2\pi\int_0^A \frac{\bar{\mu}-\mu_0}{\varrho^2}\,d\varrho\,,$$

formule qui est exacte quel que soit A, pourvu qu'il ne surpasse pas une certaine limite.