Продолженіе лекціи
7 марта.

5.

Аналитическая геометрія — продолженіе.

Такъ какъ уголъ α есть величина совершенно произвольная, то онъ можетъ быть подчиненъ условію

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = 0,$$

откуда

$$tg\,\alpha = -\frac{a}{b}.$$

и какъ a и b величины вещественныя, то тогда всегда можно оси повернуть такъ, что условіе будетъ удовлетворяться; т. е. получимъ:

$$\sin\alpha = \frac{-a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

Если эти выраженія подставимъ въ ур. II, то членъ его уничтожится.

Если теперь

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = 0$$

умножимъ на

$$a\sin\alpha - b\cos\alpha,$$

получимъ:

$$a^2\cos\alpha\sin\alpha - b^2\sin\alpha\cos\alpha + ab\sin^2\alpha - ab\cos^2\alpha = 0,$$

или

$$2/b^2\sin\alpha\cos\alpha - a^2\sin\alpha\cos\alpha + ab\cos^2\alpha - ab\sin^2\alpha) = 0,$$

или

$$2(b^2-a^2)\sin\alpha\cos\alpha + ab(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)) = 0;$$

отсюда видимъ, что и подобр. члены $x'y'$ сдѣл. $= 0$.

Значитъ, уравненіе при нашей кривой 2-го пор. приво-
дится къ такому виду:

$$C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0.$$

Итакъ можемъ сказать: уравненіе кривой 2-го пор. не имѣющей центра можетъ быть приведено къ такому виду: $Cy^2 + Dx = 0$.

Остается изслѣдовать значеніе коэффиц. послѣдняго уравненія и форму кривой линіи, которую она изображаетъ.

Разрѣшивши послѣднее уравненіе относительно y^2, имѣемъ:

$$y^2 = -\frac{D}{C}x,$$

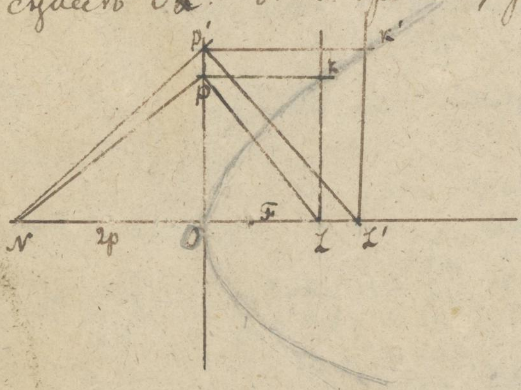
гдѣ $-\frac{D}{C}$ есть величина вещественная. Допустимъ, что $-\frac{D}{C} = \pm 2p$, получимъ:

$$y^2 = 2px$$

Въ этой формѣ обыкновенно и употребляется уравненіе кривой не имѣющей центра. Измѣненіе $+p$ на $-p$ будетъ соотвѣтствовать измѣненію x на $-x$.

Видимъ прежде всего, что кривая, изображаемая этимъ уравненіемъ, проходитъ черезъ начало коордибудемъ также, что для отрицательныхъ значеній α, y является величиною мнимою: отсюда слѣдуетъ, что точекъ, соотвѣтствующихъ отрицательному α не существуетъ. Если начнемъ увеличивать α отъ 0 до +∞, увидимъ, что величина y будетъ расти и для каждой величины абсциссы α будемъ получать для y двѣ величины симметрически расположенныхъ и такимъ образомъ получимъ 2 вѣтви болѣе и болѣе расходящіяся. Такія кривыя носятъ названіе параболъ. 2p называется параметромъ.

Построимъ параболу по точкамъ. Пусть требуется разыскать точку параболы соотвѣтствующую абсциссѣ OL. Отложимъ, для этого, на оси α-овъ



ON = 2p. Въ т. P строимъ прямой уголъ. Тогда возставляя ⊥⊥ изъ тт. P и L опредѣлимъ искомую точку K. Въ самомъ дѣлѣ, изъ △ NPL имѣемъ:

$$PO^2 = NO \times OL,$$

или

$$y^2 = 2p\,OL.$$

Также точно определимъ и другія точки параболы.

Докажемъ еще, что всѣ 3 уравненія кривыхъ 2-го порядк. могутъ быть представлены въ формѣ между собой сходной.

Уравненіе эллипса, отнесеннаго къ его осямъ координатъ, у насъ было написано въ так. формѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Перенесемъ точ. начала координатъ въ O' ~~перенос. въ~~ верш. ~~такъ~~ такъ чтобы y оставался неизмѣннымъ, а для x будетъ существовать равенство:

$$x' = x + a,$$

или

$$x = x' - a, \quad y = y'$$

Подставивши въ уравн., имѣемъ:

$$\frac{(x'-a)^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \text{ или}$$

$$\frac{x'^2 + a^2 - 2ax'}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \text{ или}$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{2ax'}{a^2} = 0.$$

Помноживши последнее равенство на b^2:

$$\frac{x'^2 b^2}{a^2} + y'^2 - \frac{2b^2 x'}{a} = 0, \text{ откуда:}$$

$$y'^2 = \frac{2b^2}{a}x' - \frac{b^2}{a^2}x'^2,$$

или, по-прежнему ~~полагая~~ $\frac{b^2}{a} = p$,

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$$

Вотъ новый видъ ~~нашего~~ уравненія (Эллипса отнесен. къ верш. этой кривой) Видимъ, что въ такой формѣ представленное уравненіе Эллипса отличается отъ уравненія параболы только ~~сли~~ лишнимъ членомъ.

Сдѣлаемъ тоже преобразованіе и въ гиперболѣ. <u>10^ое марта.</u>

Уравненіе кривой напишется такъ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Перенесемъ начало координатъ въ вершину кривой А; тогда новыя оси выразятся въ отношеніи старыхъ:

$$y = y'$$
$$x = x' + a.$$

Подставивъ въ наше уравненіе, получимъ:

$$\frac{(x'+a)^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1, \text{ или}$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{2x'}{a} - \frac{y'^2}{b^2} = 0,$$

$$\frac{y'^2}{b^2} = \frac{2x'}{a} + \frac{x'^2}{a^2}, \text{ или:}$$

$$y'^2 = \frac{2b^2x'}{a} + \frac{b^2x'^2}{a^2},$$

или, отбросивъ для простоты значки и сдѣлавъ алгебр. подстановки:

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2.$$

Это уравненіе отличается отъ параболы только членомъ $\frac{p}{a}x^2$.

Если будемъ разсматривать наши уравненія въ только что написанномъ видѣ, видимъ, что p величина всегда положительная; кромѣ того имѣемъ такія равенства:

Для параболы:

$$y^2 = 2px,$$

Для эллипса

$$y^2 < 2px,$$

Для гиперболы

$$y^2 > 2px$$

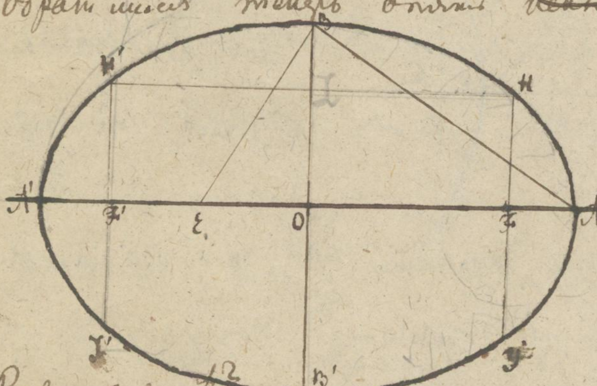
Эти три равенства приводятъ насъ къ слѣдующимъ заключеніямъ: 1°, для параболы квадратъ, построенный на ординатѣ всякой точки кривой, равняется площади прямоугольника, построеннаго на абсциссѣ и параметрѣ.

2°, для эллипса квадратъ, построенный на ординатѣ < прямоугольника построеннаго на абсциссѣ и параметрѣ.

3°, для гиперболы: квадратъ, построенный на ординатѣ > прямоугольника, построеннаго на абсциссѣ и параметрѣ.

Эти 3 свойства были извѣстны древнимъ греческимъ геометрамъ и они послужили для номенклатуры кривыхъ: по гречески парабола значитъ равенство, эллипсъ — уменьшеніе, гипербола — преобладаніе.

Обратимся теперь опять ~~всего изученном~~ къ эллипсу.



Пусть AA' большая ось, BB' средняя, O центръ. Нетрудно построить графически параметръ эллипса.

Равенство $\frac{b^2}{a} = p$ показываетъ, что

$$a : b = b : p,$$

т. е., что ~~средняя~~ меньшая полуось есть средняя пропорціональная между большою полуосью и

~~полу~~параметромъ. На этомъ основаніи можемъ выче-
рчить параметръ, сдѣлавши построеніе такъ на
чертежѣ. Въ самомъ дѣлѣ, изъ Δ EBA имѣемъ:

$$EO : OB = OB : OA;$$

откуда

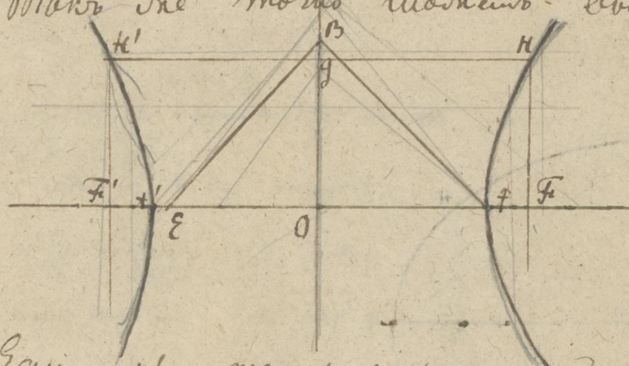
$$EO = \frac{OB^2}{OA}!$$

но OB есть наша b, OA есть a; слѣдовательно:

$$EO = \frac{b^2}{a} = p,$$

т.е. полупараметру. Итакъ разстояніе E отъ O
и будетъ = длинѣ полупараметра.

Такъ же точно можемъ вывести и для гиперболы.



Въ самомъ дѣлѣ, изъ Δ ABE выво-
димъ тоже самое.

Если мы теперь на прямой OB, т.е. вертикальной
оси отложимъ отъ O прямую OL = полупараметру
и черезъ т. L проведемъ параллельную оси x-овъ
до пересѣченія съ кривою въ тт. H и H'; затѣмъ
изъ тт. H и H' ~~вос~~опустивши перпендикуляры до

пересѣченій съ кривою въ тт. $\overset{1}{X}$ и $\overset{1}{X'}$; тогда получимъ 2 хорды, изъ которыхъ каждая = 2р; Точки, въ которыхъ онѣ пересѣкаютъ ось х^ов называются <u>фокусами</u>. Видимъ, что эллипсъ имѣетъ 2 фокуса.

Тоже и для гиперболы. Отложимъ на мнимой оси длину $OQ = p$ и сдѣлавъ вообще тоже построеніе, опредѣлимъ фокусы гиперболы. Видимъ, что гипербола имѣетъ 2 фокуса. Разстояніе фокуса отъ центра называется <u>эксцентрицитетомъ</u>.

Парабола же имѣетъ всегда одинъ фокусъ. Здѣсь мы можемъ только въ одномъ мѣстѣ провести хорду, пересѣкающую ось кривой, т. к. можемъ найти только одну точку, которая называется фокусомъ параболы.

Эксцентрицитетъ обозначаютъ $\pm c$.

Легко установить отношеніе между эксцентрицитетомъ и главными осями ~~координатъ~~ кривой. Въ самомъ дѣлѣ. Эксцентрицитетъ есть ничто иное какъ абсцисса точки H, ордината которой p. Следовательно, такъ H лежитъ на кривой, координаты ее этой точки должны удовлетворять уравненію кривой, т.е. полу[чимъ]

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

y для этой точки $= p$, $x = c$. Следовательно, должно имѣть мѣсто следующее равенство:

$$\frac{c^2}{a^2} \pm \frac{p^2}{b^2} = 1, \text{ или: } \frac{c^2}{a^2} \pm \frac{b^2}{a^2} = 1;$$

откуда:

$$c^2 = a^2 \mp b^2$$

Вотъ общая формула, выражающая искомое отношеніе въ случаяхъ эллипса и гиперболы. Видимъ, что квадратъ эксцентрицитета эллипса равняется разности между квадратами полуосей; для гиперболы: — суммѣ квадратовъ полуосей.

Что касается до параболы, легко доказать, что разстояніе фокуса отъ вершины, т.е. эксцентрицитетъ $= \frac{1}{4}$ параметра. Въ самомъ дѣлѣ, OF есть ~~абсцисса~~ ничто иное какъ абсцисса точки H, ордината которой HF, т.е.

p. Слѣдовательно получимъ равенство:

$$p^2 = 2p \cdot OF_1, \quad p = 2OF_1,$$

откуда:

$$OF_1 = \frac{p}{2}.$$

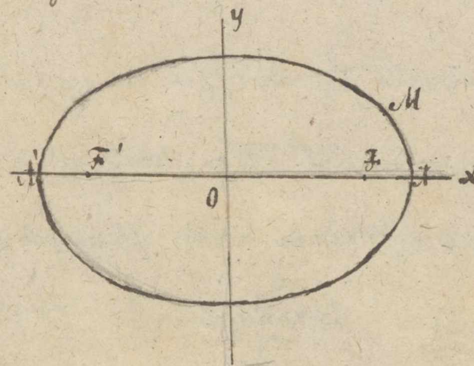
Если мы возьмемъ на кривой какую бы то ни было точку и соединимъ ее съ обоими фокусами, то прямыя, соединяющія точку кривой съ фокусомъ ея, называется радіусомъ-векторомъ. Такъ какъ эллипсъ и гипербола имѣютъ по 2 фокуса, то каждая точка кривой будетъ имѣть 2 радіуса-вектора. Напротивъ, каждая точка параболы не имѣетъ этого свойства.

Радіусы-векторы обладаютъ однимъ общимъ весьма замѣчательнымъ свойствомъ; именно: радіусъ-векторъ какой бы то ни было точки кривой 2 пор. всегда выражается раціональною линейною функціею абсциссы этой точки; ~~при томъ фу~~ x

Чтобы доказать это предложеніе, предположимъ себѣ вообще найти для каждой изъ 3хъ кривыхъ тѣ постоянныя точки, разстоянія которыхъ отъ ~~точекъ~~ перемѣнныхъ кривыхъ

выражались бы раціональною линейною функціею

абсциссъ этихъ послѣднихъ ~~точекъ~~. Начнемъ съ эллипса:



Пусть F фокусъ эллипса, M точка произвольно выбранная на нашей кривой. Уравненіе эллипса напишется такъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Координаты точки M означимъ x, y; онѣ должны удовлетворять уравненію эллипса. Предположимъ разыскать такую точку (α, β), лежащую въ плоскости кривой, разстояніе которой отъ (x, y) выражалось бы раціональною линейною функціею абсциссы x. Квадратъ разстоянія точекъ (x,y) и (α,β), какъ извѣстно, выражается слѣдующимъ образомъ:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

r означаетъ разстояніе ~~между~~ точекъ (x,y) и (α,β). Написанное равенство, по возвышеніи лѣвой части въ квадратъ, представится такъ:

(2) $x^2 - 2x\alpha + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 = r^2$.

Выразимъ теперь при помощи уравн. кривой y посред. x-а. Изъ самаго эллип.:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Подставивъ это выраженіе y во (2), получимъ:

$$r^2 = x^2 - 2\alpha + \alpha^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \mp \frac{2\beta b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} + \beta^2.$$

Но разсматривая правую часть, видимъ, что въ ней одинъ членъ заключаетъ радикалъ. Слѣдовательно, вообще r^2, а значитъ и r, не есть раціональная функція x; мы же хотимъ разыскать такія величины для α и β, для которыхъ r^2, а слѣдоват. и r^2 выражались бы раціонально въ x. Изъ сказаннаго ясно, что α и β должны быть таковы, чтобы членъ, заключающій радикалъ, уничтожался, т.е. нужно чтобы $\beta = 0$. Итакъ выходитъ, что искомая точка должна лежать на оси x-овъ. Допустивши $\beta = 0$, получимъ такое равенство:

$$r^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

или, расположивъ члены по убывающимъ степенямъ x,

(K) $r^2 = \frac{(a^2-b^2)x^2}{a^2} - 2\alpha x + (\alpha^2 + b^2)$.

Намъ нужно, чтобы само r выражалось раціонально, а для этого нужно чтобы правая часть была полнымъ квадратомъ. Посмотримъ каково должно быть α для этого? Въ правой части только что написаннаго равенства 1ый и 3ій члены могутъ быть разсматриваемы какъ 1ый и 3ій члены произве~~денія~~ квадрата бинома, члены котораго

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x \quad \text{и} \quad \sqrt{\alpha^2+b^2}$$

Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть равенство:

$$2\alpha x = \frac{2x}{a}\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{\alpha^2+b^2},$$

или

$$\alpha = \frac{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{\alpha^2+b^2}}{a},$$

или:

$$\alpha^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}(\alpha^2+b^2),$$

или:

$$\alpha^2\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\right) = \frac{a^2-b^2}{a^2}b^2.$$

Послѣднее выраженіе приводится къ такому виду:

$$\frac{\alpha^2 b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2-b^2), \text{ или}$$

$$\alpha^2 = a^2-b^2,$$

а тогда:

$$\alpha = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Но $a^2 - b^2 = c^2$; почему:

$$\alpha = \pm c.$$

Слѣдовательно, α можетъ выразиться различно
соотвѣтствующая ему точка
и совпадаетъ съ фокусомъ правой.

Намъ остается вывести чему $= r$. Для этого обратимся къ уравн. (к), или къ

$$r^2 = \frac{c^2}{a^2}\alpha^2 - 2c\alpha + a^2.$$

Но правая часть его выражается квадратомъ слѣдующаго выраженія: $a - \frac{c\alpha}{a}$. Поэтому:

$$r = \pm\left(a - \frac{c\alpha}{a}\right)$$

Здѣсь нужно взять только знакъ чтобы уравнен. составило $+$; и такъ какъ $c < a$, $\alpha < a$, то выраженіе $\frac{a^2 - c\alpha}{a}$ будетъ всегда положительнымъ.

Почему

$$r = a - \frac{c\alpha}{a}.$$

Опредѣлимъ теперь другой радіусъ-векторъ.

Для этого слѣдуетъ въ выраженіи (к) α сдѣлать $= -c$. Получимъ:

$$r^2 = \frac{c^2\alpha^2}{a^2} + 2c\alpha + a^2 = \left(a + \frac{c\alpha}{a}\right)^2.$$

Итакъ, для другаго радіуса вектора имѣемъ:

$$r' = a + \frac{c\alpha}{a}.$$

Такъ мы нашли выраженія для радіусъ векторовъ эллипса; полученные нами результаты доказываютъ также высказанное выше утвержденіе.

Перейдемъ теперь къ гиперболѣ. Будемъ искать выраженія:

$$r^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2.$$

Опредѣливши y изъ урав. гиперболы:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2), \quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

По подстановкѣ:

$$r^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \mp \frac{2\beta b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} + \beta^2.$$

Чтобы правая часть была раціональна, нужно чтобы $\beta = 0$; потому точка искомая должна лежать на оси x. Получимъ:

$$r^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

или, расположивши по степенямъ x,

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 - b^2).$$

Чтобы правая часть была полнымъ квадратомъ, нужно чтобы 1ый, также какъ и 3ій, были полными квадратами; а средній = удвоенному произведенію 1го на 2ой. Т. е. нужно чтобы

$$2\alpha x = \frac{2x\sqrt{a^2+b^2}}{a}\sqrt{\alpha^2-b^2},$$ или

$$\alpha^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}(\alpha^2-b^2);$$

откуда

$$\alpha^2\left(1-\frac{a^2+b^2}{a^2}\right) = -\frac{b^2}{a^2}(a^2+b^2),$$ или

$$-\frac{b^2}{a^2}\alpha^2 = -\frac{b^2}{a^2}(a^2+b^2),$$

$$\alpha^2 = a^2+b^2$$

$$\alpha = \pm\sqrt{a^2+b^2},$$

или, такъ какъ $a^2+b^2 = c^2$,

$$\alpha = \pm c.$$

Итакъ видимъ, что искомая точка отстоитъ отъ O на разстояніи эксцентриситета, т. е., другими словами, совпадаетъ съ тѣмъ или другимъ фокусомъ.

Подставивши куда слѣдуетъ, получимъ:

$$r^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2 = \left(\frac{cx}{a}-a\right)^2,$$

откуда

$$r = \pm\left(\frac{cx}{a} - a\right).$$

Но не трудно видѣть, что въ последнемъ выраженіи следуетъ взять $+$, потому что $c>a$, $x>a$.

Итакъ для гиперболы мы имеемъ:

$$r = \frac{cx}{a} - a.$$

Если сдѣлаемъ $x = -c$, найдемъ:

$$r^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} + 2cx + a^2 = \left(\frac{cx}{a} + a\right)^2;$$

откуда находимъ выраженіе для другаго радіуса вектора гиперболы:

$$r_1 = \frac{cx}{a} + a.$$

Посмотримъ теперь выраженіе радіуса вектора для параболы.

Докажемъ прежде всего, что радіусъ векторъ для параболы выражается раціонально въ абсциссахъ. Уравненіе параболы есть:

$$y^2 = 2px,\quad y = \sqrt{2px}.$$

Возьмемъ также выраженіе:

$$r^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2by + b^2, \text{ или}$$

$$r^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + 2px \mp 2b\sqrt{2px} + b^2.$$

Видимъ опять, что для нашей цѣли b должно быть $=0$. Получимъ:

$$r^2 = x^2 + 2x(p-\alpha) + \alpha^2$$

Чтобы правая часть была полнымъ квадратомъ, нужно равенство:

$$2\alpha x = 2x(p-\alpha), \text{ или } \alpha = p - \alpha, \text{ или}$$

$$2\alpha = p, \quad \alpha = \frac{p}{2},$$

т.е. абсцисса точки $(\alpha, b) = \frac{1}{4}$ параметра; принявши во вниманіе равенство $b=0$, видимъ, что искомая точка совпадаетъ съ фокусомъ. Подставивши выраженіе α въ вышенаписанное равенство, имѣемъ:

$$r^2 = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2, \text{ или}$$

$$r = x + \frac{p}{2}$$

Такимъ образомъ мы и пришли къ выраженію радіуса-вектора параболы.

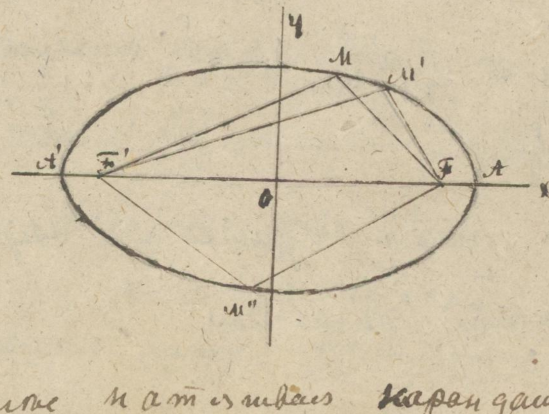
Радiусы-векторы обладаютъ замѣчательными свойствами; такъ напр., легко доказать, что сумма радiусовъ векторовъ въ эллипсѣ = большой оси. Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ:

$$r = a - \frac{cx}{a}$$
$$r' = a + \frac{cx}{a},$$

откуда, по сложенiи,

$$r + r' = 2a,$$

т.е. мы оправдали свое предложенiе. Только что выведеннымъ свойствомъ можно воспользоваться для ~~построенiя~~ начертанiя эллипса на практикѣ. Въ самомъ дѣлѣ, отложимъ на линiи MN длину большой оси AA' и возьмемъ точки фокусовъ F и F'.



Затѣмъ возьмемъ нитку длиною AA', прикрѣпимъ ее концами къ F и F'. А далѣе натягивая карандашемъ нить за свободные прикрѣпимъ онъ и проведя его такъ чтобы онъ скользилъ на ней, опишетъ эллипсъ.

Обратимся къ гиперболѣ.

$$r = \frac{cx}{a} - a$$

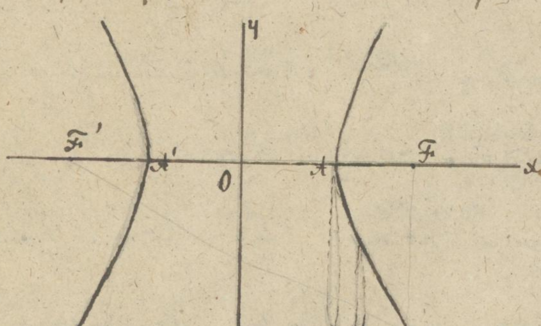
$$r' = \frac{cx}{a} + a$$

Вычтя 1-ое изъ 2-го:

$$r' - r = 2a,$$

т.е. разность радіусовъ векторовъ равна большой полуоси оси

Пользуясь этимъ свойствомъ, можно начертить гиперболу. Въ самомъ дѣлѣ, взявши неопредѣленной длины нить,



прикрѣпимъ ее концами въ F и F', въ точкѣ же A поставимъ карандашъ.

Далѣе, перекинувъ черезъ карандашъ конецъ нити, и натягивая ее съ одной стороны, движеніемъ карандаша опишемъ гиперболу.

Чертежъ см. на заглавномъ листѣ.

Обратимся къ параболѣ. Замѣтимъ прежде всего, что

$$v = x + \frac{p}{2}.$$

Отложимъ на оси x-овъ влѣво отъ т. O разстояніе $OQ = OF$, и изъ т. Q возставимъ перпендикулярной оси $\perp^{ъ}$; линія, которая т. о. образ. получится, носитъ названіе ~~директрисы~~. Возьмемъ теперь на нашей кривой какую-нибудь т. M и посмотримъ чему равняется разстояніе этой точки отъ линіи, которую мы назвали директр. ея? $MR = QN = OQ + ON = x + \frac{p}{2}$.

Видимъ, слѣдовательно, что кратчайшее разстояніе каждой точки нашей кривой отъ директрисы = разстоянію той же точки отъ фокуса крив., т. е. ея радиусу вектору. Этимъ свойствомъ кривой нашей, которое часто принимаютъ за опредѣленіе ея, пользуются построить ее механически. Берутъ для этого прямоугольный треугольникъ и т. д.

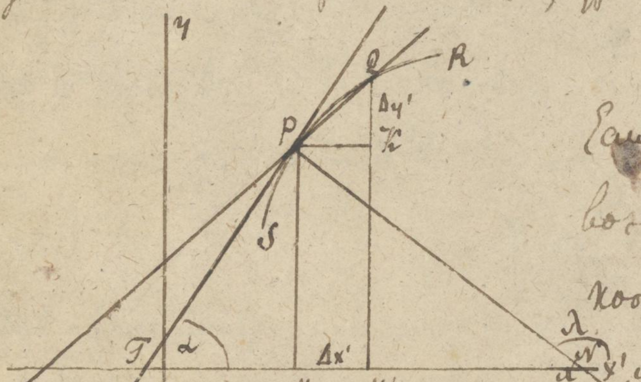
Выводъ уравн. др. кривыхъ 2-го пор. см. у Береса, I, 347.

Приложенія дифференціальнаго исчисленія къ геометріи.

14 марта

До сихъ поръ мы разсматривали только такіе геометрическіе вопросы, для рѣшенія которыхъ аналитическимъ путемъ намъ достаточно было пользоваться элементарною алгеброю и прямолинейною тригонометріею. Теперь перейдемъ къ вопросамъ, рѣшеніе которыхъ можетъ быть достигнуто только при помощи приложенія дифференціальнаго исчисленія. Поэтому отдѣлъ аналитической геометріи, къ которому приступаемъ, и носитъ названіе приложеній дифференціальнаго исчисленія къ геометріи. Первый вопросъ, который разсмотримъ, заключается въ изложеніи общихъ пріемовъ проведенія касательныхъ линій къ плоскимъ кривымъ. Вопросъ этотъ принадлежитъ къ числу тѣхъ геометрическихъ задачъ, которыя рѣшены были древними только въ немногихъ частныхъ случаяхъ. Такъ напримѣръ, древніе греческіе геометры умѣли проводить касательныя къ кривымъ 2-го порядка; но пріемы ихъ основывались на частныхъ свойствахъ этихъ кривыхъ и потому не могли быть распространены на другія линіи. Развитіе алгебры и общность многихъ геометрическихъ пріемовъ, основанныхъ на ней, зародили стремленіе рѣшить задачу касательныхъ вообще. Достигнуть этого стремленія пытались рядъ ученыхъ 17 столѣтія: Кавальери, Робервальдъ, Декартъ, Ферма, Паскаль и Барроу предлагали каждый свой пріемъ; но всѣ эти методы проведенія касательныхъ оказались недостаточно общи. Задача касательныхъ впервые рѣшена была вообще Лейбницемъ. (1684 г.) Желаніе рѣшить ее привело его къ открытію дифференціальнаго исчисленія. Такимъ образомъ, независимо отъ своего геометрическаго значенія, задача касательныхъ имѣетъ огромное значеніе въ исторіи науки, такъ какъ она послужила поводомъ къ одному изъ величайшихъ математическихъ открытій.

Прежде чѣмъ излагать самый (общій) пріемъ построенія касательныхъ къ плоскимъ кривымъ, условимся въ самомъ опредѣленіи касательной. Сдѣлать это тѣмъ важнѣе, что въ различныя времена касательныя опредѣлялись различно, и отсюда вытекали различные пріемы построенія ихъ. Пусть въ плоскости координатъ x, y дана намъ кривая SPR, уравненіе которой пусть



1) $f(x,y) = 0$.

Если мы на этой кривой возьмемъ точку P, координаты которой x', y', и другую точку Q, координаты которой $x'+\Delta x'$, $y'+\Delta y'$ и проведемъ черезъ точки P и Q прямую, то эта прямая получаетъ названіе <u>сѣкущей</u>. Если теперь сѣкущую PQ начнемъ поворачивать около точки P справа ка такъ чтобы т. Q постоянно приближалась къ т. P, то всегда достигнемъ такого положенія прямой, для котораго т. Q сольется съ т. P. Въ такомъ случаѣ прямая будетъ занимать положеніе PT и не будетъ пересѣкать нашей кривой, а будетъ только *касаться* въ т. P. Прямая PT и получаетъ названіе *касательной* къ данной кривой въ т. P.

Изъ высказаннаго объясненія слѣдуетъ, что *касательная къ данной кривой въ данной точ. P есть не что иное какъ предѣлъ, къ которому стремится сѣкущая, проходящая черезъ т. P, по мѣрѣ того какъ 2ая точка пересѣченія постоянно и неопредѣленно приближается къ т. P.*

Такое опредѣленіе касательной, заключающее въ себѣ понятіе о предѣлахъ, указываетъ уже на роль, которую дифференціальное исчисленіе должно играть при опредѣленіи уравненія касательной къ данной кривой въ какой бы то ни было заданной точкѣ

Въ самомъ дѣлѣ, зная уравненіе данной кривой и зная координаты точки P, къ которой касательная проводится, легко вывести уравненіе касательной. Чтобы сдѣлать это, начнемъ съ вывода уравненія сѣкущей PQ, проходящей черезъ т. P. Предполагая координаты прямоугольными, проводимъ линіи PM и QL $\perp$ къ оси x-овъ, линію $PK \parallel$ оси x-овъ. Въ такомъ случаѣ, будемъ имѣть $PM = y'$, $OM = x'$, $QL = y' + \Delta y'$, $OL = x' + \Delta x'$, и легко видѣть, что вообще $PK = \Delta x'$, $QK = \Delta y'$. Теперь прямая PQ проходитъ черезъ т. P, которой координаты суть x', y'. Поэтому уравненіе этой прямой PQ изобразится слѣдующимъ образомъ:

$$(2) \quad y - y' = a(x - x').$$

Здѣсь $\underline{a}$, какъ извѣстно, есть tg угла, составляемаго прямою съ осью x-овъ, который обознач. черезъ σ. Слѣдовательно:

$$a = \operatorname{tg} \sigma = \operatorname{tg} QPK.$$

Изъ ΔPQK слѣдуетъ, что $\frac{QK}{PK} = \operatorname{tg} QPK$; но $QK = \Delta y'$, $PK = \Delta x'$. Слѣдовательно, окончательно,

$$a = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}.$$

Подставивъ эти выраженія въ наше уравненіе (2), получимъ

$$(3) \qquad y - y' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}(x - x')$$

Вотъ общее выраженіе для сѣкущей PK, проходящей черезъ точку P.

Такъ какъ 2ая т. Q взята нами совершенно произвольно, то уравненіе (3) будетъ изображать нашу сѣкущую какъ будто мы ее поворачивали около P. Но, какъ извѣстно, сѣкущая можетъ поворачиваться такъ что точка сѣченія Q будетъ постоянно и неопредѣленно приближаться къ т. P, причемъ $\Delta x'$ и $\Delta y'$ будутъ постоянно и неопредѣленно убывать, такъ что въ уравненіи (3) измѣняться будетъ одинъ только коэффиціентъ $\frac{\Delta y'}{\Delta x}$. Наконецъ, когда т. Q совпадетъ съ точ. P, т. е. когда сѣкущая займетъ положеніе касательной въ т. P, тогда въ уров. (3) коэффиціентъ $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ достигнетъ своего предѣла, соотвѣтствующаго значенію $\Delta x' = 0$. Слѣдовательно, чтобы получить уравн. касательной, должно въ уравн. (3) коэффиціентъ правой часть делимаго пределомъ его, соответствующимъ значенію $\Delta x' = 0$. Но ясно, что $\lim \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{dy}{dx}$, т. е. производной y по x. Следовательно уравн. касательной напишется такъ:

$$(4) \quad y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x').$$

Очевидно, что этотъ коэффиціентъ $\frac{dy'}{dx'}$ можетъ быть найденъ при помощи уравненія (1), т. е. уравн. данной кривой, потому что все положенія точки Q находятся на кривой: следовательно, координаты ея всегда должны удовлетворять ур. кривой. Итакъ коэффиціентъ $\frac{dy'}{dx'}$ можетъ и долженъ быть определенъ изъ ур. $f(x,y)=0$ ~~посредствомъ~~ правилъ диференцированія неявныхъ функцій. Въ сам. дѣлѣ продиференцировавъ ур. (1), имеемъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{df(x,y)}{dx} : \frac{df(x,y)}{dy}.$$

Тогда намъ нужно взять значеніе производной,

$x = x_1, y = y_1$

когда ~~x =~~ заменимъ x черезъ x', y черезъ y'; ~~то~~ будемъ:

$$(5) \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{df(x',y')}{dx'} : \frac{df(x',y')}{dy'}.$$

Подставивши это выраженіе въ ур. касательной, получимъ:

$$(6)\quad (y-y')\frac{df}{dy'} + (x-x')\frac{df}{dx'} = 0.$$

Вотъ форма, въ которой уравн. касательной тоже часто употребляется.

Если въ т. P къ касательной PT возставимъ $\perp$, то получимъ линію PN, перпендикулярную къ касат. въ т. P. Эту линію мы будемъ называть нормальною.

Зная уравн. касательной, нетрудно вывести и нормальной. Въ самомъ дѣлѣ, нормальная проходитъ черезъ т. P, координаты которой x', y'. Слѣдовательно уравненіе ея можетъ быть представлено вообще:

$$(7)\quad y-y' = b(x-x'),$$

гдѣ b есть tg угла, составляемаго PN съ положит. осью x абс., т.е.

$$b = tg\, PNx.$$

Но означая черезъ λ уголъ PNx, черезъ α $\angle PTx$, получ.

$$\lambda = \alpha + 90^\circ,$$

откуда заключимъ:

$$tg\,\lambda = -\cot g\,\alpha.$$

но $tg\,\alpha$ равняется, какъ извѣстно, $\frac{dy'}{dx'}$; Слѣдовательно,
$cotg\,\alpha = \frac{dx'}{dy'}$, почему $tg\,\lambda = -\frac{dx'}{dy'}$. Подставивъ эти
значенія въ (7), получимъ:

$$(8)\quad y - y' = -\frac{dx'}{dy'}(x - x').$$

Вотъ форма, которую принимаетъ уравн. нормальной;
въ этой формѣ уравненіе это по большей части и упо-
требляется. Нужно только помнить, что коэфф.
$\frac{dx'}{dy'}$ долженъ быть опредѣленъ изъ уравн. данной
кривой. Изъ самаго же уравн., предварительно продифференцировавъ,
получимъ:

$$\frac{dx'}{dy'} = -\frac{df(x',y')}{dy'} : \frac{df(x',y')}{dx'},$$

т.е. равенство обратное съ прежнимъ. Подставивъ
въ ур. (8), получимъ:

$$(9)\quad (y - y')\frac{df}{dx'} - (x - x')\frac{df}{dy'} = 0.$$

Въ этой формѣ уравн. нормальной употребляет-
ся тоже часто.

Зная уравненія касательной и нормальной, можемъ
опредѣлить выраженія cos и sin угловъ, составля-

ствія этими прямыми съ осями координатъ.

Въ нашемъ случаѣ, изъ уравн. (4) заключаемъ, что $\frac{dy'}{dx'} =$ tg α, т. е. tg угла составляемаго касательною, идущею вверхъ отъ x, съ положительною осью x-овъ; а такъ

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Это равенство показываетъ намъ, слѣдовательно, что dy', dx' суть величины пропорціональныя sin-амъ и cos-амъ α. А если такъ, то самые выраженія $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ опредѣлятся:

$$\sin\alpha = \frac{dy'}{\sqrt{dx'^2 + dy'^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{dx'}{\sqrt{dx'^2 + dy'^2}}$$

Знакъ передъ радикалами мы будемъ брать въ обоихъ случаяхъ одинъ и тотъ же знакъ, или + или −. Что касается до sin и cos угла, составл. нормалью съ положит. осью x-овъ, что опредѣленіе ихъ также не трудно. Въ нашемъ случаѣ въ силу уравн. (3) мы имѣемъ:

$$-\frac{dx'}{dy'} = \operatorname{tg}\lambda,$$

т. е.

$$-\frac{dx'}{dy'} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda};$$

откуда

$$\sin\lambda = \frac{\pm\, dx'}{\sqrt{dx'^2+dy'^2}}$$

$$\cos\lambda = \frac{\mp\, dy'}{\sqrt{dx'^2+dy'^2}}$$

Здѣсь передъ радикалами будемъ брать знакъ одинъ и тотъ же въ т. случаѣ, когда передъ числителями беремъ знаки противные.

Такимъ образомъ, видимъ, что имѣя уравненія кривой и знанія точки, черезъ которую слѣдуетъ провести касательную и нормальную, легко можемъ составить уравненія этихъ прямыхъ линій; а имѣя ~~ур~~ уравненія, легко можемъ ихъ построить и на дѣлѣ; потому что уравненія даютъ намъ возможность опредѣлить углы, составляемые этими линіями съ осями координатъ. Въ сам. дѣлѣ, легко опред. е α, а тогда его легко можемъ провесть касательную на самомъ дѣлѣ. Слѣдовательно пріемъ, указанный нами, распространяется на всѣ плоскія кривыя, каковы бы онѣ не были.

Длина TM, т. е. длина разстоянія между точкою пересѣченія касательной съ осью x-овъ до основанія ординаты точки касанія, называется **подкасательною**; ее обозначаютъ обыкновенно S_t (Sub-tang...

Длина MN, т. е. длина разстоянія между точ. пересѣч. нормальной съ осью x до основанія ординаты точки P, называется **поднормальною**; ее изображаютъ S_n

Длина отрѣзка касательной, лежащаго между точ. касанія и точкою, въ которой касательн. пересѣкаетъ ось x-овъ, называется **длиною касательной** и обозначаютъ ее черезъ T. Длина же части нормальной, лежащей между точ. касанія P и точ., въ котор. нормаль пересѣкаетъ ось x-овъ, именуется **длиною нормальной**; она обозначается буквою N.

Не трудно дать формулы, выражающія длину этихъ 4-хъ линій. Въ самомъ дѣлѣ, изъ прямоуг. $\Delta\, PTM$ имѣемъ:

$$TM = PM \,\mathrm{cotg}\, \alpha .$$

Но TM есть S_t; слѣдовательно:

$$(10) \quad S_t = y' \frac{dx'}{dy'} ;$$

выраженіе, вполнѣ опредѣляющее S_t, коль скоро извѣстны координаты точки P и извѣстно уравненіе данной кривой.

Изъ $\Delta\, PMN$:

$$MN = PM \,\mathrm{cotg}\, \lambda , \text{ или}$$

$$(11) \quad S_n = + y' \frac{dy'}{dx'} .$$

Изъ $\Delta\, PTM$:

$$\overline{PT}^2 = \overline{TM}^2 + \overline{PM}^2 , \text{ или}$$

$$(12) \quad T = y' \sqrt{1 + \frac{dx'^2}{dy'^2}}$$

Наконецъ, изъ $\Delta\, PMN$:

$$(13) \quad N = y' \sqrt{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}} .$$

Выведенныя формулы и суть искомыя.

17^{го} Марта. Приложимъ выведенныя нами формулы:

1) $y-y_1 = \frac{dy'}{dx'}(x-x')$

2) $y-y' = -\frac{dx'}{dy'}(x-x')$

3) $S_t = y'\frac{dx'}{dy'}$

4) $S_n = y'\frac{dy'}{dx'}$

5) $T = y'\sqrt{1+\frac{dx'^2}{dy'^2}}$

6) $N = y'\sqrt{1+\frac{dy'^2}{dx'^2}}$

къ кривымъ 2^{го} порядка. Возьмемъ уравненіе:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Уравненіе это изображаетъ или эллипсъ или гиперболу, смотря по тому будемъ ли брать знакъ + или —. Изъ написаннаго урав. опредѣлимъ $\frac{dy'}{dx'}$. Для этого помножимъ обѣ части нашего уравненія на произведеніе a^2b^2; получимъ:

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$$

Продифференцируя это выраженіе, найдемъ:

$$2b^2x\,dx \pm 2a^2y\,dy = 0,$$ или

$$b^2 x \pm a^2 y \frac{dy}{dx} = 0,$$

откуда:

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

Означивъ теперь x', y' координаты той точки, для которой ищемъ $\frac{dy'}{dx'}$, получимъ:

$$\frac{dy'}{dx'} = \mp \frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'}$$

Подставивъ это выраженіе въ формулу (1), получимъ

$$y - y' = \mp \frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'}(x - x'), \text{ или}$$

$$a^2 y'(y - y') \pm b^2 x'(x - x') = 0.$$

Вотъ уравненіе касательной проведенной ~~къ~~ эллипсу или гиперболѣ въ точкѣ (x', y').

Сдѣлавъ же подстановленіе въ формулу (2), получимъ:

$$y - y' = \pm \frac{a^2}{b^2}\frac{y'}{x'}(x - x'), \text{ или}$$

$$b^2 x'(y - y') \mp a^2 y'(x - x') = 0,$$

т. е. уравненіе нормальной въ эллипсѣ или гиперболѣ, смотря по тому будемъ брать верхній или нижній знакъ.

Подставимъ теперь полученное выраж. $\frac{dx'}{dy'}$ въ фор. (3); получимъ:

$$S_t = y'\left(\mp \frac{a^2}{b^2}\frac{y'}{x'}\right), \text{ или } \mp \frac{a^2}{b^2}\frac{y'^2}{x'}.$$

Но при помощи уров. данной кривой мы можемъ y выразить посредствомъ x. Въ сам. дѣлѣ:

$$\pm y^2 = \mp \frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}.$$

Слѣдовательно также:

$$y'^2 = \mp \frac{b^2}{a^2}(a^2-x'^2).$$

Подставивъ въ изложенное выраженіе S_t, получ.:

$$S_t = \pm \frac{a^2-x'^2}{x'}.$$

Обратимся теперь къ форм. (4). Подставивъ вмѣсто, имѣемъ:

$$S_n = \mp \frac{b^2}{a^2}\frac{x'}{y'}y' = \mp \frac{b^2}{a^2}x'.$$

Наконецъ изъ форм. (5):

$$T = y'\sqrt{1 \mp \frac{a^4}{b^4}\frac{y'^2}{x'^2}} = y'\sqrt{\frac{b^4x'^2+a^4y'^2}{b^2x'}}.$$

Для длины нормали найдемъ:

$$N = y'\frac{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}}{a^2y'} = \frac{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}}{a^2}.$$

Возьмемъ теперь уравненіе параболы:

$$y^2 = 2px.$$

Дифференцируя получимъ:

$$2y\,dy = 2p\,dx, \text{ или } y\,dy = p\,dx,$$

откуда $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$.

Слѣдовательно
$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{p}{y'} \quad \text{и наоборотъ:}$$
$$\frac{dx'}{dy'} = \frac{y'}{p}.$$

Подставивъ 1ое изъ этихъ выраженій въ формулу касательной, получимъ:
$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x').$$

Вотъ уравненіе касательной для параболы. Оно можетъ быть еще написано такъ:
$$y'(y - y') - p(x - x') = 0.$$

Изъ формулы (2) чрезъ подстановленіе получимъ:
$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x'), \quad p(y - y') + y'(x - x') = 0.$$

Формула (3) даетъ:
$$S_t = \frac{y_1^2}{p}.$$

Но изъ уравненія кривой $y'^2 = 2px'$; слѣдовательно:
$$S_t = \frac{2px'}{p} = 2x'.$$

Формула 4ая составитъ:
$$S_n = y'\frac{p}{y'} = p.$$

Наконецъ, для T:
$$T = y'\sqrt{1 + \frac{y_1^2}{p^2}}, \quad N = y'\sqrt{1 + \frac{p^2}{y_1^2}}$$

Вообще каково бы ни было уравненіе плоской кривой всегда по правиламъ диференцировать можно найти $\frac{dy'}{dx'}$ и $\frac{dx'}{dy'}$, подставивъ которыя въ формулы, выведенныя нами выше, найдемъ уравненія для касательной, нормальной и т.д.

Напримѣръ, пусть дано уравненіе $3^{ей}$ степени слѣдующей формы:

$$y^3 + x^3 - 3axy = 0.$$

Написанное уравненіе изображаетъ нѣкоторую кривую, называемую folium Decarti. Найдемъ для этой кривой уравненіе касательной въ т. (x',y'). Диференцируя наше уравненіе, получаемъ:

$$3y^2dy + 3x^2dx - 3aydx - 3axdy = 0;$$

откуда

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ay_1 - x_1^2}{y_1^2 - ax_1}, \quad \frac{dx_1}{dy_1} = \frac{y_1^2 - ax_1}{ay_1 - x_1^2}$$

$$\frac{dy'}{dx'} = \cancel{\frac{ay' - x'}{y' - ax'}}; \quad \frac{dx'}{dy'} = \cancel{\frac{y' - ax'}{ay' - x'}}.$$

Подставивши эти выраженія въ наши формулы отъ 1 до $6^{ой}$ и сдѣлавъ въ результатѣ возможныя упрощенія и сокращенія, получимъ искомыя выраженія касательной, поднормальной и т.д.

Обратимся теперь къ общему уравненiю касательной, т.е.

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x') \qquad (1)$$

и означимъ через

$$F(x,y) = 0$$

уравненiе данной кривой. Въ такомъ случаѣ уравн. (1) приведется еще къ такому виду:

$$(y - y')\frac{dF(x',y')}{dy'} + (x - x')\frac{dF(x',y')}{dx'} = 0,$$

или еще можно написать:

$$y\frac{dF}{dy'} + x\frac{dF}{dx'} = y'\frac{dF}{dy'} + x'\frac{dF}{dx'}.$$

Разсматривая эту формулу видимъ, что по отношенiю къ перемѣннымъ величинамъ x, y уравненiе касательной всегда 1ой ст., но разсматривая степень этого выраженiя по отношенiю къ начальнымъ x', y', т.е. по отношенiю къ координатамъ точ. касанiя видимъ, что степень эта зависитъ вообще отъ степени уравненiя кривой. Въ самомъ дѣлѣ, множитель $\frac{dF}{dx'}$, въ случаѣ ур. F n-ой ст., можетъ быть $n-1$ ст.; отсюда кажется бы, что уравненiе касательной въ отношенiи $x' y'$ = степени уравн. кривой. Но легко доказать, что степень уравненія касательной по отношенію къ координатамъ точки касанія по крайней мѣрѣ единицею меньше степени уравненія кривой.

Для доказательства этого предложенія достаточно разсмотрѣть только правую часть последней формулы, потому что лѣвая не можетъ быть степени больше $(n-1)^{ой}$. Слѣдовательно нужно доказ[ать], что выраженіе

$$y'\frac{dF}{dy'} + x'\frac{dF}{dx'}$$

по большей мѣрѣ $(n-1)^{го}$ измѣренія.

Отберемъ въ выраженіи $F(x,y)$ члены $n^{аго}$ измѣренія и сумму ихъ обозначимъ черезъ u, отберемъ также члены $n-1$ измѣр. и сумму ихъ изобразимъ черезъ u_1 и т. д. Получимъ:

$$F(x,y) = u + u_1 + u_2 + \dots$$

Составимъ производную по x:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \dots$$

По y:

$$\frac{dF}{dy} = \frac{du}{dy} + \frac{du_1}{dy} + \frac{du_2}{dy} + \dots$$

ставивши теперь въ найденныхъ выраженіяхъ x', y'

вмѣсто x и y и умноживши потомъ первое равенство

на x', а 2ое на y', результаты сложимъ; получимъ:

$$x'\frac{dF_1}{dx'} + y'\frac{dF_1}{dy'} = x'\frac{du}{dx'} + y'\frac{du}{dy'}$$
$$+ x'\frac{du_1}{dx'} + y'\frac{du_1}{dy'} + \cdots$$

, u_1 и т.д. суть однородныя функціи степеней со-

отвѣтственно n, $n-1$ и т.д., то послѣднее равенство

можетъ быть написано такъ:

$$x'\frac{dF_1}{dx'} + y'\frac{dF_1}{dy'} = nu + (n-1)u_1 + (n-2)u_2 + \cdots,$$

или развернувши скобки въ прав. части и соединивъ

члены, имѣющіе общимъ множителемъ n, получимъ:

$$x'\frac{dF_1}{dx'} + y'\frac{dF_1}{dy'} = n(u + u_1 + u_2 + \cdots) - u_1 - 2u_2 - \cdots$$

Но въ послѣднемъ выраженіи членъ $n(u + u_1 + \cdots)$

есть 0, и такимъ образ. у насъ остается

члены не больше $n-1$ измѣреній. Эта

такъ уравненіе касательной не больше $n-1$

$n-1$ измѣреній относительно координатъ точки

касанія. Теорема эта принадлежитъ француз-
скому геометру Понселе.

Теперь мы можемъ рѣшить вопросъ: сколько касательныхъ можно провести ~~въ точкѣ (x', y')~~ изъ данной точки къ кривой $n^{\text{аго}}$ порядка?

Уравненіе касательныхъ извѣстно будетъ:

$$(y - y')\frac{dF}{dy'} + (x - x')\frac{dF}{dx'} = 0.$$

Здѣсь мы можемъ x и y принять за величины извѣстныя и опредѣлить число значеній x' и y'. Если найдемъ одну пару значеній x' и y', — значитъ существуетъ одна касательная; если 2 пары — 2 касательныхъ и т. д. Но только-что написанное уравненіе единицею ниже чѣмъ данное; и если мы его рѣшимъ совмѣстно съ даннымъ $F(x,y)=0$, которое степени n, то результатъ исключенія будетъ $n(n-1)^{\text{ой}}$ ст. Столько же по большей мѣрѣ различныхъ значеній x' и y', а сколько рѣшеній, столько и касательныхъ.

(См. продолженіе въ слѣд. тетради